Universidad Continental

Cálculo III

Wili Nelson Tarma Vivas

Datos de catalogación bibliográfica

TARMA VIVAS, Wili Nelson
Cálculo III: manual autoformativo interactivo / Wili Nelson Tarma Vivas. -- Huancayo: Universidad Continental, 2017

Datos de catalogación del Cendoc

Cálculo III. Manual Autoformativo Interactivo
Wili Nelson Tarma Vivas
Primera edición

Huancayo, abril de 2017

De esta edición
© Universidad Continental
Av. San Carlos 1980, Huancayo-Perú
Teléfono: (51 64) 481-430 anexo 7361
Correo electrónico: recursosucvirtual@continental.edu.pe
http://www.continental.edu.pe/

Versión e-book
Disponible en http://repositorio.continental.edu.pe/
ISBN electrónico N.° 978-612-4196-

Dirección: Emma Barrios Ipenza
Edición: Miguel Ángel Córdova Solís
Asistente de edición: Andrid Kary Poma Acevedo
Asesor didáctico: Fabio Contreras Oré
Corrección de textos: Sara Maricruz Bravo Montenegro
Diseño y diagramación: Alexander Frank Vivanco Matos

ÍNDICE

Universidad Continental

Universidad Continental

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales se presentan como una herramienta matemática para resolver problemas. En este nivel de la carrera el estudiante tiene las bases matemáticas necesarias para comprender la conexión de los conocimientos teóricos adquiridos con problemas que requieren una solución práctica en una amplia gama de disciplinas. Este curso, además de su utilidad como apoyo a los cursos que le suceden en el área donde se ubica, tiene un carácter formativo.

La asignatura es de gran importancia por su aplicación en el estudio de problemas físicos y geométricos que requieren el uso y resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, transformada de Laplace y series de Fourier, para efectuar cálculos en la elaboración de modelos matemáticos que simulan procesos y/o fenómenos físicos, por lo que es indispensable en la formación integral del ingeniero. De este hecho deriva la importancia de las ecuaciones diferenciales, ya que una de las tareas fundamentales del ingeniero consiste en el análisis y cálculo; es decir, la predicción de manera cuantitativa del comportamiento de un sistema o proceso para así proceder a su diseño, su análisis o para cumplir con ciertas especificaciones de producción.

Esta guía proporciona al estudiante que recibe su formación profesional de Ingeniería el hábito de razonamiento lógico, el manejo de los aspectos conceptuales y numéricos del lenguaje matemático (los cuales deben expresar en forma clara y concisa), el desarrollo de la imaginación y el interés por la aplicabilidad de la matemática en la ingeniería, adecuada a las condiciones reales en el campo del ejercicio profesional.

Estudiar no significa “aprender de memoria” algún tópico específico, pues la memoria es frágil y con toda seguridad que pasado el período de examen olvidará lo que según usted “estudió”. Todo estudiante no debe conformarse con “estudiar” para una prueba o certamen. El estudiante no debe “estudiar” para una nota. Usted debe realmente preocuparse de estudiar para aprender, pues así estará manejando la información y las herramientas que utilizará después en cursos superiores y posteriormente en su desarrollo profesional.

Los autor

ORGANIZACIÓN DE LA ASIGNATURA

Resultado de aprendizaje de la asignatura

Al finalizar la asignatura, el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, de transformada de Laplace y de Serie de Fourier, considerando las operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión en los diferentes campos de acción profesional.

Unidades didácticas

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
Ecuaciones diferenciales ordinarias	Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	Transformada de laplace	Series de fourier
Resultado de aprendizaje	**Resultado de aprendizaje**	**Resultado de aprendizaje**	**Resultado de aprendizaje**
Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias usando diferentes métodos de resolución y análisis de resultados.	Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, usando diferentes métodos de solución.	Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar la transformada de Laplace para resolver problemas de una ecuación diferencial lineal de orden "n", utilizando diversas técnicas y métodos de solución.	Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar la serie de Fourier para resolver problemas de aproximación, diferenciación e integración, aplicando los diferentes métodos y técnicas.

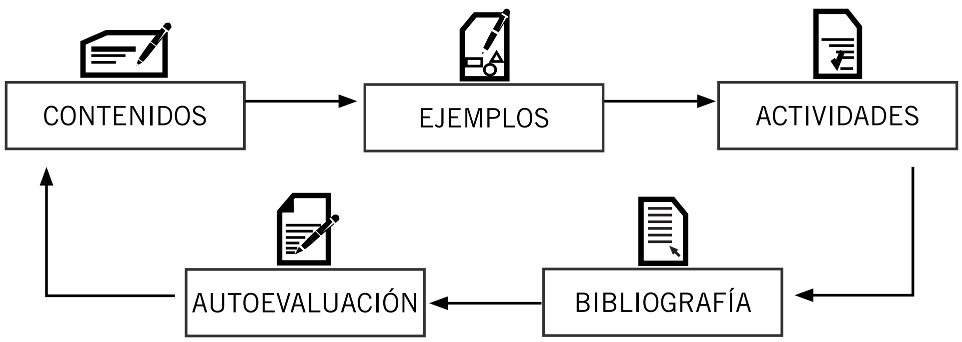
Tiempo mínimo de estudio

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
Semana 1 y 4	Semana 5	Semana 6 y 7	Semana 8
24 horas	06 horas	12 horas	06 horas

UNIDAD I

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD I



ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

Resultado de aprendizaje de la Unidad I:

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias usando diferentes métodos de resolución y análisis de resultados.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
TEMA N.º 1 **INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES** 1. Definiciones y terminología 2. Problemas de valor inicial 3. Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos **TEMA N.º 2** **ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN** 1. EDO de variable separable ♦ Reductible a variable separable 2. EDO homogéneas ♦ Reductible a homogéneas 3. EDO exactas ♦ Factor de integración 4. EDO lineales ♦ EDO de Bernuolli ♦ EDO de Riccatti **Lectura seleccionada 3:** **TEMA N.º 3** **ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR** 1. Reducción de orden 2. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes 3. Coeficientes indeterminados 4. Variación de parámetros 5. Ecuación de Cauchy-Euler 6. Ecuaciones no lineales 7. Modelos lineales: Problemas de valor inicial ♦ Sistemas resorte-masa: movimiento libre no amortiguado ♦ Sistemas resorte-masa: movimiento libre amortiguado **TEMA N.º 4** **APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES** 1. Problemas geométricos 2. Trayectorias ortogonales 3. Cambio de temperatura 4. Descomposición, crecimiento y reacciones químicas 5. Circuitos eléctricos simples **Autoevaluación de la Unidad I**	1. Utiliza instrumentos, técnicas y fórmulas, en una ecuación diferencial ordinaria. 2. Resuelve problemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y de orden superior. 3. Interpreta el resultado en la solución de una ecuación diferencial ordinaria. **Actividad n.º 3** Los estudiantes participan en el "Foro de discusión sobre ecuaciones diferenciales ordinarias". **Control de lectura n.º 1** Evaluación del tema n.º 1 y 2, más los contenidos de la lecturas 1.	1. Muestra conductas asociadas a la actividad matemática, tales como la puntualidad, el orden, contraste, precisión y revisión sistemática, y critica de los resultados. 2. Trabaja en forma individual y grupal las actividades propuestas.

Introducción a las ecuaciones diferenciales

Tema n.° 1

Se entiende por ecuación diferencial cualquier ecuación en la que interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes.
Ejemplos de ecuaciones diferenciales:

$$y' = 4x - 6$$
$$y' = (4 + x)4$$
$$y' = e - 3x + 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = 5$$
$$(x-1)dy = 5dx$$

El problema consiste en encontrar una función que satisfaga a la ecuación dada, para algún intervalo de números reales. Generalmente, se quiere encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial, si ello es posible.

1. DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$x2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} - 3xy + 4z\sec y = 0$$

Las dos primeras ecuaciones contienen derivadas ordinarias y, por la forma en que están escritas, vemos que $y = f(x)$; la tercera ecuación contiene derivadas parciales y podemos ver que $z = f(x, y)$.

El orden de una ecuación diferencial es el máximo orden de las derivadas que contiene.

CLASIFICACIÓN

TIPOS DE ECUACIONES
ORDINARIAS. Solo una variable es independiente F(dy, dx).

$$F(d^2y, dx^2) - 2\,F(dy, dx) + 6y = 0$$
$$(x + y)\,dx - 4y^2\,dy = 0$$

PARCIALES. Más de una variable es independiente F(∂T, ∂x), F(∂T, ∂y).

$$F(\partial^2 u, \partial x^2) = 2\,F(\partial u, \partial t)$$
$$F(\partial u, \partial y) = -\,F(\partial u, \partial x)$$

ORDEN. Es orden de la derivada más alta.

$$F(d^2y, dx^2) - 2(F(dy, dx))^3 + 6y = x$$

LINEALIDAD. Debe tener la forma.

$$a_2(x)\, F(d^2y, dx^2) + a_1(x)\, F(dy, dx) + a_0(x)y = g(x)$$

Notar que

i) Tanto *y* como sus derivadas son de primer grado (potencia = 1)
ii) Los coeficientes $a_i(x)$ solo dependen de x.

De una ecuación que no es de esta forma se dice que es no lineal.

Ejercicio

Clasifica las siguientes ecuaciones:

1. $xdy + ydx = 0$
2. $y'' - 2y' + y = 0$
3. $x^3 F(d^3y, dx^3) - x^2 F(d^2y, dx^2) + 3x F(dy, dx) + 5y = e^x$
4. $y\, y'' - 2\, y' = x$
5. $F(d^3y, dx^3) + y^2 = 0$
6. $(\text{sen } x)y''' - (\cos x)\, y' = 2$
7. $F(d^2y, dx^2) + 9y = \text{sen } y$

Solución de una ED.- Sea una función y = f(x), cualquiera es solución de la ecuación diferencial si al ser sustituida en dicha ecuación conduce a una identidad.

Ejemplos:

1. $y = x^4/16$ es solución de
   $F(dy, dx) - xy^{1/2} = 0$
   Puesto que $y' = x^3/4$ y sustituyendo en la ED.
   $x^3/4 - x(x^4/16)^{1/2} = 0$
2. $y = xe^x$ es una solución de
   $y'' - 2y' + y = 0$
   ya que: $y' = xe^x + e^x$
   $y'' = xe^x + 2e^x$
   Obsérvese que:
   $y'' - 2y' + y = xe^x + 2e^x - 2(xe^x + e^x) + xe^x$
   $= 2xe^x - 2xe^x + 2e^x - 2e^x$
   $= 0$
3. $y = c/x + 1$ es solución de
   $x\, F(dy, dx) + y = 1$
4. Las funciones $y_1 = c_1\cos 4x$ e $y_2 = c_2$ sen 4x son soluciones de $y''+16y = 0$.
5. La función $y = y_1 + y_2$ del ejemplo anterior también es solución.

2. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Desarrollaremos métodos numéricos para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de valores iniciales.

Un problema de valor inicial consiste en una ecuación diferencial y en una condición que debe satisfacer la solución (o varias condiciones que se refieren al mismo valor de x, si la ecuación es de orden superior).

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \wedge \quad y_0 = y(x_0)$$

Frecuentemente no se está interesado en hallar "todas" las soluciones de una ecuación, sino solamente en aquellas que además satisfagan determinadas **condiciones iniciales**. En dichos casos, si a la ecuación diferencial se le agrega -*al menos*- una "condición inicial" $y(x_0)= y_0$, se tiene un "problema de valores iniciales" (PVI).

Observación: Dada una ecuación diferencial, esta podrá tener o no solución dependiendo de la condición inicial. En caso de tenerla, podrá no ser única, (este tema se tratará con más detalle al analizar el teorema de existencia y unicidad) como veremos en los siguientes ejemplos:

a) Sea la ecuación xy' = 4y, con la condición inicial y (0) = 1.
Por simple inspección, se deduce que no existe solución porque: 0.y'(0) = 0 pero 4.y(0) = 4
Por otro lado, si tenemos la condición inicial y(1) = 1, podemos verificar que una solución es $y=x^4$, pero también lo son las funciones del tipo:

$$y(x)=\begin{cases} x^4 & \text{si } x>0 \\ C\,x^4 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$
Donde C es una constante real cualquiera.

b) La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población P(t) con índices constantes de nacimiento y mortalidad es en muchos casos simple, proporcional al tamaño de la población. Es decir: dP/dt = kP donde k es la constante de proporcionalidad.

A fin de uniformar la escritura, anotemos la ecuación anterior así:

$$y' = ky \qquad (1)$$

(y: población, en función del tiempo: x)

Cada función de la forma $y(x)= C.e^{kx}$ (2) es una solución de la ecuación diferencial (1). Verificamos esta afirmación: $y'(x)= k.Ce^{kx} =k.y(x)$ para todos los números reales x.

Debido a que la sustitución de cada función de la forma dada en (2) en la ecuación (1) produce una identidad, todas esas funciones son soluciones de la ecuación dada. Así, aun cuando el valor de la constante k sea conocido, la ecuación y'=ky tiene infinitas soluciones diferentes de la forma antes mencionada (una por cada elección de la constante arbitraria C). También puede demostrarse que toda solución de (1) tiene la forma dada en (2). Se dice, por lo tanto, que $y(x)= C.e^{kx}$ es la "solución general" de la ecuación y'=ky.

Ahora bien, si a la ecuación y'=ky le agregamos la condición y(0)=1, estamos en presencia de un PVI. En este caso se reemplazan los datos iniciales, en la expresión (2) y luego se despeja C:

$$y(x)= C.e^{kx}$$
$$y(0)= C.e^{k.0}$$
$$\therefore 1= C$$

con lo cual, la solución del PVI es $y= e^{kx}$, llamada "solución particular".

3. ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

Las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta poderosa y versátil para resolver problemas provenientes de los más diversos horizontes: de la mecánica a la biología, de la electricidad a la economía, etc.

El primer paso de la resolución de estos problemas es la modelación, es decir la "traducción" en relaciones matemáticas de los aspectos intrínsecos más relevantes de la situación planteada.

En este curso se pretende, mediante el estudio de casos variados, a desarrollar algunas metodologías para el modelado matemático vía las ecuaciones diferenciales.

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene derivadas de una función desconocida. Si dicha función es de variable real, se denomina ecuación diferencial ordinaria (EDO), y si la función incógnita es de varias variables, la ecuación será en derivadas parciales (EDP).

La forma general de representar una EDO será de la siguiente forma:

(1.1) $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(N)})=0$, con $y=f(x)$

El orden de una EDO es el orden de la mayor derivada.

La forma (1.1) es una relación entre n+2 variables. Supondremos que siempre es posible resolverla para $y^{(n)}$ en términos de las otras variables, dando la forma normal:

(1.2) $y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$

Las EDO son lineales si F es función lineal de las variables $y,y',y'',\ldots,y^{(n)}$. Entonces, pueden tomar la siguiente forma:

(1.3) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} +\ldots+ a_0(x)y^{(n)} = g(x)$

Si no es así, entonces se les llama ecuaciones no lineales.

Cuando la función g(x) es idénticamente nula, se habla de una ecuación homogénea y su contrario será la ecuación no homogénea.

Recordemos que dada una ecuación diferencial se tienen los siguientes problemas:
(i) Existencia de la solución
(ii) Unicidad de la solución
(iii) Cálculo de la solución (métodos analíticos) o de una "aproximación" de ella (métodos numéricos)

La variable de las ecuaciones diferenciales, notada aquí como **x**, puede ser el tiempo, notada **t**, en cuyo caso se trata de un fenómeno dinámico y puede ser necesario determinar si el comportamiento es periódico. Por otro lado, las ecuaciones pueden acusar un desplazamiento temporal dando origen a las ecuaciones con retardo.

Si la ecuación depende únicamente de las variables espaciales, se habla de ecuaciones autónomas.

Además de la ecuación, en la práctica hay que imponer condiciones adicionales que pueden ser de inicio o de borde (o de frontera).

En la mayoría de casos es imposible representar la solución en forma analítica (mediante fórmulas). La ecuación misma puede dar información sobre las características de la solución. Lo que interesa es el comportamiento cualitativo a largo plazo. Por ejemplo, para una población es importante determinar si se mantendrá o tenderá a desaparecer.

Algunos modelos, pueden requerir no de una sino de varias ecuaciones, esto es, de un sistema.

3.1. MODELOS PROVENIENTES DE LA FÍSICA

El origen de las ecuaciones diferenciales está íntimamente ligado al estudio de fenómenos físicos. La física constituye una mina inagotable de problemas que estimulan el desarrollo de la teoría y de las aplicaciones matemáticas.

En lo que sigue repasaremos algunos modelos clásicos, insistiendo sobre el enfoque metodológico expuesto en el punto precedente.

3.1.1. Un problema diferencial con condiciones iniciales

Estudiaremos el péndulo de torsión.

- El problema

Un sólido S puede oscilar alrededor de un eje vertical OO´ con respecto al cual su momento de inercia es I.

El referido sólido está sometido a una cupla proporcional al ángulo de rotación θ (calculado a partir de una cierta posición de origen) y a una cupla de frotamiento proporcional a la velocidad angular.

El objetivo es encontrar la función que determina la posición instantánea del sólido.

- Elección de las variables independientes

La única variable independiente es el tiempo **t**.

- Elección de las funciones incógnitas

La posición del sistema está completamente determinada por el dato de θ, ángulo de rotación a partir de una posición origen. El problema consiste, entonces, en hallar la función $\theta(t)$.

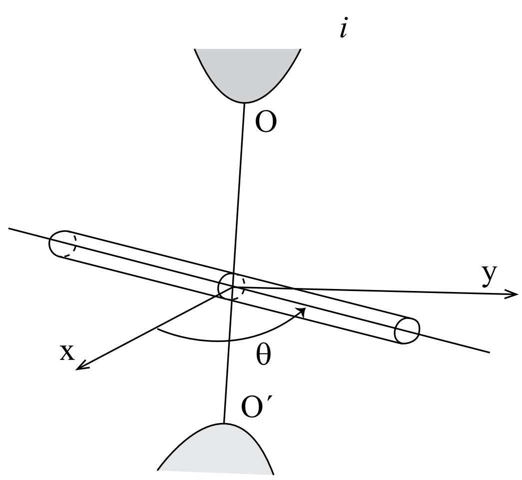


Figura 1. Sistema del péndulo de torsión. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

- Escritura de las leyes físicas

La derivada respecto al tiempo del momento cinético alrededor de OO´ es igual a la suma de las fuerzas aplicadas:

(2.1) $$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_i C_i$$

Hay dos cuplas aplicadas:

- la de frotamiento proporcional a la velocidad angular representada por la siguiente expresión:

$$C_1 = f\frac{d\theta}{dt}$$

- la debida a la torsión del hilo

Supondremos que el origen de los ángulos θ es la posición para la cual la cupla es nula:

$$C_2 = -C\theta$$

Remplazando en (2.1) los valores de C_i, se obtiene lo siguiente:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = f\,\frac{d\theta}{dt} - C\theta$$

o

(2.2) $$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\,\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0$$

Con lo cual, finalmente, se obtiene una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes (positivos).

- *Observación sobre los signos de los coeficientes*

La forma general de la ecuación (2.2) que se estudia matemáticamente es la siguiente:

(2.3) $\mathrm{a}\theta'' + \mathrm{b}\,\theta' + \mathrm{c}\theta = 0$

donde el signo de los coeficientes no interesa (por el momento).

En cambio, desde el punto de vista físico, los signos de los coeficientes son importantes desde el principio, pues las soluciones tendrán comportamientos que serán muy diferentes. Así, por ejemplo, si consideramos las ecuaciones:

(a) $\theta'' - 3\theta' + 2\theta = 0$
(b) $\theta'' + 3\theta' + 2\theta = 0$
(c) $\theta'' + \theta = 0$
(d) $\theta'' + \theta' + \theta = 0$

las soluciones de (a) crecerán exponencialmente, las de (b) tenderán hacia cero, las de (c) oscilan sin amortiguamiento y las de (d) oscilan con amortiguamiento.

- *Condiciones iniciales*

La ecuación (2.2) posee una infinidad de soluciones. En las circunstancias dadas, la naturaleza no produce varios fenómenos simultáneos, por lo cual el físico se interesa en una solución particular. Esta se caracterizará por condiciones del tipo siguiente:

En el instante t_0 la barra está en la posición dada por el ángulo θ_0

(2.4) $$\theta(t_0) = \theta_0$$

en el instante t_0 la barra tiene la velocidad angular ω_0

(2.5) $\theta'(t_0) = \omega_0$

Nos interesamos en la evolución de la barra para $t \in [t_0, \infty[$

Finalmente, el problema constituido por la ecuación diferencial del péndulo de torsión (2.2) y de las condiciones (2.4) y (2.5) se conoce como un problema diferencial con condiciones iniciales. Este problema tiene solución única, por lo cual se dice que está bien planteado.

3.1.2. Un modelo único para dinámica de partículas y para circuitos eléctricos

La ecuación (2.3) a θ´´ + b θ´+ c θ = 0 que eventualmente puede tener lado derecho no nulo es un modelo que describe sistemas físicos completamente diferentes: unos de origen mecánico, otros de origen eléctrico.

a) La dinámica de "partículas"

Aquí las leyes fundamentales de la mecánica (las leyes de Newton) permitirán la modelación. Consideremos una masa m que se desplaza sin frotamiento en la dirección de un vector unitario $\vec{i}$ sometida a una fuerza $\vec{F}$ de módulo F .

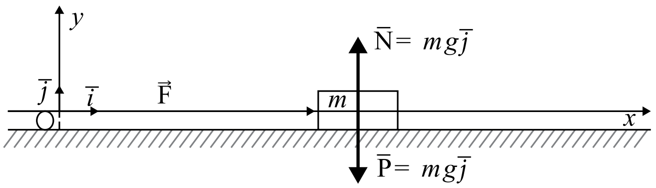


Figura 2. Modelación de la dinámica de partículas. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

Aplicando el principio de acción y reacción, se obtiene sobre el eje de las x:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Varios casos son posibles según la naturaleza de la fuerza $\vec{F}$:
. La fuerza es constante.
. La fuerza es función del tiempo.
. La fuerza es función de la velocidad.
. La fuerza es función de posición de la partícula.

En este último caso, el ejemplo más simple es considerar que la masa está atada a un resorte fijo por el otro extremo.

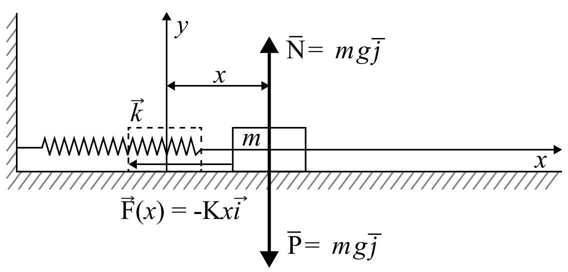


Figura 3. Modelación de la dinámica de partículas. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

Entonces, la última relación se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(x)}{m}$$

donde F(x) es la fuerza del resorte que puede representarse por -kx, lo que nos lleva a la ecuación diferencial de segundo orden:

(2.6) $m\frac{d^2X}{dt^2} + kx = 0$

cuya solución general es

(2.7) $x(t) = Asen\sqrt{\frac{k}{m}}t + Bcos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

donde A y B son constantes que se determinan por las condiciones iniciales sobre la posición y la velocidad de la partícula en el instante t_0.

b) Circuito eléctrico

Consideramos un circuito LCR (inductancia, capacitancia y resistencia).

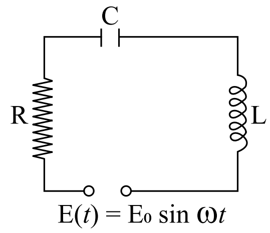


Figura 4. Modelo de un circuito LCR. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

Aplicando las leyes de Kirchoff, se llega a la ecuación:

(2.8) $L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E_0\omega(cos\omega t)$

donde la corriente i es función del tiempo en el circuito.

Volvemos a encontrar una ecuación diferencial lineal de segundo orden, pero no homogénea. En este caso las matemáticas nos dan un modelo similar al de la mecánica, constituyéndose en un lenguaje y herramientas generales y unificadoras.

3.1.3. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

En una ecuación diferencial debe aparecer al menos una derivada de la función incógnita. Si recordamos que la interpretación geométrica de la primera derivada de la función en un punto dado es el límite (único) de las pendientes evaluadas en dicho punto, es evidente que habrá una conexión entre problemas geométricos y problemas diferenciales.

3.1.3.1 Ecuación diferencial de primer orden e interpretación geométrica

a) Formación de una ecuación diferencial de primer orden

Consideremos una familia de curvas dependiendo de un parámetro *c* de ecuación

(3.1) *F(t,y,c)* = 0

A cada valor de c corresponde una curva de la familia.
Suponiendo que la función F admite derivadas parciales respecto a *t* y a *y*, sabiendo además que *y* es función de *t*, se obtiene:

(3.2) $$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$$

La eliminación del parámetro c entre las ecuaciones (3.1) y (3.2) conduce a una relación

(3.3) $R(t,y,y')=0$

que representa la ecuación diferencial de primer orden asociado a la familia de curvas definida por (3.1).

Así tenemos el siguiente resultado:

Dada una familia de curvas dependiendo de un parámetro, todas estas curvas son las curvas integrales de una misma ecuación diferencial bajo las hipótesis precedentes. Recíprocamente, la resolución de una ecuación diferencial de primer orden da una familia de curvas dependiendo de un parámetro.

Ejemplo 3.1.
Sea la familia de curvas

(3.4) $y=c(1+t)^{\alpha}$, donde c: parámetro y a ≥ 1 (fijo)

Entonces,

$$\frac{dy}{dt}=c\alpha(1+t)^{\alpha-1}$$

La eliminación de c entre estas dos ecuaciones nos da la ecuación diferencial de primer orden

$$(1+t)y'-\alpha y=0$$

que admite una infinidad de soluciones dadas por (3.4).

La Figura 5 representa la familia de curvas soluciones si a=1.

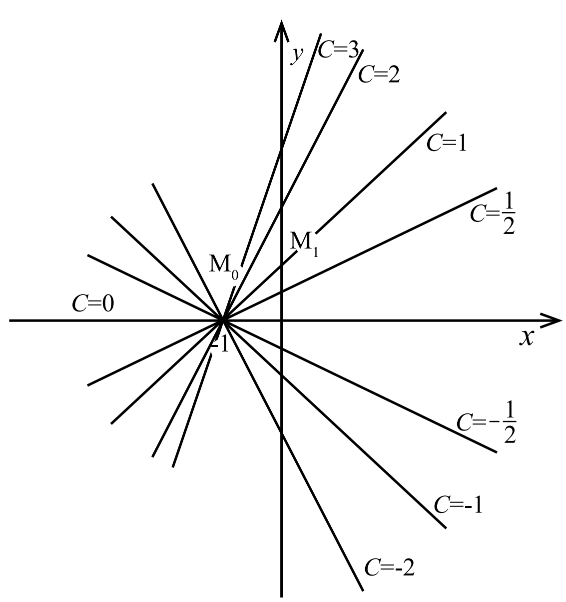


Figura 5. Familia de curvas soluciones. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

b) Interpretación geométrica de una ecuación diferencial de primer orden

Sea la ecuación diferencial escrita bajo la forma resuelta

(3.5) $y' = f(t,y)$

donde f es una función definida y continua sobre una parte D del plano.

Sea $M(t,y)$ un punto de la curva integral (Γ) de (3.5) que admite en M una tangente $y'=f(t,y)$. Entonces, tenemos el siguiente resultado:

Para que una solución y=φ(t) definida en un intervalo I sea solución de y´=f(t,y), es necesario y suficiente que su grafo (Γ) admita en todo punto M una tangente de pendiente y´=f(t,y).

Esta es la base de la integración gráfica de una ecuación diferencial. La función *f* define un campo tangente en la región en la cual está definida. En la Figura 5 se ha definido una parte del campo tangente definido por la función $f(t,y)= y'$.

Esta interpretación geométrica puede extenderse a sistemas de ecuaciones de primer orden.

3.1.3.2 Algunas propiedades de las curvas en el plano

Supongamos que tenemos una curva en el plano definida por la ecuación F(x,y)=0. Recordemos que si (x,y) es un punto cualquiera de dicha curva se pueden definir conceptos tales como pendiente y rectas: tangente, subtangente, normal, subnormal (ver Fig. 3.2). Estas nociones involucran a la derivada. Así, por ejemplo:

(i) $\frac{dy}{dx}$ $(\frac{dx}{dy})$ es la pendiente de la tangente (normal) a la curva en (x,y).

(ii) x-y $\frac{dy}{dx}$ e y-x $\frac{dy}{dx}$ son las intercepciones de la recta tangente con los ejes x e y respectivamente.

(iii) $x - y\frac{dx}{dy}$ e $y\frac{dy}{dx}$ son las longitudes de la subtangente y la subnormal.

Estas y otras nociones relacionadas pueden expresarse igualmente en coordenadas polares.

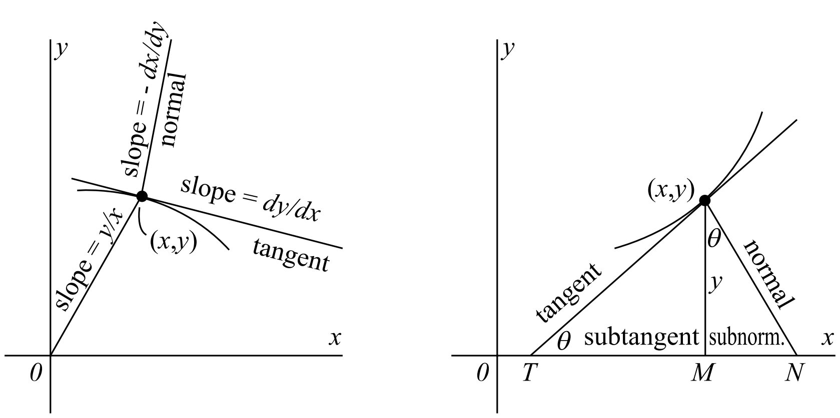


Figura 6. Propiedades de las curvas en el plano. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

Ejemplo 3.2.
Si en cada punto (x,y) de una curva la subtangente es proporcional al cuadrado de la abscisa, determinar la curva que pasa por el punto (0,e).

Usando la definición (iii) y la condición del problema, obtenemos la ecuación:

$$y\frac{dx}{dy} = kx^2$$

donde k es el factor de proporcional.

