Universidad Continental

Álgebra Matricial y Geometría Analítica

Guía de Trabajo

VISIÓN

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

MISIÓN

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental
Material publicado con fines de estudio
Código: ASUC01108
2019

PRESENTACIÓN

Al presentar este trabajo "Guías de Aprendizaje", se hace con el sano propósito de contribuir decididamente en el proceso del aprendizaje de la asignatura de Algebra Matricial y Geometría Analítica.

Esta recopilación de ejercicios está destinada para los alumnos del segundo periodo de la Universidad Continental, cada ejercicio está seleccionado, permitiendo preparar y capacitar debidamente al estudiante para seguir sus estudios superiores.

La formación básica de los estudios impartidos en la universidad, en el área de Ciencias y Formación General, son muy importantes y la asignatura de Algebra Matricial y Geometría Analítica, juega un rol fundamental, debido a los avances de los temas que comprende esta materia y que están relacionados a las especialidades que brinda la Universidad.

Es así como estas guías de aprendizaje se han dividido en cuatro unidades y que son:

Unidad I: Matrices y Determinantes.

Unidad II: Sistemas de ecuaciones lineales.

Unidad III: Geometría Analítica.

Unidad IV: Coordenadas polares.

Por último, quisiéramos agradecer a los colegas que han hecho posible esta recopilación de ejercicios.

Los autores

ÍNDICE

UNIDAD I: MATRICES

Resultado del aprendizaje

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar los fundamentos de matrices y determinantes en la resolución de ejercicios y en situaciones problemáticas cotidianas.

SEMANA 1

SESIÓN – 01:
Presentación del curso y Evaluación diagnóstica

SESIÓN – 02:
Matrices: Definición, Notación, Elementos, Dimensión y Clasificación.

Escribir explícitamente las siguientes matrices:

1. $A = \left[a_{ij}\right] \in K^{3*2} \,/\, a_{ij} = i + 2j$

2. $B = \left[b_{ij}\right] \in K^{3*3} \,/\, b_{ij} = 2^{i} - j$

3. $C = \left[c_{ij}\right] \in K^{3*4} \,/\, c_{ij} = \max(i, j)$

4. $D = \left[d_{ij}\right] \in K^{4*3} \,/\, d_{ij} = 2^{i} - (-1)^{j}$

5. Construye la matriz:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{2\times3} \,/ \begin{cases} a_{ij} = i + j; si : i \geq j \\ a_{ij} = ij; si : i < j \end{cases}$$

6. Determina la matriz transpuesta de cada matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -12 & 9 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & -9 & -8 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -5 & -e & 3 \\ \pi & 4 & -7 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -11 & -3 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 8 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Verifica si la matriz: $A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & -3 \\ 2 & -3 & \pi \end{bmatrix}$, es simétrica.

8. Verifica si la matriz $A=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix}$, es anti simétrica.

9. Si la matriz: $A=\begin{bmatrix}1 & -y & 3\\ 2 & -1 & z\\ x & 5 & 6\end{bmatrix}$, es simétrica, calcula "x + y + z"

10. Mostrar el equivalente de: L = U^R + AK + E ; Si la siguiente matriz: $B=\begin{bmatrix}O & E-1 & U+4\\ R & O & O\\ k+1 & O & A+2\end{bmatrix}$, es nula.

11. Sea: $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ una matriz tal que $a_{ij}=\text{máx}\{i;j\}$. Determine la $\text{Traza}(A)$.

12. Halla la traza de la matriz A. Si A es una matriz que verifica:

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$
$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

SESIÓN – 03:
Operaciones con Matrices: Igualdad, Adición, Multiplicación por un escalar y multiplicación de matrices. Propiedades.

1. Calcula: $(x-y)(z-w)$; Si $\begin{bmatrix}2x-z & w-y\\ z-x & w+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

2. Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}x-2y & x\\ 3 & x-y\end{bmatrix}$;$B=\begin{bmatrix}2 & y+4\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. Determina "xy"; si: A = B.

3. Calcula el valor de $x\cdot y\cdot z\cdot w$ si las matrices son iguales:

$$A=\begin{bmatrix}x+y & u+v\\ x-y & u-v\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

4. Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix};B=\begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix};C=\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Si A = B, calcula: 3A + 2C

5. Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad C=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Si}: A=B, \text{halla } A+3C.$

6. Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 2x+1 & 2 & z-1 \\ x+2 & -1 & 2y \\ y-1 & 8 & x-2z \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} 3-2y & 2 & x+y \\ z+3 & -1 & z-2x \\ z-5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$\text{Halla el valor de } xyz, \text{ si } A=B$

7. Dada la matriz: $A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$. Determina $\text{Traza}(B)$, si: $A+B=I$.

8. Dadas las matrices:

$$A=(a_{ij})_{3\times 3} / a_{ij}=(-1)^i+(-1)^j$$
$$B=(b_{ij})_{3\times 3} / b_{ij}=i+j$$

Calcula: $c_{11}+c_{22}+c_{33} / C=A+B$

9. Si: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad C=\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$

$\text{Resolver la ecuacion}: 2(X-2B)=3[A+2(X-2B)]+C$

10. Si: $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y } C = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3(X - 2A) = 5(B - C) + 2(X - A - B)$

b) $3(X - A + B) = 2[X - 2(B + C)] - (X + C)$

11. Si: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ 8 & 4 & -2 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 12 & 5 & -6 \\ -1 & 14 & 10 \end{bmatrix}$

Resolver la siguiente ecuación: $2(X - 2C) = 3X - C - 2(A + 2B - X)$

12. Dadas las matrices:

$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 16 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}$

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ 5X - 2Y = B \quad X, Y \in K^{2*2} \end{cases}$$

Realizar la multiplicación de matrices:

13. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$

14. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} =$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} =$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} =$

17. Calcula AB - BA si: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

18. Dadas las matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si: $E = ABC$, halla la suma de $S = e_{11} + e_{23} + e_{32}$

19. Si: $\begin{bmatrix} 2 & b & 1 & d \\ a & -2 & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$

Halla el valor de la suma S = a + b + c + d

20. Resolver: $x + y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; x - y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; e indicar la matriz $x^T y$.

21. Sea la matriz: $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, además el polinomio $F(x) = x^{34} - 2x^9 + I$. Calcular la matriz F(B).

22. En un libro antiguo se encuentra la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & b & 0\\ 0 & c & 0\end{bmatrix}$ y solo se puede leer la segunda columna $\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 6\end{bmatrix}$ de la operación A^2-A^T. Determina la matriz A si se observa que a, b y c son números naturales.

23. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ y la matriz S del tipo triangular inferior. También $A=S\cdot S^T$. Calcula la traza de la matriz S, solo de los elementos positivos.

24. Dada la ecuación matricial: $\begin{bmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b\\ b+c\\ c+a\end{bmatrix}$. Calcula el valor de $(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)$.

25. Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}m & 1\\ n & 5\end{bmatrix}$. Si A y B son permutables respecto a la multiplicación. Calcular "m + n"

26. Si: $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$. Calcular: $AB-BA$

27. Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

Calcular: $[X]=[A][B]-[A][C]$

28. Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

Calcular:

a) $(A+B)^2$

b) A^2+B^2

29. Dada la matriz: $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Hallar la suma de elementos de A^{40}.

30. Dada la matriz: $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Calcula la matriz M, si:
$M=A+A^2+A^3+A^4+A^5+\ldots+A^n;n\in\mathbb{N}\wedge n\geq 3$

31. Dada las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 7\\ 2 & 6 & -2\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}-9 & 5 & -8\\ 3 & -7 & 1\\ -1 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

a) Evalúa la expresión matricial: A^2+B^2

b) Evalúa la expresión matricial: $3A-BA$

c) Evalúa la expresión matricial: A^2-5B

d) Evalúa la expresión matricial: $A+A^2+B+B^2$

SEMANA 2

SESIÓN – 4:
Aplicación de Matrices: Problemas diversos.

1. **MANUFACTURA.** Una compañía tiene tres fábricas, cada una de las cuales fabrica guitarras acústicas y eléctricas. El número de unidades de guitarras producidas en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 25 \\ 35 & 100 & 70 \end{bmatrix}.$$

   Encuentra los niveles de producción si ésta se aumenta en 20%.

2. **MANUFACTURA.** Una compañía tiene cuatro fábricas, cada una de las cuales produce vehículos de uso general y camionetas pequeñas. El número de unidades del vehículo i producido en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 90 & 70 & 30 \\ 40 & 20 & 60 & 60 \end{bmatrix}.$$

   Encuentra los niveles de producción si ésta se aumenta en 10%.

3. **AGRICULTURA**. Un productor produce dos cosechas, manzanas y duraznos. Cada una de ellas es enviada a tres mercados para su venta. Estos mercados son el del Agricultor, el de la Fruta y el de la Granja. El número de búshels de manzanas enviadas a los tres mercados son 125, 100 y 75, respectivamente. El número de búshels de duraznos enviados a los tres mercados son100, 175 y 125, respectivamente. La utilidad por búshel de manzanas es $3.50 y por búshel de duraznos $6.00.

   a) Escriba una matriz A que represente el número de búshels de cada cosecha i que son enviados a cada mercado j. Diga lo que representa cada elemento a_{ij} de la matriz.

   b) Escriba una matriz B que represente la utilidad por búshel de cada fruta. Diga lo que representa cada elemento b_{ij} de la matriz.

   c) Encuentra el producto BA y diga lo que representa cada elemento de la matriz.

4. **INGRESOS.** Un fabricante de productos electrónicos produce tres modelos de televisores de pantalla de cristal líquido, que son enviados a dos almacenes. El número de unidades del modelo i que son enviadas al almacén j están representados por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 5000 & 4000 \\ 6000 & 10\,000 \\ 8000 & 5000 \end{bmatrix}.$$

Los precios por unidad están representados por la matriz.

$$B = [\$699.95 \quad \$899.95 \quad \$1099.95].$$

Calcula BA e interprete el resultado.

5. **INVENTARIO.** Una compañía vende cinco modelos de computadoras por medio de tres mercados de venta al menudeo.

Los inventarios están representados por :

$$S = \begin{array}{c} \text{Modelo} \\ \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los precios al mayoreo y al menudeo están representados por:

$$T = \begin{array}{c} \text{Precio} \\ \begin{array}{cc} \text{Mayoreo} & \text{Menudeo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$840 & \$1100 \\ \$1200 & \$1350 \\ \$1450 & \$1650 \\ \$2650 & \$3000 \\ \$3050 & \$3200 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcula ST e interprete el resultado.

6. **NECESIDADES DE MANO DE OBRA/SUELDO.** Una compañía que fabrica botes tiene las siguientes necesidades de mano de obra y sueldos.

Mano de obra por bote

$$S = \begin{array}{c} \text{Departamento} \\ \begin{array}{ccc} \text{Corte} & \text{Ensamble} & \text{Empaque} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.0\text{ h} & 0.5\text{ h} & 0.2\text{ h} \\ 1.6\text{ h} & 1.0\text{ h} & 0.2\text{ h} \\ 2.5\text{ h} & 2.0\text{ h} & 1.4\text{ h} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \text{Pequeño} \\ \text{Mediano} \\ \text{Grande} \end{array}\right\} \text{Tamaño de bote} \end{array}$$

Sueldos por hora

$$T = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array}}^{\text{Planta}} \\ \begin{bmatrix} \$15 & \$13 \\ \$12 & \$11 \\ \$11 & \$10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \text{Corte} \\ \text{Ensamble} \\ \text{Empaque} \end{array}\right\} \text{Departamento} \end{array}$$

Calcula ST e interprete el resultado.

7. **UTILIDADES.** En un mercado de lácteos, el número de galones de leche descremada, leche al 2% y leche entera vendido en el fin de semana está representado por A.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Leche descremada} & \text{leche al 2\%} & \text{Leche entera} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & 64 & 52 \\ 60 & 82 & 76 \\ 76 & 96 & 84 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Viernes} \\ \text{Sábado} \\ \text{Domingo} \end{array}$$

Los precios de venta (en dólares por galón) y las utilidades (en dólares por galón) para los tres tipos de leche vendidos por el mercado de lácteos están representados por B.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Precio de venta} & \text{Utilidad} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$3.45 & \$1.20 \\ \$3.65 & \$1.30 \\ \$3.85 & \$1.45 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Leche descremada} \\ \text{Leche al 2\%} \\ \text{Leche entera} \end{array}$$

a) Calcula AB e interprete el resultado.

b) Encuentra la utilidad total del mercado de lácteos por ventas de leche para el fin de semana.

8. **UTILIDADES.** En una tienda de conveniencia (abierta todo el día), el número de galones de gasolina de 87 octanos, 89 octanos y 93 octanos vendido el fin de semana está representado por A.

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 87 & 89 & 93 \end{array}}^{\text{Octanos}} \\ \begin{bmatrix} 580 & 840 & 320 \\ 560 & 420 & 160 \\ 860 & 1020 & 540 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Viernes} \\ \text{Sábado} \\ \text{Domingo} \end{array}$$

Los precios de venta (en dólares por galón) y las utilidades (en dólares por galón) para los tres grados de gasolina vendidos por la tienda de conveniencia están representados por B.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Precio de venta} & \text{Utilidad} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$2.00 & \$0.08 \\ \$2.10 & \$0.09 \\ \$2.20 & \$0.10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 87 \\ 89 \\ 93 \end{array}\Bigg\} \text{Octanos}$$

a) Calcula AB e interprete el resultado.

b) Encuentra la utilidad de la tienda de conveniencia por ventas de gasolina para el fin de semana.

9. **EJERCICIO.** El número de calorías quemadas por personas de diferentes pesos corporales, que realizan diferentes tipos de ejercicios aeróbicos durante un periodo de 20 minutos, se muestra en la matriz A.

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cc} \text{Persona de 120 lb} & \text{Persona de 150 lb} \end{array}}^{\text{Calorías quemadas}} \\ \begin{bmatrix} 109 & 136 \\ 127 & 159 \\ 64 & 79 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Ciclismo} \\ \text{Trotar} \\ \text{Caminar} \end{array}$$

a) Una persona de 120 lb y otra de 150 lb corrieron en bicicleta durante 40 minutos, trotaron 10 minutos y caminaron 60 minutos. Organiza en una matriz B el tiempo que pasaron ejercitándose.

b) Calcula BA e interprete el resultado.

10. **Ventas de comida rápida.** Una pequeña cadena de restaurantes de comida rápida, con sucursales en Santa Mónica, Long Beach y Anaheim vende sólo hamburguesas, perros calientes y malteadas. En cierto día, las ventas se distribuyeron de acuerdo con la siguiente matriz.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Hamburguesas} \\ \text{Perros calientes} \\ \text{Malteadas} \end{array} \begin{array}{c} \text{Número de piezas vendidas} \\ \begin{array}{ccc} \text{Santa Monica} & \text{Long Beach} & \text{Anaheim} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4000 & 1000 & 3500 \\ 400 & 300 & 200 \\ 700 & 500 & 9000 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

El precio de cada pieza está dado en la matriz siguiente.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Hamburguesa} & \textbf{Perro caliente} & \textbf{Malteada} \\ [\$0.90 & \$0.80 & \$1.10] \end{array} = B$$

a) Calcula el producto BA.

b) Interpreta las entradas del matriz producto BA.

11. **Utilidades de fabricación de autos.** Un fabricante de autos especiales tiene plantas en Auburn, Biloxi y Chattanooga. Se producen tres modelos, con producción diaria dada en la siguiente matriz.

Autos producidos cada día

$$\begin{array}{r} \\ \textbf{Auburn} \\ \textbf{Biloxi} \\ \textbf{Chattanooga} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Modelo K} & \textbf{Modelo R} & \textbf{Modelo W} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

12. Debido a aumentos de salarios, las utilidades en febrero son más bajas que las de enero. La utilidad por auto está tabulada por modelo en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{r} \\ \textbf{Modelo K} \\ \textbf{Modelo R} \\ \textbf{Modelo W} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{Enero} & \textbf{Febrero} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$1000 & \$500 \\ \$2000 & \$1200 \\ \$1500 & \$1000 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

a) Calcula AB.

b) Suponiendo que se vendieran todos los autos producidos, ¿cuál fue la utilidad diaria en enero en la planta Biloxi?

c) ¿Cuál fue la utilidad diaria total (de las tres plantas) en febrero?

13. **Productos de tomate enlatados.** Jaeger Foods produce salsa de tomate y pasta de tomate, enlatadas en latas pequeñas, medianas, grandes y gigantes. La matriz A da el tamaño (en onzas) de cada recipiente.

$$\begin{array}{rcccc} & \text{Pequeñas} & \text{Medianas} & \text{Grandes} & \text{Gigantes} \\ \text{Onzas} & [6 & 10 & 14 & 28] \end{array} = A$$

La matriz B tabula la producción de un día de salsa de tomate y pasta de tomate.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Pequeñas} \\ \text{Medianas} \\ \text{Grandes} \\ \text{Gigantes} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Latas de salsa} & \text{Latas de pasta} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2000 & 2500 \\ 3000 & 1500 \\ 2500 & 1000 \\ 1000 & 500 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

a) Calcula el producto de AB.

b) Interpreta las entradas del matriz producto AB.

14. **Ventas de productos agrícolas.** Los tres hijos de un agricultor, Amy, Beth y Chad, trabajan durante los meses de verano en tres puestos de venta situados al lado de una carretera. En un fin de semana todos venden sandías, calabacitas amarillas y tomates. Las matrices A y B tabulan el número de libras de cada producto vendido por cada hermano en sábado y domingo.

$$\text{Sábado}: \begin{array}{r} \\ \text{Amy} \\ \text{Beth} \\ \text{Chad} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Sandías} & \text{Calabacitas} & \text{Tomates} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 50 & 60 \\ 40 & 25 & 30 \\ 60 & 30 & 20 \end{bmatrix} \end{array} = A \qquad \text{Domingo}: \begin{array}{r} \\ \text{Amy} \\ \text{Beth} \\ \text{Chad} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Sandías} & \text{Calabacitas} & \text{Tomates} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 60 & 30 \\ 35 & 20 & 20 \\ 60 & 25 & 30 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

La matriz C da el precio por libra (en dólares) por cada tipo de producto que vendan.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Sandías} \\ \text{Calabacitas} \\ \text{Tomates} \end{array} \begin{array}{c} \text{Precio por libra} \\ \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{bmatrix} \end{array} = C$$

Realiza cada una de las siguientes operaciones e interpreta las entradas en cada resultado.

a) AC   b) BC   c) A B   d) (A+B)C

15. **SERVICIOS DE SALUD.** Los planes de servicios de salud ofrecidos este año por una planta local de manufactura son como sigue. Para personas, el plan completo cuesta \$694.32, el plan estándar de la HMO (Health Management Organization) cuesta \$451.80 y el plan HMO Plus cuesta \$489.48. Para familias, el plan completo cuesta \$1725.36, el plan estándar de la HMO cuesta \$1187.76 y el plan HMO Plus cuesta \$1248.12. La planta espera que el costo de los planes cambie el año siguiente como sigue. Para personas, el costo para el plan completo, estándar

HMO y HMO Plus serán de $683.91, $463.10 y $499.27, respectivamente. Para familias, el costo para el plan completo, HMO estándar y HMO Plus serán de $1699.48, $1217.45 y $1273.08, respectivamente.

a) Organiza la información usando dos matrices A y B, donde A represente el costo del plan de atención de salud para este año y B represente el costo del plan de atención de salud para el año siguiente. Exprese lo que representa cada entrada de cada matriz.

b) Calcula e interprete el resultado.

c) Los empleados reciben cheques de pago mensualmente, de los cuales están deducidos los costos del plan de atención de salud. Use las matrices del inciso (a) para escribir matrices que muestren cuánto se deducirá del cheque de empleados este año y el siguiente.

d) Suponga en cambio que los costos de los planes de atención de salud aumentan 4% el año siguiente. Escriba una matriz que muestre los nuevos pagos mensuales.

16. Un importador de globos los importa de dos colores. Naranja y rojo y los envía en paquetes de 2, 5 y 10 unidades que vende a los siguientes precios:

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Naranja	4	8	12
Rojo	3	5	8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Naranja	Rojo
2 unidades	700.000	50.000
5 unidades	600.000	40.000
10 unidades	500.000	500.000

Se pide:

a) Resuma la información anterior en dos matrices A y B: A será una matriz que recoja las ventas en un año y B será una matriz que recoja los precios.

b) Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz AB y dar su significado.

c) Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz BA y dar su significado.

17. Una compañía tiene 4 fábricas, cada una emplea administradores, supervisores y trabajadores calificados en la forma siguiente:

	Fabrica 1	Fabrica 2	Fabrica 3	Fabrica 4
Administrador	1	2	1	1
Supervisor	4	6	3	4
Trabajadores	80	96	67	75

Si los administradores ganan \$350 a la semana, los supervisores \$275 y los trabajadores \$200, cual es la nómina de cada fábrica.

18. Tres ebanistas: José, Pedro y Arturo trabajan a destajo para una compañía de muebles. Por cada juego de alcoba en caoba les pagan \$500; si es de cedro les pagan \$400 y si es de pino tratado les pagan \$100. A continuación, están las matrices A y B que representas sus producciones en enero y febrero. La matriz X es el matriz pago/unidad.

Producción enero A — Producción febrero B — Salario/Unidad X

$$\begin{array}{l} \text{José} \\ \text{Pedro} \\ \text{Arturo} \end{array} \begin{bmatrix} \text{Caoba} & \text{Cedro} & \text{Pino} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{Caoba} & \text{Cedro} & \text{Pino} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{cc} \text{Caoba} & 500 \\ \text{Cedro} & 400 \\ \text{Pino} & 100 \end{array}$$

Calcule las siguientes matrices y decida que representan.

a) AX b) BX c) $A+B$ d) $(A+B)X$

19. **PIÉNSELO.** Si $a; b$ y c son números reales tales que $c \neq 0$ y $ac = bc$ entonces $a = b$. No obstante, si $A; B$ y C son matrices diferentes de cero tales que $AC = BC$, entonces A no es necesariamente igual a B. Ilustra esto usando las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

SESIÓN – 5:
Inversa de una matriz con operaciones elementales de Gauss Jordan.

Calcula por el método de Gauss la inversa de las siguientes matrices, en caso de que se pueda:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

PRÁCTICA CALIFICADA N° 01

SESIÓN – 06:
Determinante de una Matriz: Definición y Notación - Determinante de una matriz 1x1; 2x2 y 3x3po sarrus

1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Halla:

$|A| =$

$|A + C| =$

$|B| =$

$|2B| =$

2. Halla el determinante de :$A = \begin{bmatrix} a & -2b \\ 3a & -5b \end{bmatrix}$

3. Halla el valor de "**k**" para que : $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$

4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ demostrar que det A = 1

SEMANA 3

SESIÓN – 7:
Determinante de una Matriz: Método de cálculo de determinantes de una matriz 3x3 y 4x4 cofactores.

Calcula la determinante por el método de los cofactores.

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$

2. $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$

3. $\det(C) = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 8 & -13 & 19 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} =$

4. $\det(D) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 10 & 12 & 10 \end{vmatrix} =$

5. $\det(E) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$

6. $\det(F) = \begin{vmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$

7. $\det(G) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} =$

8. Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

9. Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 8 & -2 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

10. Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2534 & 3 & 35 & 532 \\ 1423 & 2 & 24 & 421 \\ 4312 & 1 & 13 & 314 \\ 3551 & 5 & 52 & 253 \end{vmatrix}$$

11. Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

12. Halla el valor de "a":

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a & 0 \\ 2a+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

13. Calcula el valor de:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 12 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

14. Calcula el valor de:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

15. Calcula el valor de:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -33 & 1 \\ 0 & 4 & 11 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 9 & 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

SESIÓN – 8:
Determinante de una Matriz: Determinante de una matriz nxn por operaciones elementales de Gauss – Jordan.

Calcula la determinante de las siguientes matrices por el método de Gauss Jordan.

1. $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \\ 7 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & -12 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

PROPIEDADES DE DETERMINANTE DE UNA MATRIZ:

Las siguientes propiedades de los determinantes frecuentemente son útiles en su evaluación:

1. El intercambio de las correspondientes filas y columnas de un determinante no altera su valor, es decir, $|A| = |A'|$.

2. Si todos los elementos de una fila (o de una columna) de un determinante son iguales a cero, el valor del determinante es nulo.

3. Si todo elemento de una fila (o de una columna) de un determinante se multiplica por una misma constante, el valor del determinante queda multiplicado por dicha constante.

4. Si se intercambian dos filas (o dos columnas) de un determinante, el signo del determinante cambia, pero su valor absoluto no.

5. Si dos filas (o dos columnas) de un determinante son idénticas, el valor del determinante es cero.

6. El valor de un determinante no cambia si cada elemento de cualquier fila (o cualquier columna), o cada elemento multiplicado por la misma constante, se suma o se resta del correspondiente elemento de cualquier otra fila (o columna).

7. El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las dos matrices, es decir,

8. El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de su diagonal.

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$,

(Propiedad 1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = 0-3-24-(0+4-12) = -19$$

$$\left|A'\right| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 0-24-3-(0+4-12) = -19$$

(Propiedad 3)

$$\left|A^*\right| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0-9-72-(0+12-36) = -57 = 3|A|$$

(Nota: La primera columna de A se multiplica por 3 para formar A*)

(Propiedad 4)

$$|B| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4-12+0-(-24+0-3) = 19 = -|A|$$

(Nota: La segunda y la tercera fila de A se intercambian para formar B.)

(Propiedad 6)

$$|C| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4+0+0-(-24+0+9) = 19 = |B|$$

(Nota: La segunda fila de C es igual a la segunda fila de B más dos veces la tercera fila de B.)

(Propiedad 2)

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, entonces $|A| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 0+0+0-(0+0+0) = 0$

(Propiedad 5)

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ entonces $|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = -4-1+6-(6-1-4) = 0$

(Propiedad 7)

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, entonces

$$|AB| = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 11 & -8 & -8 \end{bmatrix} = 0-198-8-(0-120-48) = -38$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = -19$$

$$|B| = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -2+0+0-(-4+0+0) = 2$$

$$|AB| = |A||B| = (-19)(2) = -38$$

(Propiedad 8)

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $|A| = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -6+0+0-(0+0+0) = -6$

15. Calcula: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$

16. Calcula: $\det(A) = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$

17. Calcula: $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{vmatrix}$

18. Calcula: $\det(A)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

19. Calcula: $\det(A)=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$

20. Calcula: $\det(A)=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

21. Calcula: $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

22. Calcula: $\det(A)=\begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix}$

23. Si: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5$. Calcula la determinante de: $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \dfrac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

24. Si: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$. Calcula la determinante de: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

25. Demuestra: $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$

26. Demuestra: $\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

SESIÓN – 9:
Matriz Inversa: Método con Matriz Adjunta de 2x2 y 3x3.

Dadas la matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ **determina :**

1. A^{-1}, si existe.
2. B^{-1}, si existe.
3. $A^{-1} \cdot B =$
4. det(A) + det(B) =

Encuentra la inversa de cada matriz, si existe:

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Para cada una de las matrices siguientes, evalúe el determinante y obtenga la inversa, si existe. Luego verifica el resultado.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

11. $E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

12. $F = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

13. $G = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

14. $H = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

15. $I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

16. $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

17. $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

18. $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

19. $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

20. $N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

21. $D = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -1 & 9 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22. $E = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

24. $R = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -2 & -5 & 8 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \\ 4 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

26. $T = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

27. $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

28. $F = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

SEMANA 4

SESIÓN - 10:
Repaso – 01:

Método con Matriz Adjunta de 2x2 y 3x3. - Para cada una de las matrices siguientes, evalúe el determinante y obtenga la inversa, si existe. Luego verifica el resultado.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7. $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Método de Gauss – Jordan de 2x2 y 3x3. – En cada caso calcula la matriz inversa por Gauss – Jordan.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

11. $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

13. $F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

14. $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

SESIÓN – 11:
Repaso – 02

1. Los números de calorías consumidas por individuos de distintos pesos corporales, realizando diferentes tipos de ejercicios aeróbicos, para un período de 20 minutos, se encuentran en la matriz A.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{cc} \textit{Persona} & \textit{Persona} \\ \textit{que pesa} & \textit{que pesa} \\ 54\,Kg & 68\,Kg \end{array}}^{\textbf{Modelo}} & \\ A = & \begin{bmatrix} 109 & 136 \\ 127 & 159 \\ 64 & 79 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textit{Ciclismo} \\ \textit{Trote} \\ \textit{Caminata} \end{array} \end{array}$$

   a) Una persona que pesa 54 Kg y una persona que pesa 68 Kg practicaron ciclismo durante 40 minutos, trotaron durante 10 minutos y caminaron durante 60 minutos. Organice el tiempo empleado ejercitándose en una matriz B.

   b) Calcula BA e interprete el resultado.

2. Halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Determina la inversa (si existe). Por el método esquemático y por gauss.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Determina la inversa (si existe). Por el método esquemático o gauss.

6. $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -5/6 & 1/3 & 11/6 \\ 0 & 2/3 & 2 \\ 1 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix}$

9. Encuentra el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Calcula el determinante de:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

Desarrolla la determinante por cofactores o Gauss.

11. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

SESIÓN – 12:
PRUEBA DE DESARROLLO N° 01

SEGUNDA UNIDAD: SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Resultado del aprendizaje

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar los fundamentos de sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de ejercicios y en situaciones problemáticas cotidianas.

SEMANA 5

SESIÓN – 13:
Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL 2x2) - Definición, Notación, Solución y Clasificación – Solución de sistemas de Ecuaciones Lineales: Métodos de solución de SEL 2x2, Igualación, Sustitución, Reducción, Crámer y Gráfico.

En cada caso resuelva por el método que sea apropiado al sistema de ecuaciones:

1. $\begin{cases} y = 6x \\ x = \dfrac{2y-5}{7} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y} = 5 \\ 2\cdot(x-3y)+x = 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - y = 7 \\ 3x+2y = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5} = 7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$

Resuelva los sistemas de ecuaciones que siguen por el método que consideras conveniente:

5. $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 4x+2y = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y-1}{2} = 1 \\ 7x-4(x+y) = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y = 5 \\ 5(x-y)-3x+y = 10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5} = 7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-3y = 2 \\ 2x+\dfrac{y}{3} = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3} = 3 \\ \dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{x-2y}{4} = 3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{3} - y = -3 \\ 3(x+5-y)+3x = 12 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2}+\dfrac{y-3}{3} = \dfrac{11}{6} \\ -\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y-1}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x+5 = 2y+1 \\ x-9 = 1-5y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 2y+1 \\ \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{2y-3}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

SESIÓN – 14:
Solución de sistema de Ecuaciones Lineales - Métodos de solución de SEL 3x3 por Cramer y con Operaciones Elementales de Gauss – Jordan

1. $\left[\begin{array}{l} 4x - y + 5z = -6 \\ 3x + 3y - 4z = 30 \\ 6x + 2y - 3z = 33 \end{array}\right.$

2. $\left[\begin{array}{l} 7x + 3y - 4z = -35 \\ 3x - 2y + 5z = 38 \\ x + y - 6z = -27 \end{array}\right.$

3. $\left[\begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 12 \\ 9x - y + 4z = 37 \\ 10x + 5y + 3z = 21 \end{array}\right.$

4. $\left[\begin{array}{l} 9x + 4y - 10Z = 6 \\ 6x - 8y + 5z = -1 \\ 12x + 12y - 15z = 10 \end{array}\right.$

5. $\left[\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ z + x - y = 3 \\ z - x + y = 7 \end{array}\right.$

6. $\left[\begin{array}{l} 3y - z + 5x = -11 \\ 10x - y + z = 10 \\ 2y + 15x - z = -7 \end{array}\right.$

7. $\left[\begin{array}{l} 2x + 4y + 3z = 3 \\ 10x - 8y - 9z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 2 \end{array}\right.$

8. $\left[\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = -4 \end{array}\right.$

9. $\left[\begin{array}{l} 5x - 3z = 2 \\ 2z - y = -5 \\ x + 2y - 4z = 8 \end{array}\right.$

10. $\left[\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x - y - 3z = -10 \end{array}\right.$

11. $\left\{\begin{array}{l} x - 3y + 5z + 3t = 0 \\ 3x + 4y + 2z + t = 0 \\ 2x + 4z + t = 0 \\ -y + z + 2t = 0 \end{array}\right.$

12. $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ 5x + y + z = 0 \end{array}\right.$

13. $\left\{\begin{array}{l} 2x - z + 2u + 3v = -1 \\ 4x + z + u - v = -2 \\ x + 6y + 3z + u + v = 3 \\ -2x - 2z + u + 4v = 1 \end{array}\right.$

14. $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 2z + 4u = 1 \\ 3x - y + 2u = -1 \\ -x - z - 2u = -1 \\ 2x + 2y + 4z + 8u = 6 \\ 5x + 5z + 10u = 5 \end{array}\right.$

15. $\left\{\begin{array}{l} -x + 2y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z + u = 0 \\ 3x - z + 3u = -1 \\ 2x + 2y + z + 4u = 0 \\ 2x + 2y - 2z + 3u = -1 \end{array}\right.$

SESIÓN – 15:

Solución de Sistema de Ecuaciones Lineales: Métodos de solución de SEL nxn

Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de Gauss Jordan:

1. $\begin{cases} -4x - 7y = 47 \\ -x + 6y = -27 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x & & -3z & = -2 \\ 3x & +y & -2z & = 5 \\ 2x & +2y & +z & = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x & +y & -z & = -14 \\ 2x & -y & +z & = 21 \\ 3x & +2y & +z & = 19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x & +2y & -z & = 2 \\ x & -3y & +z & = -28 \\ -x & +y & & = 14 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x & \mp 2y & +z & = 3 \\ 2x & +5y & -z & = 4 \\ 3x & -2y & -z & = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x & +2y & +4z & = 1 \\ 5x & -y & -3z & = -7 \\ 4x & +3y & +z & = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x & -2y & +2z & = 0 \\ -x & +y & -z & = 1 \\ x & +y & & = -4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x & -2y & +2z & = 0 \\ 5x & +3y & +4z & = 2 \\ 2x & +y & & = -4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = b \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + z - w = 4 \\ x + y - z + w = -4 \\ x - y + z + w = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - y - w = 3 \\ 2y + z + 4w = -2 \\ 2x - w = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \boldsymbol{x + y - z = 0} \\ \boldsymbol{3x + y - z = 2} \\ \boldsymbol{4x - 2y + z = 3} \end{cases}$

13. $\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 34/15} \\ \boldsymbol{x - y - z = -16/15} \\ \boldsymbol{5x + 3y + z = 8} \end{cases}$

14. $\left[\begin{array}{l} 2x - y + z - 4w = -32 \\ 7x + 2y + 9z - w = 14 \\ 3x - y + z + w = 11 \\ x + y - 4z - 2w = -4 \end{array}\right.$

15. $\left[\begin{array}{l} 2x + y - 5z + w = 8 \\ x - 3y \quad - 6w = 9 \\ 2y - z + 2w = -5 \\ x + 4y - 7z + 6w = 0 \end{array}\right.$

SEMANA 6

SESIÓN – 16:
Aplicaciones de Sistema de Ecuaciones Lineales 2x2 - Problemas diversos.

1. La otra tarde vi en un parking 39 vehículos, entre coches y motos, a los que les conté un total de 126 ruedas. ¿Cuántos vehículos de cada clase había en el parking?

2. En el aula de 3° A hay doble número de alumnos que en el aula de 3° C. Además, se sabe que, si se pasan 8 alumnos de 3° A a 3° C, ambas aulas tendrán el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada una de estas aulas?

3. Un fabricante de bombillas gana 0,60 € por cada bombilla que sale de fábrica, pero pierde 0,80 € por cada una que sale defectuosa. Un determinado día en el que fabricó 2.100 bombillas obtuvo un beneficio de 966 €. ¿Cuántas bombillas buenas fabricó ese día?

4. En un test de elección múltiple, se puntúa 4 por cada respuesta correcta y se resta un punto por una equivocada. Un estudiante responde a 17 cuestiones y obtiene 43 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

5. Una tienda de discos vende 84 discos a dos precios distintos: unos 18 € y otros a 14,4 €, obteniendo de la venta 1.242 €, ¿Cuántos discos vendió de cada clase?

6. Hace 5 años, la edad de Sonia era triple que la de Roberto, y dentro de 10 años será doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

7. Calcula las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 25 m más larga que ancha y que el perímetro mide 210 metros.

8. Un orfebre recibe el encargo de confeccionar un trofeo, en oro y en plata, para un campeonato deportivo. Una vez realizado, resulta de un peso de 1.300 gramos, habiendo costado 2,840 €. ¿Qué cantidad ha utilizado de cada metal precioso, si el oro sale 8 €/gramo y la plata por 1,7 €/gramo?

9. La edad de un padre es el triple de la de su hija más 2 años y hace 5 años la cuadriplicaba. ¿Qué edades tienen padre e hija?

10. La suma de edades de una madre y su hija es 42 años. Cuando la hija tenga la edad de la madre esa suma será de 90. ¿Cuántos años tienen cada una en la actualidad?

11. Un individuo posee 20 monedas, unas son de 0,50 € y otras de 1 €. ¿Puede tener un total de 16 €?

12. Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?

13. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos es 12° mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?

14. El perímetro de un triángulo isósceles es de 19 cm. La longitud de cada uno de sus lados iguales excede en 2 cm al doble de la longitud del lado desigual. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

15. Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos las dos iguales cantidades". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

16. Encuentra dos números cuya suma sea igual a 30, y el doble del primero, más el segundo sea igual al doble de este último.