Resolviendo por variables separadas, se obtiene la solución general:

$$klny = -\frac{1}{x} + C$$

donde C es la constante a definir a partir de la condición y(0)=e. La curva requerida es la siguiente:

$$klny = -\frac{1}{x} + k + 1$$

3.1.3.3 Trayectorias

Se dice que una curva que corta a todos los miembros de una familia dada de curvas a un ángulo constante ω se llama una ω - trayectoria a la familia. Si ω es 90°, se dice que se trata de una trayectoria ortogonal.

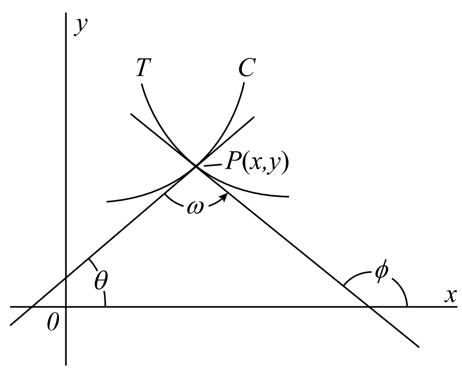


Figura 7. Familia de curvas soluciones. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

Las curvas integrales de la ecuación diferencial

(3.6) $\quad f\left(x, y, \frac{y'-tan\omega}{1+y'\,tan\omega}\right) = 0$

son las ω -trayectorias de la familia de las curvas integrales de

(3.7) $\quad f(x, y, y') = 0$

Por su parte, las curvas integrales de la ecuación

(3.8) $\quad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$

son las trayectorias ortogonales de la familia de las curvas integrales de (3.7).

<u>Ejemplo 3.3.</u>
Encontrar las trayectorias ortogonales a la hipérbola xy = C.

Al derivar la ecuación dada, obtenemos la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Ahora debemos remplazar en la última ecuación obtenida $\frac{dy}{dx}$ por -$\frac{dx}{dy}$, lo cual nos conduce a a $-x\frac{dx}{dy}+y=0$, cuya integración de la familia de curvas ortogonales es otra familia de hipérbolas de ecuación:

$y^2-x^2=C$ (ver Fig. 8)

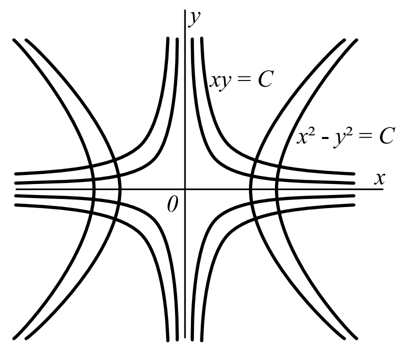


Figura 8. Familia de hipérbolas de la ecuación. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

Ejemplo 3.4
Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de cardiodes

$$\rho=C(1+sen\theta)$$

En primer lugar, hay que señalar que en el caso de coordenadas polares las curvas integrales de la ecuación diferencial

$$f\left(\rho,\theta,-\rho^2\frac{d\rho}{d\theta}\right)=0$$

son las trayectorias ortogonales de las curvas integrales de

$$f\left(\rho,\theta,\frac{d\rho}{d\theta}\right)=0$$

Por tanto, diferenciando la ecuación de las cardioides respecto a θ, se obtiene $\frac{d\rho}{d\theta}=Ccos\theta$ de donde se despeja C y se remplaza para obtener finalmente la ecuación

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{\rho cos\theta}{1+sen\theta}$$

cuya solución es la familia de curvas $\rho=C(1-sen\theta)$

3.1.4. MODELOS DE CRECIMIENTO

Una interpretación de la derivada según su signo corresponde al crecimiento de la función, en el caso positivo, o al decrecimiento si el signo es negativo. Esto permite utilizar las ecuaciones diferenciales de primer orden para describir reacciones químicas de descomposición, poblaciones o crecimiento económico.

3.1.4.1. Descomposición reactiva

Se considera que una reacción química es de primer orden si una molécula se descompone espontáneamente en moléculas menores a un ritmo no afectado por la presencia de otras sustancias. En estas condiciones es de esperarse que el número de moléculas que se descompondrán en una unidad de tiempo sea proporcional al número total actual.

Si hay inicialmente x_0 gramos de una sustancia que se descomponen mediante una reacción de primer orden, y si x es el número de gramos presente en un instante posterior *t*, obtendremos la ecuación diferencial

(4.1) $-\frac{dx}{dt} = kx, \quad k>0$

donde el lado izquierdo representa el índice de decrecimiento (por ello, el signo es negativo) mientras el lado derecho expresa la proporcionalidad con la cantidad de sustancia a través del coeficiente de rapidez *k>0*.

La solución de (4.1) con la condición inicial $x(0) = x_0$, mediante separación de variables es

(4.2) $x = x_0 e^{-kt}$

Su gráfica corresponde a la Figura 9.

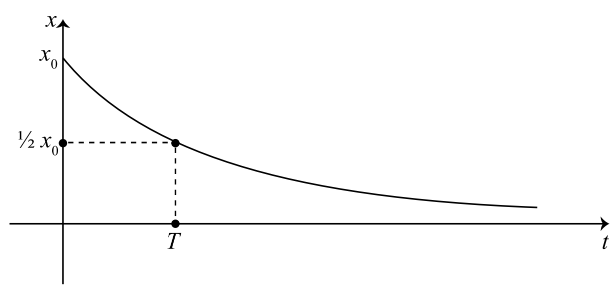


Figura 9. Descomposición exponencial. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

Por ser la descomposición radioactiva la más importante de las pocas reacciones químicas de primer orden, es conveniente expresar la rapidez de la descomposición de un elemento radioactivo en términos de su vida media, que es el tiempo necesario para que una cantidad dada de elemento disminuya a la mitad.

Si se remplaza x por $x_0/2$ y se denomina T a la vida media, se halla

(4.3) $kT=\ln 2$

Si se conoce *k* o *T*, a partir de observaciones o experimentos, se puede encontrar mediante la última ecuación el otro término.

Estos cálculos permiten usar la información de elementos radioactivos con vidas medias conocidas que existen en la naturaleza para la datación en geología y arqueología.

3.1.4.2. Modelos poblacionales

Como el número de individuos de una especie es entero, parece imposible, en principio, usar ecuaciones diferenciales para describir su crecimiento. Entonces se debe asumir que poblaciones grandes cambian de manera continua y diferenciable con respecto al tiempo.

Denotaremos *p(t)* la población de una especie dada en el tiempo t y *r(t,p)* la diferencia entre las tasas de natalidad y de mortalidad. Supondremos también que la población es p_0 en el tiempo t_0.

a) Ley de crecimiento de Malthus

Bajo la hipótesis de que la población está aislada, es decir que no existe emigración o inmigración, la tasa de variación de la población es proporcional a la población en ese tiempo.

(4.3) $\frac{dp(t)}{dt} = r(t, p)p(t)$

En el modelo más simple, Malthus consideraba que *r(t,p)* es igual a una constante *a*, es decir que *r* no depende del tiempo ni de la población. En este caso, la solución del problema de valor inicial es:

(4.4) $p(t) = p_0 e^{\alpha(t-t_0)}$

El crecimiento resulta exponencial con el tiempo. Este modelo no es razonable para la población humana, pero se ajusta bien al pequeño roedor *Microtus arvallis pal*.

b) Ley logística para la población

La ecuación (4.3) no da cuenta de la competencia que desarrollan entre sí los individuos de una misma especie por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible.

Hay que agregar un término competitivo dado por $-bp^2$, donde b es una constante, ya que el promedio estadístico del número de encuentros por unidad de tiempo es proporcional a p^2.

Entonces tenemos que resolver el problema de valor inicial:

(4.5) $\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \quad , \quad p(t_0) = p_0$

Esta ecuación se conoce como la ley logística del crecimiento de una población y a los coeficientes *a* y *b* se le dice coeficientes vitales.

La solución de (4.5) mediante separación de variables resulta

(4.6) $p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0 e^{-a(t-t_0)})}$

Vamos a examinar el tipo de población que predice.

Si $t \to \infty$ se tiene que $p(t) \to \frac{ap_0}{bp_0} = \frac{a}{b}$

Es decir, independientemente del valor inicial la población siempre tiende al valor límite a/b.

Un análisis de la segunda derivada de *p(t)* nos permite concluir que $\frac{dp}{dt}$ es creciente si $p(t)<a/2b$ y que $\frac{dp}{dt}$ es decreciente si $p(t)>a/2b$.

La Figura 10 muestra la curva logística (en *S*) si $p_0<a/2b$. A partir de su forma se concluye que el tiempo anterior al que la población alcance la mitad de su valor límite es un período de crecimiento acelerado. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta ser cero.

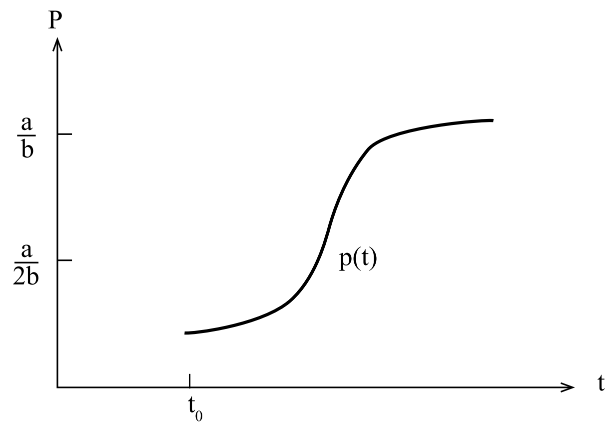


Figura 10. Curva logística. Tomada de http://bit.ly/2aLmVeE

Una confirmación de esta ley logística se llevó a cabo experimentando con el protozoario *Paramecium caudurum*.

<u>Observaciones</u>

- Si se cambian los signos de *a* y *b* en la ecuación (4.5), se observará en la Figura 11 que a partir de un umbral (población crítica) se puede ir hacia la extinción o crecer sin límite, dependiendo de los valores de *a* y de *b*.

- b> Se podría enriquecer el modelo considerando, por una parte, una población crítica, de modo que partiendo de una población inferior a este valor crítico se vaya a la extinción, y por otra, una población máxima, de tal manera que con valores superiores el crecimiento sea sin límite. Esta situación aparece en la Figura 11 y supone que se deben considerar más coeficientes vitales.

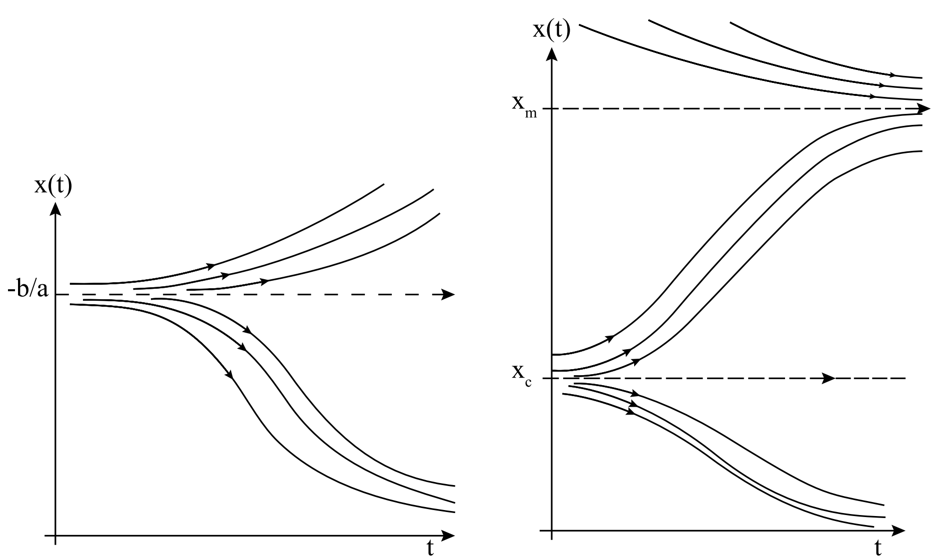


Figura 11. Espacio de fases para una especie en aislamiento. Tomada de https://goo.gl/blq2q0

En el caso de dos especies habrá que plantear un sistema de dos ecuaciones diferenciales.

3.1.4.3. Modelos de crecimiento económico

Tanto la derivada como la integral de una función, así como sus puntos extremos, tienen interpretaciones de tipo económico. Hay situaciones que involucran ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias, según se trate de una situación continua o discreta.

El modelo de crecimiento de Domar

Las premisas del modelo son las siguientes:

1. Cualquier cambio en la tasa del flujo de inversión por año *I(t)* afectará a la demanda agregada y a la capacidad productiva.

2. El efecto demanda de un cambio operado en *I(t)* actúa instantáneamente mediante un efecto multiplicador. Un incremento en *I(t)* elevará la tasa del flujo del ingreso por año *Y(t)* por un múltiplo *k=1/s* del incremento de *I(t)*. Aquí *s* representa la propensión marginal al consumo. Entonces,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt}\frac{1}{s}$$

3. El efecto capacidad de la inversión ha de ser medido por el cambio en la tasa potencial de producción que la economía es capaz de generar. Si k representa la capacidad o el flujo potencial de producción anual y *K* el capital, podemos suponer que la relación $k/K=\rho$ es constante. Entonces,

$$\frac{dk}{dt} = \rho\frac{dK}{dt} = \rho\mathrm{I}$$

El modelo de Domar supone que el equilibrio está definido por una situación en donde la capacidad productiva está plenamente utilizada, esto es $Y=k$, lo cual nos permite escribir la siguiente expresión:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dk}{dt}$$

La pregunta es determinar la trayectoria temporal de la inversión I(t) que satisfaga esta condición de equilibrio en cualquier período.

Combinando las relaciones anteriores, llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{dt}\frac{1}{s} = \rho I$$

que al suponer una inversión inicial *I(0)* nos da la siguiente solución:

$$I(t) = I(0)e^{\rho st}$$

El resultado es exponencial y, por tanto, inquietante desde el punto de vista económico.

Al modificar las hipótesis se obtienen modelos más flexibles, como el de Solow.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Tema n.° 2

1. EDO DE VARIABLE SEPARABLE

Sea la ecuación y' = f(x). g(y)
Si g(y) es distinto de cero, entonces:

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int f(x)dx$$

(3) Efectuemos un cambio de variable llamando *Y = y(x),* entonces *dY = y'(x)dx*
Reemplazando en (3), resulta

$$\int \frac{dY}{g(Y)} = \int f(x)dx$$

y, por lo tanto, G(Y) = F(x) + C que nos da la solución general *y(x)* definida en forma implícita, además de que G y F son primitivas de 1/g y f respectivamente.
Si se puede despejar *y* de esta expresión, tendremos la solución general *y(x)* en forma explícita*,* dependiendo de una constante C, a determinar por los datos iniciales.
En la práctica, para resolver ecuaciones de esta forma se adopta la siguiente
regla:

dy/dx = f(x).g(y)
∫ dy/g(y) = ∫ f(x)dx *(g(y)≠ 0)*
G(y) = F(X) + C

Una ecuación diferencial de primer orden es de variables separadas cuando se la puede transformar de modo que en cada miembro figure solo una de las variables.
La solución general se obtiene integrando ambos miembros.
Ejemplo:

$$cos^2x.y^{'} = 2y + 4 \Rightarrow COS^2x.\frac{dy}{dx} = 2y + 4 \Rightarrow \frac{dy}{2y+4} = \frac{dx}{cos^2x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{2y+4} = \int \frac{dx}{cos^2x} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2.dy}{2y+4} = \int \frac{dx}{cos^2x} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2y + 4| = tanx + c$$

$$\Rightarrow \ln|2y + 4| = 2.tanx + 2c \Rightarrow 2y + 4 = e^{2.tanx+2c} \Rightarrow y = \frac{e^{2tanx+2c}+4}{2}$$

❖ REDUCTIBLE A VARIABLE SEPARABLE

Una ecuación de la forma $y' = f(ax + by + c)$ siempre puede reducirse al tipo de variables separables haciendo la sustitución:

$$ax + by + c = t$$

En efecto, de esta expresión se obtiene

$$a + by^{'} = t^{'} \quad \therefore \quad y^{'} = \frac{1}{b}(t^{'} - a)$$

y al sustituir en la ecuación inicial dada se llega a: $\frac{1}{b}(t^{'} - a) = f(t)$

O bien, después de separar las variables t y x $\frac{dt}{bf(t)+a} = dx$

podemos escribir la solución general en la forma: $\int \frac{dt}{bf(t)+a} = x + C$

y se vuelve a las variables originales sustituyendo $t = ax + by + c$ en la solución así obtenida.

Ejemplos:

1.- Resolver la ecuación diferencial: $y' = \sqrt{2x - y + 3}$
Haciendo la sustitución $t = 2x - y + 3$, se obtiene $t' = 2 - y'$ y de ahí $y' = 2 - t'$; luego, sustituyendo en la ecuación inicial $2 - t' = \sqrt{t}$
De donde $\frac{dt}{dx} = 2 - \sqrt{t}$
Separando las variables e integrando, se obtiene: $\int \frac{dt}{2-\sqrt{t}} = \int dx + C$
Para integrar el primer miembro, se hace la sustitución:

$$u = \sqrt{t}$$
$$du = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \quad \therefore \; dt = 2\sqrt{t}\, du$$

Transformándose en:

$$\int \frac{2u}{2-u} du = -2\int \frac{u}{u-2} du = -2\int \frac{u-2+2}{u-2} du$$
$$= -2\int du - 4\int \frac{du}{u-2}$$
$$= -2u - 4\ln(u-2)$$

Es decir,

$$\int \frac{dt}{2-\sqrt{t}} = -2\sqrt{t} - 4\ln(\sqrt{t} - 2)$$

Haciendo $t = 2x - y + 3$, se obtiene la solución en forma implícita:

$$-2\sqrt{2x-y+3} - 4\ln(\sqrt{2x-y+3} - 2) = x + C$$

2.- Para resolver la ecuación diferencial

$$(x-2y+4)dx + (4x-8y+8)dy = 0$$

se escribe en la forma normal

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-2y+2)+2}{4(x-2y+2)}$$

Haciendo $t = x - 2y + 2$

$$\frac{dt}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{dt}{dx}\right)$$

Sustituyendo t y $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación en la forma normal, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{dt}{dx}\right) = -\frac{t+2}{4t}$$

$$\therefore \ \frac{dt}{dx} = \frac{3t+2}{2t}$$

Separando las variables

$$\frac{2t}{3t+2}dt = dx$$

e integrando

$$\int \frac{2t}{3t+2}dt = \int \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\frac{1}{3t+2}\right) dt = \frac{2}{3}t - \frac{4}{9}\ln(3t+2)$$

se tiene la siguiente solución:

$$\frac{2}{3}t - \frac{4}{9}\ln(3t+2) = x + C$$

Luego, se vuelve a las variables originales:

$$\frac{2}{3}(x - 2y + 2) - \frac{4}{9}\ln[3(x - 2y + 2)] = x + C$$

$$x + 4y + \frac{4}{3}\ln(3x - 6y + 8) = C_1$$

Ecuaciones de la forma $f(xy)ydx + g(xy)xdy = 0$

La transformación $xy = t$ reduce una ecuación de este tipo a la forma de separación de variables. Sea $xy = t$, sustituyendo

$$y = \frac{t}{x} \text{ y } \frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{dt}{dx} - t}{x^2}$$

en la ecuación original escrita en la forma normal

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(xy)y}{g(xy)x}$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(xy)y}{g(xy)x}$$

$$\frac{x\frac{dt}{dx} - t}{x^2} = -\frac{f(t)\frac{t}{x}}{g(t)x}$$

$$x\frac{dt}{dx} = t - \frac{f(t)t}{g(t)} = \frac{g(t)t - f(t)t}{g(t)}$$

Separando las variables, se obtiene

$$\frac{g(t)}{g(t)t - f(t)t}dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{g(t)}{g(t)t - f(t)t} dt = 1nx + C$$

2. EDO HOMOGÉNEAS

Una ecuación cuyas variables no es posible separar puede, en ocasiones, transformarse en una ecuación de variables separadas mediante un "cambio de variable". Tal es el caso de cualquier ecuación que pueda escribirse en la forma dy/dx= f(y/x) (4)
llamada ecuación homogénea.
Para esto, se introduce una nueva variable v=y/x; *v=v(x); y=y(x)*
Entonces, y = v.x
derivando dy/dx = v + x dv/dx
Así la ecuación (4) se transforma en v + x dv/dx = f(v) (5)
y, como es costumbre, en separación de variables:
dv/(v-f(v)) =-dx/x (6)

Finalmente, la solución de la ecuación inicial se obtiene sustituyendo v por y/x.
Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2 + y^2)}{xy}$$

Dividiendo por x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + (y/x)^2)}{y/x}$$

Esta expresión tiene la forma de (4) con $f(v)= - (1+v^2)/v$ donde v=y/x,
entonces la ecuación (6) se transforma en

$$\frac{vdv}{1+2v^2} = -\frac{dx}{x}$$

La solución de esta última ecuación en términos de x e *y* es:

$x^2 (x^2+ 2y^2) = C$

❖ REDUCTIBLE A HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial de primer orden se llama homogénea si puede transformarse a la forma: $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$. (Esta transformación se puede realizar siempre que todos los términos de la ecuación tengan el mismo grado respecto a las variables sin tomar en cuenta la derivada).

Ejemplo:

$$x^2 - 4xy.y' = 2y^2 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2y^2}{4xy}$$

Se realiza el cambio de variable:

$$\frac{y}{x}=v \Rightarrow y=v.x \Rightarrow y'=v+x.v' \Rightarrow v+x.v'=\frac{x^2-2xv^2}{4xxv} \Rightarrow x.v'=\frac{1-2v^2}{4v}-v \Rightarrow x.\frac{dv}{dx}=\frac{1-6v^2}{4v}$$

$$\Rightarrow \frac{4v.dv}{1-6v^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{4v.dv}{1-6v^2}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{3}\int\frac{-12v.dv}{1-6v^2}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{3}1n\left|1-6v^2\right|=1n\left|x\right|+1nc$$

$$\Rightarrow 1n\left|1-6v^2\right|=1n\left|cx\right|^{-3} \Rightarrow 1-6v^2=\frac{1}{c^3x^3} \Rightarrow 1-6\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{c^3x^3} \Rightarrow x^2-6y^2=\frac{1}{cx} \Rightarrow y=\sqrt{\frac{cx^3-1}{6cx}}$$

Nos referiremos a ecuaciones de la forma

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (4)$$

Con a_i, b_i, c_i constantes (y no se verifica $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$).

- En el caso especial en que $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$, el cambio de función es el siguiente:

$z = a_2 x + b_2 y$ transforma la ecuación diferencial dada en otra con las dos variables separables x y z.

En efecto, la ecuación diferencial $z'=a_2+b_2f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)$ es con variables separables.

- En el caso general $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$:
- Si $c_1 = c_2 = 0$, la ecuación (4) es:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Es decir, es homogénea.

- Supongamos ahora que al menos uno de los c_1 o c_2 es distinto de cero.

Se efectúa, entonces, la transformación $\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=y+\beta \end{cases}$ (traslación de ejes) siendo (α,β) la solución del sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$

(Geométricamente (α,β) es el punto de intersección de las rectas descritas en el sistema. Tienen como intersección un único punto (α,β) por la condición $a_1 b_2 \neq b_1 a_2$).

Como $\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}$, la transformación antes citada conduce a la siguiente expresión:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}=f\left[\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right]$$

que ya es homogénea.

Ejemplo:

Solución general de la ecuación diferencial: (2x + 3y) dx + (y + 2) dy = 0

La ecuación es $y' = -\frac{2x+3y}{y+2}$ y es reducible a homogénea.

Solución del sistema $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ y+2=0 \end{cases}$ $(\alpha,\beta)=(3,-2)$

Transformación: $\begin{cases} x = X+3 \\ y = Y-2 \end{cases}$ Nueva ecuación: $\frac{dY}{dX} = -\frac{2X+3Y}{Y}$

En esta ecuación homogénea, se hace Y = u X.

Entonces $u'X + u = -\frac{2+3u}{u}$

Luego: $u'X = -\frac{u^2+3u+2}{u}$

Es decir, $\frac{-udu}{u^2+3u+2} = \frac{dX}{X}$

Por tanto:

$$X = Ce^{\int \frac{-udu}{u^2+3u+2}} = Ce^{\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2}{u+2}\right)du} = Ce^{1n\frac{\lfloor u+1 \rfloor}{(u+2)^2}} = \frac{k(u+1)}{(u+2)^2}$$

Deshaciendo el cambio Y = uX: $X = \frac{k\left(\frac{Y}{X}+1\right)}{\left(\frac{Y}{X}+2\right)^2}$, es decir, $(Y + 2X)^2 = k\,(Y+X)$

Por tanto: $\left[y+2+2(x-3)\right]^2 = k(y+2+x-3)$

Y la solución de la ecuación dada será la siguiente: $(y + 2x - 4)^2 = k\,(x+y-1)$.

3. EDO EXACTAS

La ecuación diferencial M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 es exacta cuando la expresión M(x,y) dx + N(x, y) dy corresponde a la diferencial total de una función f(x, y) = c

df (x, y) = F(∂f, ∂x)dx + F(∂f, ∂y)dy = 0

por ejemplo: ydx + xdy = 0 es exacta, ya que el L.I. es la diferencial de xy:

d(xy) = ydx + xdy. También x^2y^3 dx + x^3y^2 dy = 0 es exacta, ya que el L.I. es la diferencial de F(1 , 3)=x^3y^3 :

d(F(1 , 3)=x^3y^3) = F(1 , 3) ($3x^3y^2$ dy+ $3y^2x^3$dx)

= x^3y^2 dy+ y^2x^3dx

Si una ecuación diferencial es exacta se debe cumplir lo siguiente: F(∂M, ∂y) = F(∂N, ∂x)

Solución de las ecuaciones diferenciales exactas

Dada la ecuación: M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0

Primero observar que cumpla F(∂M, ∂y) = F(∂N, ∂x), ya que
F(∂f, ∂x) = M(x,y)
Integramos manteniendo la *y* constante:
f(x, y) = o(∫, ,) M(x, y) dx + g(y) (1)
Luego, derivando (1) respecto a *y*, además de considerar que F(∂f, ∂y) = N(x,y)
F(∂f, ∂y) = F(∂, ∂y) o(∫, ,) M(x, y) dx + g '(y) = N(x, y)
De esto resulta que:
g '(y) = N(x, y) - F(∂, ∂y) o(∫, ,) M(x, y) dx (2)
Integrando (2) respecto a *y*, obtenemos la solución implícita con (1):
f(x, y) = o(∫, ,) M(x, y) dx + g(y)
Nota: Ninguna de estas fórmulas debe memorizarse.

Ejemplos:

a) Demostrar que 2xy dx + (x^2 - 1)dy = 0
Con M(x,y) = 2xy N(x, y) = x^2 - 1
Tenemos lo siguiente: F(∂M, ∂y) = 2x ; F(∂N, ∂x) = 2x
Entonces, existe una función para la que
F(∂f, ∂x) = 2xy
Se integra respecto a x de la siguiente forma:

f(x, y) = ∫2xy dx + g(y)

= x^2y + g(y) (1)
Luego, se deriva parcialmente respecto a *y* e igualando a N(x, y).
F(∂f, ∂y)= x^2 + g'(y) = N(x, y) = x^2 - 1
De aquí: g'(y) = - 1
Se integra esta última ecuación g(y) = - y.
Finalmente, con (1)
f(x, y) = c = x^2y - y

b) Demostrar que (e^{2y} - y cos xy)dx + (2xe^{2y} - x cos xy + 2y)dy = 0
Es exacta y tiene la solución: xe^{2y} - sen xy + y^2 + c = 0

c) Demostrar que (cos x sen x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0
Es exacta y para la condición inicial y(0) = 2 tiene la solución
y^2 (1 - x^2) - $\cos^2$ x = 3

d) Demostrar que x F(dy , dx)=2xe^x - y + 6x^2 es exacta y tiene la solución:
xy -2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c

❖ **FACTOR DE INTEGRACIÓN**

Sea la ecuación diferencial: P(x, y) dx +Q(x,y) dy = 0. Suponiendo que no es exacta, ¿qué se debe hacer entonces?

Por ejemplo, la ecuación y dx + 2x dy = 0 no es exacta (aunque con variables separables). Sin embargo, si multiplicamos ambos miembros de la misma ecuación por y, se transforma en la ecuación esencialmente equivalente: y^2 dx + 2xy dy = 0 que es exacta.

La ecuación es d(xy^2) = 0 y su solución es la siguiente: $xy^2 = C$.

Análogamente, multiplicando ambos miembros de la ecuación dada por $\frac{1}{xy}$, se obtiene la ecuación casi equivalente $\frac{dx}{x}+2\frac{dy}{y}=0$, ya exacta (solo se han perdido las soluciones x = 0 e y = 0). Esta última ecuación es d(ln xy^2) = 0. Luego, la solución es:

ln(xy^2) = k, es decir, $xy^2 = C$ tras incorporar las soluciones perdidas.

Definición:
"Sea la ecuación diferencial: *P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 (5) no exacta.*
Si existe una función μ(x, y) tal que la ecuación μ P dx +μ Q dy = 0 es exacta en un dominio D simplemente conexo, entonces, el factor μ(x, y) recibe el nombre de factor integrante de la ecuación diferencial (5)".

Así, en el ejemplo de la introducción, tanto y como $\frac{1}{xy}$ son factores integrantes de la ecuación diferencial y dx + 2x dy = 0.

La ecuación diferencial obtenida al multiplicar ambos miembros de la ecuación (5) por un factor integrante es esencialmente equivalente a la (5). Tiene la misma familia uniparamétrica de soluciones, aunque es posible que se ganen o se pierdan algunas soluciones.

Existencia:

Puede demostrarse que existen factores integrantes de la ecuación diferencial (5) si y solo si dicha ecuación es integrable.
(Se omite la demostración). El problema está en obtenerlos.

Obtención de los factores integrantes
Si μ*(x, y)* es factor integrante de la ecuación diferencial (5), entonces la ecuación
μ(x, y) P(x, y) dx + μ(x, y) Q(x, y) dy = 0 es exacta en D*, lo que equivale a afirmar que*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial y}(\mu Q)$$ *. Es decir,* $$\mu_y P-\mu_x Q=\mu(Q_x-P_y) \quad (6)$$

Esta es la ecuación diferencial de los factores integrantes.

Toda función μ(x, y) que verifique esta ecuación es factor integrante de (5) y recíprocamente.

Desafortunadamente, esta ecuación diferencial (6) es una ecuación en derivadas parciales, en principio de más difícil resolución que la dada (5), pero como nos basta con tener un único factor integrante, veremos cómo pueden obtenerse algunos de ciertos tipos especiales, en el caso en que existan.