17. La edad de Carla es el doble que la edad de Macarena. Hace diez años la suma de las edades era igual a la edad que tiene hoy Carla. ¿Cuál es la edad de cada una en la actualidad?

18. Si se divide un ángulo recto en dos ángulos agudos, de modo que uno sea el doble del otro más 3', ¿cuál es la medida de cada uno?

19. Un padre reparte $10.000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2.000 más que al menor. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

20. Encuentra dos números tales que si a cada uno le agregamos siete unidades, los resultados están en la razón 3 : 2, pero si les restamos cinco unidades, la razón es 5 : 2.

21. El perímetro de un rectángulo es 30 cm. El doble de la base tiene 6 cm más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

22. Dos estantes contienen en total 40 libros. Al traspasar 5 libros de un estante a otro, resulta que uno queda con el triple del otro. ¿Cuántos libros había originalmente en cada estante?

23. Para pagar una cuenta de $3.900, un extranjero entrega 9 libras esterlinas y 15 dólares, recibiendo $75 de vuelto. Otro extranjero paga su cuenta de $4.330, con 15 libras esterlinas y 9 dólares, recibiendo $25 de vuelto. ¿A qué cambio, en pesos, se han cotizado las libras esterlinas y los dólares?

24. Encuentra las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.

25. La suma de dos números es 45. Si al primero se le suma 5 y al segundo se le resta 5, se obtienen dos números tales que el primero es el doble que el segundo. ¿Cuáles son los números?

26. El valor de una fracción es 1. Si se disminuye el numerador en 3 unidades y se aumenta el denominador en 5 unidades, el nuevo valor es igual a 3. ¿Cuál es la fracción?

27. Encuentra dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia 6.

28. Una persona tiene $8.000 en 200 monedas de $10 y de $50. ¿Cuántas monedas de $10 y de $50 tiene?

29. Divide el número 19 en dos partes tales que 2/3 de la menor sea igual a 3/5 de la mayor.

30. Encuentra una fracción que, si se disminuye su numerador en 4 unidades y se aumenta su denominador en 5, es equivalente a 1. Pero si se disminuye sólo el denominador en 7, será equivalente.

31. La suma de dos números es 13, si el mayor se divide por el menor se obtiene por cociente 2 y por resto 1. Encuentra ambos números.

32. La edad de un hijo es 1/4 de la edad de su padre. En 7 años más la edad del hijo será 4/9 la del padre. Encuentra las edades actuales de ambos.

33. Un niño tiene 2 años menos que el cuádruplo de la edad de su perro. Si la diferencia entre sus edades es 4 años. Encuentra la edad de ambos.

34. Si el numerador de una fracción se aumenta en 3 y su denominador se disminuye en 1, se obtiene 5/2, pero si solamente se aumenta su numerador en 2, ésta equivale a 4/3. Determina la fracción.

35. Encuentra dos números enteros consecutivos, sabiendo que la cuarta parte y la quinta parte del primero y la suma de la tercera parte y la séptima parte del segundo son también números consecutivos

SESIÓN – 17:
Aplicaciones de Sistema de Ecuaciones Lineales 3x3: - Problemas diversos.

1. En unos grandes almacenes un señor compra 2 trajes de chaqueta, 1 cazadora y 2 pantalones. Paga 530 euros. En la caja contigua, otra persona está pagando 840 euros por 3 trajes de chaqueta, 3 cazadoras y unos pantalones. Al día siguiente hay una oferta en la que se hace un 10 % de descuento, y un chico ha pagado 225 euros por un traje de chaqueta y una cazadora. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

2. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos del estudiante, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

    a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.

b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

3. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

4. En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

   a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

   b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

5. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

6. Hallar un número de tres cifras sabiendo que suman 9; que si del número dado se resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198; y que además, la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos.

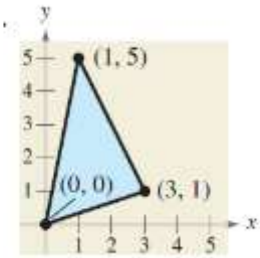
7. Una nación importa 21000 vehículos mensuales de las marcas X, Y, Z, al precio de 1,2; 1,5; y 2 millones de pesetas. Si el total de la importación asciende a 33200 millones, y de la marca X se importa el 40% de la suma de las otras dos marcas, ¿cuántos vehículos de cada marca entran en ese país?

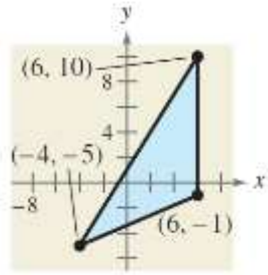
8. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay? Ana quiere comprar material para el curso. En una papelería compra 3 bolígrafos, 2 cuadernos y 4 lápices, pagando un total de 290 pesetas; en otra papelería compra 4 cuadernos y 6 lápices y tiene que pagar 380 pesetas. Y en una tercera gastó 390 pesetas en comprar 5 bolígrafos y 3 cuadernos. Sabiendo que en todas las papelerías tienen los mismos precios, ¿cuánto vale cada lápiz, cada cuaderno y cada bolígrafo?

9. Los 90 alumnos de 2º de bachiller de un instituto están divididos en tres grupos A, B y C. Calcular el número de alumnos de cada grupo sabiendo que si se pasan 7 alumnos del grupo B al grupo A ambos grupos tendrían el mismo número de alumnos; si se pasan 4 alumnos del grupo C al grupo A, en éste habría la mitad de alumnos que en el grupo C.

10. Un almacén distribuye cierto producto que fabrican tres marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 gr y su precio es de 100 pts; la marca B lo envasa en cajas de 500 gr a un precio de 180 pts y la marca C lo hace en cajas de 1 Kg a un precio de 330 pts. El almacén vende a un cliente 2,5 Kg de este producto por un importe de 890 pts. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, se pide calcular cuántos envases de cada tipo se han comprado.

11. Usa determinantes para hallar el área de los triángulos.

a) 

b) 

c) Coordenadas: $(-2;4);\ (2;3);\ (-1;5)$

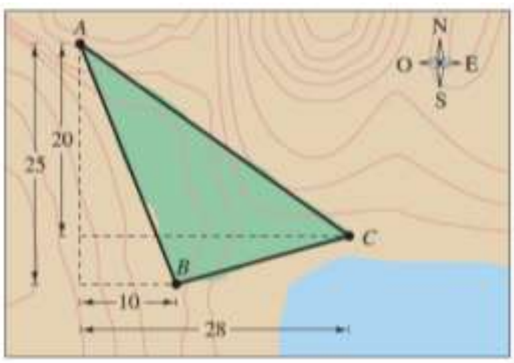
d) Coordenadas: $(-4;2);\ (0;7/2);\ (3;-1/2)$

12. Determina un valor de "y" tal que el triángulo con los vértices dados tenga un área de 4 unidades cuadradas.

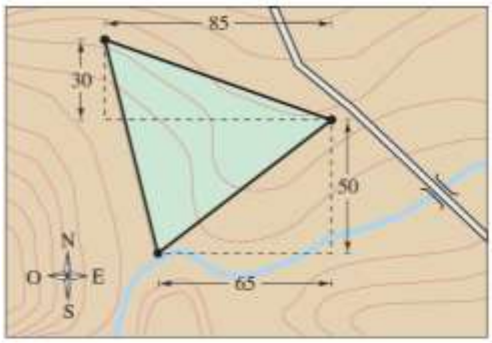
a) $(-5;1);\ (0;2);\ (-2;\ y)$

b) $(-4;2);\ (-3;5);\ (-1;y)$

13. **ÁREA DE UNA REGIÓN.** Una región grande de bosque ha sido infectada por polillas "lagartas". La región es aproximadamente triangular, como se ve en la figura de la página siguiente. Del vértice A, situado más al Norte de la región, las distancias a los otros vértices son 25 millas al Sur y 10 millas al Este (para el vértice B), y 20 millas al Sur y 28 millas al Este (para el vértice C). Use una calculadora de gráficas para aproximar el número de millas cuadradas en esta región.



14. **ÁREA DE UNA REGIÓN.** Usted es propietario de un terreno triangular, como se muestra en la figura. Para estimar el número de pies cuadrados del terreno, usted empieza en un vértice, camina 65 pies al Este y 50 pies al Norte al segundo vértice y luego camina 85 pies al Oeste y 30 pies al Norte para el tercer vértice. Use una calculadora de gráficas para determinar cuántos pies cuadrados hay en el terreno.



PRÁCTICA CALIFICADA N° 02

SESIÓN – 18:
Geometría Analítica - El Punto – Operaciones Básicas: Punto Medio, Distancia entre dos Puntos, Baricentro y Área de Polígono.

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO QUE UNE DOS PUNTOS:

Determine el punto medio:

1. $P_1 = (1, 2)$ y $P_2 = (5, -4)$.

2. A = (4; 7) y B = (-7; 9).

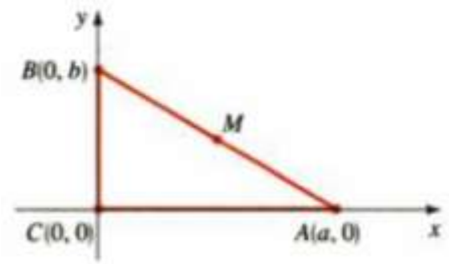
3. M = (7/8, –1/2) y N =(–3/4, 5/6).

4. $P_1 = (1/3, -1/2)$ y $P_2 = (-1/6, 0)$.

Resuelve:

5. Dados los puntos P(-2, 7) y Q(10, -1). Sea M el punto medio de PQ y N el punto medio de PM. Encuentra las coordenadas de N.

6. El punto “M” de la figura es el punto medio del segmento de recta “AB”. Demuestre que “M” es equidistante de los vértices del triángulo ABC.



7. La corporación “Fenix” tuvo ingresos anuales de 20 600 millones de dólares en 2002 y 24 700 millones de dólares en 2004. Sin saber otra información adicional. ¿En cuánto estima que fue el ingreso en 2003?

BARICENTRO: Determine las coordenadas del baricentro que corresponda a los siguientes puntos:

8. $P_1 = (4, 2)$; $P_2 = (6; -4)$ y $P_3 = (-1; 5)$.

9. A = (3; 4); B = (5; 8) y C = (7; -3).

10. M = (4/3, 5/2); N = (-3/5; –5/4) y P =(3; 1/5).

11. R = (1/2; 4/11); S = (9/2; -7/2) y T = (-1/7; 3/5).

12. Dado el triángulo de vértices A(2,5), B(3,1) y C(2,-1). Calcula las coordenadas:

    a) Del baricentro G del triángulo.

    b) De los puntos medios M, N y P de los lados del triángulo ABC. Del baricentro G' del triángulo MNP.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO MEDIANTE UNA RAZÓN:

Encuentre las coordenadas del punto P(x, y) que divide al segmento P_1P_2 en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ dada en cada caso.

13. P_1 = (1, 3), P_2 = (7, 9), r = 1/2.

14. P_1 = (5, –4), P_2 = (–1/3, 2), r = 3/2.

15. P_1 = (5, –5); P_2 = (2, –3); r = –4/3.

16. Encuentra los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos A(–2, 5) y B(3, –6).

17. Encuentra las coordenadas del punto que divide al segmento de recta A(4, –3) y B(1,4) en la razón de 2.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: Determine la distancia entre los siguientes puntos:

18. A = (6; -7) y B = (2; -4)

19. M = (7; 8) y N = (-5; 3)

20. Halla el valor de "x" si la distancia entre A(x, 2) y B(–1, –2) es 5.

21. Sean los puntos A (2; 3), B (4; 1) y C (–1; 1). Halla la longitud de la mediana correspondiente al vértice C del triángulo ABC.

22. Halla las coordenadas del punto situado sobre el eje X equidistante de los puntos A(-2, 5) y B(1, 4).

23. Encuentre las coordenadas del punto que equidista de los puntos A(3, 3), B(6, 2) y C(8, –2).

24. Determine el punto de abscisa 3 que diste 10 unidades del punto (–3, 6).

25. Dos puntos distan 5 unidades del eje de coordenadas Y. Sus distancias al punto (–3, –2) son iguales a 10 unidades. ¿Cuáles son las coordenadas de esos puntos?

26. Dos vértices de un triángulo equilátero son los puntos A(–4, –3) y B(4, 3). Encuentre las coordenadas del vértice C que se ubica en el II Cuadrante del sistema cartesiano.

27. Demuestre que los puntos (2, 2), (0, –2) y (4, 0) son los vértices de un triángulo isósceles.

28. Demostrar (mediante longitudes) que los vértices proporcionados en cada inciso son de un triángulo isósceles. Calcula el valor de sus ángulos interiores.

   A. A (2,4); B (5,1) y C (6,5)

   B. A (3,2); B (5,-4) y C (1,-2)

   C. A (1,5); B (5,-1) y C (9,6)

29. Los puntos (1, 0), (6, 1) y (4, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelógramo. Determine las coordenadas del cuarto vértice.

30. Determina al tipo de triángulo ABC que corresponde si sus vértices son los puntos A, B y C:

   a) A(–2, 2), B(6, 6) y C(2, –2)

   b) A(–2, 8), B(–6, 1) y C(0, 4)

PERÍMETRO: Halla el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

31. A = (–4, –4), B = (6, –6) y C = (0, 3)

32. A = (–2,5), B = (4,3) y C = (7, –2)

33. A = (3,5), B = (–4,0) y C = (-1, –2)

ÁREA DE UN POLÍGONO: Calcule el área del triángulo cuyos vértices son:

34. A = (2, 3), B = (8, 7) y C =(8, 3).

35. A = (5, 4), B = (–3, 6) y C = (–3, 4).

36. Halla el área del triángulo o polígono cuyos vértices son:

    a) A(2, –4), B(3, 6) y C(–1, –7)

    b) A(3, –1), B(5, 6), C(–2, –8) y D(–4,5)

    c) A(5,1), B(3,6), C(1, –4) y D(–2, –3)

37. Halla el valor de "x" si la distancia entre A(x, 2) y B(–1, –2) es 5.

38. Dados los puntos P(-2, 7) y Q(10, -1). Sea M el punto medio de PQ y N el punto medio de PM. Encuentra las coordenadas de N.

39. Encuentra los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos A(–2, 5) y B(3, –6).

40. Encuentra las coordenadas del punto que divide al segmento de recta A(4, –3) y B(1,4) en la razón de 2.

41. Sean los puntos A (2; 3), B (4; 1) y C (–1; 1). Halla la longitud de la mediana correspondiente al vértice C del triángulo ABC.

42. Halla las coordenadas del punto situado sobre el eje X equidistante de los puntos A(-2, 5) y B(1, 4).

43. Dado el triángulo de vértices A = (2,5), B = (3,1) y C = (2,-1). Calcula las coordenadas:

    a) Del baricentro G del triángulo.

    b) De los puntos medios M, N y P de los lados del triángulo ABC.

    c) Del baricentro G' del triángulo MNP.

SEMANA 7

SESIÓN – 19:
REPASO – 03 - Repaso de Matrices – Determinantes – Sistema de Ecuaciones – Punto: Problemas diversos.

OPERACIONES CON MATRICES

Dada las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones, y encontrar la Matriz X:

1. 3X + 5 I – 2B = C – AD
2. -2A – 3(CD) = 2B – 4x + 2 I
3. BC + 3(AI) = 2X – D^t
4. 2(AC) – 3B – 2X = 3I + 2D
5. 2X – 2C + 3B = 7A – 6D

DETERMINANTES

Dada las matrices: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ B $= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Realizar las siguientes operaciones, y encontrar la determinante de la Matriz X por el método de Sarrus:

6. 2AB + 3C = 2X
7. X = 2A – 3B + BD

Realizar las siguientes operaciones, y encontrar la determinante de la Matriz X por el método de cramer:

8. $2BD + 3A = 2X$

9. $X = 2A^t - 3B + DC$

Realizar las siguientes operaciones, y encontrar la determinante de la Matriz X por el método de los cofactores:

10. $2A - 3X = 2BD - C$

11. $2C^t - 3B = 2AD - X$

Realizar las siguientes operaciones, y encontrar la determinante de la Matriz X por el método de Gauss

12. $-3DA - B = 4A + 2X$

13. $2D - 3C = 2DA - 3X$

MATRIZ INVERSA

Encontrar la matriz inversa, por el método esquemático:

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

15. $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

16. $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

17. $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Encontrar la matriz inversa, por el método de Gauss:

18. $E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

19. $D = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

SISTEMA DE ECUACIONES

Plantear el sistema de ecuaciones y resolver adecuadamente los siguientes enunciados utilizando el método de Gauss:

20. Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime. Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?

21. Tenemos dos números cuya suma es 0 y si a uno de ellos le sumamos 123 obtenemos el doble del otro. ¿Qué números son?

22. La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 255 km. Un coche sale de A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Al mismo tiempo, sale otro coche de B hacia A a una velocidad de 80 km/h. Suponiendo su velocidad constante, calcula el tiempo que tardan en encontrarse, y la distancia que ha recorrido cada uno hasta el momento del encuentro.

23. Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres formatos distintos A, B y C. Las cajas de tipo A tienen un peso de 250 gramos y un precio de 0.6 €, las de tipo B pesan 500 gramos y su precio es de 1.08 €, mientras que las C pesan 1 kilogramo y cuestan 1.98 €. A una farmacia se le ha suministrado un lote de 5 cajas, con un peso de 2.5 kilogramos, por un importe de 5.35 €. ¿Cuántas cajas de cada tipo ha comprado la farmacia?

24. Tres personas A, B y C, le van a hacer un regalo a un amigo común. El regalo les cuesta 75.73€. Como no todos disponen del mismo dinero, deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 0.12 € que paga B, C paga 0.18 €. Plantea un sistema que permita determinar cuánto paga cada persona y resuelve el problema.

25. En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 gr, 500 gr y 1kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr) que de tamaño mediano (500 gr). Sabiendo que el precio del kg de bombones es de 4 000 PTAS y que el importe total de los bombones envasados asciende a 125 000 PTAS: (a) Plantear un sistema para determinar cuántas cajas se han envasado de cada tipo. (b) Resolver el problema.

PUNTO

26. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 17 es el punto A =(1, -11); si la ordenada del otro extremo es 4, halla su abscisa.

27. Si la longitud de un segmento es de $\sqrt{205}/2$ y las coordenadas de uno de sus extremos son A (1,-3/2), encuentra la abscisa del otro extremo sabiendo que su ordenada es 5.

28. Hallar las coordenadas del punto B si son conocidos los puntos A = (-1, 3) y puntos C = (1; 5) del punto medio del segmento AB.

29. Los puntos medios de los lados de un triángulo son (2 , 5); (4 , 2) y (1 , 1). Grafique y determine las coordenadas de los tres vértices del triángulo.

30. Dado los vértices de un triángulo A = (-1 , 4) ; B = (5 , 6) y C = (3 , -2); determine:

    a. Su centro de gravedad.
    b. El área del triángulo.
    c. El perímetro del triángulo
    d. Realizar la gráfica respectiva

SESIÓN – 20:
Prueba de Desarrollo N° 02

SESIÓN – 21:
Resolución de la prueba de desarrollo N° 02

SEMANA 8

SESIÓN – 22:
Evaluación Parcial

SESIÓN – 23:
Resolución de la Evaluación Final

SESIÓN – 24:
La Recta: Pendiente, Inclinación de una Recta, Ecuaciones de Rectas, Rectas Paralelas y Perpendiculares

PENDIENTE E INCLINACIÓN DE UNA RECTA:

1. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que pasa por:

PUNTOS	PENDIENTE (m)	ÁNGULO DE INCLINACIÓN (θ)
A=(3,–1) y B=(6,2)		
P=(0, –3) y Q=(–3, 4)		
D=(2, –3) y E=(2, 4)		
A=(4, 5) y B=(-8, –6)		
C=(–8, 5) y D=(4, –3)		
E=(5, 4) y F=(-8,4)		
G=(5, 6) y H=(5, 20)		
M=(1/6; 4/3) y N=(2/5; -1/3)		
R=(-5/11; -3/4) y S=(5/13; -11/3)		
T=(12/11; -14/3) y W=(-3/17; -15/13)		

ECUACIÓN DE RECTA:

Determina la ecuación general de la recta en cada caso:

2. Pasa por el punto A =(-7; 6) y tiene una pendiente de $\mathbf{m = \frac{3}{5}}$.

3. Pasa por el punto B=(-2; 7) y tiene una pendiente de $\mathbf{m = -\frac{2}{3}}$.

4. Pasa por el punto C=(-4; -1) y tiene una pendiente de $\mathbf{m = -\frac{4}{5}}$.

Determina la ecuación general de la recta en cada caso:

5. Pasa por los puntos: C = (2; –3) y D = (4; 2).

6. Pasa por los puntos: A = (3; 9) y B = (-3; -9).

7. Determina la ecuación de la recta en su forma general que pasa por los puntos C = (2, –3) y D = (4,2).

8. Pasa por los puntos; $\mathbf{A}\left(\frac{2}{3};7\right)$ y $\mathbf{B}\left(\frac{7}{3};\frac{9}{2}\right)$.

9. Pasa por los puntos: $\mathbf{C}\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{7}\right)$ y $\mathbf{D}\left(-\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$.

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES:

10. Determina la ecuación general de la recta, que pasa por A=(1, 5), y es paralela a la recta 2x + y + 2 = 0.

11. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto (2, −3) y es paralela a la recta que une los puntos (4, 1) y (−2, 2).

12. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto (–2,3) y es perpendicular a la recta 2x – 3y + 6 = 0.

13. Determina la ecuación general de la recta perpendicular a 8x − y − 1 = 0 y pasa por el punto P = (−3, 2).

14. Determina la ecuación general de la recta que pasa por (–2,3) y es perpendicular a la recta 2x – 3y + 6 = 0.

15. Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas r: x + y – 1 = 0 y s: x – 2y – 5 = 0. Uno de sus vértices es el punto A = (1, –1). Halla los otros vértices.

16. Aplicando la condición de perpendicularidad, determina el vértice recto del triángulo es rectángulo A = (3, 2), B = (5, –4), C = (1, –2).

ECUACIÓN DE LA ALTURA, MEDIANA Y MEDIATRIZ:

17. Determina la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A= (2, 5) y B = (4, −7).

18. Una recta de ecuación x + 2y − 9 = 0 es mediatriz de un segmento AB cuyo extremo A tiene por coordenadas (2, 1). Determina las coordenadas del otro extremo.

19. Dado el triángulo A(−1, −1), B(7, 5), C(2, 7); calcular las ecuaciones de las alturas y determinar el ortocentro del triángulo.

20. Determina el punto de intersección de las rectas de ecuaciones: **2 x - y - 1 = 0** y **x - y + 1 = 0.**

21. Calcula el área del triángulo que determinan la recta x – 2y + 8 = 0 y los ejes coordenados.

22. Sea el triángulo de vértices A =(4, 2), B = (13, 5) y C =(6, 6). Halla la ecuación de la altura que pasa por el vértice C.

23. Halla la ecuación general de la recta de pendiente m = 1/2, que forma con los ejes de coordenadas un triángulo de 16 unidades de área.

24. Dada la ecuación general de la recta, $\mathbf{5x - 7y + 12 = 0}$; determine la pendiente, ordenada al origen, abscisa al origen y su gráfica.

25. Dada la ecuación general de la recta, $\mathbf{3x + 5y - 13 = 0}$; determine la pendiente, ordenada al origen, abscisa al origen y su gráfica.

OTROS DE ECUACIÓN DE RECTA:

26. Pasa por los puntos A(2; 3) y B(-3; -2).

27. Pasa por el punto A(1; 2) y es paralela a la bisectriz de primer cuadrante.

28. Pasa por el punto P(5; 3) y lleva una dirección de 60o.

29. Pasa por el punto de intersección de las rectas r: y = x y s: y = -3x + 2; lleva una dirección de 45o con el eje de abscisas.

TERCERA UNIDAD: GEOMETRIA ANALITICA

Resultado del aprendizaje

.

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar los fundamentos de la geometría analítica en la resolución de ejercicios y en situaciones problemáticas cotidianas.

SEMANA N° 09

SESIÓN – 25:

Ángulo entre dos rectas, distancia de un punto a la recta, mediatriz, intersección entre dos rectas.

Determina el ángulo agudo que forman los siguientes pares de rectas:

1. r: $2x + 3y - 4 = 0$, s: $3x + y + 5 = 0$

2. r: $x - y - 3 = 0$, s: $x - 3y - 5 = 0$

3. $r: y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$, s: $y = x + 2$

4. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°, sabiendo que la recta final tiene una pendiente m = 3. Calcula la pendiente de la recta inicial.

5. Determina los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos. A = (4, 2), B = (6, –1), C = (0, 1) .

6. En el triángulo de vértices A = (2, –3), B = (–1, 4) y C = (0, 5) calcula:

   a. La altura correspondiente al vértice C.

   b. La ecuación de la mediatriz del lado AB.

   c. Su área.

7. Los puntos A = (–2, –2) y B = (1, 4) son vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice que está situado sobre la recta $x + y - 1 = 0$.

8. Calcula la distancia del punto (5, 2) a la recta $2x - 4y + 3 = 0$.

9. Calcula la distancia entre el punto P = (4, –1) y la recta que pasa por el punto A = (2, 3) con pendiente de –3/4.

10. Calcula la distancia entre el punto A = (–2, 1) y la recta que pasa por los puntos B = (5, 4) y C = (2, 3).

11. Una recta es paralela a la que tiene por ecuación r ≡ 5x + 8y − 12 = 0, y dista 6 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación general?

12. Una recta es perpendicular a la que tiene por ecuación 5x − 7y + 12 = 0 y dista 4 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación general?

Determina la distancia entre las rectas paralelas:

13. $\mathbf{9x+16y+72=0}$ y $\mathbf{9x+16y-75=0}$

14. $\mathbf{x+2y+2=0}$ y $\mathbf{2x+4y-3=0}$

15. Determina la ecuación general de la altura que pasa por el vértice C del triángulo cuyos vértices son A(2, 3), B(5, 7) y C(–3, 4).

16. Determina la ecuación de la mediatriz del segmento que tiene por extremos A(1, 2) y B(3, –1).

17. Determina la ecuación general de la mediatriz que pasa por el lado AB, en el triángulo cuyos vértices son A(4,1) , B(2, –3) y C(–3, –5).

18. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto (4, 2) y es paralela a la recta 2x–3y+4=0.

19. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, –4) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(2, 3) y B(6, –1).

20. Determina la ecuación general de la mediana que pasa por el vértice A del triángulo cuyos vértices son A(2, 3), B(5, 7) y C(–3, 4).

21. Dadas las rectas $\mathbf{r:2x-my+7=0}$ y $\mathbf{S:5x+25y+13=0}$, calcula “m” para que sean paralelas.

22. Dados los puntos $\mathbf{A(1;-2);B(3;2);C(-1;0)}$, calcula:

    a. Las ecuaciones de los lados del triángulo que tiene por vértices dicho puntos.

    b. Las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo.

c. Las ecuaciones de las medianas a los mismos. (Mediana, recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto al mismo)

d. Las coordenadas del baricentro. (Punto de intersección de las medianas)

23. En el paralelogramo ABCD se conocen las coordenadas de los vértices $A(1;-4); B(4;-1); C(6;-5)$.

a. Calcula las coordenadas del vértice D opuesto al A.

b. Halla las ecuaciones de los lados del paralelogramo.

c. Halla las ecuaciones de las diagonales del mismo.

d. Halla las coordenadas del punto de intersección de las diagonales.

24. Dos vértices de un triángulo son A = (3,1), B = (6,4) y el tercero está sobre la recta de ecuación $r: 3x - y = 0$. El área del triángulo es 9. Hallar el tercer vértice.

25. Un vértice de un cuadrado es el punto P(3,11) y una de sus diagonales se halla sobre la recta de ecuación $r: x - 2y + 4 = 0$. Hallar las coordenadas de los otros vértices.

26. Un triángulo ABC tiene sus lados sobre las rectas de ecuaciones $3x - 2y + 2 = 0$; $x + 2y - 10 = 0$, $3x - y + 5 = 0$. Calcula el perímetro y el área.

27. Halla la ecuación general de la recta perpendicular a la recta 4x + 3y – 12 =0 y que dista 5 unidades de longitud del origen de coordenadas.

28. Un triángulo rectángulo en A tiene dos vértices en los puntos A =(1,3) y C = (3,0). Halla las coordenadas del vértice B sabiendo que está situado en la recta 2x + y + 2 = 0.

SESIÓN – 26:

La Circunferencia – Elementos y ecuaciones (Ordinaria y General) – Ecuación ordinaria de la circunferencia.

Determina la ecuación canónica de la circunferencia que pasa por:

1. P = (– 3 ; – 4) y centro en el origen.

2. Q = (5 ; − 4) y centro en el origen.

3. R=(5; 12) y centro en el origen.

Halla las coordenadas del centro y la longitud del radio. Si la ecuación ordinaria de la circunferencia es:

4. $(x+7)^2+(y+3)^2=169$

5. $(x-\sqrt{3})^2+(y+3\sqrt{2})^2=15$

6. $(x-2)^2+(y+3)^2=144$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA:

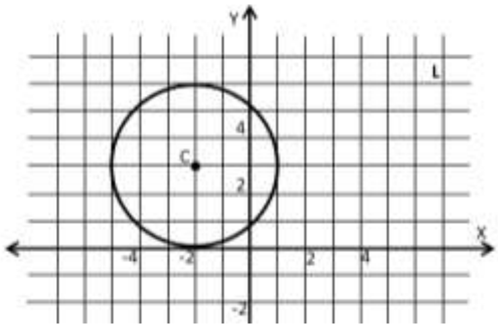
Encuentra la ecuación ordinaria y general de la circunferencia si tiene:

1. C = (2 ; 5); r = 3

2. C = (4 ; − 7); r = $2\sqrt{7}$

3. C= (-3; 8); r=12

4. De la gráfica mostrada escriba la ecuación ordinaria y luego la ecuación general de la circunferencia.



5. Encuentra la ecuación general de la circunferencia de centro (3 ; − 2) y radio 4.

Reduzca cada ecuación a la forma estándar y dibuje la circunferencia:

6. $x^2 + y^2 + 6x - 4x - 12 = 0$

7. $2x^2 + 2y^2 - 20x + 8y - 14 = 0$

8. $3x^2 + 3y^2 - 30x - 72y + 75 = 0$

RESUELVE SEGÚN SEA EL CASO:

9. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por el origen, el punto P=(8 ; 6) y tiene el centro en la recta y = x – 1.

10. Una circunferencia pasa por el punto (x ; 8) y su radio mide 10 cm. Halla el valor de “x” si su centro está en C = (3 ; 0) .

11. Una circunferencia pasa por el punto (12 ; y) y su radio mide 13 cm. Halla el valor de “y” si su centro está en c = (0 ; 4)

12. Halla la ecuación general de la circunferencia que pase por el origen que tenga radio igual a 13 y la abscisa de su centro sea −12.

13. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A = (−1 ; 3), B = (7 ; 4), obtenga su ecuación en su forma ordinaria y general.

14. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: P =(1 ; −2), Q = (5 ; 4) y R = (10 ; 5).

15. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos de coordenadas P = (1 ; 2), Q = (1 ; 4) y R = (2 ; 0).

16. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: M = (0 ; 4), N = (6 ; 0) y P = (3 ; 8).

SESIÓN – 27:
Ejercicios de circunferencia y posición relativa de circunferencia y recta.

Dada las ecuaciones generales de circunferencia, determina el centro, el radio y esboce su gráfica:

1. $36x^2+36y^2-24x+108y+95=0$

2. $2x^2+2y^2-16x+12y+58=0$

3. $4x^2+4y^2+28x-8y+60=0$

4. $16x^2+16y^2-64x+8y+17=0$

RESUELVE SEGÚN SEA EL CASO:

5. Dadas las circunferencias: $\begin{cases} x^2+y^2-6x-8y=0 \\ 2x^2+2y^2-12x-16y+18=0 \end{cases}$

   Se pide:

   a) Comprobar que son concéntricas.

   b) Calcula el área de la corona circular que determinan.

6. Determina la ecuación general de la circunferencia de centro (1 ; − 4) y sea tangente a la recta y = − x + 2.

7. Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: A=(−4; −3), B=(5 ; 10) y cuyo centro está sobre la recta 3x + y – 5 = 0.

8. Una circunferencia es tangente a la recta 2x – y + 1 = 0, en el punto (2 ; 5) y su centro se encuentra sobre la recta x + y = 9. Encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia.

9. Halla la ecuación general de la circunferencia, de manera que uno de sus diámetros sea el segmento que une los puntos (5, −1) y (− 3, 7).

10. Halla la ecuación general de la circunferencia de centro el punto (− 4, 2) y que sea tangente a la recta 3x + 4y – 16 = 0.

SEMANA 10

SESIÓN – 28:

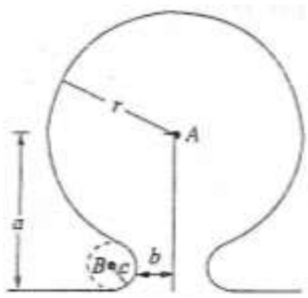
Posición relativa de circunferencia y Rectas aplicaciones.

1. Halla la ecuación ordinaria de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(-1; 4)$ y es tangente a la recta que pasa por los puntos $A(3\ ;-2)$ y $B(-9; 3)$.

2. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia que pasa por los puntos $P(2; 5)$ y $Q(3; 12)$, sabiendo que la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda PQ es igual a $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN:

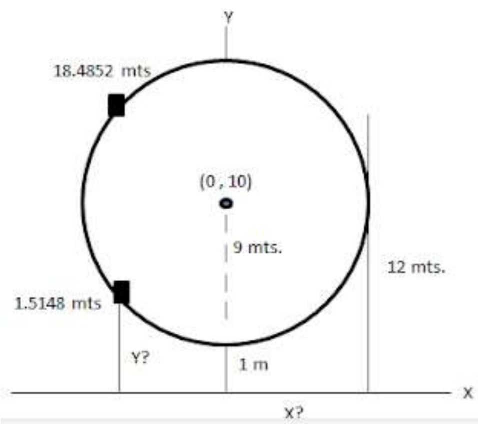
3. **Diseño Industrial.** Al diseñar matrices para punzonar una lámina metálica se utiliza la configuración que se muestra en la figura. Escriba la ecuación de la circunferencia pequeña con centro en B tomando como origen el punto marcado con A. Utiliza los siguientes valores: r = 3 pulgadas, a = 3.25 pulgadas, b = 1 pulgada y c = 0.25 pulgadas.



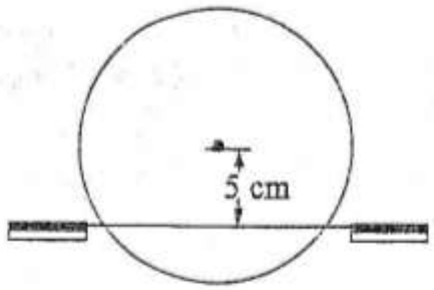
4. **Diseño industrial.** Un volante de 26 cm de diámetro va a montarse de modo que su eje esté a 5cm por arriba del nivel del piso, como se muestra en la figura.

   a) Escriba la ecuación de la trayectoria seguida por un punto en el borde. Utiliza la superficie del piso como el eje horizontal y la recta perpendicular que pasa por el centro como el eje vertical.

   b) Encuentra el ancho de la apertura en el piso, permitiendo un juego de **2cm** a ambos lados.



5. Una rueda de la fortuna tiene un diámetro de 18 m y su centro se encuentra a 10 m sobre el nivel del suelo, indique la altura de las costillas a 3 m a la izquierda del centro, indique a que distancia horizontal de la base se puede encontrar una canastilla con una altura de 12 m.



6. Una fábrica elabora dos tipos de morrales A y B. Las cantidades posibles "x" y "y" que puede fabricar de cada tipo al mes están relacionadas por la siguiente ecuación;

$$x^2 + y^2 + 200x + 300y = 90000$$

Donde: "x" corresponde al tipo A y "y" al tipo B.

a) Bosqueje la curva de transformación de productos en este caso.

b) ¿Cuáles son los máximos posibles de producción de cada tipo al mes?

7. En una zona se pueden sembrar dos tipos de árboles A y B. Las cantidades posibles "x" y "y" que se pueden plantar de cada tipo están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 100x + 150y = 10000.$$

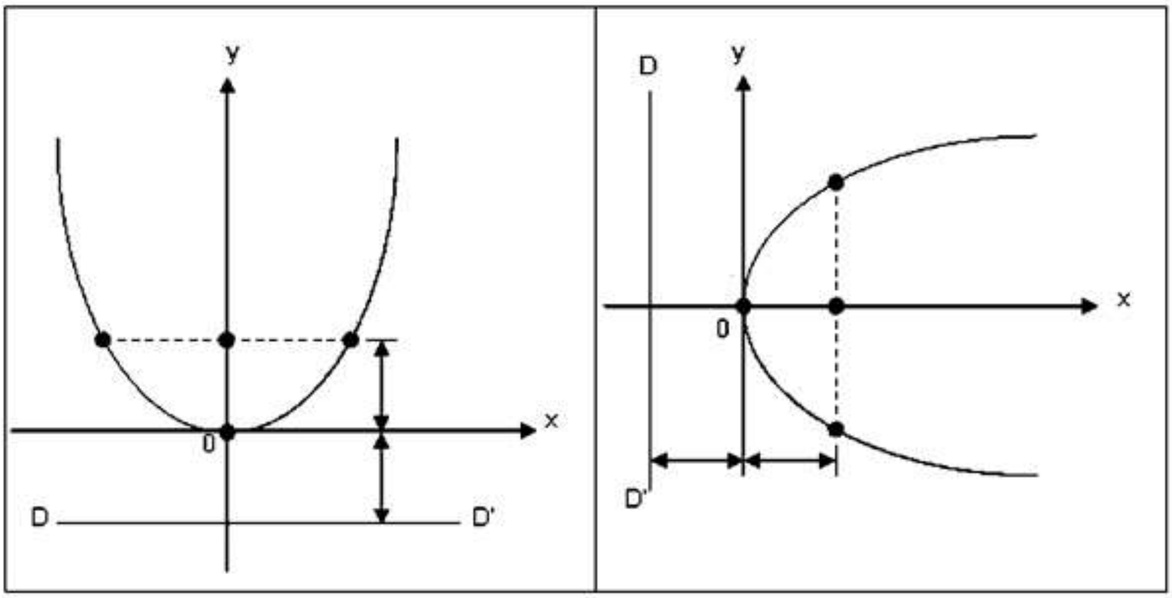
a) Bosqueje la gráfica de transformación en este caso.

b) ¿Cuáles son los máximos posibles de cada especie?