Expresión general de los factores integrantes
Si μ(x, y) es factor integrante de (5) y μ P dx + μ Q dy = dU, entonces,

$\mu(x, y)\ \Phi(U(x, y))$ es también factor integrante de (5), cualquiera que sea la función integrable Φ.
En efecto: $\mu\ \Phi(U)\ P\ dx + \mu\ \Phi(U)\ Q\ dy = \Phi(U)\ dU = d\Psi(U)$, siendo $\Psi(U) = \Phi(U)$ Luego, $\mu\ \Phi(U)$ es factor integrante de (5).

Recíprocamente, puede demostrarse que cualquier factor integrante $\nu(x, y)$ de (5) puede escribirse en la forma $\nu = \mu\ \Phi(U)$.
(Se omite la demostración). Así, para la ecuación diferencial $y\ dx + 2x\ dy = 0$ es factor integrante $\mu(x, y) = y$, siendo $y^2\ dx + 2xy\ dy = d(xy^2) = dU$.

El factor integrante $v = \dfrac{1}{xy}$ verifica lo siguiente: $v = \dfrac{1}{xy} = \dfrac{y}{xy^2} = \dfrac{\mu}{U}$

Serán también factores integrantes, por ejemplo: $\nu_1 = \mu\ U = xy^3$, $v_2 = \dfrac{\mu}{\sqrt{U}} = \dfrac{y}{\sqrt{xy^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, etc.

Ejemplo:
Demostrar que $\mu(x, y) = xy^2$ es factor integrante de $(2y - 6x)\ dx + (3x - (4x^2)/y)\ dy = 0$.

Para realizar esa demostración, usaremos este factor integrante para resolver la ecuación. La ecuación original no es exacta. Tras multiplicar por xy^2, la nueva ecuación diferencial es la siguiente:
$(2xy^3 - 6x^2y^2)\ dx + (3x^2y^2 - 4\ x^3y)\ dy = 0$

En esta, $P = 2xy^3 - 6x^2y^2$, $Q = 3x^2y^2 - 4x^3y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 12x^2 y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Luego, es exacta y, por tanto, $\mu = xy^2$ es factor integrante de la ecuación diferencial dada.
Existe, por lo tanto, una $U(x,y)$, tal que en cualquier dominio del plano: $P\ dx + Q\ dy = dU$,
Siendo: $U(x, y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2)dx + \phi(y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + \phi(y)$

Ha de ser: $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$. Es decir: $3x^2y^2 - 4x^3y + \phi'(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y$

Por tanto: $\phi'(y) = 0$, de donde $\phi(y) = C$. Luego: $U(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + C$

La solución será $U = K$; es decir, $x^2y^3 - 2x^3y^2 = k$

Al introducir el factor integrante se ha añadido la solución particular $y = 0$ que no es solución de la ecuación original.

Obtención del factor integrante en algunos casos especiales
Se ha visto que la ecuación (6) que da los factores integrantes es ecuación en derivadas parciales. Solo será interesante intentar su resolución cuando la ecuación sea ordinaria, es decir cuando μ sea función de una sola variable.

<u>Existencia y obtención de un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$</u>

Si existe, es $\mu_x = \mu'$, $\mu_y = 0$. La ecuación (6) toma la forma: $-\mu' Q = \mu(Q_x - P_y)$. Es decir: $\dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{P_y - Q_x}{Q}$

La condición para que exista un factor integrante $\mu = \mu(x)$ es que se dé $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = g(x)$.

Entonces, de $\frac{\mu'}{\mu} = g(x)$ resulta $\mu(x) = Ce^{\int g(x)dx}$

Existencia y obtención de factor integrante de la forma μ = μ(y)

De forma análoga, si existe un tal μ = μ(y), entonces, se verifica lo siguiente: $\mu_y = u'$, $\mu_x = 0$

y la (6) da lugar a $\mu' P = \mu(Q_x - P_y)$ ó $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$

Condición: $\frac{Q_x - P_y}{P} = h(y)$ Entonces: $\mu(y) = Ce^{\int h(y)dy}$

- **Otros tipos:**

Para resolver la (6) como ecuación diferencial ordinaria, será necesario considerar únicamente soluciones μ que sean funciones de una única variable, si existen. Tras los casos μ(x) y μ(y) ya estudiados, se cita como otro ejemplo el caso siguiente: ¿Cuándo existe y cómo se obtiene un factor integrante de la forma μ = μ(x·y)? En este caso, μ es función de la variable t = x·y.

Puede escribirse de la siguiente forma:

μ = μ(t), $\mu_x = y\mu'(t)$, $\mu_y = y\mu'(t)$

En (6) $x\mu'(t)P - y\mu'(t)Q = \mu(Q_x - P_y)$

Luego, $\frac{\mu'(t)}{\mu'(t)} = \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ}$ Por tanto:

Condición: $\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} = f(t)y$ y $\mu(t) = Ce^{\int f(t)dt}$

Ejemplo:

Sea la ecuación diferencial $(x^2 - y^2)$ dx + 2xy dy = 0 (homogénea)

a) Halla un factor integrante μ = μ(x). Integra la ecuación diferencial con su ayuda.

b) Halla un factor integrante de la forma: $v = v\left(\frac{y}{x}\right)$

c) Expresión general de los factores integrantes. Comprueba que el factor integrante del apartado b) satisface a dicha expresión.

d) Conocidas μ(x) y $v\left(\frac{y}{x}\right)$, escribir de forma inmediata la solución general de la ecuación diferencial.

i. Es : $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-4y}{2xy} = \frac{-2}{x}$. Luego, existe μ = μ(x)

Además: $\mu(x) = Ce^{\int \frac{-2dx}{x}}$ Basta tomar $\boxed{\mu_1(x) = \frac{1}{x^2}}$

Multiplicando por μ_1 la ecuación dada:

$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$ se trata de una diferencial exacta.

$U(x,y)=x+\frac{y^2}{x}$ Solución: $x+\frac{y^2}{x}=C$ Es decir, $x^2 + y^2 = Cx$

ii. Sea $\frac{y}{x}=t,\ v=v(t),\ v_x=-\frac{y}{x_2}v'(t),\ v_y=\frac{1}{x}v'(t)$

En la (6) : $\frac{1}{x}v'(t)P+\frac{y}{x^2}v'(t)Q=v(t)(Q_x-P_y)$;

Luego, $\frac{v'}{v}=\frac{x^2(Q_x-P_y)}{xP+yQ}$. $Condición:\ \frac{x_2(Q_x-P_y)}{xP+yQ}=f(t)$

En efecto: $\frac{x^2(Q_x-P_y)}{xP+yQ}=\frac{x^2(2y+2y)}{x(x^2-y^2)+y.2xy}=\frac{4x^2y}{x(x^2+y^2)}=\frac{4t}{1+t^2}$

Luego,: $v(t)=Ce^{\int\frac{4t}{1+t^2}dt}$. Un factor integrante será $v_1(t)=(1+t^2)^2$

Por tanto: $v_1(x,y)=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)^2$

iii. Expresión general: $v(x,y)=\mu_1\Phi(U)=\frac{1}{x^2}\Phi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$

El v_1 cumple: $v_1=\frac{1}{x^2}U^2$

iv. Es $\frac{v(x,y)}{\mu(x,y)}=\varphi(U)$. Como los puntos (x, y) de una curva solución verifican

U(x, y) = k, resulta que dichos puntos cumplen: $v/\mu = C$

Por tanto, la solución es $\frac{\frac{(x^2+y^2)^2}{x^4}}{\frac{1}{x^2}}=C$

Es decir: $\frac{x^2+y^2}{x}=k$

4. EDO LINEALES

Estas ecuaciones tienen la forma:

dy/dx + Py =Q (7)

donde P y Q son funciones de x.

Puede probarse que este tipo de ecuaciones con la condición inicial $y(x_0)=y_0$, en la cual P(x) y Q(x) son funciones continuas en algún intervalo abierto I que contiene al punto x_0, tienen una única solución y(x) sobre I, dada por la fórmula: $y(x)=e^{-\int P(x)dx}[\int (Q(x)\,e^{\int Q(x)dx})dx+C]$ con un valor adecuado de la constante C.

Un método para obtener la fórmula anterior y que puede utilizarse en lugar de recordarla es encontrar una función $\rho=\rho(x)$ tal que si multiplicamos la ecuación por dicha función, el primer miembro se transforma en la derivada del producto ρy. Esto es, multiplicando (7) por ρ resulta la siguiente expresión:
$\rho dy/dx + \rho Py = \rho Q$
e intentamos imponer a ρ la condición de que $\rho dy/dx + \rho Py = d(\rho y)/dx$ (8)

Luego de desarrollar el segundo miembro de (8) y reducir términos, se obtiene como condición que debe satisfacer ρ, $d\rho/dx= \rho P$. (9)

Aquí $P=P(x)$ es una función conocida de manera que podemos separar las variables y despejar ρ de la siguiente forma:
$d\rho/\rho = P\,dx$, $\ln|\rho| = \int P dx + \ln C$
$\rho = \pm C e^{\int Pdx}$ (10)

Como no necesitamos la función más general ρ, podemos tomar $\pm C=1$ en (10) y utilizar
$\rho = e^{\int Pdx}$. (11)

Esta función se llama "factor de integración" de la ecuación (7). Con su ayuda, dicha ecuación se transforma en $d(\rho y)/dx = \rho Q$, cuya solución es:
$\rho y= \int \rho Q\, dx + C$. (12)
de donde se deduce la fórmula.

Como ρ viene dada por (11), mientras que P y Q son datos de la ecuación diferencial (7), las ecuaciones (11) y (12) proporcionan todo cuanto se precisa para resolver (7).

Ejemplo:
Sea la ecuación $dy/dx + y = e^x$. Aquí $P=1$, $Q= e^x$.
El factor integrante es $\rho= e^{\int dx} = e^x$. Multiplicamos la ecuación dada por e^x. Así resulta: $e^x.y' + e^x.y= e^{2x}$ que reconocemos como
$d(e^x.y)/dx = e^{2x}$. Luego, integrando con respecto a x, obtenemos $e^x.y= \frac{1}{2} e^{2x}+C$. Despejando y, se obtiene $y = \frac{1}{2} e^x+ C e^{-x}$.

Observaciones:
Este teorema da una solución en el intervalo completo I para una ED lineal. A continuación, veremos el teorema que establece "condiciones suficientes" para asegurar la existencia y unicidad de solución para cierto tipo, bastante general, de ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial de primer orden se llama lineal si puede escribirse de la forma
$y'+ p(x)y = q(x)$.

Ejemplo:
$2xy'-4xy = 6x$ (Dividiendo entre $2x$ se obtiene $y'-2y=3$).
Entonces, $y'-2y=3$. Se resuelve previamente la ecuación $u'-2u=0$ que se obtiene haciendo $y=u$ y $q(x)=0$

$u' - 2u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2u \Rightarrow \frac{du}{u} = 2.dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int 2.dx \Rightarrow 1nu = 2x$ (Solución particular para $C = 0$) $\Rightarrow$ $u = e^{2x}$)

Finalmente, se realiza el cambio de variable: $y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v'$

$u'.v + u.v.' - 2u.v = 3 \Rightarrow (u' - 2u).v + u.v' = 3 \Rightarrow e^{2x}.\frac{dv}{dx} = 3 \Rightarrow dv = 3.e^{-2x} \Rightarrow \int dv = \int 3.e^{-2x} \Rightarrow v = -\frac{3}{2}.e^{-2x} + c$.

Finalmente: $y = e^{2x}.(-\frac{3}{2}e^{-2x} + c) \Rightarrow y = -\frac{3}{2} + c.e^{2x}$

❖ **EDO DE BERNUOLLI**

Una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \qquad (1)$$

donde *n* es un número real diferente de 0 y 1, se llama **ecuación de Bernoulli.**

El procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones consiste en realizar el cambio de variable $v = y^{1-n}$, para convertir la ecuación (1) en una ecuación lineal y resolverla de esa manera.

Es de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + P(x).Y = Q(x).Y^n \\ \frac{dy}{dx} + P(y).X = Q(y).X^n \end{cases} \quad \text{Donde: } \begin{cases} \mathbf{n \neq 0} \\ \mathbf{n \neq 1} \end{cases}$$

Ejemplo:
Resolvamos como ejemplo la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1-2x}{3}y^4$$

Para transformarla a ecuación diferencial lineal la dividimos entre y^4 (es decir, multiplicamos por y^{-4}):

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y^{-3} = \frac{1-2x}{3}$$

Ahora, realizamos el cambio: $y^{-3} = z$, a continuación, derivamos z:

$$\frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

Despejamos $y^{-4}y'$ para poder sustituir en la ecuación:

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-3}\frac{dz}{dx}$$

Con lo que nos queda lo siguiente:

$$\frac{1}{-3}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{3}z = \frac{1-2x}{3}$$

La ecuación queda en la forma lineal si la multiplicamos por (-3):

$$\frac{dz}{dx} - z = 2x - 1$$

Cuya solución, tal como hemos visto en la sección 10.7 es *y =u.v*:

$$v(x) = Exp\left[-\int(-1)dx\right] = e^{x}$$

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx = \int e^{-x}(2x-1)dx$$

La integral de u(x) puede realizarse por partes y su resultado es:

$$u(x) = -2x\,e^{-x} - e^{-x} + C$$

Por lo tanto, la solución general de este ejemplo vendrá dada por:

$$z = e^{x}(-2x\,e^{-x} - e^{-x} + C)$$

Finalmente, sustituimos z por su valor:

$$\frac{1}{y^3} = -2x - 1 + Ce^{x}$$

- **EDO DE RICCATTI**

La **ecuación de Riccati** es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal de primer orden, inventada y desarrollada en el siglo XVIII por el matemático italiano Jacopo Francesco Riccati, con el fin de analizar la hidrodinámica.

En 1724, publicó una investigación multilateral de la ecuación llamada, por iniciativa de D'Alembert (1769): Ecuación de Riccati.

La investigación de la ecuación de Riccati convocó el esfuerzo de varios matemáticos: Leibniz, Goldbach, Juan Bernoulli y sus hijos Nicolás y Daniel Bernoulli, y, posteriormente, a Euler.

Generalmente, esta ecuación la presentan en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$$

Esta ecuación se resuelve si previamente se conoce una solución particular, sea $y_1(x)$.

Conocida dicha solución, se hace el cambio:

$$y(x) = z(x) + y_1(x)$$

y reemplazando, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y - q(x)y^2 + f(x) = \frac{dz(x)}{dx} + \frac{dy_1}{dx}$$

Es decir,

$$-p(x)y - q(x)y^2 + f(x) = \frac{dz}{dx} - p(x)y_1(x) - q(x)y_1(x)^2 + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = p(x)(y_1 - y) + q(x)(y_1^2 - y^2)$$

lo que equivale a

$$\frac{dz}{dx} = -p(x)z - q(x)(z^2 + 2zy_1)$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -(p(x) + 2q(x)y_1(x))z - q(x)z^2$$

Que corresponde a una ecuación diferencial de Bernoulli.

Ejemplo:

1) Resolver la ecuación $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$, sabiendo que tiene la solución particular $y_1 = x$.

Solución:

Es una ecuación de Riccati. Veamos que efectivamente $y_1 = x$ es solución de la ecuación.

$$y_1' + xy_1^2 - (2x^2+1)y_1 + x^3 + x - 1$$
$$= 1 + x^3 - (2x^2+1)x + x^3 + x - 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Efectuando la sustitución $y = x + \frac{1}{v}$:

$$1 - \frac{v'}{v^2} + x\left(x + \frac{1}{v}\right)^2 - (2x^2+1)\left(x + \frac{1}{v}\right) + x^3 + x - 1 = 0.$$

Simplificando, queda la ecuación lineal $v' + v = x$, cuya solución general es

$$ve^{\int dx} - \int xe^{\int dx}dx = C, \; ve^x - \int xe^x dx = C,$$
$$ve^x - e^x(x-1) = C, \; v = Ce^{-x} + x - 1,$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{Ce^{-x} + x - 1}.$$

Usando $\frac{1}{v} = y - x$, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y = \frac{1}{Ce^{-x} - x + 1} + x$$

2) Se considera la ecuación de Ricatti:

$$y' = y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}$$

(a) Encontrar una solución de la forma $y = x^m$ con real.
(b) Encontrar la solución particular $y = y(x)$ que verifica $y(1) = 2$.

Solución:

(a) Obliguemos a que $y=x^m$ sea solución de la ecuación:

$$mx^{m-1} = x^{2m} - x^{m-1} - x^{-2}$$

Si m=-1, el primer miembro es $-x^{-2}$ y el segundo también $-x^{-2}$. Por tanto $y=\frac{1}{x}$ es solución.

(b) Efectuando el cambio $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{v}$

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{v'}{v^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xv}+\frac{1}{v^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xv}-\frac{1}{x^2}$$

Simplificando la ecuación lineal, tenemos:

$$v'+\frac{1}{x}v=-1$$

Ahora, hallemos su solución general:

$$ve^{\int(1/x)dx}-\int -e^{\int(1/x)dx}dx=C,\ ve^{\log|x|}+\int e^{\log|x|}dx=C,$$

$$vx+\int x\,dx,\ vx+\frac{x^2}{2}=C \qquad (*)$$

La condición inicial $y(1)=2$ equivale a $y(1)=1/1+1/v(1)$; es decir, a $v(1)=1$.

Sustituyendo $x=1,\ v=1$ en (*), obtenemos $C=\frac{3}{2}$. La solución particular pedida es, por tanto, la siguiente:

$$v=\frac{3-x^2}{2x}$$

Y deshaciendo el cambio, tenemos

$$y=\frac{x^2+3}{x(3-x^2)}$$

3) Demostrar que si y_1 es una solución particular de la ecuación de Riccati $y'=py^2+qy+r$. Entonces, la sustitución $y=y_1+\frac{1}{v}$ la transforma en lineal.

Solución:

Sustituyendo $y=y_1+\frac{1}{v}$ *en* $y'=py^2+qy+r$:

$$\left(y_1+\frac{1}{v}\right)'=p\left(y_1+\frac{1}{v}\right)^2+q\left(y_1+\frac{1}{v}\right)+r,$$

$$y_1'-\frac{v'}{v^2}=py_1^2+2p\frac{y_1}{v}+\frac{p}{v^2}+qy_1+\frac{q}{v}+r.$$

Como y_1 es solución de $y'=py^2+qy+r,$ se verifica que $y'_1=py^2+qy_1+r$, por tanto

$$-\frac{v'}{v^2}=2p\frac{y_1}{v}+\frac{p}{v^2}+\frac{q}{v}$$

Simplificando, queda la siguiente expresión:

$$-\frac{v'}{v^2}=\frac{2py_1v+p+qv}{v^2}$$

o bien

$$v'+(2py_1+q)v=-p,$$

que es una ecuación lineal en v.

4) Hallar una solución de la ecuación diferencial $(x^2y^2+1)dx+2x^2dy=0$, de la forma $y=a/x$.

Solución:

La ecuación se puede escribir en la forma siguiente:

$$y'=-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2x^2},$$

Es decir, es una ecuación de Riccati. Ensayando soluciones de la forma $y=a/x$, tenemos:

$$-\frac{a}{x^2}=-\frac{a^2}{2x^2}-\frac{1}{2x^2},\ \frac{a^2-2a+1}{x^2}=0,\ \frac{(a-1)^2}{x^2}=0$$

Deducimos que $a=1$; es decir, una solución particular es $y=\frac{1}{x}$.

Lectura seleccionada n.° 1

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales para la ingeniería en sistemas computacionales

Pinacho, G. *Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales para la ingeniería en sistemas computacionales*. Disponible en https://goo.gl/EDe1qX

Actividad n.° 1

Foro de discusión sobre cereal andino.
Un producto nuevo de cereal andino se introduce al mercado limeño a través de unas campañas de publicidad de radio, prensa y televisión a una población de 1 millón de clientes potenciales. La velocidad a la que la población se entera del producto se supone que es proporcional al número de personas que todavía no son conscientes del producto. Al final del año 2015, la mitad de la población ha oído hablar del producto. ¿Cuántos han oído hablar de él por el final de 2 años?

Instrucciones

- Ingrese al foro y participa con comentarios críticos y analíticos del tema aplicación de la ED en publicidad.
- Lea y analice el tema N.° 1 y 2 del manual.
- Responda las siguientes preguntas en el foro:
  - ¿Cuántos han oído hablar de él por el final de 2 años?
  - ¿Cuál es el propósito de las ED?
  - ¿Cuál es la relación entre variables?

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Tema n.° 3

Estudiaremos ahora ecuaciones diferenciales de orden mayor a uno.

Una de las maneras de resolver este tipo de ecuaciones consiste en definir nuevas variables y armar con ellas un sistema de ecuaciones diferenciales.

Este sistema puede ser resuelto por cualquiera de los métodos estudiados para ecuaciones diferenciales de primer orden.

(a) La ecuación lineal general de n-ésimo orden con coeficientes variables tiene la forma:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Los coeficientes $a_i(x)$ y f(x) son funciones continuas en un intervalo abierto I en el que deseamos resolver la ED, pero no es necesario que sean funciones lineales. La ecuación lineal homogénea asociada a (1) es:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

Al primer miembro de (2) lo indicaremos con L(y), así dicha ecuación queda escrita en la forma: L(y) = 0 (3)

Por ejemplo, la ecuación lineal de 2° orden y'' + 2xy' + 3y=cos x es no homogénea, su ecuación homogénea asociada es y'' + 2xy' + 3y=0.

1. REDUCCIÓN DE ORDEN

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, como dijimos anteriormente, es una ecuación donde aparece la segunda derivada de una función desconocida y no aparecen derivadas de orden mayor. Una ecuación diferencial de segundo orden es de la forma:

$$F(x.y.\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}) = 0$$

por ejemplo:

$$3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^x seny = 0$$

En general, las ecuaciones de este tipo son muy difíciles de resolver. Sin embargo, para tipos especiales de estas ecuaciones, se conocen sustituciones que transforman la ecuación original en una que puede resolverse en forma rápida. Un método consiste en hacer una adecuada sustitución para rebajar el orden y, después, tratar de resolver el resultado.

Trataremos ahora con dos tipos de ED de segundo orden, que pueden ser reducidas a ED de primer orden mediante cambios de variable adecuados; además, se resuelven aplicando procedimientos particulares.

1. Ecuaciones diferenciales del tipo $F(x, y', y'') = 0.$

En este tipo de ED la variable independiente X aparece explícitamente en la ecuación, pero no así la variable dependiente Y, de la cual aparecen solamente sus derivadas y' e y''.

Ejemplo:

La ED $xy''=y'\ln(\frac{y'}{x})$ es del tipo que venimos explicando.

Dada la ecuación diferencial lineal de segundo orden:
$y''+f(x)y'+g(x)y=0$

es natural suponer que una forma de resolverla es integrar dos veces la ecuación. De hecho, así se realizará, solo que se utilizará el cambio $z=y'\rightarrow z'=y''$ para que las constantes de integración aparezcan en su momento.

Ejemplo 1:

Dada la ecuación $xy''=y'$, reducirla a una ecuación de primer orden y encontrar su solución.

Sea $z=y'\rightarrow z'=y''$
la ecuación es, entonces, xz'=z de primer orden.

Integrando: $\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}$ $\qquad \ln z=\ln x+\ln c$

O sea, $z=c_1xdx$

Como $z=y'\rightarrow dy=c_1xdx$, entonces, $y=c_1\frac{x^2}{2}+c_2.$.

Es la solución general de la ecuación lineal de segundo orden.
Comprobación: se deriva la solución:

$$y'=c_1x$$
$$y''=c_1$$

Pero $c_1=\frac{y'}{x}\rightarrow y''=\frac{y'}{x}$ y $xy''=y'$

Reduce el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales y resuélvelas:

	Respuestas:
1. $xy''+y'=0$	$y=c_1 lnx+c_2$
2. $(x-1)y''-y'=0$	$y=c_1\frac{x^2}{2}-c_1x+c_2$
3. $x^2y''+x=1$	$y=-lnx(1+x)+x+c_1x+c_2$
4. $(x+1)y''=y'$	$y=c_1\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$

2. ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

a) Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

Teniendo en cuenta los apartados anteriores, la ecuación diferencial

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=m(x)$$

es una ecuación de segundo orden, pero es necesario hacer dos suposiciones:
1. Los coeficientes son constantes.
2. m(x)=0 y, por tanto, esta será una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes.

Una ecuación homogénea tiene dos soluciones independientes y, por tanto, es necesario recordar la solución de una ecuación cuadrática donde se pueden presentar tres casos, según la estructura de la ecuación característica.

Casos:
1. Caso1: Soluciones reales y distintas
2. Caso2: Soluciones iguales y reales
3. Caso3: Soluciones complejas y conjugadas

Ahora, estudiaremos cada uno de estos casos:

1. Caso 1. Soluciones reales y distintas

Al resolver la ecuación característica se tienen las soluciones m1 y m2. Entonces, la solución general es la siguiente:

$y = C_1 e^{m_2 x} + C_2 e^{m_2 x}$

Ejemplo: $y'' + 6y' - 7y = 0$
La ecuación característica es $m^2 + 6m - 7 = 0$

Así que , $m_1 = -7$, $m_2 = 1$. Luego $y_1 = e^{m_1 x} = e^{-7x}$ e $y_2 = e^{m_2 x} = e^{-1x}$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial dada. Además, como estas dos soluciones son linealmente independientes, la solución general es

$$y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{x}$$

Ejemplo: $y'' - 20y' + 100y = 0$
La ecuación característica $m^2 - 20m + 100 = (m-10)^2 = 0$ tiene dos raíces complejas m=10 repetidas. Luego, la solución general es

$$y = C_1 e^{10x} + C_2 x e^{10x}$$

2. Caso2: Soluciones iguales y reales

Ejemplo: $y'' - 16y = 0$

La ecuación característica es $m^2 - 16 = 0$

Así que $m = \pm 4$. Luego, $y_1 = e^{m_1 x} = e^{4x}$ e $y_2 = e^{m_2 x} = e^{-4x}$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial dada. Además, como estas dos soluciones son linealmente independientes, la ecuación general es como se presenta a continuación:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$$

3. Caso 3. Soluciones complejas conjugadas

La ecuación característica tiene raíces complejas: Si $m_1 = \alpha + \beta\, i$ y $m_2 = \alpha - \beta\, i$. Entonces, la solución general es

$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} sen(\beta x)$

Ejemplo: Resolver $y'' - 4y' + 13 = 0$

La ecuación característica $m^2 - 4m + 13 = 0$

Encontrando las raíces $m = 2 \pm 3i$, siendo estas raíces complejas conjugadas.
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x} sen(3x)$$

Ejemplo:

Resolver $y'' + 6y' + 12 = 0$

La ecuación característica $m^2 + 6m + 12 = 0$

Se encuentran las raíces $m = -3 \pm \sqrt{3}i$, siendo estas raíces complejas conjugadas.

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 e^{-3x} \cos(\sqrt{3}x) + C_2 e^{-3x} sen(\sqrt{3}x)$$

Recuerde que para resolver las anteriores ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales siempre va a encontrar un sistema de ecuaciones de 2 por 2, así encontrar las constantes C1 y C2 de la solución general.

Ejemplo: $y'' - 3y' - 10y = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 10$
La ecuación característica es $m^2 - 3m - 10 = 0$

Así que $m_1 = 5,\ m_2 = -2$. Luego $y_1 = e^{m_1 x} = e^{5x}$ e $y_2 = e^{m_2 x} = e^{-2x}$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial dada. Además, como estas dos soluciones son linealmente independientes, la solución general es $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$.

Ahora, con la primera condición y(0)=1 se tiene:

$$1 = c_1 + c_2$$

Ahora hallamos y' y reemplazamos la segunda condición $y'(0) = 10$ donde

$$10 = 5c_1 - 2c_2$$

Con las dos ecuaciones encontradas, por las condiciones iniciales se forma el sistema de ecuaciones y al resolverlo encontramos $c_1 = \frac{12}{7},\ c_2 = -\frac{5}{7}$ que son los valores encontrados para reemplazarse en la solución general:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$$

Entonces, la solución particular es $y = \frac{12}{7} e^{5x} - \frac{5}{7} e^{-2x}$

b) Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes

Ahora, trabajemos en la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden no homogéneas con coeficientes constantes. Para ello existen los otros dos métodos nombrados con anterioridad, donde la solución es una suma de las soluciones de una ecuación homogénea y una particular, lo cual se puede dar así:

Si se tiene que $y'' + ay' + by = F(x)$ es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden.

1. Hacemos F(x)=0 para convertir la ecuación a una homogénea con coeficientes constantes. Esta es la llamada "solución asociada $\boldsymbol{y_h}$".
2. Encontramos una solución particular de la ecuación no homogénea. Esta es la llamada solución particular $\boldsymbol{y_p}$
3. Sumamos los resultados de 1 y 2 y, por tanto, encontramos la solución general de la no homogénea: $y = y_h + y_p$.

Por tanto, los pasos 1 y 3 no tienen problema, lo verdaderamente nuevo es cómo resolver el paso 2. Para ello, utilizaremos el método de coeficientes indeterminados donde se debe suponer que la solución es una forma general de $F(x)$. Por ejemplo:

1. Si $F(x) = 3x^2$, escójase $y_p = Ax^2 + Bx + C$.
2. Si $F(x) = 4xe^x$, escójase $y_p = Axe^x + Be^x$.
3. Si $F(x) = x + sen2x$, escójase $y_p = (Ax + B) + Csen2x + Dcos2x$.

Entonces, por sustitución, determinamos los coeficientes de esta solución general. Por tanto, y_p se la puede encontrar con base en ensayos como los enteriores. Generalizando los ensayos, los podemos denotar de la siguiente forma:

Si

$$f(x) = d_r x^r + d_{r-1}x^{r-1} + \cdots + d_1 x + d_0$$

Entonces, ensayar con $y_p = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

Si $f(x) = be^{ax}$, entonces ensayar con $y_p = ce^{ax}$.

Si $f(x) = bcos\beta x + csen\beta x$, entonces ensayar con $y_p = bcos\beta x + csen\beta x$.

Ejemplo:

Hallar la solución general de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2senx\cdot$

Solución:

Para hallar y_h, resolvemos la ecuación característica:

$$m^2 - 2m - 3 = (m+1)(m-3) \qquad m = -1 \;\; y \;\; m = 3$$

Entonces, la solución $C_1e^{-x} + C_2e^{3x} y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

Procedemos a encontrar y_p donde utilizaremos para la $f(x) = 2sen(x)n(x)$. El ensayo es con $y_p = Acosx + Bsenx$.