SESIÓN N° 29:

La Parábola: Definición, Elementos y Ecuaciones (ordinaria y general)

1. Dado las gráficas de una parábola vertical y horizontal, identifique sus elementos:



Vertical *Horizontal*

En los ejercicios, encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con la(s) característica(s) dada(s) y vértice en el origen.

2. Foco: (0, 3/2)
3. Foco: (2, 0)
4. Directriz: y = 3
5. Directriz: x = –2
6. Eje vertical y pasa por el punto (3, 5).
7. Eje vertical y pasa por el punto (–4, –6).
8. Eje horizontal y pasa por el punto (–2, 5).
9. Eje horizontal y pasa por el punto (3, –2).

En los ejercicios, encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con las características dadas.

10. Vértice: (4, 3); Foco: (8, 3)

11. Vértice: (–1, 2); Foco: (–1, 0)

12. Vértice: (0, 3); directriz: y = 6

13. Foco: (2, 2); Directriz: x = –4

En los ejercicios, encuentre la ecuación de la parábola con las características dadas.

14. Foco: (6, -2); Directriz: x – 2 = 0

15. Vértice (2 , 3), de eje paralelo al eje ordenadas y pasa por el punto (4 , 5)

16. De eje paralelo al eje de abscisas, y que pase por los puntos (-2 , 1); (1 , 2) y (-1 , 3)

17. De eje vertical y que pase por los puntos (4, 5) ; (-2, 11); y (-4 , 21)

PRACTICA CALIFICADA N° 3

SESIÓN N° 30:
Ejercicios de la parábola

En los ejercicios, encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola y trace su gráfica.

1. $y = \frac{1}{2}x^2$

2. $y^2 = -6x$

3. $(x-3)^2 + 8(y+1) = 0$

4. $(x+7) + (y-4)^2 = 0$

En los ejercicios, encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola.

5. $x = \frac{1}{4}(y^2 + 2y + 33)$

6. $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$

7. $3x^2 + 4x + 6y - 2 = 0$

8. $5y^2 + x + y = 0$

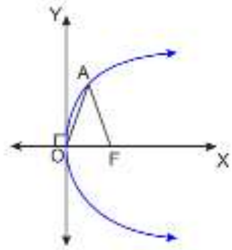
9. $4x^2 - 2x + 8y + 10 = 0$

10. $7y^2 - 4x - 4 = 0$

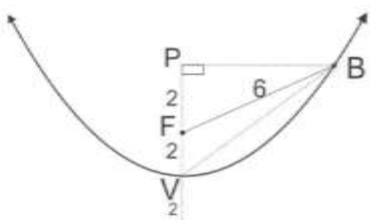
Desarrolle los siguientes ejercicios:

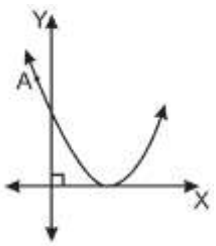
11. Una parábola de vértice (2, 1) y eje focal paralelo al eje Y pasa por el punto (0 , 2). Determine la longitud del lado recto (en centímetros)

12. En la figura O y F son vértices de la parábola respectivamente. Si AO = AF y la distancia del punto A al eje focal es $2\sqrt{2}$ cm. Determine la ecuación de la parábola.



13. En una parábola (ver figura), la distancia del vértice al foco es 2 cm. Si un punto B ubicado en la parábola dista 6 cm del foco. Determine la distancia del punto B a su vértice.





14. En la figura, el punto A de la parábola $(x - 13)^2 = 4y$; dista 80 cm de su directriz. Determine las coordenadas de A.

15. Sean las parábolas P1: $y = ax^2$: P2: $y = a(x - 4)^2$; con $a > 0$. Si el punto de intersección de estas parábolas coincide con un extremo de sus lados rectos. Determine el valor de a.

SEMANA N° 11

SESIÓN N° 31:

Aplicaciones de la parábola: Puentes, Arcos, Parabólicas y otros.

1. Cada uno de los cables del puente Golden Gate está suspendido (en forma de parábola) entre dos torres que están a 1280 metros entre sí. Lo alto de cada una de las torres está 152 metros sobre la calzada. Los cables tocan la calzada a medio camino entre las torres.

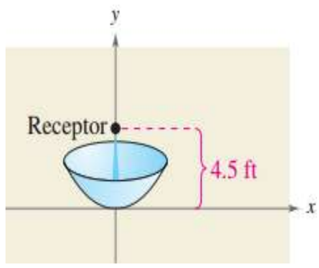
   A. Haga un bosquejo del puente. Localice el origen de un sistema de coordenadas rectangulares en el centro de la calzada. Marque las coordenadas de los puntos conocidos.

   B. Escriba una ecuación que modele los cables.

   C. Complete la tabla al hallar la altura y de los cables de suspensión sobre la calzada a una distancia de x metros del centro del puente.

Distancia, x	Altura, y
0	
100	
250	
400	
500	

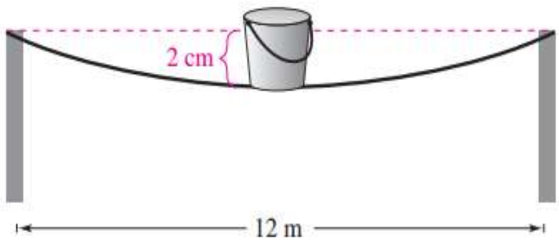
2. El receptor satelital de una antena parabólica está a 4.5 pies del vértice y se encuentra en el foco (vea figura). Escriba una ecuación para una sección transversal del reflector. (Suponga que el disco está dirigido hacia arriba y el vértice está en el origen.)



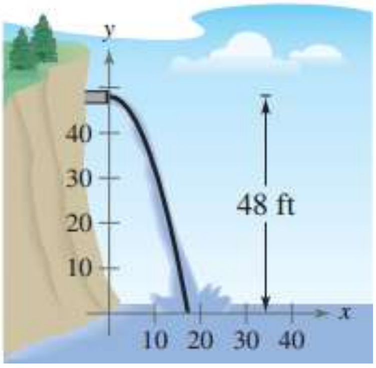
3. Una viga simple de soporte mide 12 metros de largo y tiene una carga en el centro (vea figura). El torcimiento de la viga en su centro es 2 centímetros. Suponga que la forma de la viga torcida es parabólica.

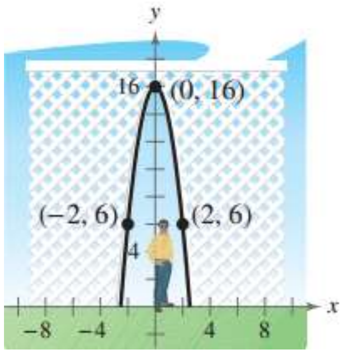
   A. Escriba una ecuación de la parábola. (Suponga que el origen está en el centro de la viga torcida.)

   B. ¿A qué distancia del centro de la viga es de 1 centímetro el torcimiento?



4. Sale agua de un tubo horizontal que está a 48 pies sobre el suelo. El chorro de agua que cae tiene la forma de una parábola cuyo vértice está en el extremo del tubo (vea figura). El chorro de agua cae al suelo en el punto $(10\sqrt{3}, 0)$. Encuentra la ecuación de la trayectoria tomada por el agua.



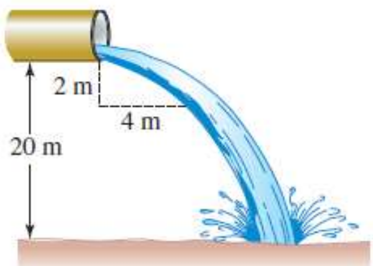


5. Un arco parabólico de malla mide 16 pies de alto en el vértice. A una altura de 6 pies, el ancho del arco mide 4 pies (vea figura). ¿Qué tan ancho es el arco de malla al nivel del suelo?

6. **Puente colgante**. Suponga que dos torres de un puente colgante están a 350 pies de distancia, y que el vértice del cable parabólico es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Si el cable está 1 pie arriba del asfalto en un punto a 20 pies del vértice, calcule la altura de las torres sobre el asfalto.

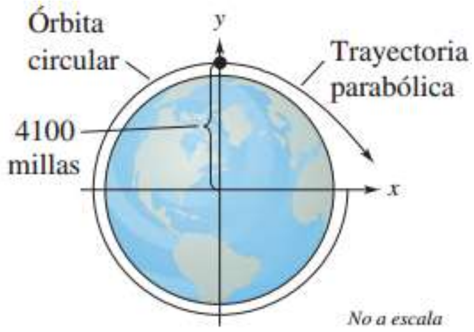
7. **Puente colgante**. Dos torres de 75 pies de alto, de un puente colgante con un cable parabólico, están a 250 pies de distancia. El vértice de la parábola es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Calcule la altura del cable, sobre el asfalto, en un punto a 50 pies de una de las torres.

8. **Tubo de alcantarillado**. Suponga que el agua que sale por el extremo de un tubo horizontal describe un arco parabólico con su vértice en el extremo del tubo. Este tubo está a 20 metros sobre el suelo. En un punto a 2 metros abajo del extremo del tubo, la distancia horizontal del agua a una vertical que pase por el extremo del tubo es de 4 m. Vea la figura ¿Dónde el agua toca el suelo?



9. **Diana.** Un lanzador de dardos suelta un dardo a 5 pies sobre el suelo. El dardo se arroja horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica. Llega al suelo a $10\sqrt{10}$ pies del lanzador. A una distancia de 10 pies del lanzador, ¿a qué altura debe colocarse la diana para que el dardo le acierte?

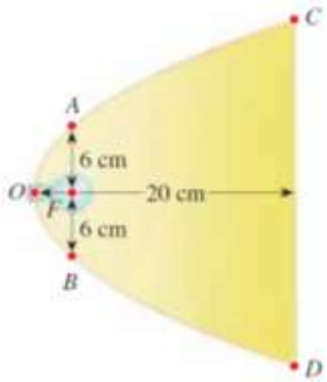
10. Un satélite en una órbita circular de 100 millas de altura alrededor de la Tierra tiene una velocidad de aproximadamente 17 500 millas por hora. Si esta velocidad se multiplica por $\sqrt{2}$, el satélite tendrá la velocidad mínima necesaria para escapar de la gravedad de la Tierra y seguirá una trayectoria parabólica con el centro de la misma como el foco (vea figura).



A. Halla la velocidad de escape del satélite.

B. Halla una ecuación del trayecto parabólico del satélite (suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas).

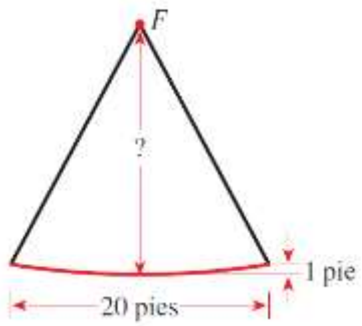
11. **Reflector Parabólico.** En la figura se muestra una lámpara con un reflector parabólico. La bombilla eléctrica está colocada en el foco y el diámetro focal es 12 centímetros.



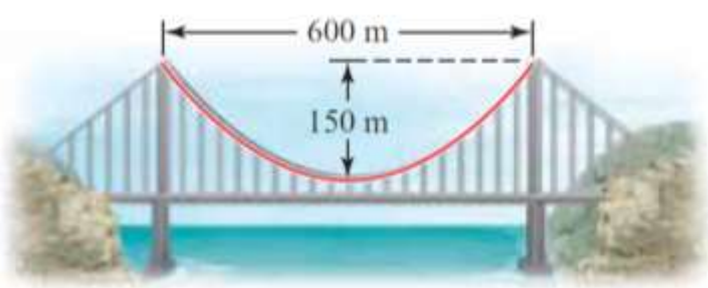
A. Encuentra una ecuación de la parábola.

B. Encuentra el diámetro d(C;D) de la abertura, 20 cm del vértice.

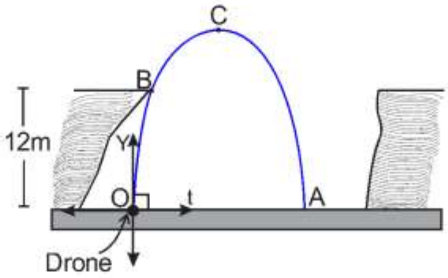
12. **Disco satelital**. Un reflector para disco satelital es parabólico en sección transversal, con receptor en el foco F. El reflector mide 1 pie de profundidad y 20 pies de ancho de borde a borde (vea la fi gura). ¿A qué distancia está el receptor del vértice del reflector parabólico?



13. **Puente Colgante**. En un puente colgante, la forma de los cables de suspensión es parabólica. El puente que se muestra en la figura tiene torres que están a 600 m una de la otra, y el punto más bajo de los cables de suspensión está a 150 m debajo de la cúspide de las torres. Encuentra la ecuación de la parte parabólica de los cables, colocando el origen del sistema de coordenadas en el vértice. [Nota: Esta ecuación se emplea para hallar la longitud del cable necesario en la construcción del puente.

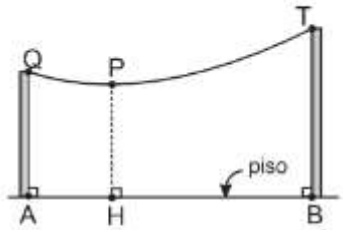


14. La figura muestra un drone que se encuentra en un hoyo de 12 m de profundidad e inicia su ascenso describiendo una trayectoria parabólica $y = at - t^2 + b$; donde y está en metros y t en minutos; al minuto de vuelo subió 7 metros y a los 6 minutos de iniciado su ascenso se posa sobre la superficie en el punto B. si C es el vértice de la parábola. Determine el tiempo cuando el drone alcance su altura máxima desde que inició su ascenso en el punto O.



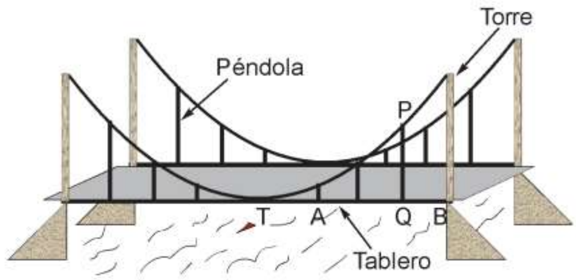
15. En la figura se muestra un reflector parabólico de revolución, la fuente de luz se coloca en el foco. Si el reflector tiene un diámetro de 24 cm en el borde y una profundidad de 14 cm. A que distancia del vértice está la fuente de iluminación.

16. En la figura, los postes sostienen un cable que tiene forma de un arco parabólico, si P es el punto del cable más próximo al piso, AQ = 9 m; PH = 8 m; AH = 6 m y HB = 12 m. determine la longitud del poste BT.

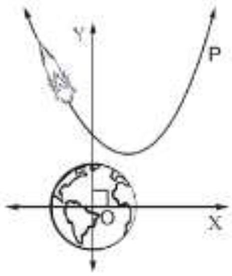


17. Un túnel tiene la forma de arco parabólico, de 5 m de altura y 4 m de ancho, la empresa de transporte Continental S.A. se dedica al transporte cuyo recorrido pasa por el túnel, quiere comprar una flota de camiones de 3 m de ancho, determine la máxima altura que deben de tener los camiones.

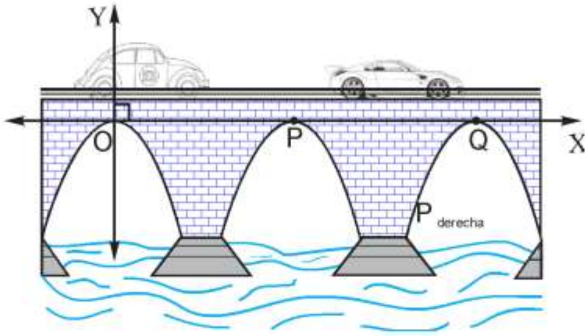
18. Las torres que sostienen un cable de forma parabólica del puente colgante tienen 20 m de altura y están separados 80 m. si el cable es tangente en el punto T al tablero, las péndolas están igualmente espaciadas y AT = QB = 10 m. determine la longitud de la pendola PQ.



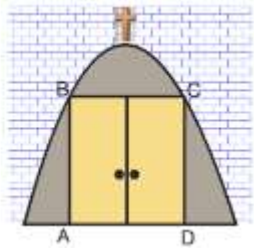
19. La trayectoria de un cometa está descrita por la parábola $x^2 - 4x - 4y + 24 = 0$; teniendo como referencia el centro de la tierra, halle la longitud en metros del lado recto de la trayectoria descrita por el cometa.



20. Un puente está construido sobre una estructura con formas parabólicas congruentes como se muestra en la figua, para ello fue necesario precisar las ecuaciones de las tres parábolas. Si el punto P = (5 , 0) es tangente y la ecuación de la parábola izquierda es x2 = -4y. determine la ecuación de la parábola de la derecha,



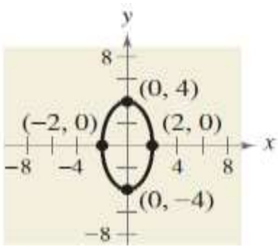
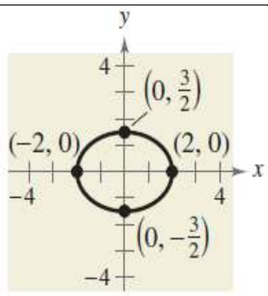
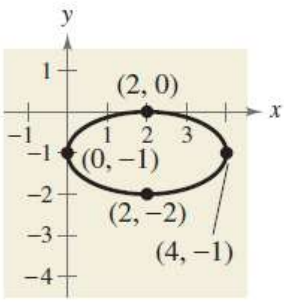
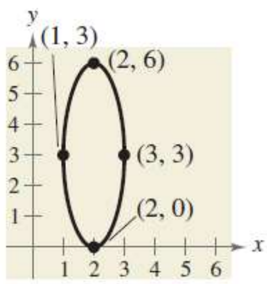
21. La entrada de una iglesia tiene forma parabólica con un puerta de forma rectangular ABCD, como se muestra en la figura, si la altura de la entrada parabólica tiene 4 metros de alto y 6 metros de ancho en la base. Determine la altura de la puerta si tiene un ancho de 2 metros.



SESIÓN N° 32:

La Elipse: Definición, Elementos y Ecuaciones (Ordinaria y General)

Dado las gráficas siguientes, determina su ecuación general de la elipse:

1. 	2. 
3. 	4. 

De las siguientes ecuaciones, determina: centro, vértices, focos y luego traza la gráfica.

5. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

6. $\frac{y^2}{144}+\frac{x^2}{81}=1$

7. $\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{6}=1$

8. $\frac{9x^2}{16}+\frac{4y^2}{25}=1$

9. $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$

10. $\frac{(y-8)^2}{25}+\frac{(x+3)^2}{4}=1$

11. $\frac{x^2}{4/9}+\frac{(y+1)^2}{9/25}=1$

12. $\frac{(x+2)^2}{12}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

De las siguientes ecuaciones determina sus ecuaciones ordinarias, las coordenadas de sus elementos y realizar la gráfica respectiva:

13. $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

14. $9x^2+4y^2-54x+40y+37=0$

15. $6x^2+2y^2+18x-10y+2=0$

16. $x^2+4y^2-6x+20y-2=0$

17. $16x^2+25y^2-32x+50y+16=0$

18. $9x^2+25y^2-36x-50y+60=0$

Determina la ecuación general de la elipse, con los siguientes datos:

19. Vértices: (0; 4), (4; 4); eje menor con longitud 2.
20. Focos: (0; 0), (0; 8); eje mayor con longitud 16.
21. Centro: (0; 4); a = 2c; vértices: (-4; 4), (4; 4).
22. Vértices: (0; 2), (4; 2); puntos extremos del eje menor: (2; 3), (2;1)
23. Vértices: (0; ±8) y excentricidad e = 0,5.
24. Halla la ecuación de la elipse con centro en (0; 0), eje focal en el eje Y, que pasa por P(1; 4) y la relación del lado recto a la semidistancia focal es $\sqrt{2}$.

25. Una elipse es tangente a una circunferencia de tal manera que sus focos se encuentran también sobre la circunferencia. ¿Cuál es la excentricidad de la elipse?

26. Los focos de una elipse son: $F_1(-2;-2)$ y $F_1(4;-2)$. Halla la ecuación general de la elipse, si uno de sus vértices está sobre la recta $L_1: x-y-8=0$.

27. Los focos de una elipse son $F_1(3;1)$ y $F_2(-1;1)$. Halla la ecuación de la elipse sí uno de los extremos del eje menor está en la recta: $L_1: x-2y-3=0$.

28. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje focal sobre el eje Y, pasa por $P(3;-2\sqrt{6})$ y la relación del lado recto a la semidistancia focal es 3.

29. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, distancia entre las directrices perpendiculares al eje X es $\frac{50}{3}$ y la distancia focal es 12.

30. Hallar la ecuación de la elipse en forma general, coordenada del foco (-1; -1), ecuación de la directriz x = 0, y excentricidad $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SESIÓN N° 33:

PRUEBA DE DESARROLLO N° 3

SEMANA N° 12

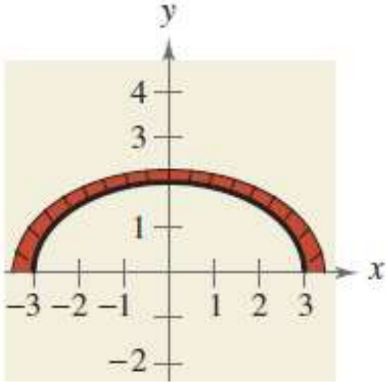
SESIÓN N° 34:

Resolución de la Prueba de Desarrollo N° 3.

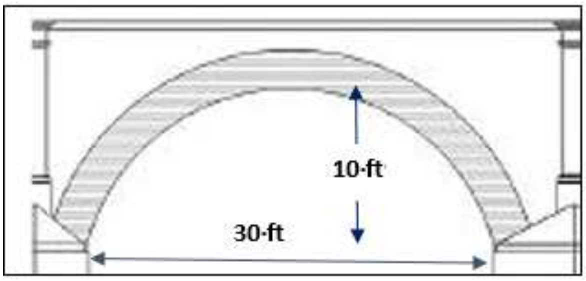
SESIÓN N° 35:

APLICACIONES DE LA ELIPSE

1. **Arquitectura:** Un arco de chimenea se ha construido en forma de una semielipse. La abertura debe tener una altura de 2 pies en el centro y un ancho de 6 pies a lo largo de la base (ver figura). El contratista traza el perfil de la elipse usando tachuelas como se describe en el inicio de ésta sección. Determina las posiciones de las tachuelas y la longitud de la cuerda.



2. El arco de un puente es semieliptico, con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 pies de longitud y su parte más alta con respecto al suelo mide 10 pies. Determina la altura del arco a 6 pies del centro de la base.



3. **Arquitectura:** Un arco semieliptico sobre un túnel, para un camino en un sentido a través de una montaña, tiene un eje mayor de 50 pies y una altura en el centro de 10 pies.

   A. Dibuja un sistema coordenado rectangular sobre el bosquejo del túnel con el centro del camino entrando al túnel en el origen. Identifica las coordenadas de los puntos conocidos.

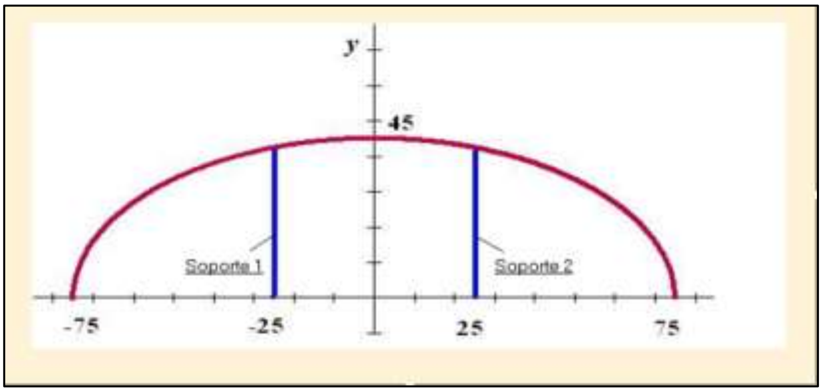
   B. Determina una ecuación del arco semieliptico sobre el túnel.

   C. Usted conduce un camión que tiene un ancho de 8 pies y una altura de 9 pies. ¿Pasará el camión por la abertura del arco?

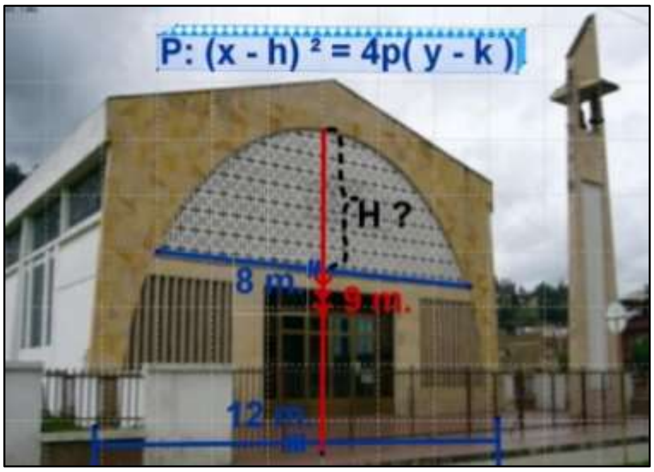
4. Una pista de carros tiene forma de elipse, el eje mayor mide 10 km y el eje menor 6 km. Determina la distancia a que se encuentra un carro del centro de la pista en el momento en que pasa a la altura de uno de los focos.

5. El arco semieliptico en el puente de concreto que se muestra en la figura debe tener un claro de 12 pies sobre el agua y salvar una distancia de 40 pies. ¿Qué altura debe tener el claro arriba de 5 pies desde la orilla?

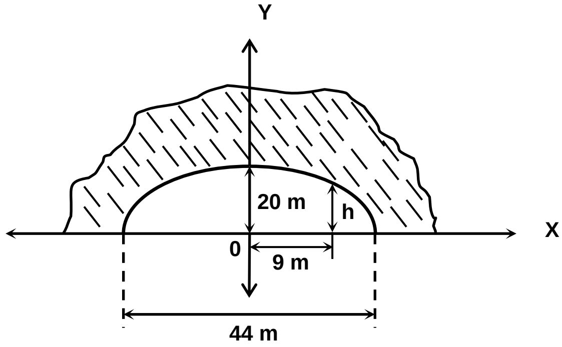
6. Un arco con forma de semielipse tiene una altura máxima de 45 m y un claro de 150 m. Determine la longitud de dos soportes verticales situados de manera que dividan el claro en tres espacios iguales.



7. La fachada de una iglesia tiene la forma parabólica (ver la figura), de 9 metros de alto y 12 metros de base. Toda la parte superior es una ventana de vidrio cuya base es paralelo al piso y mide 8 metros. ¿Cuál es la altura máxima de dicha división de vidrio?



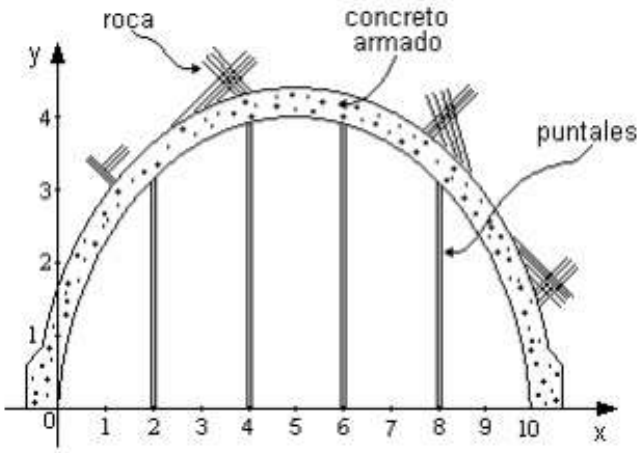
8. Se necesita hacer un túnel en una montaña por donde debe pasar una carretera, el arco para dicho túnel debe tener forma semielíptica, con el eje mayor horizontal de 44 m y la parte más alta de 20 m por encima de la carretera. De acuerdo con esto:



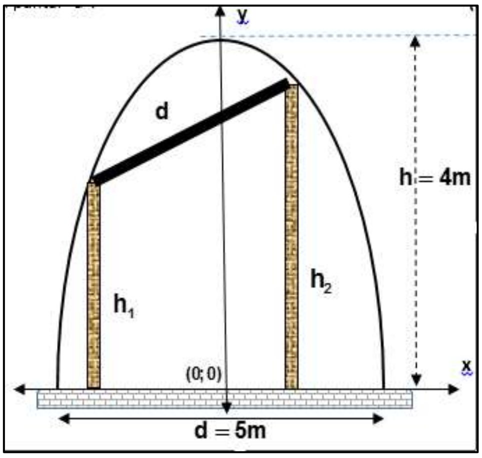
   A. Determina la ecuación general de la elipse que describe la forma del túnel.

   B. Calcula la altura que tiene el arco a 9 m del centro de la carretera.

9. Un arco semieliptico de concreto armado, tiene un claro (distancia entre los apoyos) de 10 metros y una altura máxima de 4 metros (ver figura). Para construir dicho arco es necesario apuntarlo a distancias cada 2 metros, se pide determinar la altura de cada puntal.



10. Un túnel que conduce a una operación minera subterránea tiene la sección semielíptica de 5 metros de base y 4 metros de altura. Por fallas geo mecánicas de las rocas, el sostenimiento se debilitó un tramo. Por lo que el ingeniero de seguridad ordena provisionalmente poner dos puntales a 1 m y 1,5 m del centro respectivamente y un tercero para armar el cuadro. Determina:

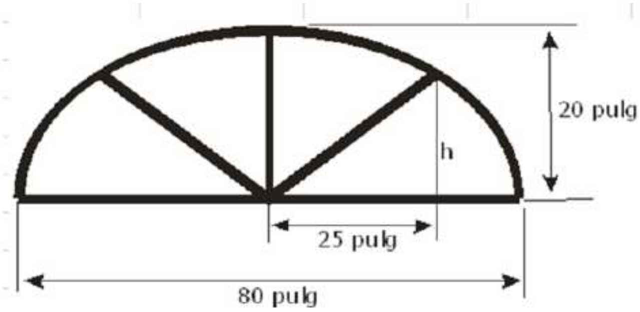


   A. La longitud de los puntales h_1 y h_2.

   B. La longitud del puntal “d”.

11. Un carpintero construirá la cubierta de una mesa elíptica a partir de una hoja de madera contrachapada (triplay), de 4 por 8 pies. Trazará la elipse con el método de "tachuelas e hilo". ¿Qué longitud de cordón usará, y a que distancia clavará las tachuelas si la elipse debe tener el tamaño máximo que admita la hoja de madera contrachapada?

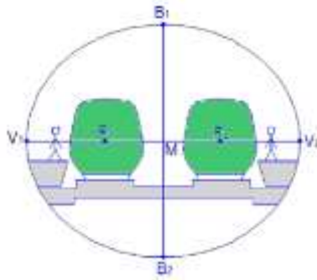
12. Un frontón de una puerta se construye con la forma de la mitad superior de una elipse, como se ve en la siguiente figura. El frontón tiene 20 pulgadas de alto en su punto de máxima altura, y 80 pulgadas de ancho en su base. Calcula la altura del frontón a 25 pulgadas del centro de la base.



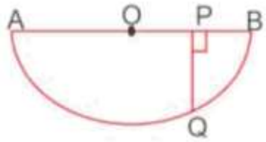
13. La orbita que describe la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente una elipse, con el sol en uno de sus focos. Si el eje mayor de la órbita elíptica es de 300 000 km y la excentricidad es de 0,017 aproximadamente. Determina las distancias del afelio y perihelio.

14. Con una excentricidad de 0,25, la órbita de Plutón es la más excéntrica en el sistema solar. La longitud aproximada del eje menor de su órbita es 10 000 millones de kilómetros. Determina la distancia de Plutón al Sol en el perihelio y en el afelio.

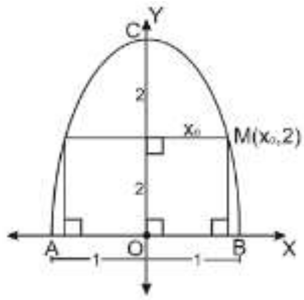
15. En la figura, se muestra la sección elíptica de un tramo subterráneo de la línea 1 del metro de Lima, donde los vagones están ubicados en los focos, si su eje mayor es V1V2 = 10 m y un lado recto mide 3,6 m. Determine la ecuación de la elipse.



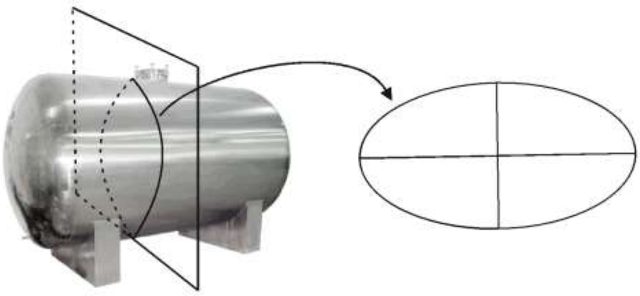
16. La figura representa una represa de sección transversal semielíptica que tiene una profundidad máxima de 40 m y un ancho de 100 m en la parte superior. Si OA = OB y OP = 30 m. determine la profundidad que tiene la represa en el punto Q.



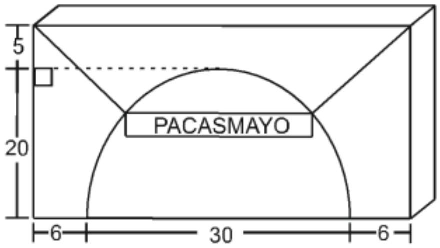
17. La puerta de un almacén tienen la forma de un arco semielíptico, donde la base mide 2 m de ancho y la altura en el centro es de 4 m. Si se requiere pasar a través de ella una caja de 2 m de altura. Determine el ancho que puede tenar la caja.



18. Un tanque es seccionado verticalmente por un soplete, determinando una sección elíptica como muestra la figura tal que el eje mayor es l doble de su eje menor, si la distancia entre sus focos es $2\sqrt{3}$ m. determine el área de la sección elíptica.



19. Los pobladores del puerto de Pacasmayo desean promover el turismo de su pueblo, para lo cual construirán una entrada que tenga la forma de un arco semielíptico, con un aviso de entrada al puerto y este sostenido por cables a ambos lados como muestra la figura. Si el largo del aviso mide 18 m. determine la longitud de cada cable.



SESIÓN N° 36:

La Hipérbola: Definición, Elementos y Ecuaciones (Ordinaria y General)

De las siguientes ecuaciones, determina: centro, vértices, focos y luego traza la gráfica.

1. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$
2. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$
3. $\frac{y^2}{10}-\frac{x^2}{5}=1$
4. $\frac{9x^2}{16}-\frac{4y^2}{25}=1$
5. $16y^2-25x^2=144$
6. $x^2-36y^2=25$
7. $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y+4)^2}{16}=1$
8. $\frac{(x-8)^2}{36}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$
9. $\frac{(y+2)^2}{6}-\frac{(x-5)^2}{8}=1$
10. $\frac{(y-5)^2}{10}-\frac{(x+2)^2}{2}=1$

De las siguientes ecuaciones determina: lado recto, excentricidad y ecuaciones generales de las asíntotas.

11. $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{25}=1$

12. $\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{(x+3)^2}{25}=1$

13. $\frac{(y-3)^2}{12}-\frac{(x-1)^2}{10}=1$

14. $\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{(y-6)^2}{8}=1$

De las siguientes ecuaciones determina: centro, vértices, focos y luego traza la gráfica.

15. $x^2-9y^2+36y-72=0$

16. $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

17. $x^2-9y^2+2x-54y-80=0$

18. $-9x^2+16y^2-72x-96y-144=0$

De las siguientes ecuaciones determina: lado recto, excentricidad y ecuaciones generales de las directrices y asíntotas.