$\frac{dy}{dx}p = -Asenx + Bcosx$ y $\frac{d^2y}{dx^2}p = -Acosx + Bsenx$

Reemplazando en la ecuación, se tiene

$$(-4A - 2B)cosx + (2A - 4B)senx = 2sen(x)(-4A - 2B)$$

Igualamos los coeficientes de

$-4A - 2B = 0$ y $2A - 4B = 2$

donde $A = 1$ y $B = -\frac{2}{5}$

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}sen(x)$$

Ejemplo: $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

Entonces, por pasos sería así:

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$

   La ecuación característica es $m^2 + 4m + 4 = 0$, aquí m=-2, siendo real e igual. Por tanto, $y_k = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

2. Para $f(x) = 2x + 6$ probemos con $y_p = Ax + B$.

   Derivando se tiene $y' = A$, $y'' = 0$. Reemplazando en la ecuación diferencial original se tiene $4A = 2$, $4A + 4B = 6$.

De donde $A = 1/2$ y $B = 1$. Por tanto, $y_p = \frac{1}{2}x + 1$.

3. La solución general es la suma. Entonces, $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$.

Ejemplo:

$y'' + y' + y = xsen(x)$.

Realizando los pasos aprendidos, encontramos lo siguiente:

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}}(c_1 cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 sen\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

$$y_p = Asen(x) + Bcos(x) + Cxsen(x) + Dxcos(x)$$

$$y_p = sen(x) + 2cos(x) - xcos(x)$$

Nota: Se deja al lector la realización de los procesos para obtener los resultados anteriores.
Su solución general es la siguiente:

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 sen\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + sen(x) + 2\cos(x) - xcos(x)$$

3. COEFICIENTES INDETERMINADOS

Método de los coeficientes indeterminados

El siguiente estudio vamos a limitarlo al enunciado y manejo del método, sin entrar en los detalles teóricos del mismo. Debemos recordar que una serie de potencias representa a una función “f” en un intervalo de convergencia I y que podemos derivarla sucesivamente para obtener series para f’ , f’’ y f’’’, etc. Por ejemplo,

$$f(x) = a_D + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... = \sum_{i=D}^{\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... = \sum_{n=D}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + ... = \sum_{n=D}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Los siguientes ejemplos muestran cómo aplicar el método de las series de potencias a la solución de ecuaciones diferenciales. Iniciamos con un ejemplo muy simple, pero que nos hará entender la mecánica del método.

Ejemplo

Usando series de potencias, halla la solución de la ecuación $y' - 2y = 0$.

Solución

Supongamos que la solución se puede expresar como

$$y = \sum_{n=D}^{\infty} a_n x^n$$

Entonces, y' está dada por

$$y' = \sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos que

$$y' - 2y = 0$$

$$\sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2\sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} a_n x^n$$

Ahora debemos ajustar los índices de las sumas de forma que aparezca x^n en cada serie.

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)a_n + 1x^n = 2\sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} a_n x^n$$

Igualando los coeficientes correspondientes, se obtiene

$$(n+1)\,a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2a_n}{n+1}$$

para $n \geq 0$.

Esta fórmula genera los siguientes coeficientes:

$$a_1 = 2a_{\mathrm{D}}$$

$$a_2 = \frac{2a_1}{2} = \frac{2^2 a_{\mathrm{D}}}{2}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{3} = \frac{2^3 a_{\mathrm{D}}}{2\cdot 3} = \frac{2^3 a_{\mathrm{D}}}{3}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{4} = \frac{2^4 a_{\mathrm{D}}}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{2^4 a_{\mathrm{D}}}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{2^n a_{\mathrm{D}}}{n!}$$

De donde obtenemos que la solución está dada por

$$y = \sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} \frac{2^n a_{\mathrm{D}}}{n!} x^n = a_{\mathrm{D}} \sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = a_{\mathrm{D}} e^{2x}$$

Aquí hemos usado la expansión en series de potencias para la función exponencial:

$$e^x = \sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Observación: Esta ecuación diferencial puede ser resuelta de manera más simple por medio de separación de variables, pero como ya se dijo, la idea es ilustrar el método.

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow Ln(y) = 2x + c \Rightarrow y = ce^{2x},$$

El siguiente ejemplo no puede ser resuelto por las técnicas estudiadas hasta el momento, a pesar de ser muy simple en apariencia.

Ejemplo:

Usando series de potencias, resuelve la siguiente ecuación diferencial: $y''+xy'+y=0$

Solución:

Supongamos que

$$y=\sum_{n=D}^{\infty} a_n x^n$$

es una solución de la ecuación diferencial. Entonces,

$$y'=\sum_{n=D}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow xy'=\sum_{n=D}^{\infty} n a_n x^n$$

y

$$y''=\sum_{n=D}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, sucedería lo siguiente:

$$\sum_{n=D}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=D}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=D}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=D}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = -\sum_{n=D}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n$$

Ajustando los índices, obtenemos

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)\; a_{n+2} x^n = -\sum_{n=D}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n$$

Igualando los coeficientes, tenemos la siguiente ecuación:

$$a_{n+2} = -\frac{n+1}{(n+2)(n+1)} a_n = -\frac{a_n}{n+2}$$

para $n \geq 0$.

De esta forma, los coeficientes de la serie solución están dados por

- Coeficientes pares:

$$a_2 = -\frac{a_D}{2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_D}{2\cdot 4}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_D}{2\cdot 4\cdot 6}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_D}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} = \frac{(-1)^n a_D}{2^n n!}$$

- Coeficientes impares:

$$a_3 = -\frac{a_1}{3}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5}$$

$$a_7 = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}$$

De esta forma, la serie solución se puede representar como la suma de dos series: una para las potencias pares con coeficientes en términos de a_0 y otra para las potencias impares con coeficientes en términos de a_1.

$$y = a_{\mathrm{D}} \sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + a_1 \sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} \frac{(-)^n x^{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}$$

Observación: La solución tiene dos constantes arbitrarias a_0 y a_1 tal como era de esperar para una ecuación diferencial de segundo orden.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento cuando la ecuación diferencial tiene condiciones iniciales.

Ejemplo:
Usa el teorema de Taylor para hallar la solución en serie de potencias del problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y' = y^2 - x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A continuación, usa los primeros seis términos de la solución para aproximar los valores de y en el intervalo $[0,1]$ con un paso de avance de $0{,}1$.

Solución
La solución y del problema de valor inicial puede expresarse por medio del teorema de Taylor como

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

con $c = 0$. Como $y(0) = 1$ y $y' = y2 - x$, tenemos que

$$y' = y2 - x \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = 2yy' - 1 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 2 - 1 = 1$$

$$y''' = 2yy'' + 2(y')^2 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 2 + 2 = 4$$

$$y^{(4)} = 2yy''' + 6y'y'' \quad \Rightarrow \quad y^{(4)} = 8 + 6 = 14$$

$$y^{(5)} = 2yy^{(4)} + 8y'y''' + 6(y'')^2 \quad \Rightarrow \quad y^{(5)}(0) = 28 + 32 + 6 = 66$$

donde obtenemos que

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{14}{4!}x^4 + \frac{66}{5!}x^5 + \ldots$$

Usando los seis primeros términos de esta serie, calculamos los valores de "y" que se muestran en la siguiente tabla; además, en la Figura 12 se muestra la gráfica de este polinomio.

Tabla 1

Cálculo de valores de *x* e *y*

x	**Y**	**x**	**y**
0	1	0.6	2.0424
0.1	1.1057	0.7	2.4062
0.2	1.2264	0.8	2.8805
0.3	1.3691	0.9	3.4985
0.4	1.5432	1	4.3
0.5	1.7620	1.1	5.28999

Observación: Para una serie de Taylor, entre más lejos estemos del centro de convergencia (en este caso $c = 0$), menor es la precisión de nuestra estimación. Es importante tener claro que si las condiciones iniciales están dadas en $x = a$, debemos usar el desarrollo en series de potencias para la solución y alrededor de $c = a$.

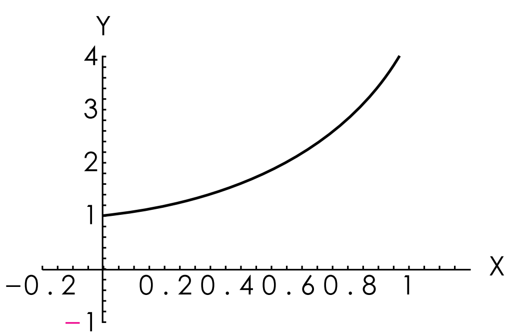


Figura 12. Gráfica de la función y(x).

Ejemplo:
Encuentre una serie de potencias para la solución general de la ecuación diferencial.

$$y''+sen(x)y'+e^{z}+y$$

Solución:
Como todos los coeficientes admiten desarrollo alrededor de $x = 0$, podemos suponer que la solución "y" es de la forma:

$$y = a_{\mathrm{D}} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} a_n x^n$$

Además, recordemos que

$$Sen(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n-\mathrm{D}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

y

$$e^x = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ... = \sum_{n-\mathrm{D}}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

para toda x ∈ IR.

Sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos que

$$\sum_{n-\mathrm{D}}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(\sum_{n-\mathrm{D}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)\left(\sum_{n-\mathrm{D}}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) + \left(\sum_{n-\mathrm{D}}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right)\left(\sum_{n-\mathrm{D}}^{\infty} a_n x^n \right) = 0$$

Multiplicando las series y simplificando, tenemos que

$$(2a_2 + a_{\mathrm{D}}) + (6a_3 + 2a_1 + a_{\mathrm{D}})x + \left(12a_4 + 3a_2 + a_1 + \frac{a_{\mathrm{D}}}{2} \right)x^2 + \left(20a_5 + 4a_3 + a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_{\mathrm{D}}}{6} \right)x^3 + ... = 0$$

Luego, igualando cada uno de los coeficientes a cero, obtenemos:

$$a_2 = -\frac{a_{\mathrm{D}}}{2}$$

$$a_3 = -\frac{2a_1 + a_{\mathrm{D}}}{6} = -\frac{a_1}{3} - \frac{a_{\mathrm{D}}}{6}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4} - \frac{a_1}{12} - \frac{a_{\mathrm{D}}}{24} = \frac{a_{\mathrm{D}}}{8} - \frac{a_1}{12} - \frac{a_{\mathrm{D}}}{24} = \frac{a_{\mathrm{D}}}{12} - \frac{a_1}{12}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5} - \frac{a_2}{20} - \frac{a_1}{60} - \frac{a_{\mathrm{D}}}{120} = \frac{a_{\mathrm{D}}}{20} + \frac{a_1}{20}$$

Sustituyendo estos valores en la serie, tenemos que

$$y = a_{\mathrm{D}}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + ... \right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + ... \right)$$

Para x ∈ IR.

Observación: Algunas veces cuando necesitamos multiplicar dos series es útil la siguiente fórmula.

$$\left(\sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} a_n x^n \right)\left(\sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=\mathrm{D}}^{\infty} \left(\sum_{k=\mathrm{D}}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

4. VARIACIÓN DE PARÁMETROS

La variación de parámetros, también conocida como variación de constantes, es un método general para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de primer orden, usualmente es posible encontrar soluciones por factor integrante o por coeficientes indeterminados con considerablemente menos esfuerzo. Sin embargo, estos métodos son influenciados por heurísticas que involucran adivinar, además de que no funcionan con todas las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

La variación de parámetros comprende ecuaciones diferenciales parciales, específicamente de problemas con ecuaciones diferenciales no homogéneas hasta la evolución de ecuaciones diferenciales lineales, como lo son la ecuación del calor, la ecuación de onda y la ecuación de la plataforma vibratoria. Con esta configuración, el método es más comúnmente conocido como el principio de Duhamel, nombrado después como Jean-Marie Duhamel quien fue el primero que aplicó este método para resolver la ecuación diferencial no homogénea del calor. A veces al método de variación de parámetros se le conoce como el principio de Duhamel y viceversa.

5. ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER

Es una ecuación lineal de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, a_0 son constantes. A esta ecuación se le conoce como una ecuación de Cauchy-Euler, cuya característica es que el grado k=n,n-1.....1,0 de los coeficientes x^k coincide con el orden n de diferenciación $\frac{d^k y}{dx^k}$.

Solución:
La solución de ecuaciones de orden superior se deduce de una manera análoga. Asimismo, la ecuación no homogénea $ax^2 y'' + bxy' + cy = g(x)$ se resuelve mediante una variación de parámetros, una vez que se determina la función complementaria y_C.Se prueba una solución de la forma $y = x^m$ donde m es un valor que se debe determinar. Análogamente a lo que sucede cuando se sustituye e^{mx} en una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuando se sustituye x^m, cada término de una ecuación CE se convierte en un polímero en *m* multiplicado por x^m, ya que sucede lo siguiente (a tener en cuenta para resolver ecuaciones):

$$a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = a_k x^k m(m-1)(m-2).............(m-k+1)x^{m-k} = a_k m(m-1)(m-2)........(m-k+1)x^m$$

Si sustituimos $y = x^m$, es una solución de la ED siempre que *m* sea una solución de la ecuación auxiliar por lo que hay 3 casos distintos por considerar en función de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas reales e iguales o complejas. En el último caso, las raíces aparecen como un par conjugado.

Caso I (raíces reales y distintas)

Sean m1 y m2 de $am(m-1)bm + c = 0$ con $m_1 \neq m_2$ entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 1:

Resuelva $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$

Como primer paso, diferenciaremos dos veces

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

y lo sustituiremos en la ED:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-4y=x^2m(m-1)x^{m-2}-2xmx^{m-1}-4x^m=0$$

luego, por algebra $x^m(m^2-3m-4)=0$

Si (m^2-3m-4), entonces $(m+1)(m-1)=0$.

Esto implica que $m_1=-1$ y $m_2=4$; por consiguiente, la solución será $y=c_1x^{-1}+c_2x^4$.

Caso II (raíces repetidas)

Si las raíces son repetidas, es decir m1=m2, entonces se obtiene una sola solución, a saber: $y=x^m$. Cuando las raíces de la ecuación cuadrática son iguales, el discriminante de los coeficientes necesariamente es cero. Por otro lado, de la fórmula cuadrática se deduce que las raíces deben ser las siguientes: $m1=\frac{-(b-a)}{2a}$

Ahora se puede escribir una segunda solución y_2, pero antes debemos escribir la ecuación de Cauchy en la forma estándar:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{b}{ax}\frac{dy}{dx}+\frac{c}{ax^2}y=0$$

y se hacen las identificaciones:

$$p(x)=\frac{b}{ax}y\int(\frac{b}{ax})dx=\frac{b}{a}ln(x)$$

$$y_2=x^{m_1}\int\frac{e^{-\frac{b}{a}ln\,x}}{x^{2m_1}}$$

$$x^{m_1}\int x^{-\frac{b}{a}}x^{2m_1}dx$$

$$x^{m_1}\int x^{-\frac{b}{a}}x^{\frac{b-a}{a}}dx$$

$$x^{m_1}\int\frac{dx}{x}=x^{m_1}ln\,x$$

Entonces, la solución general es la siguiente:

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_1}ln\,x$$

6. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

$$4xy\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{y} = 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = sen(y)$$

$$e^{xy}\frac{dy}{dx} = 1$$

7. MODELOS LINEALES: PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

En la mayoría de las aplicaciones estamos interesados no en la solución general de una ecuación diferencial, sino en una solución particular que satisfaga ciertas condiciones dadas. Esto da origen a los problemas de valor inicial o de frontera.

Definición. [Problema de valor inicial]
Un problema de valor inicial o de Cauchy consta de una ecuación diferencial de orden n y de n condiciones iniciales impuestas a la función desconocida y a sus n – 1 primeras derivadas en un valor de la variable independiente. Es decir, sucede lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n y}{dx^n} &= \int(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}) \\
y(x_D) &= y_D \\
y^{(1)}(x_D) &= y_1 \\
y^{(2)}(x_D) &= y_2 \\
\vdots &= \vdots \\
y^{(n)}(x_D) &= y_{n-1}
\end{aligned}$$

Ejemplo:

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x de manera tal que su aceleración en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dada por $a(t) = 8 - 4t + t^2$.

Encuentre la posición x(t) de la partícula en cualquier tiempo t, suponiendo que inicialmente la partícula está localizada en $x = 1$ y está viajando a una velocidad de v = - 3.

Recuerde que la primera derivada de la posición nos da la velocidad y la segunda derivada la aceleración, de donde el problema de valor inicial sería el siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= 8 - 4t + t^2 \\
x(0) &= 1 \\
x'(0) &= -3
\end{aligned}$$

Integrando con respecto a x , obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 8t - 2t^2 + \frac{t^3}{3} + A$$

y usando la condición x(0) = 1, podemos hallar que A = - 3 , con lo cual la velocidad en cualquier tiempo t sería la siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = 8t - 2t^2 + \frac{t^3}{3} - 3$$

Integrando de nuevo

$$x(t) = 4t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4 - 3t + B$$

y usando la condición x'(0) = - 3, podemos determinar que $B = 1$ y obtener la posición de la partícula en cualquier tiempo t.

$$x(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 3t + 1$$

En la Figura 13 adjunta se muestra la gráfica de la posición de la partícula versus tiempo.

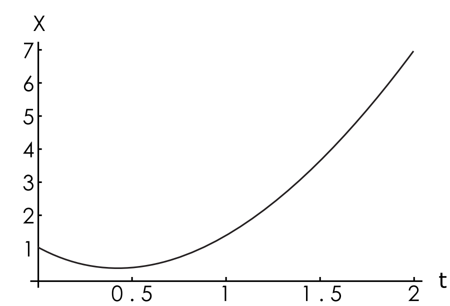


Figura 13. Gráfica de la posición de la partícula versus tiempo.

Ejemplo:

Una familia de curvas tiene la propiedad de que la pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) está dada por x/y. Halla el miembro de esta familia que pasa por el punto $(1,2)$.

El problema de valor inicial asociado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación diferencial, debemos separar variables e integrar

$$ydy = xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C$$

Y usando la condición inicial x(1) = 2, obtenemos que $C = 3$, con lo cual la curva buscada es $y^2 - x^2 = 3$, la cual se muestra en la figura.

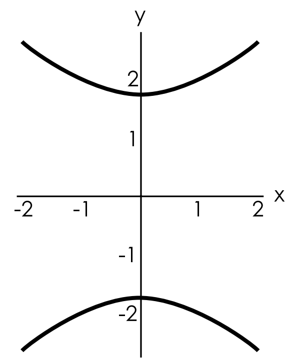


Figura 14. Gráfico de la curva $y^2 - x^2 = 3$.

❖ **SISTEMAS RESORTE-MASA: MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO**

Sistema masa resorte horizontal

1. Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo

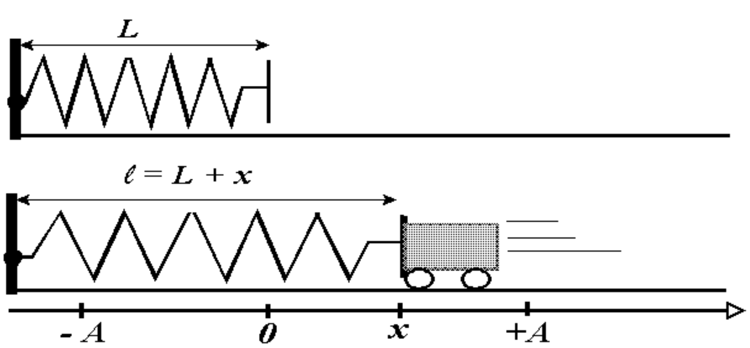


Figura 15. Sistema masa resorte horizontal. https://goo.gl/gUaspL

Si despreciamos el rozamiento, la única fuerza que actúa en la dirección horizontal es la fuerza elástica que el resorte ejerce sobre el carrito.

$$F = -k\,x\,\hat{i}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, resulta el siguiente proceso:

$$-k\,x\,\hat{i} = m\,\vec{a}$$

$$-k\,x\,\hat{i} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$-k\,x\,\hat{i} = m\frac{dv}{dt}\hat{i}$$

$$-k\,x\,\hat{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i}$$

Para hallar la ecuación horaria del movimiento, es decir x = x(t), debemos hallar la solución de la ecuación diferencial:

$$-\frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

La función que buscamos debe ser una función periódica. Al derivarla dos veces debe dar una función proporcional a la función propuesta, pero con el signo opuesto.

Tomamos como instante inicial el momento en que el carrito está en *x* =*A*. Las condiciones iniciales son $t_o = 0$, $x_o = A$ y $v_o = 0$. Entonces, la función que buscamos debe ser igual a *A* cuando *t* = *0*.

Proponemos $x = A\cos(\omega t)$ donde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ y T es el período de oscilación.

Ahora presentamos el proceso que se debe seguir para hallar la solución:

a) Derivamos 2 veces esta función.
b) Analizamos la expresión de la velocidad (derivada 1ª) y de la aceleración (derivada 2ª). ¿En qué instantes y posiciones son máximas? ¿En qué instantes y posiciones valen 0?
c) Reemplazamos la derivada 2ª en la ecuación diferencial y deduzca de qué magnitudes depende la frecuencia angular ω.
d) Deducimos la fórmula del período de oscilación para el oscilador armónico masa-resorte.

Sistema masa resorte horizontal

2. Trabajo de la fuerza elástica

La fuerza elástica es la ejercida por objetos tales como resortes que tienen una posición normal, fuera de la cual almacenan energía potencial y ejercen fuerzas.
Se calcula de la siguiente forma:

F = - k .ΔX
ΔX = Desplazamiento desde la posición normal
k = Constante de elasticidad del resorte
F = Fuerza elástica

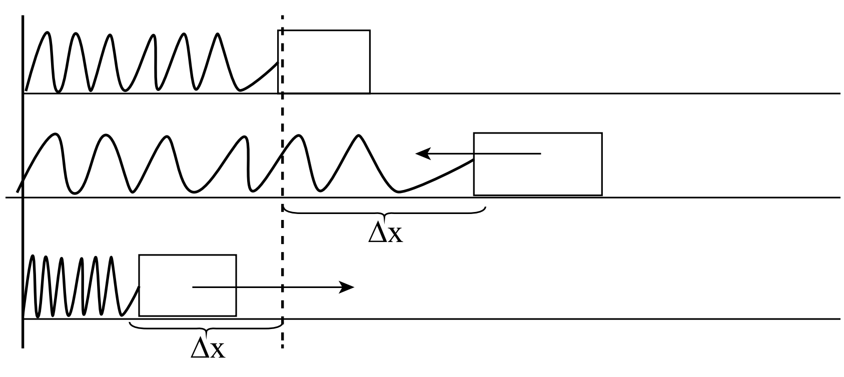


Figura 16. Trabajo de la fuerza elástica. Tomada de http://www.fisicapractica.com/fuerza-elastica.php

Podemos hallar el trabajo realizado por la fuerza elástica o restauradora a través de su relación con la energía potencial elástica. El trabajo realizado por las fuerzas elásticas es igual a la variación negativa de la energía potencial:

$$W_{elástica} = -\Delta Ep$$

¿Cómo se obtiene el trabajo realizado por la fuerza elástica?

Si queremos calcular el trabajo realizado por la fuerza elástica sobre un muelle comprimido que se encuentra en una posición x_i y se desplaza a una posición x_f, ambas a la izquierda del punto de equilibrio x_0, podemos ayudarnos de la siguiente figura y los siguientes razonamientos:

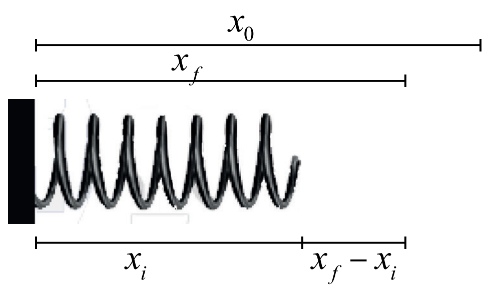


Figura 17. Trabajo del resorte realizado por la fuerza elástica. Tomada de "Trabajo realizado por la fuerza elástica", por FISICALAB (s.f.). Disponible en http://bit.ly/ 2agtRCM

- Será la fuerza elástica la que realizará el trabajo sobre el muelle tratando de llevarlo a su posición de equilibrio.
- La fuerza de recuperación elástica que actúa sobre el cuerpo sigue la ley de Hooke. $\vec{F} = -k\cdot(x-x0)\cdot\vec{j}$
- Podemos calcular la fuerza en la posición inicial x_i según la siguiente expresión: $\vec{F}\,i = -k\cdot(xi-x0)\cdot\vec{j}$. Observa cómo la fuerza apunta hacia la derecha al ser $x_i < x_0$.
- Podemos calcular la fuerza en la posición final x_f según la siguiente expresión: $\vec{F}\,f = -k\cdot(xf-x0)\cdot\vec{j}$. Observa cómo la fuerza apunta hacia la derecha al ser $x_f < x_0$.
- Nos resta el cálculo del trabajo realizado por la fuerza elástica (variable). Tenemos varias opciones:
  - o Podemos calcular el área bajo la fuerza elástica en la gráfica fuerza- desplazamiento. Este procedimiento ya lo hemos señalado en el punto anterior.
  - o Podemos seguir un razonamiento similar al aplicado en el teorema de Merton para el cálculo de la velocidad media: calcular la fuerza elástica promedio y usar este valor para el cálculo del trabajo. El valor del trabajo de la fuerza elástica (variable) tendrá igual valor que el que lleve a cabo esta fuerza constante de valor promedio.

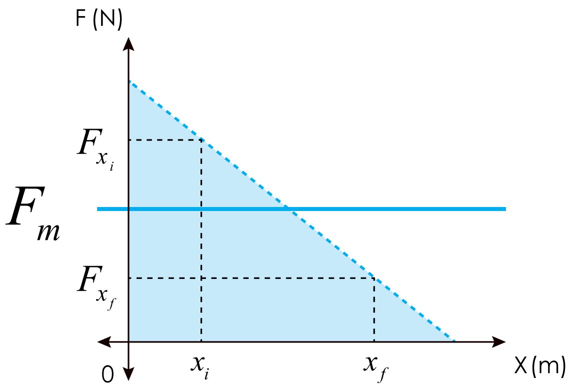


Figura 18. Gráfica fuerza – desplazamiento. Tomada de FISICALAB (s.f.). Disponible en http://bit.ly/29VhjMB

El valor de la fuerza elástica promedio se expresa en los siguientes términos:

$$\vec{F}_m = \frac{-k\cdot(x_i - x_0)\cdot\vec{j} + \left[-k\cdot(x_f - x_0)\cdot\vec{j}\right]}{2} = -\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(x_i + x_f\right)\cdot\vec{j};$$

Con todo lo anterior nos queda

$$W_{\text{elástica}} = -\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(x_i + x_f\right)\cdot\left(x_f - x_i\right) = \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_i^{\,2} - \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_f^{\,2} = E_{pi} - E_{pf} = -\Delta E_p$$

$$W_{\text{elástica}} = -\Delta E_p$$

Como puedes observar, el trabajo realizado por las fuerzas elásticas es igual a la variación negativa de la energía potencial.

3. Energía potencial elástica

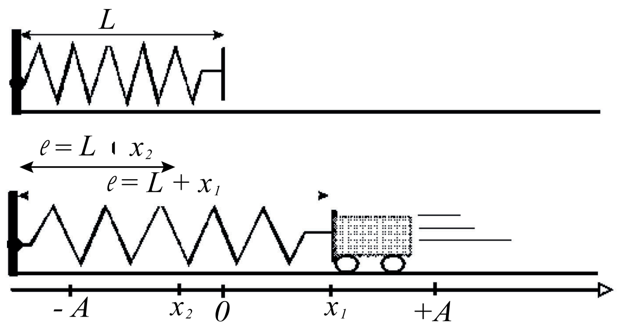


Figura 19. Energía potencial elástica. Tomada de https://goo.gl/gUaspL

Si despreciamos el rozamiento, la única fuerza que actúa en la dirección horizontal es la fuerza elástica que el resorte ejerce sobre el carrito.

$$F = -k\,x\,\hat{i}$$

Aplicamos la definición de trabajo al movimiento del carrito desde una posición cualquiera x_1 hasta otra posición cualquiera x_2.

$$W_{el} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,\hat{i} \bullet dx\,\hat{i} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$W_{el} = -k\left.\frac{x2}{2}\right|_{x_1}^{x_2} = -k\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

a) Según la deducción anterior, la fuerza elástica ¿es una fuerza conservativa? ¿Por qué? ¿Cuál es la definición de fuerza conservativa?
b) Si la fuerza elástica sí es conservativa, ¿se puede definir la energía potencial elástica? Si se puede, ¿cuál debería ser su expresión?
c) Si el carrito realiza una oscilación completa, vuelve al punto de partida, es decir, x1 = x2. Entonces, ¿cuál es el significado físico de la expresión del trabajo de la fuerza elástica? ¿Y si realiza un número entero de oscilaciones completas?
d) Si aplicamos el teorema del trabajo y la energía cinética al sistema masa resorte, ¿podemos llegar a la conclusión de que la energía mecánica se conserva?

$$W_{el} + W_P + W_N = \Delta K$$
$$W_{el} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

e) ¿Cómo sigue?

Sistema masa resorte horizontal

4. Conservación de la energía mecánica

Demostraremos que la energía mecánica K + U es independiente del tiempo. Es decir, para todo *t* la energía mecánica tiene el mismo valor igual a la energía mecánica inicial. Esto es lo mismo que decir que cuando la energía cinética aumenta, la energía potencial disminuye en la misma cantidad.

$$x = A\cos(\omega t) \qquad v = -A\omega\, sen(\omega t)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\left[-A\omega\, sen(\omega t)\right]^2 + \frac{1}{2}k\left[A\cos(\omega t)\right]^2$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sen^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)$$

Pero, como hemos demostrado en la página 1, pregunta c), $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, entonces:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\frac{k}{m}sen^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\left[sen^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

f) ¿Qué relación existe entre este resultado y las respuestas a las preguntas e), f) g) h) i)?