19. $4x^2-5y^2=16$

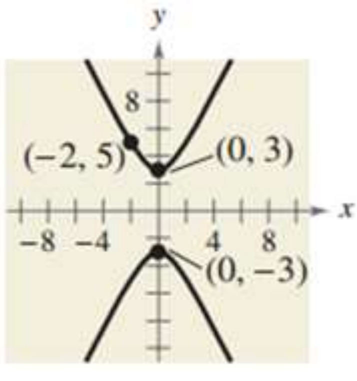
20. $9y^2-16x^2=1296$

21. $9y^2-16x^2-64x-54y-127=0$

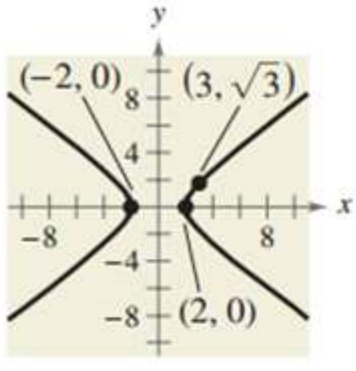
22. $3x^2-3y^2-24x+21=0$

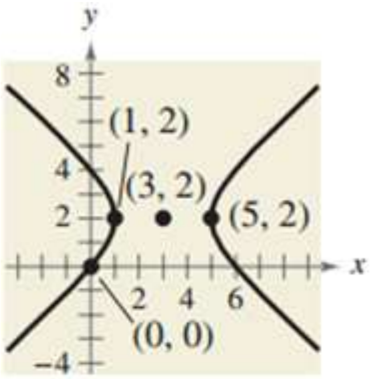
Determina la ecuación general de la hipérbola:

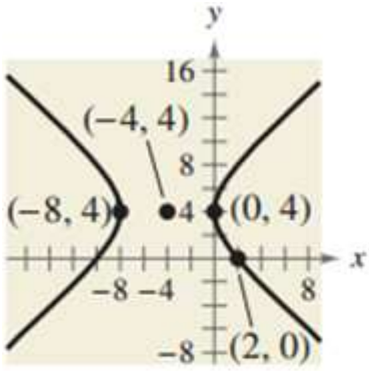
23.



24.



25. 

26. 

En los ejercicios, determina la ecuación general de la hipérbola con las características dadas y centro en el origen.

27. Vértices: (0, ± 2); Focos: (0, ± 4)

28. Vértices: (± 1, 0); asíntotas: y ± 5x

29. Vértices: (0, ± 3); asíntotas: y = ± 3x

En los ejercicios, determina la ecuación general de la hipérbola con las características dadas.

30. Vértices: (2, 0) y (6, 0); Focos: (0, 0) y (8, 0)

31. Vértices: (2, 3) y (2, –3); Focos: (2, 6) y (2, –6)

En los ejercicios, determina la ecuación general de la hipérbola con las características dadas.

32. Vértices: (2, 3) y (2, –3); pasa por el punto (0, 5)

33. Vértices: (–2, 1) y (2, 1); pasa por el punto (5, 4)

34. Vértices: (1, 2) y (3, 2); asíntotas: y = x, y = 4 – x

35. Vértices: (3, 0) y (3, 6); asíntotas: y = 6 – x, y = x

En los ejercicios, determina la ecuación general de la hipérbola con las características dadas y centro en el origen.

36. Foco en (6,0), vértice en (4,0)

37. Foco en (12,0), vértice en (9,0)

38. Foco en (0,5), vértice en (0,-3)

39. Foco en (0,-4), vértice en (0,2)

40. Foco en (4,0), longitud del eje conjugado, 6.

Determina la ecuación general de la hipérbola con los siguientes datos:

41. Vértices: (3, 4) y (3, 0); Focos: (3,5) y (3, -1).

42. Vértices: (2, 4) y (6, 4); Excentricidad = 3/2

43. Vértices: (3, 3) y (3, -3); Lado recto= 8/3.

Determina la ecuación general de las directrices de la hipérbola:

44. $x^2 - y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$

45. $2x^2 - 2y^2 - x - y = 0$

Determina la longitud del lado recto de la hipérbola:

46. $3x^2 - 3y^2 + x = 0$

47. $2x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0$

Calcula la excentricidad de cada hipérbola:

48. $3x^2 - 2x + 4y = 0$

49. $x^2 - 5y^2 + 25y + 2x = 0$

Determina la ecuación general de la hipérbola con los siguientes datos:

50. Vértices: (1, 2) y (3, 2) Asíntotas: $y = x; y = 4 - x$

51. Vértices: (3, 0) y (3, 6) Asíntotas: $y = 6 - x; y = x$

52. Vértices: (0, 2) y (6, 2) Asíntotas: $y = \frac{2}{3}x; y = 4 - \frac{2}{3}x$

53. Vértices: (3, 0) y (3, 4) Asíntotas: $y = \frac{2}{3}x; y = 4 - \frac{2}{3}x$

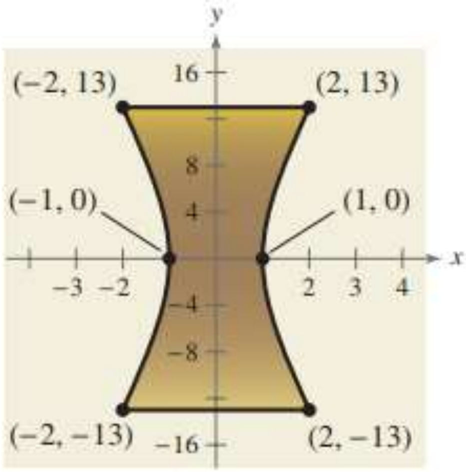
CUARTA UNIDAD: COORDENADAS POLARES

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar los fundamentos de coordenadas polares y de vectores en la resolución de ejercicios y en situaciones problemáticas cotidianas.

SEMANA N° 13

SESIÓN N° 37:
Aplicaciones de la Hipérbola- Construcciones. Estatuas y otros.

1. **Arte:** Una escultura tiene una sección transversal hiperbólica (ver la figura)



a) Determina la ecuación general que modele los lados de la curva.

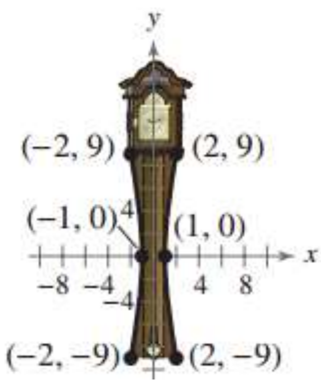
b) Cada unidad en el sistema coordenado representa 1 pie. Determina el ancho de la escultura a una altura de 5 pies.

2. Tres estaciones de escucha situadas en (3300, 0), (3300, 1100) y (–3300, 0) vigilan una explosión. Las dos últimas estaciones detectan la explosión 1 segundo y 4 segundos después de la primera, respectivamente. Determina las coordenadas de la explosión. (Suponga que el sistema de coordenadas se mide en pies y que el sonido viaja a 1100 pies por segundo.)

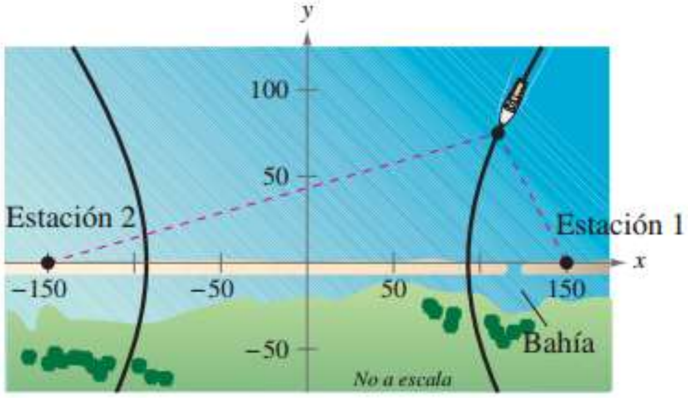
3. La base para el péndulo de un reloj tiene forma de hipérbola (vea figura).

   a. Escriba una ecuación de la sección transversal de la base.

   b. Cada unidad del plano de coordenadas representa 1/2 pie. Encuentre el ancho de la base del péndulo a 4 pulgadas del inciso más baja.



4. La radionavegación a larga distancia para aviones y barcas utiliza pulsos sincronizados transmitidos por estaciones muy separadas entre sí. Estos pulsos viajan a la velocidad de la luz (186 000 millas por segundo). La diferencia en los tiempos de llegada de estos pulsos en un avión o barco es constante en una hipérbola que tiene las estaciones transmisores como focos. Suponga que dos estaciones, situadas a 300 millas entre sí, están ubicadas en el sistema de coordenadas rectangulares en puntos con coordenadas (–150, 0) y (150, 0) y que un barco está viajando sobre una trayectoria hiperbólica con coordenadas (x, 75) (vea figura).



a. Determina la coordenada x de la posición del barco si la diferencia en tiempo entre los pulsos desde las estaciones transmisoras es 1000 microsegundos (0.001 de segundo).

b. Determina la distancia entre el barco y la estación 1 cuando el barco llegue a la orilla.

c. El barco desea entrar a una bahía localizada entre las dos estaciones. La bahía está a 30 millas de la estación 1. ¿Cuál debe ser la diferencia en tiempo entre los pulsos?

d. El barco está a 60 millas frente a la costa cuando se obtiene la diferencia en tiempo del inciso (c). ¿Cuál es la posición del barco?

5. Determina la ecuación general de la hipérbola con vértices en los puntos V1(0; -5) y V2(0; 5) y la longitud del lado recto 18.

6. Halla la ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en el origen, eje transverso sobre el eje "y", y pasa por los puntos (4; 6) y (1; -3).

7. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola que pasa por el punto (3; -1), su centro es el origen y una de sus asíntotas es la recta $2x+3\sqrt{2}y=0$.

8. Halla la ecuación general de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$, en el punto $\left(10;-3\sqrt{3}\right)$.

9. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en el origen, con eje transversal sobre el eje "y", y que pasa por los puntos (4; 6) y (1; -3).

10. Determina la ecuación general de la hipérbola si sus focos son los puntos F1(-3; 0) y F2(3; 0), con excentricidad 1,50.

11. Halla la ecuación de la hipérbola con vértices $(\pm 3;0)$ y lado recto igual a 24.

12. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en el origen, eje transverso sobre el eje "x", excentricidad $\frac{\sqrt{6}}{2}$ y la curva pasa por el punto P(2; 1).

13. Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Determina la ecuación estándar de la hipérbola con excentricidad igual a 2.

14. Los focos de la gráfica de la ecuación $14x^2+8y^2-28x-64y+30=0$, son los vértices de una hipérbola y a su vez los focos de esta última coincide con los vértices de la primera gráfica. Determina la ecuación de la hipérbola.

15. Determina la ecuación de la hipérbola cuyos focos están sobre los vértices de la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ y las directrices pasan por los focos de ésta elipse.

Determina las ecuaciones generales de las directrices de las siguientes hipérbolas:

16. $16x^2-9y^2+64x+54y-161=0$

17. $2y^2-2x^2+12x-50=0$

Determina las ecuaciones generales de las asíntotas de las siguientes hipérbolas:

18. $3x^2-12y^2-48y-60=0$

19. $4y^2-2x^2+8x+16y=0$

20. La hipérbola equilátera tiene una asíntota: $L_1: x-y+1=0$, la otra pasa por P(-1; 4). Halla la ecuación general si uno de sus vértices es V(4; 2).

21. Halla la ecuación estándar de la hipérbola cuyos focos son $F(\pm 4;0)$, si la pendiente de una de sus asíntotas es 3.

22. Los focos de una hipérbola son los puntos F_1(-5; 1) y F_2(1; 1) y la ecuación de la tangente es: L: 3x + 2y = 0. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola.

SESIÓN N° 38:
Ecuación General de las Cónicas. - La Discriminante. - Ecuación de Rotación.

Considera la ecuación: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

1. En general, la gráfica de ésta ecuación es una ____________________.

2. Para eliminar el término xy de ésta ecuación, giramos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga $\text{Cot}2\phi =$ ______.

3. El discriminante de ésta ecuación es __________________.

4. Si la discriminante es cero, la gráfica es una __________________.

5. Si la discriminante es negativo, la gráfica es __________________.

6. Si la discriminante es positivo, la gráfica es ___________________.

Usa discriminante para identificar la cónica, compruebe su respuesta usando un graficador:

7. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x - 5 = 0$

8. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$

9. $6x^2 + 10xy + 3y^2 - 6y = 36$

10. $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y = 0$

SESIÓN N° 39:
Ejercicios de Rotación de ejes de coordenadas.

Determina las coordenadas X´Y´ del punto dado si los ejes de coordenadas giran el ángulo indicado:

11. $(1,1)$; $\phi = 45°$

12. $(-2,1)$; $\phi = 30°$

13. $(3,-\sqrt{3})$; $\phi = 60°$

14. $(\sqrt{2},4\sqrt{2})$; $\phi = 45°$

Determina el ángulo de rotación en cada caso:

15. $x^2 + 2xy + y^2 = 20$

16. $x^2 - 4xy + 2y^2 = 6$

17. $17x^2 + 32xy - 7y^2 = 75$

18. $40x^2 + 36xy + 25y^2 = 52$

19. $32x^2 + 48xy + 8y^2 = 50$

Determina la ecuación de la cónica dada en el plano XY cuando los ejes de coordenadas giran el ángulo indicado:

20. $x^2 - 3y^2 = 4; \phi = 60°$

21. $y = (x-1)^2; \phi = 45°$

22. $x^2 - y^2 = 2y; \phi = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

23. $x^2 + 2y^2 = 16; \phi = \text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

24. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4; \phi = 30°$

25. Dada la cónica: $xy - 1 = 0$.

    a. Identifica la cónica.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina “x” e “y” en función de x’ e y’.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x’y’, luego traza gráfica.

26. Dada la cónica: $xy = 8$

    a. Identifica la cónica.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina “x” e “y” en función de x’ e y’.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x’y’, luego traza gráfica.

27. Dada la cónica: $xy + 4 = 0$

    a. Identifica la cónica.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina “x” e “y” en función de x’ e y’.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x’y’, luego traza gráfica.

28. Dada la cónica: $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$

    a. Identifica la cónica, utilizando el discriminante.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina “x” e “y” en función de x’ e y’.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x’y’, luego traza gráfica.

29. Dada la cónica: $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$

    a. Identifica la cónica, utilizando el discriminante.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina “x” e “y” en función de x’ e y’.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x’y’, luego traza gráfica.

30. Dada la cónica: $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 1 = 0$

    a. Identifica la cónica, utilizando el discriminante.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina “x” e “y” en función de x’ e y’.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x’y’, luego traza gráfica.

31. Dada la cónica: $x^2-2xy+y^2-1=0$

    a. Identifica la cónica, utilizando el discriminante.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina "x" e "y" en función de x' e y'.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x'y', luego traza gráfica.

32. Dada la cónica: $xy+x-2y+3=0$

    a. Identifica la cónica, utilizando el discriminante.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina "x" e "y" en función de x' e y'.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x'y', luego traza gráfica.

33. Dada la cónica: $2x^2-3xy-2y^2+10=0$

    a. Identifica la cónica, utilizando el discriminante.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina "x" e "y" en función de x' e y'.

    d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x'y', luego traza gráfica.

34. Dada la cónica: $6\sqrt{3}x^2+6xy+4\sqrt{3}y^2=21\sqrt{3}$

    a. Identifica la cónica, utilizando el discriminante.

    b. Calcula el ángulo de rotación.

    c. Determina "x" e "y" en función de x' e y'.

d. Determina la ecuación ordinaria en el sistema x'y', luego traza gráfica.

En los siguientes ejercicios elimina el término xy de la ecuación, después escriba la ecuación en forma estándar y trace la gráfica.

35. $xy - 2 = 0$

36. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 12 = 0$

37. $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$

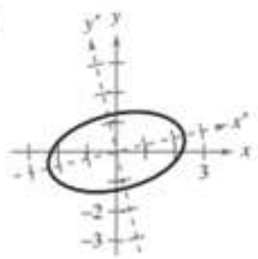
38. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y = 0$

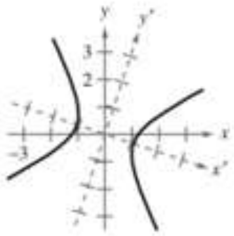
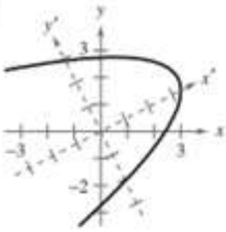
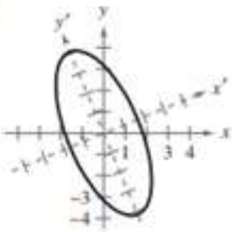
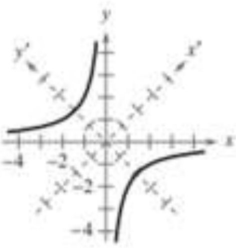
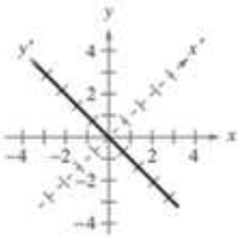
39. Use rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una parábola: $2\sqrt{2}(x+y)^2 = 7x + 9y$

   a. Determina las coordenadas XY y X'Y' del vértice y foco.

   b. Determina la ecuación general de la directriz en coordenadas XY y X'Y'.

40. Relaciona las siguientes gráficas con su respectiva ecuación:

GRAFICOS	**ECUACIONES**
(a) 	A) $xy + 2 = 0$

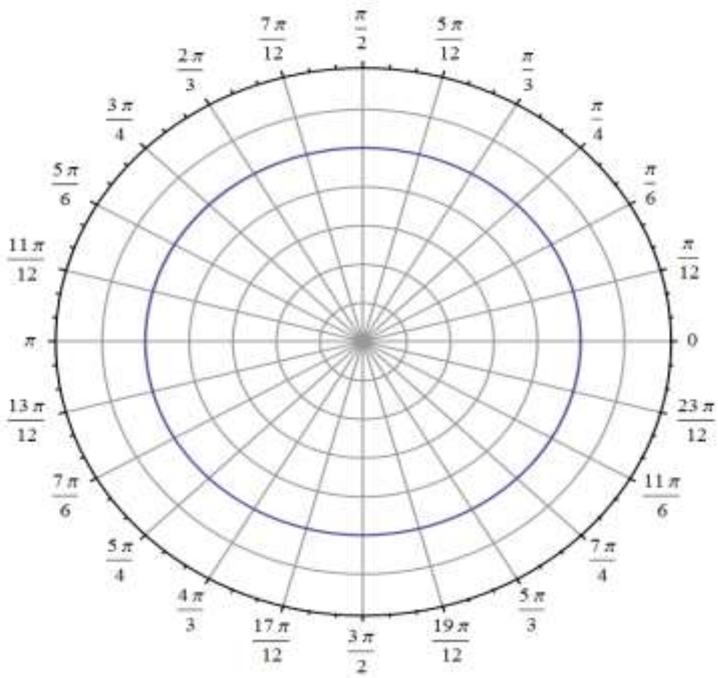
(b) 	B) $x^2+2xy+y^2=0$
(c) 	C) $-2x^2+3xy+2y^2+3=0$
(d) 	D) $x^2-xy+3y^2-5=0$
(e) 	E) $3x^2+2xy+y^2-10=0$
(f) 	F) $x^2-4xy+4y^2+10x-30=0$

SEMANA N° 14

SESIÓN N° 40:
Coordenadas Polares: Plano Polar – Coordenadas Polares - Localización de puntos en el plano polar

Localiza los siguientes puntos en el plano polar:

1. $\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$
2. $\left(3;\frac{13\pi}{12}\right)$
3. $\left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$
4. $\left(4;-\frac{7\pi}{12}\right)$
5. $\left(-6;\frac{\pi}{3}\right)$
6. $\left(-3;\frac{5\pi}{6}\right)$
7. $\left(-4;\frac{-\pi}{4}\right)$
8. $\left(-6;\frac{-7\pi}{6}\right)$



Determina tres representaciones polares adicionales al punto, usando $-2\pi < \theta < 2\pi$.