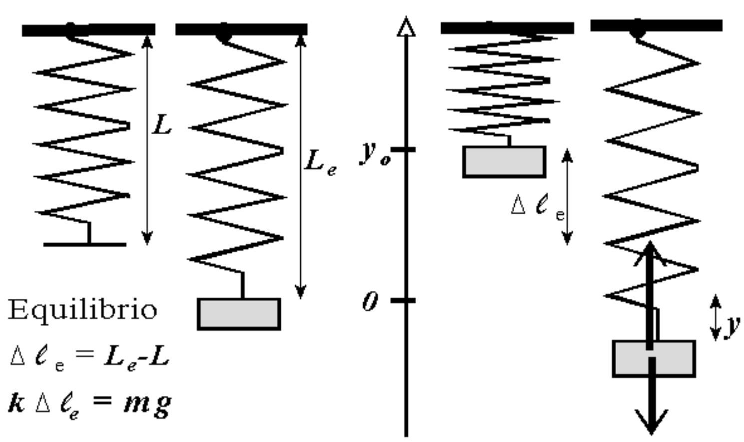


Figura 20. Sistema masa resorte vertical. Tomada de https://goo.gl/gUaspL

En la posición de equilibrio, la fuerza elástica, fuerza que ejerce el resorte sobre la pesa, tiene igual módulo que la fuerza peso (fuerza que ejerce la Tierra sobre la pesa). Entonces, el resorte estará estirado un *Δle* que debe ser igual al peso dividido por la constante del resorte. Si desde esta posición de equilibrio desplazamos a la pesa y, por lo tanto, variamos la longitud del resorte, este estará ejerciendo una fuerza distinta del peso.

Elegimos un sistema de coordenadas en el cual el origen coincide con la posición de equilibrio. Supongamos que levantamos la pesa hasta una posición y_o. El resorte estará ejerciendo fuerza hacia abajo, ya que está comprimido, y junto a la fuerza gravitatoria provocará una aceleración hacia abajo sobre la pesa. Mientras la pesa cae, la fuerza que ejerce el resorte disminuye. Cuando la pesa pasa por $y = 0$, ambas fuerzas se igualan, y luego la fuerza elástica será mayor al peso. Esto provocará una aceleración en sentido opuesto, en este caso en +y, que irá frenando a la pesa hasta que en cierto instante se detendrá. Se puede demostrar que esto ocurrirá cuando $y = -y_o$.

Planteamos la segunda ley de Newton en una posición x cualquiera como la indicada en la imagen de la derecha de la Figura 20:

$$-k(y-\Delta l_e)\hat{j}-mg\,\hat{j}=m\frac{d^2y}{dt^2}\hat{j}$$

$$-ky-k\Delta l_e-mg=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

En la primera ecuación $y - \Delta le$ es la que está estirando el resorte cuando su extremo unido a la pesa está en la posición *y*, pero al aplicar la propiedad distributiva nos quedan dos términos que se anulan entre sí, ya que como hemos dicho el valor del estiramiento del resorte en equilibrio es igual al *peso/k*. Por lo tanto, la ecuación diferencial del movimiento del sistema queda de la misma forma que en el caso del sistema horizontal cuando la única fuerza que actúa en el sentido del movimiento es la fuerza elástica.

$$-ky=m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Pero hay una diferencia:

En el sistema masa resorte <u>horizontal</u> *x* lo que está estirado o comprimido es el resorte, y también la posición del móvil, mientras que en el sistema masa resorte vertical *y* lo que está estirado o comprimido es la posición del móvil, pero no es igual a cómo está estirado o comprimido el resorte.

Las dos ecuaciones diferenciales quedaron idénticas porque en ambos casos se tomó el origen de coordenadas en la posición de equilibrio. En el sistema masa resorte horizontal dicha posición corresponde a fuerza resultante nula y a fuerza elástica nula. En el sistema masa resorte vertical, la posición de equilibrio corresponde a fuerza resultante nula, pero la fuerza que está ejerciendo el resorte es igual al peso y, por lo tanto, el resorte está estirado.

Una consecuencia importante de esta identidad entre las ecuaciones diferenciales es que las soluciones correspondientes a la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo, $x = x(t)$, $v = v(t)$ y $a = a(t)$ serán las mismas en ambos casos, y la frecuencia angular ω en ambos casos es función de *k* y de *m*, pero es independiente de la aceleración de la gravedad *g*.

Resumimos las soluciones:

$$y=y_0\cos(\omega t)$$

$$v=-y_0\omega\,sen(\omega t)$$

$$a=-y_0\omega^2\cos(\omega t)$$

$$a=-\omega^2 y$$

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si cambiamos la denominación de la posición inicial y_o y la llamamos *A*, nos queda todo igual al caso del oscilador horizontal.

a) En las posiciones extremas $+y_o$ y $-y_o$ (o en *A* y en *–A*), ¿cuánto valen la velocidad y la aceleración. ¿En qué instantes el móvil alcanza estas posiciones?
b) Cuando la pesa pasa por la posición y = 0, ¿cuánto vale la aceleración? ¿Qué valor alcanza la velocidad?

c) Tomando la posición y = 0 como nivel de referencia para la energía potencial gravitatoria, ¿cuánto vale la energía mecánica (cinética + potencial elástica en esa posición)? Se pide la expresión en función de los datos que sean relevantes.
d) Cuando la pesa esté en la posición yo = A, ¿cuánto vale la energía mecánica en esa posición? ¿Qué formas de energía están contenidas en ella? Se pide la expresión en función de los datos que sean relevantes.
e) Para una posición *y* se puede expresar la energía mecánica como la suma de la energía cinética más la energía potencial (y esta como la suma de la gravitatoria más la elástica).
f) A partir de la expresión anterior en función del tiempo, demuestre que la energía mecánica es independiente del tiempo, es decir, constante. Para esta demostración es importante recordar que la energía potencial elástica depende del estiramiento, o compresión, del resorte. Además, no olvide la relación entre la frecuencia angular, la constante *k* y la masa.
g) Según la pregunta o) la energía mecánica se conserva. ¿Es coherente este resultado con el trabajo realizado sobre la pesa? ¿Qué fuerzas realizan este trabajo? ¿Son conservativas?

❖ **SISTEMAS RESORTE-MASA: MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO**

Las oscilaciones libres toman como modelo una partícula de masa *m* unida a un muelle elástico de constante *k*.

Ecuación del movimiento

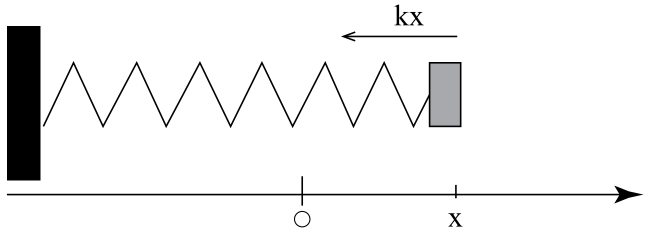


Figura 21. Ecuación del movimiento. Tomada de Física con ordenador, por A. Franco, s.f. Disponible en http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/amortiguadas/Oscila_2.gif

Cuando una partícula se desplaza x de la posición de equilibrio, actúa sobre ella una fuerza que es proporcional al desplazamiento x, y de sentido contrario a este, tal como se muestra en la figura.

La ecuación del movimiento se escribe de la siguiente forma:
$ma = -kx$
Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de la posición x, podemos expresar la ecuación del movimiento como ecuación diferencial de segundo orden, en la que ω_0 es la frecuencia propia o natural del oscilador armónico.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = 0 \qquad\qquad {\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$$

La ventaja de expresar las oscilaciones en términos de una ecuación diferencial es que podemos establecer analogías entre sistemas físicos oscilantes completamente diferentes: mecánicos eléctricos, hidráulicos, etc.

La solución de esta ecuación diferencial es la ecuación de M.A.S.

$$x = Asen(\omega_0 t + \varphi)$$
$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Condiciones iniciales

La posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 determinan la amplitud *A* y la fase inicial *j*. Para *t = 0,*
x_0=*A* ·sen*j*
v_0=$A\omega_0$·cos*j*

En este sistema de ecuaciones se despeja *A* y *j* a partir de los datos x_0 *y* $v_{0.}$

Ejemplo:

Sea un M.A.S de frecuencia angular ω_0=100 rad/s. Sabiendo que la partícula parte de la posición x_0 = 5 con velocidad inicial nula, v_0=0, escriba la ecuación del M.A.S.

5 = *A* ·sen*j*
0 = 100 ·*A* ·cos*j*
La ecuación del M.A.S es
X = 5 ·sen(100*t* + π/2)

Instantes en los que el móvil pasa por una determinada posición

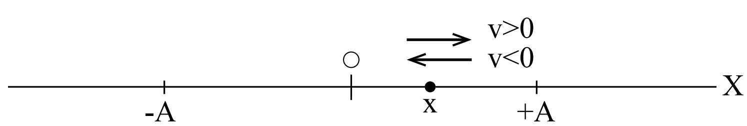


Figura 22. Instantes en los que el móvil pasa por una determinada posición. Tomada de http://bit.ly/2cVMZaQ

Calculamos los instantes *t* en los que el móvil pasa por la posición x, siendo |x|<*A*.

$$\omega_0 t + \varphi = arcsen\frac{x}{A} + 2n\pi \qquad\qquad n = 0,1,2,\ldots$$
$$\omega_0 t + \varphi = \pi - arcsen\frac{x}{A} + 2n\pi$$

Ejemplo:

Si la partícula describe el M.A.S

X = 5 ·sen(100 ·*t* + π/2)

cuyo período es *P* = 2π/100, calculamos los instantes que pasa por la posición x=2.
- El primer instante que pasa por la posición x=2 es *t*=0.0116 con velocidad *v*<0.
- El segundo instante que pasa por la posición x=2 es *t*=0.0512 con velocidad *v*>0.
- El tercer instante que pasa por la posición x=2 es *t*=0.0744=0.0116+2 ·π/100 con velocidad *v*<0
- El cuarto instante que pasa por la posición x=2 es *t*=0.1141=0.0512+2 ·π/100 con velocidad *v*>0

y así, sucesivamente.

Trayectoria en el espacio de las fases

El espacio de las fases nos muestra otra perspectiva del comportamiento de un oscilador. Se representa el momento lineal (o la velocidad) *v* en el eje vertical, y la posición del móvil *x* en el eje horizontal.
X = *A* ·sen($\omega_0 t + \varphi$)
v = *A* ·ω_0·cos($\omega_0 t + \varphi$)

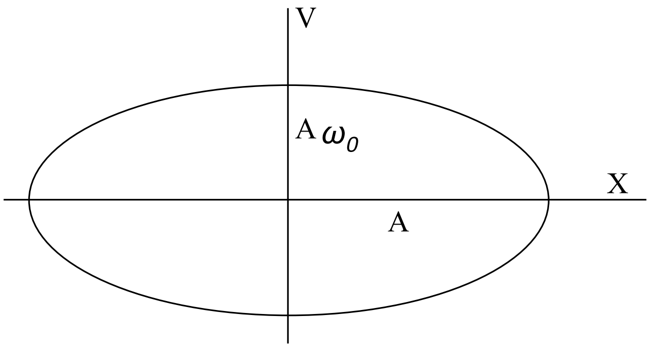


Figura 23. Ecuación del movimiento. Tomada de http://bit.ly/2cCCjMy

Eliminando el tiempo *t* en estas dos ecuaciones, obtenemos la ecuación de la trayectoria: una elipse.

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{A^2\omega_0^2}=1$$

Energía del oscilador

La característica esencial de una oscilación libre es que la amplitud se mantiene constante y, por tanto, la energía total se mantiene constante.

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$$

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Tema n.° 4

1. PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

En esta sección, determinaremos las funciones que están caracterizadas por alguna propiedad que involucra o bien a la recta tangente en cada punto de la gráfica de la función, o bien al área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje de abscisas, o bien la longitud de la gráfica entre los puntos $t_0 y\ t_1$, o bien el volumen de los sólidos generados. Recordemos que si $z: I \to \mathbb{R}$ es una función de la clase $C^1(I)$, entonces, para cada $t \in I$, la recta tangente a la gráfica de la función, $\{(s, z(s)) : s \in I\}$, en el punto $(t, x(t))$ está dada por la siguiente expresión:

$$y = z(t) + z'(t)(x - t), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Por otra parte, el área del recinto limitado por la gráfica de la función y eje de abscisas entre los puntos t_0 y t_1 es

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s)ds \text{.................. (2.2)}$$

la longitud de la gráfica de la función entre los puntos t_0 y t_1 es

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (f'(s))^2}\, ds \text{............(2.3)}$$

mientras que el volumen de los sólidos generados por revolución, respecto del eje de abscisas y del de ordenadas, del recinto limitado por el eje de abscisas, así como la gráfica comprendida entre los puntos t_0 y t_1, están dados respectivamente por:

$$\pi \int_{t_0}^{t_1} f^2(s)ds \quad y \quad 2\pi \int_{t_0}^{t_1} sf(s)ds \text{........(2.4)}$$

Problema 1. (S) Determine las funciones tales que la pendiente de cada punto de su gráfica es igual a la suma de las coordenadas de dicho punto.

Problema 2. (S) Determine todas las funciones x tales que para cada t la recta tangente en corta al eje de abscisas en el punto t - 1.

Problema 3. (S) Determine las funciones tales que en todo punto de su gráfica la pendiente de su tangente es el doble que la de la recta que une dicho punto con el origen de coordenadas.

Problema 4. Determine las funciones tales que en todo punto de su gráfica el segmento formado con el punto de corte de la tangente con el eje de ordenadas es cortado por el eje de abscisas de su punto medio.

Problema 5. (S) Determine las funciones tales que en todo punto de su gráfica la tangente y la recta que pasa por dicho punto y el origen de coordenadas forman con el eje de abscisas un triángulo isósceles.

Problema 6: Determine las funciones tales que en todo punto de su gráfica el triángulo formado por la tangente, el eje de abscisas y la perpendicular al eje de abscisas desde el punto de tangencia tiene un área constantemente igual a A>0.

Problema 7. Determine las funciones tales que fijado t_0 para cualquier t el área del recinto limitada por la gráfica y el eje de abscisas entre t_0 y t es proporcional a la diferencia entre las ordenadas de dichos puntos con constante de proporcionalidad igual a $k > 0$.

Problema 8. Determine las funciones tales que fijado t_0, para cualquier t el cociente entre el área del recinto limitado por la gráfica y el eje de abscisas entre t_0 y t y la longitud de la gráfica entre estos últimos es constantemente igual a $k > 0$.

Problema 9. (S) Determine las funciones cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas tales que para cualquier t el volumen del sólido generado por revolución, respecto del eje de las abscisas, de la gráfica comprendida entre los puntos t_0 y t_1 coincide con el volumen del sólido generado por revolución, respecto del eje de ordenadas, del recinto limitado por el propio eje de ordenadas y la gráfica comprendida entre los puntos t_0 y t_1.

2. TRAYECTORIAS ORTOGONALES

TEOREMA. Si $F(x,y,y') = 0$ es la ecuación diferencial de la familia de curvas $f(x,y,a) = 0$, entonces la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales (curvas que las cortan ortogonalmente) es

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

TEOREMA. Si $F(x,y,y') = 0$ es la ecuación diferencial de la familia de curvas $f(x,y,a) = 0$, entonces la ecuación diferencial de sus trayectorias oblicuas de ángulo $\alpha \neq \pi / 2$ (curvas que las acortan bajo un ángulo α) es

$$F\left(x, y, \frac{y'-m}{1+my'}\right) = 0 \qquad (m = tan\alpha)$$

Ejemplo:
1. Determine las trayectorias ortogonales de:
   a. La familia de parábolas $y = ax^2$
   b. La familia de circunferencias $x^2 + y^2 - 2ax = 0$
2. Halle la familia de trayectorias oblicuas que corta a la familia de rectas $y = ax$ formando un ángulo de $\frac{\pi}{4}$.

Solución:

1. (a) Derivando, obtenemos $y' = 2ax$, y eliminando queda la ecuación $y' = \frac{2y}{x}$. Sustituyendo en esta ecuación y' por $-\frac{1}{y'}$, obtenemos la ecuación de las trayectorias ortogonales $1/y' = 2y/x$, o bien $xdx + 2ydy = 0$. Integrando, obtenemos la familia de elipses:

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C \qquad (C > 0)$$

(b) Derivando, obtenemos $2x + 2yy' = 0$, que es homogénea. Efectuando el cambio $y = vx$, dividiendo entre x^2 y ordenando términos, la ecuación se transforma en

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v}{v^2+1} = 0$$

Integramos

$$\log|x| + \log|v^2 + 1| = K,\ \log|x(v^2 + 1)| = K,\ x(v^2 + 1) = C$$

Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$, obtenemos la familia de circunferencias:

$$x^2 + y^2 - Cx = 0$$

2. Tenemos $m = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Derivando, obtenemos $y' = a$ y eliminando a, queda la ecuación $y = y'x$. Sustituyendo en esta ecuación y' por $(y' - 1)/(y' + 1)$, obtenemos la ecuación de las trayectorias ortogonales $y(1 + y') = (y' - 1)x$.

Esta ecuación se puede escribir de la forma $(x + y)dx + (y - x)dx = 0$ que es la homogénea. Efectuando el cambio $y = vx$, dividiendo entre x y ordenando términos, la ecuación se transforma en

$$\frac{dx}{x} + \frac{(v-1)dv}{v^2+1} = 0$$

Integrando, obtenemos $\log|x| + \frac{1}{2}\log(v^2+1) - \arctan v = \log|c|$ o de forma equivalente $\log C^2x^2(v^2+1) - 2\arctan v = 0$. Sustituyendo $v = \frac{y}{x}$, obtenemos la familia de las trayectorias oblicuas pedidas:

$$logC^2(x^2+y^2) - 2\arctan\frac{y}{x} = 0$$

3. CAMBIO DE TEMPERATURA

A continuación, citamos un texto sobre la vida de Newton, quien descubrió la ley de enfriamiento.

Isaac Newton (1641-1727) es reconocido por sus numerosas contribuciones a la ciencia. Entre otras cosas estudió el movimiento y estableció las leyes de la dinámica, enunció la ley de la gravitación universal, explicó la descomposición en colores de la luz blanca cuando pasa por un prisma, etcétera. A los 60 años de edad, aceptó un puesto como funcionario nacional y se desempeñó como responsable de la Casa de Moneda de su país. Allí tenía como misión controlar la acuñación de monedas. Probablemente se interesó por la temperatura, el calor y el punto de fusión de los metales motivado por su responsabilidad de supervisar la calidad de la acuñación.

Utilizando un horno a carbón de una pequeña cocina, Newton realizó el siguiente experimento. Calentó a rojo un bloque de hierro. Al retirarlo del fuego lo colocó en un lugar frío y observó cómo se enfriaba. Sus resultados dieron lugar a lo que hoy conocemos con el nombre de ley de enfriamiento de Newton, que se describe con la siguiente expresión:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \quad (1)$$

donde la derivada de la temperatura respecto del tiempo $\frac{dT}{dt}$ representa la rapidez del enfriamiento, T es la temperatura instantánea del cuerpo, k es una constante que define el ritmo del enfriamiento (en s^{-1}) y T_0 es la temperatura del ambiente, que es la temperatura que alcanza el cuerpo luego de suficiente tiempo.

Si un cuerpo se enfría a partir de una temperatura inicial T_i hasta una T_0, la ley de Newton puede ser válida para explicar su enfriamiento. (Ojeda, 2002, p. 1).

Ejemplo 1:
A qué hora falleció: Ley de enfriamiento de Newton
Justo antes del mediodía se encuentra el cuerpo de una víctima de un presunto homicidio dentro de un cuarto que se conserva a una temperatura constante de 70 °F. A las 12 del día la temperatura del cuerpo es de 80 °F y a la 1 p.m. de 75 °F. Considere que la temperatura del cuerpo al morir era de 98.6 °F y que este se ha enfriado de acuerdo con la ley de Newton. ¿A qué hora murió la víctima?

Solución:
Aplicamos la ley de enfriamiento de Newton:
$\frac{dT}{dt} = k(A - T)$ es la ecuación diferencial de primer orden
T: Temperatura del cuerpo en cualquier t
A: Temperatura del medio
k: Constante positiva

$A = 70, \quad T(0) = 98{,}6 \; T(t_1) = 80, T(t_2) = 75, además \; t_2 - t_1 = 1 \; (hora)$

$\frac{dT}{dt} = k(70 - T)$

$$\frac{dT}{70 - T} = kdt, integramos \; ambos \; lados$$

$$-\ln(70 - T) = kt + B, multiplicar \; por - 1$$

$$\ln(70 - T) = -kt - B, aplicamos \; e$$

$$e^{\ln(70-T)} = e^{-kt-B}$$

$$70 - T = Ce^{-kt}$$

$$T(t) = 70 - \; Ce^{-kt}$$

$$T(0) = 98.6 = 70 - B_0$$

$$C = -28.6$$

$$T(t) = 70 - \; Ce^{-kt}$$

$$T(t) = 70 + 28.6e^{-kt}$$

$$T(t_1) = 80 = 70 + 28.6e^{-kt_1}$$

$$28.6e^{-kt_1} = 10$$

$$e^{-kt_1} = \frac{10}{28.6}, aplicando \ln$$

$$k = \frac{1.050}{t_1}$$

$$T(t2) = 75 = 70 + 28.6e^{-kt_2}, t_2 = 1 + t_1$$

$e^{-k(t_1+1)} = \frac{10}{28.6}$, aplicamos ln

$k(t_1 + 1) = 1.743$

$$reemplazamos \; k = \frac{1.050}{t_1}$$

$$y \; despejando \; t_1 = 1.51$$

A las 12:00 le restamos 1.51=1:30:06 para obtener la hora de muerte y t_1 y t_2.
Hora de muerte: 12:00-1:30:06=10:29:54.
La persona murió cerca de las 10:30.

Ejemplo 2:
Un termómetro marca la temperatura de un sistema igual a 80 °C; además, se mide también la temperatura del medio la cual es de 20 °C. El sistema se empieza a enfriar y tres minutos después se encuentra que el termómetro marca 75 °C. Se desea predecir la lectura del termómetro para varios tiempos posteriores. Por lo tanto, se requiere determinar la ecuación del enfriamiento en función de los valores dados.

Representemos por T (°C) la temperatura marcada por el termómetro y al tiempo por t (min.). Los datos indican que cuando t = 0.0, T = 80.0, y cuando t = 3.0 min., T = 75 °C.

De acuerdo con la ecuación de la ley de enfriamiento de Newton, la velocidad de variación de la temperatura con el tiempo, dT/dt, es proporcional a la diferencia de temperaturas (T - 20.0). Como la temperatura que marca el termómetro está decreciendo, entonces (-*k*) resulta la constante de proporcionalidad. Así *T* debe ser determinada de la ecuación diferencial; por lo tanto, necesitamos conocer las lecturas del termómetro en dos tiempos diferentes, debido a que hay dos constantes que deben ser determinadas: *k* de la ecuación y la constante de integración que se encuentra en la solución de la misma.

$$(1)\,\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

Así que bajo las condiciones dadas:

(2) cuando t = 0.0 , T = 80.0

Y transcurrido un cierto tiempo de enfriamiento, sucede que

(3) cuando t = 3.0, T = 75.0

De la ecuación (1) se sigue inmediatamente que, debido a que la temperatura ambiente es igual a 20 °C, entonces:
$T = 20 + Ce^{-kt}$

Entonces, la condición (2) nos indica que 80 = 20 + C y, por lo tanto, la constante de integración es C = 60, de tal forma que tenemos que la ecuación anterior resulta en la siguiente expresión:
(4) $T = 20 + 60e^{-kt}$

El valor de *k* será determinado ahora usando la condición (11) y haciendo t = 3.0 y T = 75, por lo que con la ecuación (4) obtenemos
(5) $75 = 20 + 60e^{-kt}$

Realizando el despeje correspondiente, resulta que $e^{-kt} = 0.917$. Luego, aplicando ln a la ecuación y despejando la constante de proporcionalidad, cuando el tiempo es igual a 3.0 min, resulta que k = - 1/3 ln 0.917; por lo tanto:
(6) k = 0.02882602

Ya que ln 0.917 = - 0.0866, la ecuación (4) puede reemplazarse por:

(7) $T = 20.0 + 60\ e^{-0.02882602\,t}$

Esta resulta ser la ecuación de la ley de enfriamiento de Newton aplicada a nuestro sistema. Es decir, el valor de *k* depende de las características específicas del sistema en particular, ecuación con la que podemos determinar a un tiempo dado la temperatura correspondiente y, por consiguiente, conociendo la temperatura hallar el tiempo de enfriamiento transcurrido. Por esta razón, conocer el valor de la constante *k* para diferentes materiales en función de una tabla de valores tiempo vs. temperatura nos da la posibilidad de caracterizar a cada uno de ellos.

4. DESCOMPOSICIÓN, CRECIMIENTO Y REACCIONES QUÍMICAS

La población de una ciudad en el año 2000 fue de 2000000 de habitantes. Si el crecimiento poblacional es proporcional a la propia población y ha sido estimado en 1,5 % anual, determine la ecuación diferencial que describe el problema y la función primitiva equivalente a esa ecuación diferencial. Basándose en la ecuación diferencial, estime el año en que la ciudad tendrá una cantidad de 3000000 de habitantes.

Solución:

En primer lugar, definimos las variables que forman parte del problema:

P: Población de la ciudad, que varía con el tiempo y cuya cantidad será de 2000000 para el año 2000.

T: Tiempo medido en años, que al inicio del problema es el año 2000.

α: Índice anual de crecimiento de la población que vale 0,015 (1,5 %).

En segundo lugar, especificamos la expresión diferencial que describe el problema.

Por definición, el crecimiento de la población en un instante cualquiera se calcularía mediante la siguiente expresión:

$\frac{\Delta P}{\Delta T} \approx \alpha . P$ Donde:

ΔP. Incremento de la población

ΔT. Intervalo de tiempo en que se mide el incremento de población

Para conseguir una igualdad, es necesario llevar el cociente de los incrementos al límite del mismo, lo que ocurre cuando ΔT tiende a “cero”, lo que se expresa como

$$\lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta T} = \alpha P$$

La expresión antes anotada es la derivada de la población respecto al tiempo:

$$\frac{dp}{dT} = \alpha . P \quad \text{ecuación diferencial}$$

Esta última expresión es la ecuación diferencial que describe la variación de la población con respecto del tiempo. Es una ecuación diferencial de primer orden de tipo separable, pues cumple con la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Para resolver la ecuación diferencial:

1. Separamos las variables:

$$\frac{dP}{P} = \alpha dT$$

2. Integramos a ambos lados de la igualdad.

$$\int \frac{dP}{P} = \int \alpha dT$$

$$In(P) + (C) = \alpha.T$$

La constante C puede ser reemplazada por el logaritmo natural de la constante K.

$$In(P) + In(K) = \alpha * T$$

El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos.

$$In(PK) = \alpha * T$$

Aplicamos a ambos lados de la igualdad.

$$PK = e^{\alpha * t}$$

Despejando la población P, se tiene su variación en función del tiempo, en términos generales:

$$P = \frac{e^{\alpha * T}}{K} \qquad \text{solución general}$$

Para el cálculo de la solución específica, se debe aplicar las condiciones iniciales del problema a la solución general. Es decir

$$2\ 000\ 000 = \frac{e^{0.015*2000}}{K}$$

Simplificando:

$$2\ 000\ 000 = \frac{e^{30}}{K}$$

Despejando K:

$$K = \frac{e^{30}}{2\ 000\ 000}$$

$$k = 5\ 343\ 237.291$$

Reemplazando *K* y α en la ecuación general, se tiene

$$P = \frac{e^{0.015*T}}{5\ 343\ 237.291} \qquad \text{solución específica}$$

Para conocer en qué año la ciudad tendrá una población de 3000000 de habitantes, despejamos T de la solución específica, así:

$$P = \frac{e^{0.015*T}}{5\ 343\ 237.291} \qquad \text{solución específica}$$

$$P * 5\ 343\ 237.291 = e^{0.015*T}$$

Aplicamos ln a ambos lados de la igualdad:
ln(3 000 000∗5 343 237.291)=0.015∗T
T= 2027
RPTA: La ciudad tendrá una población de 3 000 000 de habitantes hacia el año 2027.

5. CIRCUITOS ELÉCTRICOS SIMPLES

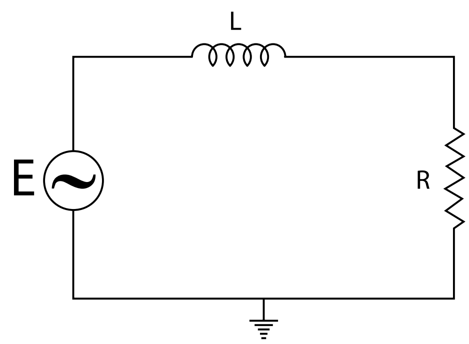


Figura 24. Circuitos de corriente alterna. Tomada de http://bit.ly/2cqpdjr

Considere un circuito en serie que solo contiene un resistor y un inductor (circuito L-R). La segunda ley de Kirchof establece que las sumas de las caídas de voltaje a través de un inductor [L (di/dt)] y el resistor iR son iguales al voltaje aplicado [E (t)] al circuito, lo cual da origen a la ecuación diferencial lineal que describe la corriente i (t):

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \qquad (1)$$

Ejemplo 1:
Un acumulador de 12 V se conecta a un circuito R-L, con una inductancia de Henry y una resistencia de 10Ω. Determine i si la corriente inicial es cero.

Solución:
Lo que debemos resolver de acuerdo a la ecuación (1) es el problema con valores iniciales:

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12 \qquad (2)$$

i (0) = 0
Observemos que la ecuación (2) se puede llevar a la forma:

$$\frac{di}{dt} + 20i = 24$$

Resolviéndola como una ecuación diferencial lineal de primer orden se tiene la solución general:

$$i(t) = \frac{6}{5} + \frac{c}{e^{20t}} \qquad (3)$$

Con la corriente inicial igual a cero, sustituyendo y despejando en (3), tenemos

$$c = e^{20t}\left[i(t) - \frac{6}{5}\right]$$

$$c = e^{20(0)}\left[i(0) - \frac{6}{5}\right]$$

$$c = -\frac{6}{5}$$

Por lo tanto, sustituyendo el valor de C en (3), tenemos como solución particular del problema: $i(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5e^{20t}}$, cuya gráfica es la que mostramos a continuación.

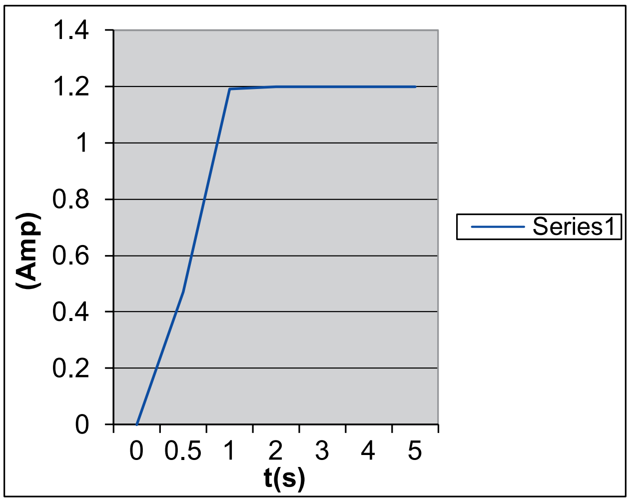


Figura 25. Gráfica de la solución particular $i(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5e^{20t}}$. Disponible en http://bit.ly/2cXQyMy

Dado que hemos considerado que los elementos de las redes serán lineales, bilaterales e ideales, surge que los parámetros L, C y R son constantes. Por ello, las ecuaciones diferenciales de los circuitos serán a coeficientes constantes, y en ellas son aplicables los teoremas de linealidad y superposición.