9. $\left(2;\frac{\pi}{12}\right)$

10. $\left(3;\frac{5\pi}{4}\right)$

11. $\left(-1;\frac{-3\pi}{4}\right)$

12. $\left(-2;\frac{2\pi}{3}\right)$

13. $\left(-\sqrt{2};\frac{19\pi}{12}\right)$

14. $\left(4;\frac{23\pi}{12}\right)$

Determina las coordenadas rectangulares para el punto cuyas coordenadas polares se dan:

15. $\left(\sqrt{2};\frac{7\pi}{4}\right)$

16. $\left(\sqrt{5};\frac{-19\pi}{12}\right)$

17. $\left(\frac{-3}{2};\frac{-17\pi}{12}\right)$

18. $\left(\frac{-1}{2};\frac{5\pi}{4}\right)$

19. $\left(6\sqrt{2};\frac{11\pi}{6}\right)$

20. $\left(0;\frac{-5\pi}{6}\right)$

21. $\left(-3\sqrt{3};\frac{\pi}{6}\right)$

Convierta las coordenadas rectangulares en coordenadas polares con r>0 y $0 \leq \theta < 2\pi$.

22. $(1;1)$

23. $(-1;1)$

24. $(3\sqrt{3};\sqrt{3})$

25. $(1;-2)$

26. $(-6;0)$

27. $(\sqrt{3};-1)$

28. $(-1;\sqrt{3})$

29. $(-4;-3)$

Determina la distancia entre los siguientes puntos:

30. $(4;\frac{\pi}{12});\left(11;\frac{4\pi}{5}\right)$

31. $(-11;\frac{-7\pi}{12});\left(8;\frac{3\pi}{5}\right)$

32. $(-\sqrt{2};\frac{5\pi}{12});\left(\frac{3}{4};\frac{-11\pi}{12}\right)$

33. $(6\sqrt{2};\frac{-11\pi}{6});\left(3\sqrt{3};\frac{-5\pi}{4}\right)$

34. $\left(-5;\frac{5\pi}{12}\right);\left(\frac{-1}{5};\frac{-2\pi}{3}\right)$

35. $\left(\sqrt{3};\frac{-11\pi}{12}\right);\left(12;\frac{-5\pi}{4}\right)$

36. Uno de los vértices de un triángulo se encuentra sobre el polo, los otros son: $A\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ y $B\left(4;\frac{\pi}{12}\right)$. Determina el área del triángulo.

37. Uno de los vértices de un triángulo se encuentra sobre el polo, los otros son: $P(4;110^o)$ y $C(6;80^o)$. Determina el área del triángulo.

38. Determina el área de la región triangular de vértices: $A\left(3;\frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8;\frac{7\pi}{24}\right)$ y $C\left(6;\frac{5\pi}{8}\right)$.

39. Determina el área de la región triangular de vértices: $A\left(-4;\frac{\pi}{12}\right)$, $B\left(14;\frac{-5\pi}{12}\right)$ y $C\left(-7;\frac{13\pi}{12}\right)$.

40. En el sistema de coordenadas polares se dan dos vértices opuestos de un cuadrado: $P\left(6;\frac{-7\pi}{12}\right)$ y $C\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$. Determina el área del cuadrado.

41. En el sistema de coordenadas polares se dan dos vértices adyacentes de un cuadrado: $P\left(-4;\frac{\pi}{12}\right)$ y $C\left(2;\frac{-7\pi}{12}\right)$. Determina el área del cuadrado.

42. Comprueba gráficamente que los puntos: $P(2\sqrt{2};0)$; $Q(2;\frac{\pi}{4})$ y $R\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{2}\right)$, se encuentran sobre una recta.

43. Comprueba gráficamente que los puntos: $P(0;0)$; $Q(\frac{3}{2}\sqrt{3};\frac{\pi}{3})$; $R\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$ y $Q\left(-\frac{3}{2};210^o\right)$, pertenecen a una circunferencia. Además, determina el radio de la circunferencia.

SESIÓN N° 41:
Conversiones – Conversión de puntos y conversiones de ecuaciones polares

Convierta las siguientes ecuaciones rectangulares a la forma polar. Suponga a>0.

1. $x^2+y^2=16$
2. $x^2+y^2-64=0$
3. $x=6$
4. $y=3a$
5. $2x-y=11$
6. $y=\frac{2}{5}x+3$
7. $y=x$
8. $3x-y+11=0$
9. $2x^2-3y^2=6$
10. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{4}=1$
11. $y^2-4x-4=0$
12. $y^2=3x$
13. $xy-1=0$
14. $2xy-1=0$
15. $y^2-8x-16=0$
16. $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$
17. $x^2+y^2-2ax=0$
18. $x^2-4y-4=0$

Convierta las siguientes ecuaciones polares a la forma rectangular.

19. $r=4\operatorname{sen}\theta$
20. $r=5\cos\theta$
21. $\theta=\frac{2\pi}{3}$
22. $\theta=\frac{5\pi}{3}$
23. $r=4$
24. $r=5\csc\theta$
25. $r^2=\cos\theta$
26. $r^2=\operatorname{sen}2\theta$
27. $r=5\operatorname{sen}3\theta$
28. $r=3\cos 3\theta$
29. $r=4\cos 2\theta$
30. $r=\frac{2}{1+\operatorname{sen}\theta}$
31. $r=\frac{6}{2-3\operatorname{sen}\theta}$

32. $\mathbf{r = \dfrac{6}{2\cos\theta - 3sen\theta}}$

33. $\mathbf{r - r\cos\theta}$

34. $\mathbf{sen^2\theta - 4r\cos^3\theta = 0}$

35. $\mathbf{r = 2\sec^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$

36. $\mathbf{r = 4\csc^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$

37. $\mathbf{r^2 = 4\cos 2\theta}$

38. $\mathbf{r^2 = 16sen2\theta}$

Practica Calificada N°04

SESIÓN N° 42:
Simetrías: Representación múltiple de un punto en Coordenadas, Pruebas De Simetrías De Ecuaciones Polares

Completa los espacios en blanco, con las palabras correctas:

1. El origen del sistema de coordenadas polares se llama _________.

2. Al convertir $\mathbf{(r;\theta)}$ a coordenadas rectangulares, r = ____________ y θ = ____________.

3. Al convertir $\mathbf{(x;y)}$ a coordenadas polares, x = _____________ y y = __________.

4. Las coordenadas polares están relacionadas con las coordenadas rectangulares como sigue: Tanθ = ________; Sec θ =____________; r^2 = _____________.

5. La ecuación polar de $\mathbf{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ se representa en coordenadas polares como _______________ y es una __________________.

6. La gráfica de r = f(senθ) es simétrica respecto a la recta ____________.

7. La gráfica de r =g(cosθ) es simétrica respecto a la ________________.

8. La ecuación r = 2 + cosθ representa una ______________.

9. La ecuación r = 2 cosθ representa una _______________.

10. La ecuación r^2 = 4 sen2θ representa una _________________.

11. La ecuación r = 5sen3θ representa una ___________________.

12. La ecuación $r = 2\text{sen}2\theta$ representa una ________________.

13. La ecuación $r = 5 + 5\text{sen}6\theta$ representa una ______________.

14. Para investigar, la ecuación polar de una mariposa polar es ______________________________.

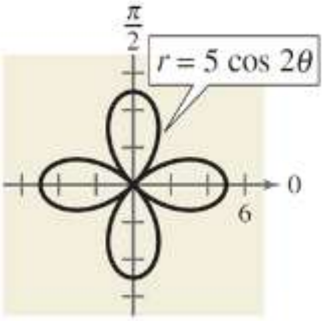
SEMANA N° 15

SESIÓN 43:
Gráficas Especiales: Caracol De Pascal, Rosas Y Lemniscata

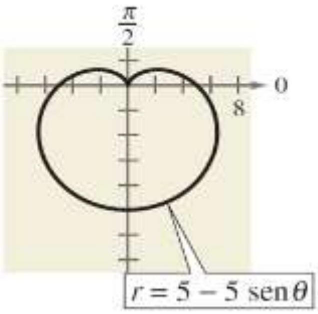
Grafica las siguientes ecuaciones polares especiales:

1. $\mathbf{r = 10 - 10\text{sen}\theta}$
2. $\mathbf{r = 6 + 12\cos\theta}$
3. $\mathbf{r = 4\cos 3\theta}$
4. $\mathbf{r = 3\text{sen}2\theta}$
5. $\mathbf{r = 4 + 3\cos\theta}$
6. $\mathbf{r = 9\cos 3\theta}$
7. $\mathbf{r^2 = 36\cos 2\theta}$
8. $\mathbf{r^2 = 25\text{sen}2\theta}$
9. $\mathbf{r = 3(1 - \cos\theta)}$
10. $\mathbf{r = 4(1 - \text{sen}\theta)}$
11. $\mathbf{r^2 = 9\text{sen}2\theta}$
12. $\mathbf{r^2 = 36\cos 2\theta}$
13. $\mathbf{r = 4\text{sen}\theta}$
14. $\mathbf{r = 5\cos\theta}$
15. $\mathbf{r = 6\cos 5\theta}$
16. $\mathbf{r = 6 + 6\cos\theta}$

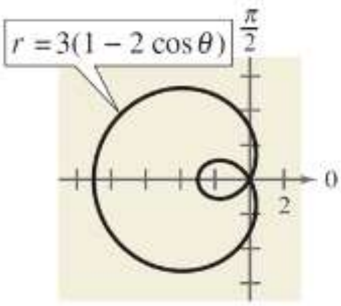
Identifica el tipo de gráfica de ecuación polar especial que representa y determina la simetría:



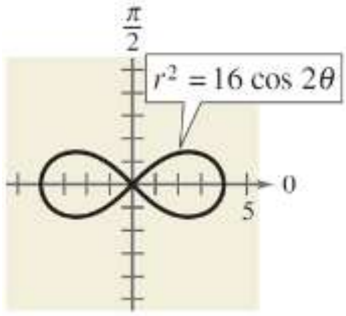
17.



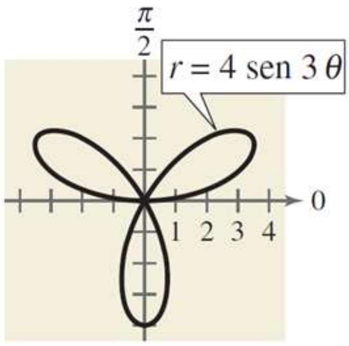
18.



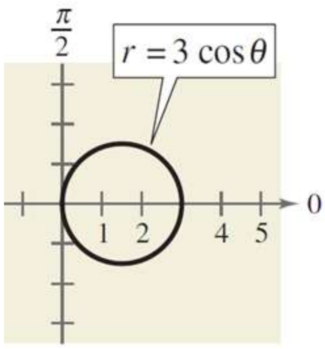
19.



20.



21.



22.

Utiliza un graficador y determina los puntos de intersección con los ejes y la simetría:

23. $\mathbf{r = 8sen\theta.cos^2\theta}$

24. $\mathbf{r = 2\cos(3\theta - 2)}$

25. $\mathbf{r = 2sen\theta\cos^2\theta}$

26. $\mathbf{r = 2\csc\theta + 5}$

27. $\mathbf{r = 2\cos(3\theta - 2)}$

28. $\mathbf{r = 2\csc\theta + 5}$

29. $r = 2\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$

30. $r = 2\operatorname{sen}\left(\frac{5\theta}{2}\right)$

31. Concoide: $r = 2 - \sec\theta$; Asíntota: x = -1.

32. Concoide: $r = 2 + \csc\theta$; Asíntota: y = 1.

33. Espiral hiperbólica: $r = \frac{3}{\theta}$

34. Cisoide de Diocles: $r = \operatorname{sen}\theta\tan\theta$

35. Espiral de Arquímedes: $r = \theta;\quad \theta \geq 0$

36. Nefroide: $r = 1 + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

37. Hipopedia: $r = \sqrt{1 - 0,8\operatorname{sen}^2\theta}$;

38. $r = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$

39. Concoides de Nicómenes: $r = 2\sec\theta + 3$

40. Nefroide de Freeth: $r = 1 + 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

41. $r = \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

42. $r = \theta\operatorname{sen}\theta$

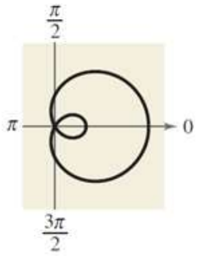
43. $r = 1 + 3\cos 3\theta$

44. $r = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$

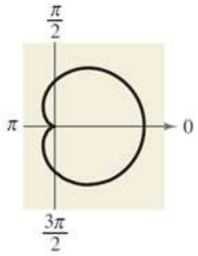
GRAFICAS POLARES ESPECIALES

CARACOL DE PASCAL:

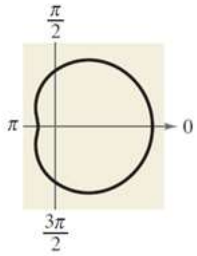
$$r = a \pm b\cos\theta$$
$$r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$$



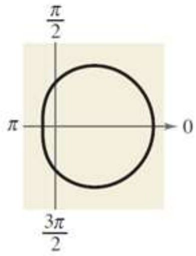
$\frac{a}{b} < 1$
Limaçon con lazo interior



$\frac{a}{b} = 1$
Cardioide (forma de corazón)

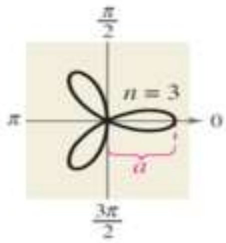


$1 < \frac{a}{b} < 2$
Caracol con depresión

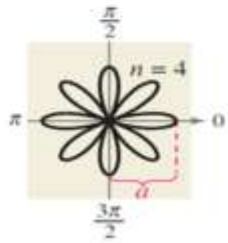


$\frac{a}{b} \geq 2$
Limaçon convexo

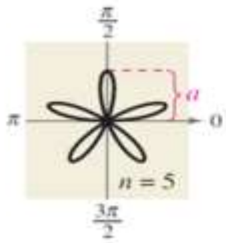
n pétalos si "n" es impar.
2n pétalos si "n" es par.
$(n \geq 2)$



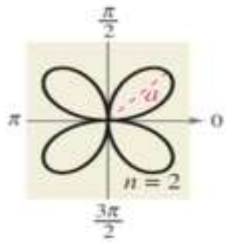
$r = a\cos n\theta$
Curvas roseta



$r = a\cos n\theta$
Curvas roseta

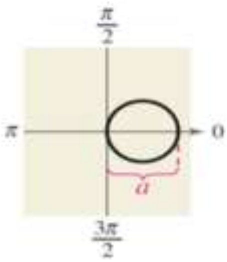


$r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$
Curvas roseta

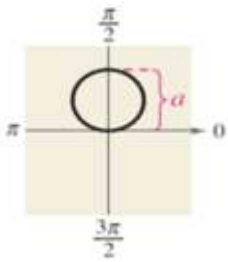


$r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$
Curvas roseta

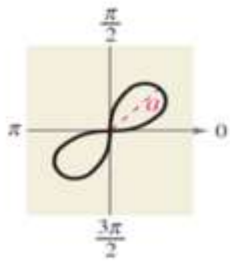
CIRCUNFERENCIAS Y LEMNISCATAS:



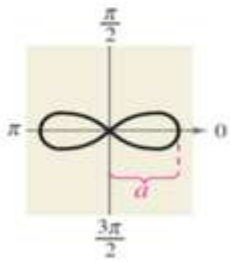
$r = a\cos\theta$
Circunferencia



$r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$
Circunferencia



$r^2 = a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$
Lemniscata



$r^2 = a^2\cos 2\theta$
Lemniscata

SESIÓN N° 44:
Cónicas en Coordenadas: Rectas, Circunferencias, Parábolas, Elipses E Hipérbola

Identifica y esboce su gráfica de las siguientes ecuaciones polares

1. $r = 4/(1 - \cos\theta)$
2. $r = 2/(1 + \cos\theta)$
3. $r = 8/(2 - \operatorname{sen}\theta)$
4. $r = 6/(3 + \operatorname{sen}\theta)$
5. $r = 10/(2 - 5\cos\theta)$
6. $r = 8/(4 + 8\operatorname{sen}\theta)$

Dadas las ecuaciones siguientes:

7. $r = 3/(1 - \operatorname{sen}\theta)$
8. $r = 4/(1 - \cos\theta)$
9. $r = 4/(2 - \cos\theta)$
10. $r = 3/(5 - \operatorname{sen}\theta)$
11. $r = 2/(1 - 2\operatorname{sen}\theta)$
12. $r = 4/(1 - 3\cos\theta)$

Hallar:

a. Las intersecciones con los ejes.

b. Coordenadas polares de los focos.

c. Coordenadas polares de los vértices.

d. Esboce su gráfica.

Determina la ecuación polar de la cónica, si el polo coincide con un foco de:

13. Parábola : $Vértice\ (1; -\frac{\pi}{2})$
14. Parábola : $Vértice\ (5; \pi)$

15. Parábola : $Vértice\ (10; \frac{\pi}{2})$

16. Elipse : Vértices: $(20; \frac{\pi}{2})$; $(4; \frac{3\pi}{2})$.

17. Elipse : Vértices: (20; 0) (4; π)

18. Elipse : $Vértices: \left(2; \frac{\pi}{2}\right); \left(4; \frac{3\pi}{2}\right)$

19. Elipse : $Vértices: (20; 0);\ (4; \pi)$

20. Hipérbola : $Vértices: (2; 0);\ (8; 0)$

21. Hipérbola : $Vértices: \left(1; \frac{3\pi}{2}\right); \left(9; \frac{3\pi}{2}\right)$

22. Hipérbola : Vértices (4; π/2), (1; π/2)

SESIÓN N° 45:

Prueba de desarrollo N°4

SEMANA N° 16

SESIÓN N° 46:

Examen final

SESIÓN N° 47:

Solución del Examen Final

BIBLIOGRAFIA Referencial

Básica:

- Larson, R. y Falvo, D. (2011). Precálculo. (8va ed.) México: Cengage Learning,
- Barnett, R. Ziegler, M. y Byleen, K. (2013). Precálculo. (7ma ed.). México: Mc Garw-Hill
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). Précalculo: Matemáticas para el Cálculo. (6ta ed.) México: Cengage Learning.
- Del Valle, J. (2012). Álgebra Lineal para Estudiantes de Ingeniería y Ciencias. Editorial Mc Graw Hill. México.

Complementaria:

- Swokowski y Cole (2009). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. (12° ed.). Mexico: Cengage Learning.
- Zill, D. y Dewar, J. (2008). Precálculo con avances de Cálculo. (4ta ed.) Colombia: McGraw-Hill.