Debido a que las ecuaciones diferenciales representan circuitos, pueden aplicarse los conceptos de estímulo y respuesta. El tipo más simple de estímulo para una red es el provisto por la energía acumulada inicialmente en los elementos del circuito (inductancias y/o capacitores). Esta energía hace que la corriente circule, pero a medida que esto ocurre la energía es disipada en las resistencias si existen, por lo que, con el tiempo, decrecerá hasta cero.

La respuesta de una red excitada por almacenamiento inicial de energía y luego dejada en libertad es una característica de aquella y es denominada comportamiento natural o respuesta transitoria porque las corrientes y tensiones (que constituyen la respuesta) decrecen a cero después de cierto tiempo. También se la conoce como comportamiento libre (no forzado), ya que es producido en el circuito en sí, sin ninguna fuente externa (Buccella, 2001).

Se le denomina función complementaria u homogénea a la solución de la ecuación diferencial con todas las fuentes igualadas a cero. Desde el punto de vista matemático, el comportamiento natural de un circuito es aquella solución.

La respuesta de un circuito a una excitación por una fuente impulsiva es muy similar al comportamiento natural. El impulso existe solo entre $t = 0^-$ y $t = 0^+$. Antes y después de este intervalo es cero, tal como sería para obtener la función complementaria de la ecuación diferencial. La única forma por la cual el impulso afecta al circuito es almacenar (o extraer) energía durante el período de existencia; en otras palabras, luego de pasado el impulso la energía almacenada produce el comportamiento natural.

La respuesta de un circuito a la excitación por la función escalón puede encontrarse por integración de la respuesta a un impulso. El teorema de la linealidad se extiende a la integración y a la diferenciación del estímulo y de la respuesta, ya que son operaciones matemáticas lineales.

Alternativamente, la respuesta puede obtenerse directamente de la ecuación diferencial apropiada. En este caso, un valor final, o solución estacionaria, existe, es proporcional a la excitación y no decrece a cero con el tiempo. El valor estacionario es simplemente la solución para el circuito en $t = +\infty$ y es idéntico al valor de corriente continua.

La solución completa de una ecuación diferencial de circuito es la suma del comportamiento natural y la solución estacionaria. Esta última por sí misma no satisface las condiciones iniciales ($t=0^+$) en el circuito, mientras que la solución transitoria provee una transición suave desde el estado energético inicial del circuito, representado por los valores iniciales de las corrientes y tensiones, al estado energético final representado por valores finales de las corrientes y tensiones.

Una excitación más general puede descomponerse en un tren de impulsos o escalones y tratar el caso por superposición. Es posible también resolver directamente la ecuación diferencial correspondiente a la excitación general.

En este caso, la solución completa de la solución diferencial es la solución transitoria más una solución que es del mismo tipo que la excitación. Esta última se conoce también como solución estacionaria, aunque no es una constante. Un término más adecuado es el de solución forzada.

Matemáticamente esta solución es llamada la integral particular de la ecuación diferencial.

Lectura seleccionada n.º 2:

Vaciado de un depósito abierto

Leer el apartado “Vaciado de un depósito”.

García, A. F. (2016). *Fluidos* [en línea]. Disponible en http://bit.ly/2ao29Ef.

Glosario de la Unidad I

E

Ecuación diferencial (ED): Una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene derivadas o diferenciales. Una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una ecuación diferencial.

Ecuación diferencial ordinaria: Si una ecuación solo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria. Por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx}+10y=e^{x} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+6y=0$$

Ecuación diferencial parcial: Es una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes, se llama ecuación en derivadas parciales. Por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}$$

G

Grado de una ecuación diferencial: Es la potencia a la que está elevada la derivada más alta, siempre y cuando la ecuación diferencial esté dada de forma polinomial.

M

Método de coeficientes indeterminados: Solo es aplicable cuando la parte no homogénea de la EDO es una función del tipo:

- Polinomio
- Exponencial
- Seno o coseno

Combinaciones de ellas.

- El operador anulador transforma la EDO lineal no homogénea en una EDO homogénea de orden mayor.
- El método del operador anulador nos sirve para determinar solo la forma que debe tener la solución particular.
- Para determinar los coeficientes de la forma en la solución particular se sustituye la solución particular y nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales.
- Los coeficientes en la solución de la homogénea se determinan con los valores iniciales o con los valores en la frontera.

O

Orden de una ecuación diferencial: Es el de la derivada más alta contenida en ella.

R

Resolver ecuación diferencial: Para resolver una ecuación diferencial el primer intento debe ser por integración directa, si eso no resulta intentemos cambios de variables o transformaciones que nos lleven a integrales más comunes.

S

Solución de una ecuación diferencial: Es una función que no contiene derivadas y que satisface a dicha ecuación; es decir, al sustituir la función y sus derivadas en la ecuación diferencial resulta una identidad.

Solución general de una ecuación diferencial: Es la función que contiene una o más constantes arbitrarias (obtenidas de las sucesivas integraciones).

Solución particular de una ecuación diferencial: Es la función cuyas constantes arbitrarias toman un valor especifico.

Bibliografía de la Unidad I

Cengel, Y. A. & Palm III, W. J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias.* (1ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Espinoza, E. (2014). *Análisis matemático IV* (cuarta reimpresión). Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

Larson, R. & Edwards, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Ojeda, A. (2002). *Estudio experimental del enfriamiento de un cuerpo*. Buenos Aires: Escuela de Educación Técnica N.º 3

Zill, D.G & Wright, W.S. (2012). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. (4ª ed.). México.: Mc Graw Hill.

Recursos educativos digitales

Academatica.com. (19 de marzo de 2012). Ecuaciones diferenciales homogéneas (archivo de video). Disponible en www.youtube.com/ watch?v=T9sayf5jlEA

Buccella, J. M. (2001). *Teoría de los circuitos I.* (Capítulo V: Transitorio de circuitos). Mendoza, Argentina: Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional. Disponible en www1.frm.utn.edu.ar/circuitos1/Apuntes/Libro2050.doc

Cuartas, R. (s.f.). Ecuaciones diferenciales. Disponible en https://goo.gl/ewP4Eu

Hervás, J. (s.f). Matemáticas y poesía. Ejercicios resueltos. Disponible en http://www.matematicasypoesia.com.es/Problemas-funciones/problema101.htm

Julioprofe.net (31 de julio de 2011). Ecuaciones diferenciales por separación de variables (archivo de video). Recuperado de www.youtube.com/watch?v=v3CsjgKeB7U

Revilla, F. (28 de marzo de 2014). Trayectorias ortogonales y oblicuas [blog post]. Disponible en http://fernandorevilla.es/blog/2014/03/28/trayectorias-ortogonales-y-oblicuas/

Wikispaces (s.f.). Ecuaciones diferenciales UIS Málaga. Disponible en https://ecuadif.wikispaces.com/TRABAJOS+ANTERIORES

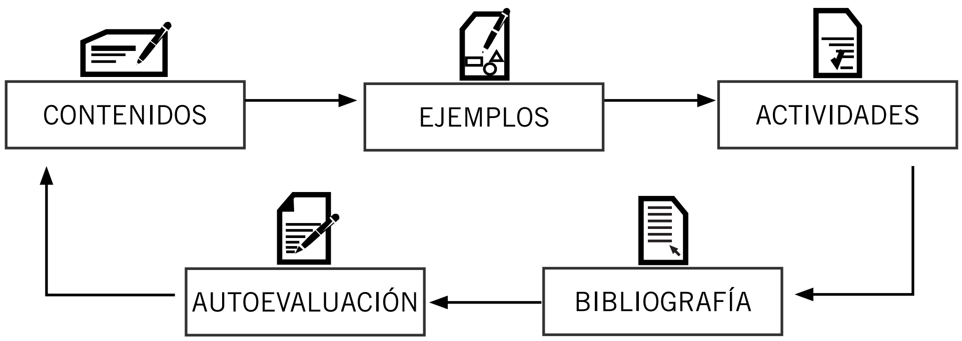
Autoevaluación n.º 1

Resuelva, con buena caligrafía y orden, cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales propuestas.

N°	ECUACIÓN DIFERENCIAL	SOLUCIÓN
01	$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$	$y=\pm\sqrt{C\|x\|-x^2}$
02	$y'=\frac{x^2+y^2}{xy}$	$y=\pm x\sqrt{ln\,x^2+C}$
03	$x\,y'-y=x^3$	$y=\frac{1}{2}x^3+Cx\ con\ C\in IR$
04	$2xy+(x^2-1)y'=0$	$x^2y\ -y=C$
05	$y''-2y=0$	$y=C_1+C_2e^{2x}$
06	$y''-6y'+9y=0$	$y=C_1e^{3x}+C_2x\,e^{x}$
07	$y''+4y'+5y=0$	$y=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{2x}\ sen\,x$
08	$y''-2y'+y=\frac{e^x}{2x}$	$y=y_h+y_p=C_1\,e^x+C_2\,xe^x-\frac{1}{2}xe^x+(\ln\sqrt{x})xe^x$
09	$y''-3y'+2y=0$	$y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$
10	$3x^2+2xy+3y^2+(x^2+6xy)y'=0\ ,\ y(1)=2$	$x^3+x^2y+3y^2x=15$

UNIDAD II
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD II



ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

RESULTADO DE APRENDIZAJE: Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, usando diferentes métodos de solución.

CONOCIMIENTOS	ACTIVIDADES FORMATIVAS	SISTEMA DE EVALUACIÓN
TEMA N.° 1 **SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES** 1. Teoría de sistemas lineales 2. Sistemas lineales homogéneos 3. Solución mediante diagonalización 4. Sistemas lineales no homogéneos 5. Matriz exponencial Autoevaluación de la Unidad II	1. Utiliza diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. 2. Interpreta los resultados obtenidos al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. **Actividad n.° 1** Los estudiantes participan en el foro de discusión sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. **Control de lectura n.° 2** Evaluación del tema n.° 1. Sistema de ED lineales	1. Muestra conductas asociadas a la actividad matemática, tales como la puntualidad, el orden, contraste, precisión y revisión sistemática, y crítica de los resultados. 2. Trabaja en forma individual y grupal las actividades propuestas.

Sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Tema n.° 1

1. Teoría de sistemas lineales

Un **sistema de ecuaciones diferenciales** es un conjunto de varias ecuaciones diferenciales con varias funciones incógnitas y un conjunto de condiciones de contorno. Una solución del mismo es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Según el tipo de ecuaciones diferenciales, puede tenerse un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, ..., x_n; t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, ..., x_n; t) \\ ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t) \end{cases}$$

Ejemplo:

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones para x(t) & y(t):

I) $2x' + y' - y = t$

II) $x' + y' = t^2$

Y con valores iniciales: $x(0) = 1, y(0) = 0$

Aplicando Laplace a las dos ecuaciones, obtenemos lo siguiente:

I) $2SX(s) - 2 + SY(s) - Y(s) = \dfrac{1}{S^2}$

II) $SX(s) + SY(s) = 1 + \dfrac{2}{S^3}$

Utilizando el método de suma y resta, mediante => I - 2*II, obtenemos

$$(S-1)Y(s) - 2SY(s) = \frac{1}{S^2} - \frac{4}{S^3}$$

$$-(S+1)Y(s) = \frac{1}{S^2} - \frac{4}{S^3}$$

$$Y(s) = \frac{4}{S^3(S+1)} - \frac{1}{S^2(S+1)}$$

$$Y(s) = \frac{4-S}{S^3(S+1)}$$

Por fracciones parciales obtenemos lo siguiente:

$$Y(s) = \frac{4}{S^3} - \frac{5}{S^2} + \frac{5}{S} - \frac{5}{S+1}$$

Aplicando Laplace inversa para encontrar y(t), nos da como resultado

$$y(t)=2t^2-5t+5-5e^{-t}$$

Ya obtuvimos y(t). Para obtener x(t), Sustituimos Y(s) en la ecuación II

$$SX(s)+\frac{4}{S^2}-\frac{5}{S}+5-\frac{5S}{S+1}=1+\frac{2}{S^3}$$

$$X(s)=\frac{2}{S^4}-\frac{4}{S^3}+\frac{5}{S^2}-\frac{4}{S}+\frac{5}{S+1}$$

Y, finalmente, aplicando Laplace inversa para encontrar x(t), nos da como resultado

$$x(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+5t+5e^{-t}-4$$

APLICACIONES

RESORTES ACOPLADOS

Ejemplo 1

Resuelva:

$$x_1^{//}+10x_1-4x_2=0$$

$$-4x_1+x_2^{//}+4x_2=0$$

Sujetas a:

$$x_1(0)=0, x_1^{/}(0)=1$$

$$x_2(0)=0, x_2^{/}(0)=-1$$

Solución:

La transformada de Laplace para cada ecuación:

$$s^2X_1(s)-sX_1(0)-x_1^{/}(0)+10x_1(s)-4x_2(s)=0$$

$$-4x_1(s)+s^2X_2(s)-sX_2(0)-X_2^{/}(0)+4X_2(s)=0,$$

El sistema anterior equivale a

$$\left[s^2+10\right]X_1(s)-4X_2(s)=1$$

$$-4X_1(s)+\left[s^2+4\right]X_2(s)=-1$$

Despejando $X_1(s)$:

$$X_1(s)=\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)}=-\frac{1/5}{s^2+2}+\frac{6/5}{s^2+12}$$

Por lo tanto, $X_1(t)$ es:

$$\boldsymbol{X_1(t)=-\frac{\sqrt{2}}{10}sen\,(\sqrt{2}t)+\frac{\sqrt{3}}{5}sen(2\sqrt{3}t)}$$

Sustituimos la expresión $X_1(s)$ para encontrar $X_2(s)$

$$X_2(s)=-\frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)}=-\frac{2/5}{s^2+2}-\frac{3/5}{s^2+12}$$

$$X_2(t)= -\frac{\sqrt{2}}{5}sen(\sqrt{2}t) -\frac{\sqrt{3}}{10}sen(2\sqrt{3}t)$$

Por lo tanto, la solución para el sistema dado es

$$X_1(t)= -\frac{\sqrt{2}}{10}sen(\sqrt{2}t) +\frac{\sqrt{3}}{5}sen(2\sqrt{3}t)$$

$$X_2(t)= -\frac{\sqrt{2}}{5}sen(\sqrt{2}t) -\frac{\sqrt{3}}{10}sen(2\sqrt{3}t)$$

REDES ELÉCTRICAS

En una red que contiene un inductor, un resistor y un capacitor, las condiciones están definidas por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$L\frac{di_1}{dt}+Ri_2=E(t)$$

$$RC\frac{di_2}{dt}+i_2-i_1=0$$

Ejemplo 1:

Resuelva el sistema de ecuaciones para una red eléctrica con las condiciones

$$E(t)=60V, L=1H, R=50\Omega, C=10^{-4}F$$

Y las corrientes i_1, i_2 iguales a cero en el momento inicial.

Solución:

Sistema de ecuaciones:

$$\frac{di_1}{dt}+50i_2=60$$

$$50(10^{-4})\frac{di_2}{dt}+i_2-i_1=0$$

Sujetas a

$$i_1(0)=0, i_2(0)=0$$

Se aplica la transformación de Laplace a cada ecuación del sistema y se simplifica de la siguiente forma:

$$sI_1(s)+50I_2(s)=\frac{60}{s}$$

$$-200I_1(s)+(s+200)I_2(s)=0$$

Despejamos para $I_1 e I_2$:

$$I_1(s)=\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}$$

$$I_2(s)=\frac{12000}{s(s+100)^2}$$

Se saca la transformada inversa de Laplace:

$$i_1(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-100t}-60te^{-100t}$$

$$i_2(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-100t}-120te^{-100t}$$

Ejemplo 2:

Encuentre la solución para la ecuación diferencial obtenida de un sistema LC, sabiendo que $q(0)=q_0$ y $i(0)=0$.

Por los cursos de Física, tenemos que la ecuación para el sistema sería la siguiente:

$$\frac{q}{C}=-L\frac{di}{dt}$$

Debemos tomar en cuenta lo siguiente: $i=\frac{dq}{dt}$

$$\frac{q}{C}+L\frac{di}{dt}=0$$

$$\frac{q}{LC}+\frac{di}{dt}=0$$

Aplicamos la transformada de Laplace

$$\frac{1}{LC}Q+s^2Q-sq_0-0=0$$

Despejamos para Q

$$Q=\frac{sq_0}{s^2+\frac{1}{LC}}$$

Aplicamos la transformada inversa de Laplace y vemos claramente que tenemos un coseno:

$$q(t)=q_0\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

2. Sistemas lineales homogéneos

Vamos a estudiar los distintos casos que se pueden presentar en un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Los pasos para resolver un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales son los siguientes:

1. Construya la matriz de coeficientes para las ecuaciones del sistema dado.
2. Determine los valores propios de esta matriz de coeficientes del sistema dado de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.
3. Ahora, busque el vector propio inicial de este conjunto de valores propios y nómbrelo como EV1.
4. Determine la primera ecuación de este vector en términos de constantes k1, k2.

5. Después de esto, determine el siguiente conjunto de valores propios, sus vectores propios correspondientes y su ecuación.
6. Anote la solución general para las ecuaciones en términos de constantes k1, k2.
7. Por último, derive la solución general para el sistema de ecuaciones.

Valores propios reales y distintos

Comencemos con un sistema de dos ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales especificadas.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

$$t = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de forma analítica

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2(3x + 2y) = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x - 4\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - x\right) = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0$$

$$s^2 - 3s - 4 = 0 \quad \begin{cases} s_1 = 4 \\ s_2 = -1 \end{cases}$$

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - x\right) = \frac{3}{2}C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t}$$

Determinamos C_1 y C_2 a partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ -4 = \dfrac{3}{2}C_1 - C_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{8}{5}(-e^{4t} + e^{-t})$$

$$y = -\frac{4}{5}(3e^{4t} + 2e^{-t})$$

Resolvemos el sistema de las dos ecuaciones diferenciales utilizando la función *dsolve* de MATLAB. Luego, escribimos el sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathrm{u}} = \mathrm{Au}$$

Calculamos los valores y vectores propios de la matriz **A** mediante la función *eig* de MATLAB. Los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$ y los correspondientes vectores propios son $\mathbf{v}_1 = [-1, 2/3]$ y $\mathbf{v}_2 = [1, 1]$. La solución del sistema de ecuaciones diferenciales se escribe de la siguiente forma:

$$x = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Determinamos C_1 y C_2 a partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} C_1 = -\dfrac{8}{5} \\ C_2 = -\dfrac{12}{5} \end{cases}$$

$$x = \frac{8}{5}\left(-e^{4t} + e^{-t}\right)$$

$$y = -\frac{4}{5}\left(3e^{4t} + 2e^{-t}\right)$$

3. Solución mediante diagonalización

Matriz diagonalizable

Una matriz cuadrada A se dice que es diagonalizable si existe una matriz invertible *P*, llamada matriz de paso, tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, siendo D una matriz diagonal.

Cuando A es diagonalizable, la matriz D es la que tiene en su diagonal los valores propios de A, repetidos tantas veces como indique su grado de multiplicidad. Y la matriz de paso *P* es la que tiene por columnas a los vectores propios asociados a los valores propios de A.

TEOREMA

Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces, A es diagonalizable si y solo si todas las raíces del polinomio característico son reales. Además, la multiplicidad de cada valor propio coincide con el valor de $n - rg(A - \lambda \cdot I_n)$
Es decir:

$$\boxed{A \text{ es diagonalizable} \iff \begin{Bmatrix} 1.\ P(\lambda) \text{ tiene solo raíces reales.} \\ 2.\ m(\lambda_i) = n - rg(A - \lambda_i \cdot I_n),\ \forall i \end{Bmatrix}}$$

Se puede probar que si las raíces de $P(\lambda)$ son todas simples, A será siempre diagonalizable. Cuando $P(\lambda)$ tiene alguna raíz múltiple, hay que verificar también la condición.

CÁLCULO DE LA MATRIZ DIAGONAL Y DE LA MATRIZ DE PASO

PASO 1. Calculamos el polinomio característico $P(\lambda)=|A-\lambda\cdot I_n|$, y lo igualamos a cero, obteniendo sus raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ que son los valores propios de A.

PASO 2. Comprobamos las dos condiciones para que A sea diagonalizable:

1. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ *son todos números reales.*
2. $n - rg(A-\lambda_i \cdot I_n) = m(\lambda_i), \quad \forall i = 1,2,...,r$

Cuando se verifiquen las condiciones anteriores, A es diagonalizable y la matriz diagonal es

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

PASO 3. Para calcular la matriz de paso *P*, se calculan los vectores propios asociados a los valores propios de A. Para ello, se resuelve para cada λ_i el sistema (*) de la página 1.

Dependiendo del número de grados de libertad, se calcula matriz de paso P. Si el conjunto de soluciones tiene solo un grado de libertad, se le da al parámetro un valor cualquiera particular y se consigue el vector propio asociado. Si el conjunto de soluciones tiene varios grados de libertad, se obtienen soluciones particulares seleccionando los vectores linealmente independientes que generan las ecuaciones paramétricas.

La matriz de paso *P* será entonces la que tiene por columnas a estos vectores propios.

EJEMPLO. Estudie si es posible diagonalizar la siguiente matriz. En caso sea afirmativo el resultado, encuentre una matriz diagonal *D* y una matriz de paso *P* tales que $P^{-1}\cdot A\cdot P = D$.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Sistemas lineales no homogéneos

Sea el sistema:

$x' = P(t)\cdot x + Q(t)$

Supongamos que está resuelto el sistema homogéneo.

$x' = P(t)\cdot x$

Y llámese Y (t) a la matriz fundamental de las soluciones. Se van a distinguir distintos casos:

A. Si P(t) = A, matriz constante diagonalizable.

   Llamando T a la matriz de los vectores propios de A y haciendo el cambio de variable

x = T·y

Resulta

$$T \cdot y' = A \cdot T \cdot y + Q(t)$$

Como T es no singular

$$y' = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot y + T^{-1} \cdot Q(t)$$

Pero

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D$$

(matriz diagonal de los valores propios)

Por consiguiente:

$$y' = D \cdot y + T^{-1} \cdot Q(t)$$

En componentes

$$y_i' = r_i \cdot y_i + h_i(t)$$

(No hay suma en índices repetidos)

Luego:

$$y_i = e^{r_i t} \bullet \int e^{-r_i t} \bullet h_i(t) \bullet dt + C_i \bullet e^{r_i \cdot t}$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$$

B. Variación de los parámetros

Conocida Y (t), matriz fundamental de la ecuación homogénea, se busca una solución de la forma $x = \Psi(t) \cdot \mathbf{u}$

u debe ser determinado de modo que el vector **x** sea solución del sistema.
x' = **P**(t) ·**x** + **Q**(t)

Sustituyendo

$$\Psi'(t) \cdot \mathbf{u} + \ddot{\ }\ (\mathrm{t}) \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{P}(t) \cdot \Psi(t) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Q}(\mathrm{t})$$

Pero

$$\Psi'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \Psi(t)$$

Ya que las columnas de j son solución de la homogénea, luego

$$\mathbf{u} = \int \Psi^{-1}(t) \bullet Q(t) \bullet dt + C$$

Entonces, la solución general será

$$x = \Psi(t) \bullet \int \Psi^{-1}(t) \bullet Q(t) \bullet dt + \Psi(t) \bullet C$$

El problema de la diagonalización

Diagonalizar consiste en encontrar una base respecto de la cual un endomorfismo posea una expresión matricial diagonal. Para ilustrar esto pensemos por ejemplo en $\mathbb{R}^3$ y el siguiente esquema en el que expresamos lo que debe ocurrir, para que sea posible diagonalizar un cierto endomorfismo "f" dado por una cierta matriz A en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[rr] \arrow[d, "P^{-1}"'] & & \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \arrow[rr] & & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad P = \left(v_1 | v_2 | v_3\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} \qquad\qquad B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$(x \overset{A}{\mapsto} Ax) \;=\; (x \overset{P-1}{\mapsto} P^{-1}x \overset{D}{\mapsto} DP^{-1}x \overset{P}{\mapsto} PDP^{-1}x)$$

$$Ax = (P(D(P^{-1}x))) \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$v_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$
$$v_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$
$$v_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$$

Son los vectores columna de P.

Si este esquema es posible, ha de ser lo siguiente:

$$f(v_1) = (\lambda_1, 0, 0)|_B = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3$$
$$f(v_2) = (0, \lambda_2, 0)|_B = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3$$
$$f(v_3) = (0, 0, \lambda_3)|_B = 0v_1 + 0v_2 + \lambda_3 v_3$$

En otras palabras que para que esto ocurra deben existir vectores v_1, v_2, v_3 independientes (en particular no nulos), de forma que $f(v_i) = \lambda_i v_i$, es decir que su imagen es múltiplo de sí mismo. En general, si trabajamos en lugar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^n$, llegamos a la misma conclusión. Deben existir n vectores independientes v_i, tales que $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Este tipo de vectores se destacan con la siguiente definición.

5. Matriz exponencial

Para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales se hace necesario introducir el concepto de exponencial, no ya de un número sino de una matriz. En analogía con el desarrollo en serie de potencias de e^x para x $\in \mathbb{R}$, definimos la exponencial de una matriz cuadrada A como la siguiente serie matricial.

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

Si la matriz A tiene alguna potencia nula $A^k = 0$, es decir, si A es nilpotente de orden k, entonces $\cdots = A^{k+2} = A^{k+1} = A^k = 0$ y lo anterior se convierte en una suma finita. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es nilpotente de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, sus potencias superiores a 3 se anulan $\cdots = A^6 = A^5 = A^4 = A^3 = 0$ y así su exponencial es la siguiente suma:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}0 + \frac{1}{4!}0 + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si por el contrario A no es nilpotente, nos vemos obligados a considerar un proceso de paso al límite. Por ejemplo, para la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $C^2 = I_2$, y, por tanto, sus potencias pares dan la identidad, I_2 y sus potencias impares vuelven a dar de nuevo la matriz C.

$$C^n = \begin{Bmatrix} I_2, & si\ n\ es\ par & (0, 2, 4, \cdots) \\ C, & si\ n\ es\ impar & (1, 3, 5, \cdots) \end{Bmatrix}$$

Así, la exponencial de C es la siguiente serie:

$$e^C = I_2 + C + \frac{1}{2}C^2 + \frac{1}{3}C^3 + \cdots + \frac{1}{(2k)!}C^{2k} + \frac{1}{(2k+1)!}C^{2k+1} + \cdots =$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\cdots+\frac{1}{(2k)!}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{(2k+1)!}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\cdots=$$

$$=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}+\cdots\frac{1}{(2k)!}+\cdots & 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\frac{1}{(2k+1)!}+\cdots\\ 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\frac{1}{(2k+1)!}+\cdots & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}+\cdots\frac{1}{(2k)!}+\cdots\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cosh(1) & \operatorname{senh}(1)\\ \operatorname{senh}(1) & \cosh(1)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e+\frac{1}{e} & e-\frac{1}{e}\\ e-\frac{1}{e} & e+\frac{1}{e}\end{pmatrix}$$

Este proceso de paso al límite puede ser muy complejo en general y es aquí donde la forma normal (o canónica) de Jordan nos puede ser muy útil.

Como curiosidad, fijémonos que la matriz anterior no es nilpotente, aunque es suma de dos nilpotentes.

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

Por tanto, la suma de matrices no es una operación interna en el conjunto de matrices nilpotentes.

Exponencial y forma de Jordan

Supongamos que se tiene la siguiente descomposición para la matriz A:

$$A=PJP^{-1}$$

Entonces:

$$e^{A}=e^{PJP-1}=I+PJP^{-1}+\frac{(PJP^{-1})^{2}}{2!}+\cdots+\frac{(PJP^{-1})^{n}}{n!}+\cdots=$$

$$=PP^{-1}+PJP^{-1}+\frac{PJ^{2}P^{-1}}{2!}+\cdots+\frac{PJ^{n}P^{-1}}{n!}+\cdots=$$

$$=P(I+J+\frac{J^{2}}{2!}+\cdots+\frac{J^{n}}{n!}+\cdots)P^{-1}=$$

$$=Pe^{J}P^{-1}$$

Es decir,

$$e^{PJP-1}=Pe^{J}P^{-1}$$

De acuerdo con esto, si la expresión anterior representa la descomposición de Jordan de una matriz A, calcular e^A se reduce a calcular e^J, la exponencial de una matriz de Jordan.
Asimismo, no es difícil darse cuenta de que si tenemos una matriz diagonal de bloques (cuadrados), como lo es la de Jordan, sus potencias resultan una matriz diagonal de bloques donde cada uno es la potencia del correspondiente bloque.

$$J=\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_0 & & & \\ \hline & J_1 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_r \end{array}\right)\Rightarrow J^n=\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_0{}^n & & & \\ \hline & J_1{}^n & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_r{}^n \end{array}\right)$$

Por tanto, para calcular la exponencial se tiene

$$J=\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_0 & & & \\ \hline & J_1 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_r \end{array}\right)\Rightarrow e^J=\left(\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_0} & & & \\ \hline & e^{J_1} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & e^{J_r} \end{array}\right)$$

El mismo razonamiento es válido ahora para los subbloques y, por tanto, hemos reducido el problema a calcular la exponencial de una matriz del tipo

$$J_i^j=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{5X5}$$

Fijémonos que estos subbloques se pueden expresar como suma de una matriz diagonal D y otra nil-potente N, $J_i^j=D+N$, concretamente.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{5X5}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix}_{5X5}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{5X5}$$

Además, se cumple que

$$e^{J_i^j}=e^{D+N}=e^De^N$$

Como se tiene

$$e^{D}=\begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & e^{\lambda} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & e^{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & e^{\lambda} \end{pmatrix}_{5X5} \qquad e^{N}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{1}{(s-1)!} & \frac{1}{(s-2)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}_{5X5}$$

Y como $e^{D}=e^{\lambda}I_5$, obtenemos que

$$e^{J_i^j}=e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(s-2)!} & \frac{1}{(s-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{(s-1)!} & \frac{1}{(s-2)!} & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}_{5X5}$$

De esta forma vemos que el cálculo de la exponencial de una matriz se puede simplificar enormemente si tenemos su descomposición de Jordan.

Lectura seleccionada n.º 3

SISTEMAS HOMOGÉNEOS Y SU APLICACIÓN

Leer el apartado 2.: Sistemas homogéneos y su aplicación al ajuste de reacciones químicas, desde la pp. 10-12.

Arrieta, J. (s.f.). Sistemas de ecuaciones lineales: Resolución. Disponible en http://www.mat.ucm.es/~jarrieta/asignaturas/calculocomputacional/practica2.pdf

Actividad n.º 3

Foro de discusión sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Instrucciones

- Ingrese al foro y participe con comentarios críticos y analíticos sobre el tema sistema de ED lineales.
- Lea y analice el tema n.º 1 del manual.
- Responda en el foro a las preguntas acerca de sistemas de ED lineales.
  1. Escriba 5 ejemplos de sistema ED lineales.
  2. Resuelva el primer ejemplo propuesto (tome en cuenta el ejemplo de ejercicio resuelto adjunto).

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Las ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas consisten en dos o más ecuaciones con derivadas de dos o más funciones desconocidas de una variable independiente. Si x, y y z son funciones de la variable t,

- $4\dfrac{d^2x}{dt^2} = -5x + y$
- $x^{/} - 3x + y^{/} + z^{/} = 5$
- $x^{/} - y^{/} + 2z^{/} = t^{/}2$
- $2\dfrac{d^2x}{dt^2} = 3x - y$
- $x + y^{/} - 6z^{/} = t - 1$

Son dos ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas.

Solución de un sistema

Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones suficientemente diferenciables como las siguientes:

$x = [?][?]_1(t), y = [?][?]_2(t), z = [?][?]_3(t)$, etc., que satisfacen cada ecuación del sistema en un intervalo común I.

Eliminación sistemática

El primer método que describiremos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes se basa en el principio algebraico de la eliminación sistemática de variables. El análogo de multiplicar una ecuación algebraica por una constante es operar una ecuación diferencial con alguna combinación de derivadas. Para este fin, se reformulan las ecuaciones de un sistema en términos del operador diferencial D. Debemos recordar

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y^{/} + a_0 y = g(t)$$

En donde las a_i , i=0,1,...,n son constantes y se pueden escribir en la forma

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0) D = g(t)$$

El operador diferencial n, $a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ se representa en la forma abreviada P(D). Como P(D) es un polinomio de D, podemos factorizarlo en operadores diferenciales de orden menor. Además, los factores de P(D) son conmutativos.

Ejemplo:

Resuelva $Dx + (d+2) = 0(D-3)x - 2y = 0$

Solución:

Al operar con D - 3 en la primera ecuación, con D en la segunda y restando, se elimina la x del sistema. Entonces, la ecuación diferencial para y es

$$\left[(D-3)(D+2) + 2D\right] y = 0 = (D^2 + D - 6y)y$$

Dado que la ecuación característica de la última diferencial es
$m^2 + m - 6 = (m-2)(m+3) = 0$, llegamos a la solución:
$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$

Eliminamos *y* en forma similar y vemos que
$(D^2 + D - 6)x = 0$

de donde se obtiene la siguiente expresión matemática:
$x(t) = c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}$

Una solución del problema no contiene constantes independientes, pues el sistema mismo establece una restricción en el número de constantes que se puede elegir en forma arbitraria al sustituir los resultados obtenidos anteriormente en la primera ecuación del problema.

$$(4c_1 + 2c_3)e^{2t} + (-c_2 - 3c_4)e^{-3t} = 0$$

De aquí podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = -2c_1 e^{2t} - [?][?][?]c_2 e^{-3t}$$
$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

Al resolver los sistemas de ecuaciones conviene fijarse bien en lo que se hace, pues a veces se consiguen ventajas. Si hubiéramos resuelto primero para x, luego podríamos haber hallado *y*, además de la relación entre las constantes mediante la última ecuación del problema.

Glosario de la Unidad II

D

Diagonalización de matrices

El modelo deseado es una matriz del tipo

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$$

Como punto de partida tenemos la matriz A de aplicación lineal, y tenemos que calcular los autovalores λ_i y la matriz de cambio de base *P*. Escribimos la matriz P descompuesta por columnas.

$$J=P^{-1}AP$$
$$PJ=AP$$
$$(v_1|v_2|\cdots|v_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=A(v_1|v_2|\cdots|v_n)$$
$$(\lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2|\cdots|\lambda_n v_n)=\left(Av_1|Av_2|\cdots|Av_n\right)$$

Así tenemos el siguiente resultado:

$$Av_1=\lambda_1 v_1 \qquad \ldots \qquad Av_n=\lambda_n v_n$$
$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

Diagonalización ortogonal

Una matriz P_{nxn} se dice ortogonal si sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Si $A_n=\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ es ortogonal, al ser multiplicadas las columnas escalarmente entre sí resulta lo siguiente:

$(a_{i1} \ldots a_{ni})\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots \\ a_{nj}\end{pmatrix}=a_{1i}\,a_{1j}+\ldots+a_{ni}\,a_{nj}=\begin{cases}1, si\ i=j\\ 0, si\ i\neq j\end{cases}$, de donde

$$A^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = In,$$

pues para cada $1 \leq i, j \leq n$ la entrada i, j del producto A^tA es igual a

$$(a_{i1} \ldots a_{ni}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Es decir, 1 si es una entrada i, i en la diagonal, y 0 si es una entrada i, j fuera de la diagonal ($i \neq j$). Se concluye que una matriz es ortogonal, si y solo si es invertible (la implicación que falta es fácil de probar) y su inversa es su traspuesta. Otra conclusión es que, así como las columnas de una matriz ortogonal forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ las filas forman otra base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

E

El procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz real simétrica A_n consta de tres pasos:

- Se determina una base para cada subespacio propio de A.
- Se orto normalizan según Gramm-Schmidt las bases de cada subespacio propio de A.
- Se unen estas bases orto normalizadas obteniendo con éstas una base orto normal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A.
- La matriz diagonalizante es aquélla que tiene por columnas a los vectores de la base orto normal de $\mathbb{R}^n$ obtenida en el paso tres.

M

Matriz ortogonal

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal. Sus columnas forman la base canónica de $\mathbb{R}^n$, de la cual sabemos que es ortonormal.

- $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ es otro ejemplo de matriz ortogonal. Para ver esto basta multiplicar A por su traspuesta y verificar que resulta la identidad 2x2.

- $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal 3x3, pues $A^tA = I_{3x3}$.

❖ A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ no es una matriz ortogonal, pues aunque sus columnas son ortogonales, no tienen norma uno.

Como ya sabemos, la diagonalización de una matriz A_{nxn} depende de la existencia de una matriz diagonalizante C_{nxn}, con cuya inversa resulta el producto $C^{-1}AC$ es una matriz diagonal. La matriz diagonalizante C se construye de dos formas:

- encontrando una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A
- ubicando estos vectores propios como columnas de C.

Ahora bien, si esta base de $\mathbb{R}^n$ resulta ser una base ortonormal, entonces la matriz diagonalizante C es ortogonal y $C^{-1}AC$ se puede escribir C^tAC, pues para matrices ortogonales, como vimos anteriormente, vale $C^{-1} = C^t$. Este tipo de diagonalización se denomina diagonalización ortogonal y la matriz A se dice ortogonalmente diagonalizable.

Para la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ resultan $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ vectores propios de A, pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio 4, y $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio (-2). Así, resulta la matriz C = $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ una matriz diagonalizante de A y $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Adicionalmente, como C es una matriz ortogonal, la expresión $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ se transforma en $C^tAC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y se tiene así un ejemplo de una matriz A ortogonalmente diagonalizable.

Vamos a establecer ciertos fundamentos, que incluyen saber a priori cuándo es una matriz ortogonalmente diagonalizable, antes de enunciar un procedimiento para hacer este tipo de diagonalizaciones.

T

Teorema 1

Si A_{nxn} es real simétrica, α_1 y α_2 dos valores propios diferentes de A, y v_1 y v_2 dos vectores propios de A, el vector v_1 asociado a α_1 y v_2 asociado a α_2,
entonces, v1 y v_2 son ortogonales ($v_1 \perp v_2$).

Demostración:

Notemos que si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar $u \cdot v$ se puede calcular multiplicando el vector fila 1xn: v^t por el vector columna nx1 u.

Es decir, $v^t u = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (v_1 u_1 + \dots + v_n u_n)$.

Teniendo en cuenta este resultado parcial, proseguimos con la demostración.
Se evalúa el producto escalar Av1 por v2 de dos maneras:
Por un lado, $Av1 \cdot v_2 = (\alpha_1 v_1) \cdot v_2 = \alpha_1 (v_1 \cdot v_2)$, por otro
$Av_1 \cdot v_2 = (Av_1) = (A)\, v_1 = (A^t v_2)^t\, v_1 = v_1 \cdot (A^t v_2) = v_1 \cdot (A\, v_2) =$
$v_1 \cdot (\alpha_2 v_2) = \alpha_2 (v_1 \cdot v_2)$, entonces:
$\alpha_1 (v_1 \cdot v_2) = \alpha_2 (v_1 \cdot v_2)$ y $(\alpha_1 - \alpha_2)(v_1 \cdot v_2) = 0$, como $\alpha_1 \neq \alpha_2$ es $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ y tiene que ser:
$v_1 \cdot v_2 = 0$, es decir $v_1 \perp v_2$.

Este teorema garantiza que las bases de los espacios propios de A asociados a valores propios diferentes son ortogonales entre sí. Más explícitamente, si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son los diferentes valores propios de A y $\beta_1, \dots, \beta_k$ bases ortonormales de los subespacios propios $\alpha_1 \dots \alpha_k$ respectivamente, entonces $\beta = U_{i=1}^{k} \beta_i$. Sabemos que es un conjunto l.i., pero bajo estas condiciones es, además, un conjunto ortonormal. Para poder diagonalizar A, solo falta ver que $\beta = U_{i=1}^{k} \beta_i$ tiene "n" elementos, eso está garantizado por un teorema cuya demostración escapa del alcance de este curso.

Teorema 2
Si A es una matriz real simétrica nxn, entonces A es diagonalizable.

El no tener la demostración de este teorema no hace perder nada, pues en todos los ejemplos al tratar de diagonalizar una matriz real simétrica A_{nxn}, se consigue una base de $\mathbb{R}^n$ formada por n vectores propios de A. La diagonalización ortogonal de este tipo de matrices siempre es posible, pues al ortonormalizar —siguiendo el procedimiento de Gramm-Schmidt— las bases de cada subespacios propios y unir las bases así obtenidas, se tiene una base ortonormal de IRn, con la cual se tiene una matriz ortogonal C y la diagonalización ortogonal $C^t AC$.

Bibliografía de la Unidad II

Cengel, Y. A. & Palm III, W. J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias.* (1.ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Espinoza, E. (2014). *Análisis matemático IV* (cuarta reimpresión). Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

Larson, R. & Edwards, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Zill, D.G & Wright, W.S. (2012). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. (4ª ed.). México.: Mc Graw Hill.

Recursos educativos digitales

Academatica.com. (19 de marzo de 2012). Ecuaciones diferenciales homogéneas. Disponible en https://youtu.be/T9sayf5jlEA

García, A. (s.f.). Ecuaciones diferenciales. Disponible en https://goo.gl/eHyDCR

Julioprofe.net (31 de julio de 2011). Ecuaciones diferenciales por separación de variables (archivo de video). Recuperado de https://youtu.be/v3CsjgKeB7U

WikiMatemática. (s.f.). Sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Disponible en https://goo.gl/6LPu9g

Autoevaluación n.º 2

En los ejercicios del 11 al 16, compruebe que el vector X es una solución del sistema dado.

11. $\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$

$\frac{dy}{dt} = 4x - 7y; \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t}$

12. $\frac{dx}{dt} = -2x + 5y$

$\frac{dy}{dt} = -2x + 4y; \quad x = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - sen\, t \end{pmatrix} e^{t}$

13. $x' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x; \ x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t/2}$

14. $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x; \ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} te^{t}$

15. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} x; \ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$

16. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x; \ x = \begin{pmatrix} sen\, t \\ -\frac{1}{2} sent - \frac{1}{2} cost \\ -sent + cost \end{pmatrix}$

En los problemas del 17 al 20, los vectores dados son soluciones de un sistema X' = AX. Determine si los vectores forman un conjunto fundamental en $< -\infty ; \infty >$

17. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-6t}$

18. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} te^{t}$

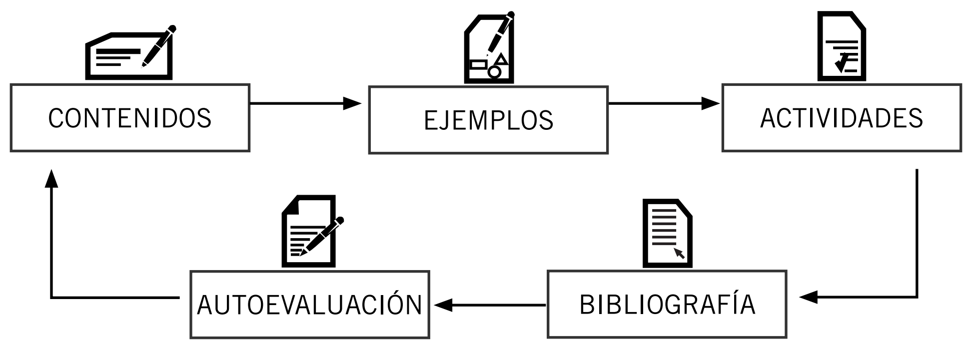
19. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

20. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$

UNIDAD III
TRANSFORMADA DE LAPLACE

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD III



ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

RESULTADO DE APRENDIZAJE: Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar la transformada de Laplace para resolver problemas de una ecuación diferencial lineal de orden “n”, utilizando diversas técnicas y métodos de solución.

CONOCIMIENTOS	ACTIVIDADES FORMATIVAS	SISTEMA DE EVALUACIÓN
TEMA N.° 1 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE 1. Definición y condición suficiente para la existencia de L{F(t)} de la transformada de Laplace 2. Transformada de Laplace de algunas funciones elementales 3. Propiedades de la transformada de Laplace 4. Transformada de Laplace de la multiplicación, división, de la derivada, de integración 5. Aplicación de la transformada en la evaluación de integrales **TEMA N.° 2 LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE** 1. La transformada inversa 2. Propiedades de la transformada inversa de Laplace 3. Transformada inversa de Laplace de la derivada, de las integrales, de la multiplicación por S, de la división por S, por el método de las fracciones parciales 4. Fórmula del desarrollo de Heaviside 5. La convolución. Teorema de Convolución y teorema de convolución para las transformadas inversas **Lectura seleccionada n.º 4:** Aplicaciones de la transformada de Laplace en la ingeniería. **TEMA N.º 3 APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE** 1. Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales por el método de la transformada de Laplac 2. En una ecuación integral, en una integral-diferencial, resortes acoplados y redes eléctricas **Autoevaluación de la Unidad III**	1. Obtiene la transformada de Laplace de una función dada de una tabla estándar, utilizando las propiedades de las transformadas si la función no está en la tabla. 2. Utiliza diversas técnicas y métodos para resolver una transformada inversa de Laplace. 3. Utiliza la transformada de Laplace para resolver una ecuación diferencial lineal de orden “n” con coeficientes constantes. Actividad n.º 4	1. Muestra conductas asociadas a la actividad matemática, tales como la puntualidad, el orden, contraste, precisión y revisión sistemática, y crítica de los resultados. 2. Trabaja en forma individual y grupalmente las actividades propuestas.

La transformada de laplace

Tema n.° 1

El método de la transformada de Laplace es un método operacional que puede usarse para resolver ecuaciones diferenciales lineales, ya que su uso hace posible que diversas funciones sinusoidales, sinusoidales amortiguadas y exponenciales se puedan convertir en funciones algebraicas de una variable compleja . Es decir, es un método que permite reemplazar operaciones como la diferenciación y la integración, por operaciones algebraicas de funciones complejas equivalentes. Por tanto, una ecuación diferencial lineal se puede transformar en una ecuación algebraica de la variable compleja . Si esa ecuación algebraica se resuelve en para la variable dependiente, se obtiene la solución de la ecuación diferencial. Este procedimiento que implica la transformada inversa de Laplace de la variable dependiente se realiza empleando una tabla de transformadas de Laplace, o mediante la técnica de expansión en fracciones parciales.

Es característico del método de la transformada de Laplace el uso de técnicas gráficas para predecir y/o analizar el funcionamiento de un sistema sin tener que resolver sus ecuaciones diferenciales. Otra característica es que con este método se resuelve la ecuación diferencial obteniendo, simultáneamente, las componentes del estado transitorio y estacionario de la solución.

1. DEFINICIÓN Y CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE L{F(T)} DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Primero se presenta una definición de la transformada de Laplace y un breve análisis de las condiciones de existencia de esta.
Definimos:

$f(t) =$ Una función de tiempo t tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$

$s =$ Una variable compleja

$F(s) =$ Transformada de Laplace de $f(t)$

$L =$ Un símbolo operacional que indica que la cantidad a la que precede debe transformarse por la integral de Laplace.

$$\int_0^\infty e -^{st}\, dt$$

Entonces, la transformada de Laplace de está dada por

$$\ell\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty e -^{st}\, dt\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

El proceso inverso de hallar el tiempo $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$ se denomina transformada inversa de Laplace. La notación de la transformada inversa de Laplace es ℓ^{-1}.

Así $\quad \ell^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$

El método de la transformada de Laplace proporciona una forma eficiente para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. Una clase importante de problemas de control se reduce a la solución de tales ecuaciones.

$$f(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$
$$f(s)=L\{f(t)\}$$

Ejemplo 1:
Encuentra la transformada de Laplace de la función f(t) = 1.

$$f(s)=\int_0^{\infty}(1)e^{-st}dt=\frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty}=\frac{-1}{s}(e^{-\infty}-e^{-0})=\frac{-1}{s}\left(\frac{1}{e^{\infty}}-1\right)=\frac{-1}{s}\left(\frac{1}{\infty}-1\right)=\frac{-1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}$$

Entonces, $L\{1\}=\dfrac{1}{s}$

Hay algunos hechos valiosos hasta este momento

1. La transformada de Laplace f(s) no contiene información acerca del comportamiento de f(t) para t menor que cero. Esto no es una limitación para el estudio de sistemas de control porque t representará la variable tiempo y será insertada en el comportamiento de sistemas únicamente para tiempos positivos. De hecho, las variables y sistemas son usualmente definidos tal que f(t) = 0 para tiempo menor que cero.
2. Como la transformada de Laplace está definida por una integral impropia, no existirá para cada función f(t).
3. La transformada de Laplace es lineal $L\{af_1(t)+bf_2(t)\}=aL\{f_1(t)\}+bL\{f_2(t)\}$ donde a y b son constantes.
4. El operador de la transformada de Laplace transforma una función de la variable t a una función de la variable s. La t es eliminada por la integración.

2. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

LA FUNCIÓN ESCALÓN

$$f(t)=\left\{\begin{matrix}0,\ t\ menor\ que\ 0\\ 1,\ t\ \geq 0\end{matrix}\right\}=u(t)$$

Esta expresión también se llama función de Heaviside.

$$L\{u(t)\}=\frac{1}{s}$$

Como se esperaba, el comportamiento de la función para t menor que cero no tiene efecto sobre su transformada de Laplace.
Si f(t) = Au(t), f(s) = A/s.

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$f(t)=\left\{\begin{matrix}0,\ t\ menor\ que\ 0\\ e^{-at},\ t\ \geq 0\end{matrix}\right\}=u(t)e^{-at}$$

Donde u(t) es la función de escalón unitario o de Heaviside.

$$L\left\{u(t)e^{-at}\right\} = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{(s+a)e^{-(s+a)t}}\Bigg\}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

Dado que (s+a) es mayor que cero, o sea s es mayor que –a.

LA FUNCIÓN RAMPA

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0, \; t \; menor \; que \; 0 \\ t, \; t \; \geq 0 \end{Bmatrix} = tu(t)$$

$$L\{tu(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = -e^{-st}\left(\frac{t}{s}+\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

LA FUNCIÓN SENO

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0, \; t \; menor \; que \; 0 \\ sen\;(kt), \; t \; \geq 0 \end{Bmatrix} = u(t)sen(kt)$$

$$L\{u(t)sen(kt)\} = \int_0^\infty sen(kt)e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s^2+k^2}(ssen(kt)+k\cos(kt))\Big|_0^\infty = \frac{k}{s^2+k^2}$$

Para integrar se usó el método por partes.

3. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A. Linealidad

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

B. Derivación

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}f^{(i-1)}(0)$$

C. Integración

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}$$

D. Dualidad

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$$

E. Desplazamiento de la frecuencia

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$$

F. Desplazamiento temporal

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)u(t-a)$$

Nota: $u(t)$ es la función escalón unitario.

G. Desplazamiento potencia *n*-ésima

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n D_s^n\left[F(s)\right]$$

H. Convolución

$$\mathcal{L}\left\{f * g\right\} = F(s)G(s)$$

I. Transformada de Laplace de una función con período *p*

$$\mathcal{L}\left\{f\right\} = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st} f(t)dt$$

J. Condiciones de convergencia

$\mathcal{L}\left\{(e^{t^2})\right\}$ que crece más rápido que e^{-st} no puede ser obtenida por Laplace, ya que e^{t^2} es una función de orden exponencial de ángulos.

K. Teorema del valor inicial

Sea una función $f \in \varepsilon$ derivable a trozos y que $f' \in \varepsilon$. Entonces:

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

ε es el conjunto de funciones continuas a trozos con orden exponencial.

L. Teorema del valor final

Sea $f \in \varepsilon$ una función derivable a trozos tal que $f' \in \varepsilon$, entonces:

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

ε es el conjunto de funciones continuas a trozos con orden exponencial.

4. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN, DE LA DERIVADA Y DE INTEGRACIÓN

III. Considerando una función *f(x)* cuya transformada de Laplace sea F(s), vamos a ver cuál es la transformada de su *función derivada* f' (x):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dx}\right\}=\int_0^\infty e^{-5x}\frac{df}{dx}dx=\int_0^\infty e^{-5x}df=\left[e^{-5x}f\right]_0^\infty-\int_0^\infty(-se^{-5x})f(x)\,dx=$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dx}\right\}=-f(0)+s\,F(s)$$

Ejemplo:

Determine: $L\left\{t^2 sen(2t)\right\}$

Solución:

Para usar el teorema de la derivada de la transformada, reconocemos que n=2 y f(t)=sen (2 t); por consiguiente, la aplicación se reduce a

$$L\left\{t^2 sen(2t)\right\}=(-1)^2\frac{d^2}{d\,s^2}L\left\{sen(2t)\right\}$$

Desarrollando este segundo miembro:

$$(-1)^2\frac{d^2}{d\,s^2}L\left\{sen(2t)\right\}=\frac{d}{d\,s}\left(\frac{d}{d\,s}\frac{2}{s^2+4}\right)$$

Así:

$$\frac{d}{d\,s}\left(\frac{d}{d\,s}\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{d}{d\,s}\frac{-4\,s}{(s^2+4)^2}=\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

Por tanto:

$$L\left\{t^2 sen(2t)\right\}=\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

Ejemplo:

Determine lo siguiente: $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right\}$

Solución:

De acuerdo con el teorema de la derivada de la transformada:

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d}{d\,s}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right\}$$

Es decir,

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right\}$$

Como

$$-\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right\}=-\frac{1}{t}\left(e^{1}-e^{-1}\right)$$

Por tanto:

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right\}=-\frac{1}{t}\left(e^{1}-e^{-1}\right)$$

IV. Considerando una función f(x) cuya transformada de Laplace sea F(s), vamos a ver cuál es la transformada de su función integral $\int f(x)dx$.

$$\mathcal{L}\left\{\int f(x)dx\right\}=\int_0^\infty\left(\int f(x)dx\right)e^{-5x}\,dx=\left[-\frac{1}{s}e^{-5x}\int f(x)dx\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-5x}}{s}\right)f(x)dx=$$

$$\mathcal{L}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{1}{s}\left(\int f(x)dx\right)_{x-0}+\frac{1}{s}F(s)$$

Atención a esta pareja de resultados que serán fundamentales al momento de resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

5. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA EN LA EVALUACIÓN DE INTEGRALES

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{\tau} f(\tau)d\tau\right]=\int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\tau} f(\tau)d\tau\right]\cdot e^{-5t}dt$$

Integrando por partes: $\left\{\begin{array}{ll} u=\int_{0^-}^{\tau} f(\tau)d\tau \Rightarrow du=f(t)dt \\ dv=e^{-5t}dt \quad \Rightarrow v=-\dfrac{e^{-5t}}{s}\end{array}\right\}$, obtenemos:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{\tau} f(\tau)d\tau\right]=\frac{e^{-5t}}{s}\int_{0^-}^{\tau} f(\tau)d\tau\Bigg]_0^\infty+\int_{0^-}^{\infty}\frac{e^{-5t}}{s}f(t)dt$$

Como $e^{-5t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ y $\int_{0^-}^{\tau} f(\tau)d\tau\Big|_{t=0^-}=0$, queda:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{\tau} f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s}F(s)$$

Ejemplo:

Determine $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\}$

Solución:

Para aplicar el teorema reconocemos que

$$\frac{F(s)}{s}=\frac{1}{s(s^2+4)}$$

Es decir que

$$F(s)=\frac{1}{s^2+4}$$

Aplicando el teorema de la transformada de la integral, tenemos lo siguiente:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}=\int_0^t L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}dt$$

Haciendo uso de la tabla de transformadas, obtenemos lo siguiente:

$$\int_0^t L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}dt=\int_0^t \frac{1}{2}sen(2t)\ dt$$

Desarrollando la integral, se obtiene

$$\int_0^t \frac{1}{2}sen(2t)\ dt=\frac{1}{2}\int_0^t sen(2t)\ dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{t=0}^{t=1}$$

Así, la integral queda:

$$\int_0^t \frac{1}{2}sen(2t)\ dt=\frac{1}{2}\int_0^t sen(2t)\ dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{1}{2}\right]$$

Por tanto:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2t)$$

Ejemplo:

Determine: $L\left\{\dfrac{sen(2t)}{t}\right\}$

Solución:

Para usar el teorema de la transformada de la integral, debemos seguir los siguientes pasos:

Primero reconocemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{sen(2t)}{t}$$

Para ello, utilizamos la regla de L'Hopital:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}(2t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos(2t)}{1}=\frac{2}{1}=2$$

Por tanto, podemos aplicar el teorema y nos queda el desarrollo:

$$L\left\{\frac{sen(2t)}{t}\right\}=\int_0^{+\infty}L\left\{sen(2t)\right\}\,ds$$

Desarrollando esta integral:

$$\int_s^{+\infty}L\left\{sen(2t)\right\}\,ds=\int_s^{+\infty}\frac{2}{s^2+4}\,ds=\left[\arctan\frac{s}{2}\right]_{s=s}^{s=+\infty}$$

Recordemos que esto se calcula mediante límites:

$$\left[\arctan\frac{s}{2}\right]_{s=s}^{s=+\infty}=\lim_{N\to+\infty}\arctan\frac{N}{2}-\arctan\frac{s}{2}$$

Como

$$\lim_{N\to+\infty}\arctan\frac{N}{2}=\frac{\pi}{2}$$

La integral, finalmente, queda expresada en los siguientes términos:

$$\int_0^{+\infty}L\left\{sen(2t)\right\}\,ds=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{2}$$

Por tanto:

$$L\left\{\frac{sen(2t)}{t}\right\}=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{2}$$

La transformada inversa de laplace

Tema n.° 2

1. LA TRANSFORMADA INVERSA

El proceso matemático de pasar de la expresión en variable compleja a la expresión en función del tiempo se denomina transformación inversa.

Como notación para la transformación inversa, se utiliza ℓ^{-1} de modo que

$$\ell^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$$

Al resolver problemas usando el método de la transformada de Laplace, se enfrenta el problema de cómo determinar *f(t)* partiendo de *F(s)*. Matemáticamente se obtiene con la siguiente integral de inversión:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\, ds \qquad (t > 0)$$

Donde c, la abscisa de convergencia, es una constante real elegida mayor que las partes reales de todos los puntos singulares de *F(s)*. Así, el camino de integración es paralelo al eje jw y está desplazado del mismo una distancia c, además está a la derecha de todos los puntos singulares.

Afortunadamente, para hallar $f(t)$ a partir de $F(s)$ existen procedimientos más simples que efectuar esta integración directamente. Un modo conveniente es utilizar una tabla de transformadas de Laplace. En este caso, en la tabla la transformada de Laplace debe aparecer en forma inmediatamente reconocible, aunque la función buscada no siempre aparece. Si no se encuentra una transformada $F(s)$ determinada, se puede desarrollar en fracciones parciales y escribir $F(s)$ en términos de funciones simples de s, para las cuales se conocen las transformadas inversas de Laplace.

Nótese que estos métodos simples para hallar transformadas inversas de Laplace se basan en el hecho de que la correspondencia única entre una función del tiempo y su transformada Laplace inversa se mantiene para cualquier función del tiempo que sea continua.

2. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

La diferenciación y la integración transforman una función en otra función; por ejemplo, la $f(x) = x^2$ se transforma, respectivamente, en una función lineal y en una familia de funciones polinomiales cúbicas, lo mismo que mediante las operaciones de diferenciación e integración:

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x \quad \text{y} \quad \int x^2\, dx = x^3 + c.$$

Esas dos transformaciones poseen la propiedad de linealidad consistente en que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para cualesquiera constantes α y β

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

y $$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx,$$

siempre y cuando existan cada derivada e integral. Más adelante, examinaremos un tipo especial de integral llamada transformada de Laplace, que posee la propiedad de linealidad y tiene muchas otras propiedades interesantes que la hacen muy útil para resolver problemas de valor inicial lineales.

3. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LA DERIVADA, DE LAS INTEGRALES, DE LA MULTIPLICACIÓN POR S, DE LA DIVISIÓN POR S, POR EL MÉTODO DE LAS FRACCIONES PARCIALES

Determinación de la trasformada inversa mediante el uso de las fracciones parciales

Veamos algunos casos en los que es fácil encontrar la transformada inversa de Laplace. Consideremos funciones de la forma:

$$F(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

donde q(x) y p(x) son polinomios.

Según acabamos de decir, es condición necesaria para que exista transformada inversa que el grado del polinomio del denominador sea mayor que el del numerador. Para calcular la transformada inversa, encontremos las raíces $\mathbf{S_i}$ de p(x). Si todas son distintas p(x), se factoriza del siguiente modo:

$$p(s) = \alpha(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n)$$

y F(x) puede descomponerse en la suma de fracciones simples

$$F(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - s_n}.$$

Los coeficientes pueden obtenerse a partir de la expresión

$$c_i = \lim_{s \to s_i} \frac{(s - s_i)q(s)}{p(s)} = \frac{q(s_i)}{p'(s_i)}$$

Y dado que la transformación es lineal, la transformada inversa de F(x) es la suma de las transformadas inversas de las fracciones simples. Recordando que

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty dt\, e^{at} e^{-st} = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

Al invertir la función queda expresada como una suma de exponenciales.

Es el mismo método usado en las integrales indefinidas. Siendo *p(s)* y *q(s)* polinomios tales que el grado de *p(s)* sea menor que el del *q(s)*, toda función puede expresarse como una suma de otras fracciones en cuyos denominadores vienen polinomios de grado 1 o cuadráticos elevados a una potencia; es decir, la suma de

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(s-a)^m}$$

Para cada raíz real del polinomio *q(s)*, *s = a*, de orden de multiplicidad *m*, más la suma de

$$\frac{B_1 s + C_1}{s^2+bs+c}+\frac{B_2 s + C_2}{(s^2+bs+c)^2}+\ldots+\frac{B_p s + C_p}{(s^2+bs+c)^p}$$

tenemos cada raíz compleja del tipo $s^2 + bs + c=0$, de orden de multiplicidad *p*.

Finalmente, ponemos el mismo denominador en el miembro de la derecha e identificamos los coeficientes de ambos numeradores, lo que nos conduce a un sistema simple que nos permite hallar el valor de todas estas constantes A1, A2, ..., B1, B2, ..., C1, C2, ...

Como ejemplo, vamos a realizar esta descomposición para la función:

$$\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}$$

Tenemos tres raíces reales: *s = 0* (orden de mult. 3), *s = 2* (orden 1) y *s = -1* (orden 1), entonces:

$$\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s^3}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+1}$$

El denominador común del miembro de la derecha es $s^3(s^2 - s - 2)$, obviamente coincide con el de la izquierda. Ponemos este denominador común a la derecha, y cancelamos ambos denominadores, lo que nos lleva a

$$8 \equiv A_1 s^2(s-2)(s+1) + A_2 s(s-2)(s+1) + A_3(s-2)(s+1) + B\,s^3(s+1) + Cs^3(s-2)$$

Ahora, en esta identidad, vamos haciendo sucesivamente *s =0*, *s=2*, *s=1*,..., lo que nos va conduciendo a la determinación de los coeficientes. Finalmente, tenemos lo siguiente:

$$\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}=-\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{4}{s^3}+\frac{1/3}{s-2}+\frac{8/3}{s+1}$$

4. FÓRMULA DEL DESARROLLO DE HEAVISIDE

(*Función de Heaviside*)

La función escalón de Heaviside o salto unitario es la función H definida para todo t, ¡1< t < 1, por H(t) = ½0, *t* < 0 1, *t* ¸0.

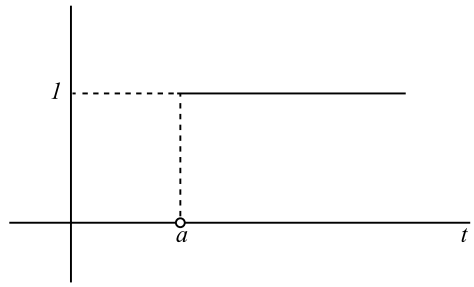


Figura 26. Gráfica de la función escalón de Heaviside. Tomada de http://bit.ly/2c7f5de.

Función de Heaviside de salto unitario
La función salto unitario en a es la translación H(t ¡ a) de *H* (véase la Figura 26):
H(t ¡ a) = ½ 0, t < a 1, *t* ¸ *a*
Para *a* > 0 y 0 < s < *1*, se tiene

$$\mathcal{L}\left\{H(t-a)\right\} = \int_a^{\infty} e^{-st}dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{H(t-a)u(t-a)\right\} = \int_a^{\infty} e^{-st}u(t-a)dt$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-s(x+a)}u(x)dx = e^{-as}\ \mathcal{L}\left\{u\right\}\ .$$

5. LA CONVOLUCIÓN. TEOREMA DE CONVOLUCIÓN Y TEOREMA DE CONVOLUCIÓN PARA LA TRANSFORMADA INVERSAS

Intuitivamente podemos mirar a la convolución de dos funciones f(x) y g(x) como la función resultante que aparece después de efectuar los siguientes pasos:

a. Gire, respecto del origen, los valores de una de ellas; es decir, g(z) = g(-z) para todo **z** desde - ∞ a ∞.
b. Traslade la función girada sobre la otra f(x)g(x – z), y
c. En cada punto x, calculamos el valor que resulta de sumar los productos obtenidos de multiplicar para todos los **z** los correspondiente valores de las funciones f(z) y g(x - z).

Esencialmente, estamos calculando para cada valor de x una especie de valor ponderado de una de las funciones f(x) con los valores de la otra g(x). En el caso de que el área encerrada por la curva de g(x) fuese igual a 1, entonces estaríamos calculando para x una media ponderada.

Matemáticamente la expresión para esta operación es

$$f(x) * g(x) = h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz$$

De la expresión anterior puede verse como para un valor fijo de x los origines de las funciones *f* y *g* que están desplazados justamente en ese valor x. Los valores de *f* para z crecientes son multiplicados por valores de *g* para (x – z) decrecientes.

En el caso discreto, que veremos más adelante, esta visión intuitiva de la convolución quedará aún más clara.

La gran importancia de esta operación radica en el hecho de que la TF de un producto de convolución de dos funciones es igual al producto de las TFs de dichas funciones; es decir,

$$\mathcal{F}f(x) * g(x) = F(u).H(u)$$

Este resultado denominado teorema de convolución implica que podemos calcular un producto de convolución de dos funciones multiplicando sus correspondientes TF y al resultado aplicarle la TF inversa. En el caso de señales discretas, las distintas longitudes que pudieran tener las sucesiones de puntos de cada una de las funciones son posibles causas de errores en el cálculo final de la convolución, por ello ambas funciones han de definirse en una misma cantidad de puntos por cada eje.

Para lograr esto, consideremos que la función f(x) ha sido muestreada sobre un conjunto de puntos de longitud A y la función g(x) lo ha sido sobre un conjunto de longitud B, entonces ambas funciones se rellenarán con ceros hasta que cada una de ellas quede definida en M = A + B - 1 valores. La fórmula de rellenar con ceros los valores que faltan no es la única manera que existe de fijar dichos valores, aunque sí es la más comúnmente usada. Una vez que las dos funciones tienen el mismo rango de definición, la convolución se puede calcular por

$$f(x) * g(x) = h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m)g(x-m)$$

Para x = 0, 1, ……,M -1, puede demostrarse que al igual que las funciones f(x) y g(x) la función resultante de la convolución discreta es también una función periódica discreta de período M.

Ahora presentamos una comparación entre los resultados del caso discreto y el caso continuo.

Las expresiones que aparecen en el caso bidimensional (imágenes) son las siguientes:

Caso continuo

$$f(x,y) * g(x,y) = h(x.y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z,w)g(x-z,y-w)dzdw$$

Caso discreto

$$f(x,y) * g(x,y) = h(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(m,n)g(x-m,y-n)$$

Para $x = 0,1,\dots,M-1 \quad e \quad y = 0,1,\dots,N-1$

Al igual que en el caso unidimensional, el cálculo de la convolución de funciones bidimensionales puede ser efectuado a través de los productos de sus correspondientes transformadas de Fourier, aplicándole al resultado la TF inversa.

Como se pondrá de manifiesto en las siguientes lecciones, la operación de convolución será una herramienta clave de los cálculos que se realizan para el análisis y extracción de toda la información que contiene una imagen.

En matemática, el teorema de convolución establece que, bajo determinadas circunstancias, la transformada de Fourier de una convolución es el producto punto a punto de las transformadas. En otras palabras, la convolución en un dominio (por ejemplo, el dominio temporal) es equivalente al producto punto a punto en el otro dominio (es decir, dominio espectral).

Sean f y g dos funciones cuya convolución se expresa con $f * g$. (Se debe indicar que el asterisco denota convolución en este contexto, y no multiplicación; a veces es utilizado también el símbolo $\otimes$. Sea $\mathcal{F}$ el operador de la transformada de Fourier, con lo que $\mathcal{F}[f]$ y $\mathcal{F}[g]$ son las transformadas de Fourier de *f* y *g*, respectivamente.

Entonces

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}[f]) \cdot (\mathcal{F}[g])$$

Donde el punto (·) indica producto punto. También puede afirmarse que

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]}{\sqrt{2\pi}}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$, podemos escribir:

$$f * g = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]\right]$$

Aplicaciones de la transformada de laplace

Tema n.° 3

1. SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ahora desarrollaremos la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales por medio de la trasformada de Laplace.

De la relación de propiedades que expondré a continuación se podrán ver con facilidad la utilidad de la transformación en casos de resolución de problemas de valor inicial:

Propiedad 1: Linealidad

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\rightarrow \int_0^{\infty}(\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt=\alpha F(s)+\beta G(s)$$

Propiedad 2: Derivación en el tiempo

$$\frac{df(t)}{dt}\rightarrow sF(s)-f(0)$$

Demostración:

$$\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt=f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty}+s\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=sF(s)-f(0)$$

$$u=e^{-st}\qquad du=-se^{-st}dt$$

$$dv=\frac{df(t)}{dt}\qquad v=f(t)$$

Propiedad 3: Derivación en s
Demostración:

$$\frac{dF(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt=-\int_0^{\infty}tf(t)e^{-st}dt$$

Propiedad 4: Desplazamiento en s

$$f(t)e^{at}\rightarrow F(s-a)$$

Demostración:

$$\int_0^{\infty}f(t)e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt=F(s-a)$$

2. EN UNA ECUACIÓN INTEGRAL, EN UNA INTEGRAL-DIFERENCIAL, RESORTES ACOPLADOS Y REDES ELÉCTRICAS

Sistemas mecánicos

Ejemplo:
Un peso de 16 libras suspendido de un resorte lo estira 2 pies. En el instante $t=0$, el peso se estira 3 pies por debajo de la posición de equilibrio y se suelta. Asuma una fuerza amortiguadora de 4 veces la velocidad instantánea. En el instante $t=2$, el peso recibe un golpe seco, desde abajo, que transmite 2 unidades a la masa de momento; además, en el instante $t=4$ se activa una fuerza externa con una magnitud de 4 unidades.

1. Determine la ecuación diferencial y condiciones iniciales que describen el movimiento.
2. Encuentre la posición del peso en cualquier instante t.
3. ¿Cuál es la posición del peso en $t=5$?

Solución:
Para hallar la constante del resorte

$$F = ks \Rightarrow 16 = 2k \Rightarrow k = 8$$

Con lo cual el modelo matemático es

$$\begin{cases} x'' + 8x' + 16x &= 2(-2\delta(t-2) + 4H(t-4)) \\ x(0) &= 3 \\ x'(0) &= 0 \end{cases}$$

Aplicando la transformada

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 8sX(s) - 8x(0) + 16X(s) = -4e^{-2s} + 8\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$(s+4)^2 X(s) = 3s + 3 - 4e^{-2s} + 8\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$X(s) = \frac{3s+3}{(s+4)^2} - \frac{4e^{-2s}}{(s+4)^2} + \frac{8e^{-4s}}{s(s+4)^2}$$

El –2 que acompaña a la función delta se debe a que el golpe es desde abajo con una intensidad de 2 unidades, además recuerde que x(0) = 3 , pues el peso está por debajo de la posición de equilibrio.
Aplicamos fracciones parciales

$$X(s) = \frac{3}{s+4} - \frac{9}{(s+4)^2} - \frac{4e^{-2s}}{(s+4)^2} + \frac{8e^{-4s}}{s+4} - \frac{32e^{-4s}}{s(s+4)^2}$$

De donde obtenemos que

$$x(t) = 3e^{-4t} - 9te^{-4t} - 4(t-2)e^{-4(t-2)}H(t-2) + 8e^{-4(t-2)}H(t-4) - 32(t-4)e^{-4(t-4)}H(t-4) - 32$$

Y así x(5) = 0,454137.

La gráfica de x(t) se muestra en la Figura 27._

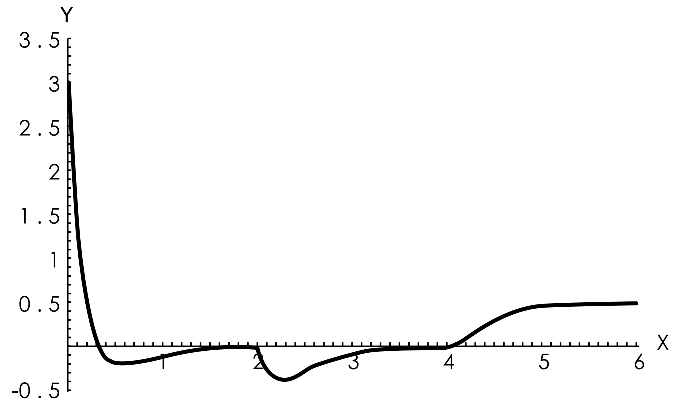
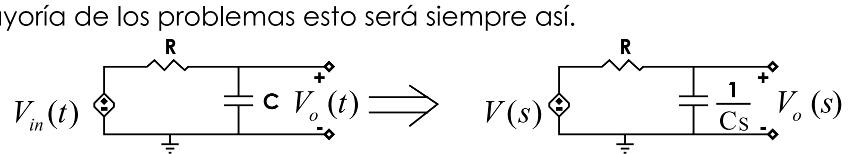


Figura 27. Gráfica de la función x(t). Tomada de http://bit.ly/2cqv6wX.

Circuito eléctrico

El ejemplo que exponemos a continuación trata de ilustrar la resolución de un problema electrónico mediante la transformación de Laplace. Cuando tenemos una ecuación diferencial lineal, el método a utilizar es siempre el mismo: se transforma la ecuación entera. Como la ecuación es lineal se tiene como resultado una ecuación lineal. Después se despeja la incógnita y el resultado que se obtiene es una función racional en s. Por último, solo tenemos que hacer la transformación inversa de Laplace (mirar que la función tiene como transformada de Laplace la función que tenemos).

En la práctica, cuando lo que queremos es resolver un circuito eléctrico, lo que se hace es transformar el circuito; es decir, dado que por los condensadores la corriente que pasa es la derivada de la tensión aplicada en sus terminales multiplicada por su capacidad, lo que se hace es asignar al condensador una resistencia de 1/Cs. Dado que el condensador no es un componente resistivo al término 1/Cs, se le pasa a llamar impedancia del condensador. Asimismo, no resulta difícil entender que la impedancia de una bobina es Ls. Notemos, además, que para poder realizar esto es indispensable contar con condiciones iniciales nulas en las cargas de los condensadores y en las corrientes de las bobinas. En la mayoría de los problemas esto será siempre así.



$$V_{in}(t) = V_0(t) + RC\frac{dv_0(t)}{dt} \qquad V(s) = V_0(s) + RCsV_0(s)$$

Seguidamente pasaremos a resolver el problema para un caso particular: supongamos que $v_{in}(t)$ es un escalón.

$$v(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; t < 0 \\ 1 & si \;\; t \geq 0 \end{cases}$$

$$V(s) = \frac{1}{s}$$

$$V_0(s) = \frac{1}{1+RCs}V(s) = \frac{1}{s(1+RCs)} = \frac{1}{s} + \frac{-RC}{1+RCs}$$

$$V_0(t) = u(t) - e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Para realizar la transformación inversa de Laplace, el mejor paso a seguir es descomponer en suma de fracciones simples la función como si fuésemos a integrarla, y luego relacionar cada fracción con su correspondiente exponencial.

Existe una fórmula cerrada para obtener la transformada inversa de Laplace, pero el cálculo es complicado y requiere conocimientos de integración en el plano complejo.

En el caso de no tener condiciones iniciales nulas, como en este ejemplo, no podremos asociar al condensador una impedancia 1/Cs. En este caso derivar es multiplicar por *s* y restar la condición inicial (revise propiedades). De todas formas, en el análisis de circuitos normalmente solo se estudia el régimen permanente con condiciones iniciales nulas, ya que el circuito hace mucho que está funcionando.

Ejemplo:
En el circuito RCL de la Figura 28, se tiene R = 2 W, L = 1 H, C = 0,5 F, V = 50 volt. Las condiciones iniciales con el circuito abierto son las siguientes: q(0) = 0, i(0) =0. Halle la intensidad de corriente i(t) cuando se cierra el circuito.

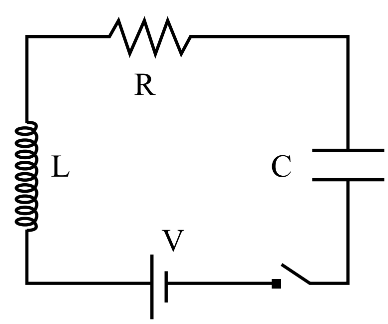


Figura 28. Circuito RCL. Tomada de http://bit.ly/2crPGha

Solución:
Aplicando la ley de Ohm al circuito RCL cerrado, se tiene:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

En este caso podemos expresar $q(t) = \int i\,dt$, además aplicando la ley de Ohm nos queda el siguiente resultado:

$$2i + \frac{di}{dt} + \frac{1}{0.5}\int i\,dt = 50$$

Si la transformada de *i*(*t*) la denotamos como I(s), y recordando que la transformada de la integral de *i*(*t*) es

$$\frac{1}{s}\left(\int i\,dt\right)_{i=0} + \frac{1}{s}I(s)$$

Podemos tomar transformadas en ambos miembros:

$$2I(s) + sI(s) - i(0) + \frac{1}{0.5s}I(s) + \frac{1}{0.5}q(0) = \frac{50}{s}$$

Despejamos, $I(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s+1)^2 + 1}$

Y la solución resulta de obtener las transformadas inversas:

$$i(t) = 50\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} = 50e^{-t}\operatorname{sen} t$$

Lectura seleccionada n.° 4:

Aplicaciones de la transformada de Laplace en ingeniería

Domínguez, J. (2015). Matemática aplicada a la ingeniería. Aplicaciones de la transformada de Laplace en ingeniería [Mensaje en un blog]. Recuperado de https://goo.gl/FZcq5p

Actividad n.º 4

Foro de discusión sobre las aplicaciones de la transformada de Laplace en ingeniería

Instrucciones

Ingrese al foro y participe con comentarios críticos y analíticos sobre el tema.
Investigue concretamente cuatro ejemplos donde se apliquen los sistemas de control y, por ende, la transformada de Laplace, además del proceso que se desea controlar con su respectiva ecuación diferencial y controlador correspondiente.

Glosario de la Unidad III

TABLA DE TRANSFORMADAS

1. Obtención

$$L\{1\}=\frac{1}{s} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$$

2. Obtención

$$L\{t\}=\frac{1}{s^2} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$$

3. Obtención

$$L\{t^2\}=\frac{2}{s^3} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=\frac{1}{2}t^2$$

4. Obtención para *n* entero

$$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\}=\frac{1}{n!}t^n$$

5. Obtención para $\alpha>-1$

$$L\{t^\alpha\}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha+1}}\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha$$

6. Obtención para $s > a$

$$L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$$

7. Obtención

$$L\{\cos(wt)\}=\frac{s}{s^2+w^2} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+w^2}\right\}=\cos(wt)$$

8. Obtención

$$L\{sen(wt)\}=\frac{w}{s^2+w^2} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+w^2}\right\}=\frac{1}{w}sen(wt)$$

9. Obtención

$$L\{\cosh(wt)\}=\frac{s}{s^2-w^2} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-w^2}\right\}=\cosh(wt)$$

10. Obtención

$$L\{senh(wt)\}=\frac{w}{s^2-w^2} \quad ; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-w^2}\right\}=\frac{1}{w}senh(wt)$$

Bibliografía de la Unidad III

Cengel, Y. A. & Palm III, W. J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias.* (1ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Espinoza, E. (2014). *Análisis matemático IV* (cuarta reimpresión). Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

Larson, R. & Edwards, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Nodarse, R. A. (s.f.). Capítulo 8: La transformada de Laplace. En *Introducción a las EDOs* (pp. 153-160). Recuperado de http://euler.us.es/~renato/clases/mm2/laplace.pdf

Zill, D.G & Wright, W.S. (2012). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. (4ª ed.). México.: Mc Graw Hill.

Recursos educativos digitales

Arango, J. (7 de junio de 2007). Guía 7. La transformada de Laplace. Recuperado de http://matematicas.univalle.edu.co/~jarango/Books/curso/cap07.pdf

Autoevaluación n.º 3

Sobre la propiedad de linealidad

1. Determine $L\{4t-3+2\cos(5t)\}$

2. Determine $L^{-1}\left\{\dfrac{3s-1}{s^2+4}\right\}$

Sobre el primer teorema de traslación

3. Determine $L\{sen(2t)e^{3t}\}$

4. Determine $L^{-1}\left\{\dfrac{5s}{(s+4)^3}\right\}$

Sobre el tema de la transformada de la derivada:

5._Sabiendo que *y(0)=3* y que *y'(0)=-1*, simplifique $L\{y''(t)+3y'(t)-4y(t)\}$

Sobre el tema de la transformada de la integral

6. Determine $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\}$

Sobre el tema de la integral de la transformada

7._Determine $L\left\{\dfrac{sen(2t)}{t}\right\}$

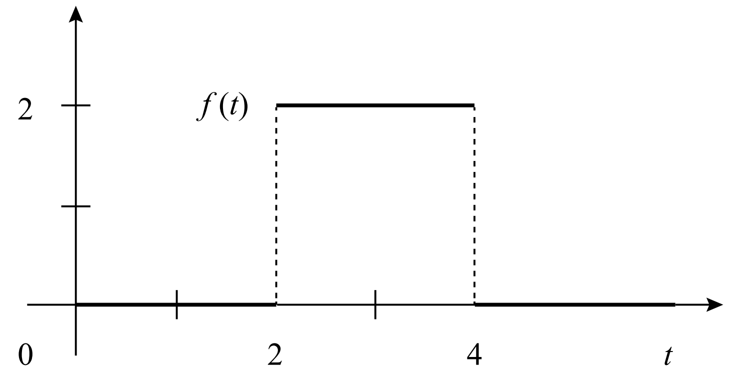
Sobre el tema de la derivada de la transformada

8._Determine $L\{t^2 sen(2t)\}$

9._Determine $L^{-1}\left\{In\left(\dfrac{s-1}{s+1}\right)\right\}$

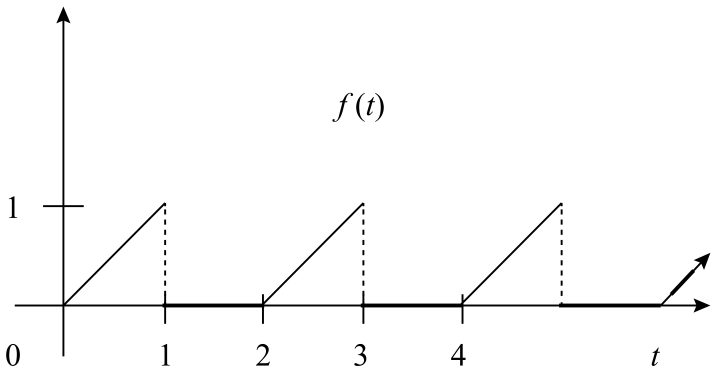
Sobre la transformada de la función escalón

10. Determina la transformada de la función cuya gráfica es



Sobre la transformada de una función periódica

11._Determine la transformada de la función cuya gráfica es



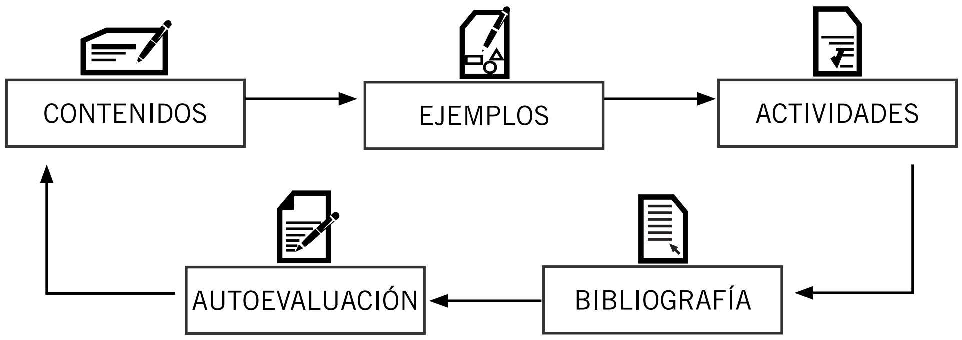
Sobre el teorema de convolución

12. Determine $L\left\{\int_0^t e^t sen(t-\sigma)d\sigma\right\}$

13. Determine $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

UNIDAD IV
SERIE DE FOURIER

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD IV



ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

RESULTADO DE APRENDIZAJE Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar la serie de Fourier para resolver problemas de aproximación, diferenciación e integración aplicando los diferentes métodos y técnicas.

CONOCIMIENTOS	ACTIVIDADES FORMATIVAS	SISTEMA DE EVALUACIÓN
TEMA N.° 1 **SERIES DE FOURIER** 1. Funciones periódicas y funciones ortogonales 2. Series de Fourier 3. Evaluación de los coeficientes de Fourier 4. Aproximación mediante una serie finita de Fourier 5. Teorema de Parseval 6. Convergencia de la serie de Fourier 7. Diferenciación e integración de la serie de Fourier **Lectura seleccionada n.° 5** **Simetría** **Autoevaluación de la Unidad IV**	1. Utiliza instrumentos, técnicas y fórmulas, para aplicar series de Fourier. 2. Analiza y resuelve ejercicios y problemas en entornos formales y físicos haciendo uso de las series de Fourier. **Actividad n.° 5** Los estudiantes participan en el foro de discusión sobre la serie e Fourier. **Control de lectura n.° 3** Evaluación del tema n.° 1 serie e Fourier.	1. Muestra conductas asociadas a la actividad matemática, tales como la puntualidad, el orden, contraste, precisión y revisión sistemática, y crítica de los resultados. 2. Trabaja en forma individual y grupal las actividades propuestas.

Series de fourier

Tema n.° 1

Muchas ecuaciones de las ciencias se formulan con derivadas parciales y se resuelven, en ocasiones, descomponiendo la incógnita en series (sumas infinitas). Las series más interesantes son las de potencias y, por supuesto, las de Fourier.

Dado el carácter periódico de tales sumas, las series de Fourier se aplican, por ejemplo, donde surgen procesos oscilantes, como ocurre en las series temporales de naturaleza económica, en electrónica (se aplican, por ejemplo, en teoría de señales), en acústica o en óptica.

Los problemas teóricos relacionados con la convergencia de las series de Fourier han impulsado avances fundamentales en distintos ámbitos de las matemáticas y siguen siendo considerados hoy como problemas muy difíciles.

1. Funciones periódicas y funciones ortogonales

A. Funciones periódicas

En matemática, una función es periódica si los valores de la variable dependiente se repiten conforme se añade a la variable independiente un determinado período:

$f(x) = f(x + P)$ donde P es el período.

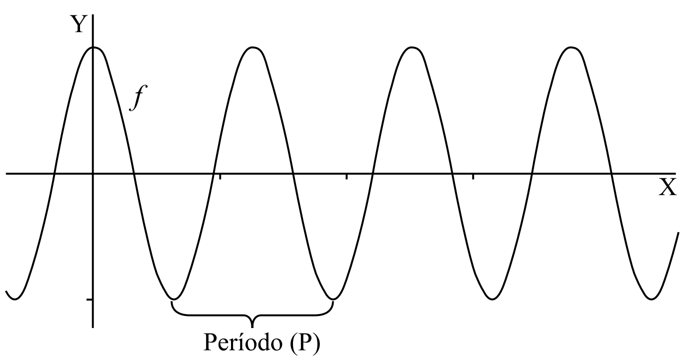


Figura 29. Función periódica. Tomada de http://bit.ly/2cnP4fU

En la vida diaria existen muchos casos de funciones periódicas cuando la variable es el tiempo; situaciones como el movimiento de las manecillas de un reloj o las fases de la luna muestran un comportamiento periódico. Un movimiento periódico es aquel en el que la(s) posición(es) del sistema se pueden expresar con base en funciones periódicas, todas con el mismo período.

Para una función aplicada al conjunto de los números reales o al de los enteros, significa que la totalidad de su gráfica puede ser representada a partir de copias de una determinada porción de esta, repetida a intervalos regulares.

De forma más explícita, se dice que una función *f* es periódica con período P mayor que cero si cumple que

$$f(x + P) = f(x)$$

para todos los valores de x en el dominio de *f*. De manera análoga, una función no periódica es aquella que no posee dicho período *P*.

Un ejemplo sencillo es la función *f* que devuelve la parte fraccional de su argumento:

$$f(0,5) = f(1,5) = f(2,5) = 0,5$$

Ejemplo 1:

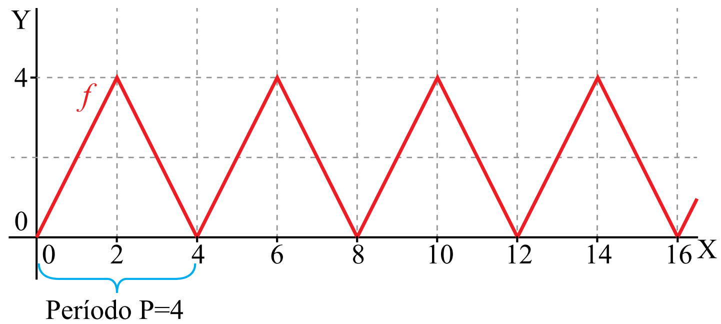


Figura 30. Función periódica. Tomada de http://bit.ly/2cnOsHf

La gráfica anterior representa una función *f* periódica. La gráfica se repite en intervalos de 4 unidades, por lo que el período es *P*=4; es decir,

$$f(0) = f(4) = f(8) = f(12) = f(16) = \ldots = f(4k) = \ldots$$
$$f(2) = f(6) = f(10) = f(14) = \ldots = f(2+4k) = \ldots$$
$$\textit{siendo } k \textit{ un número entero cualquiera}$$

Ejemplo 2:

Sea la función *f*(x)=sen(x).

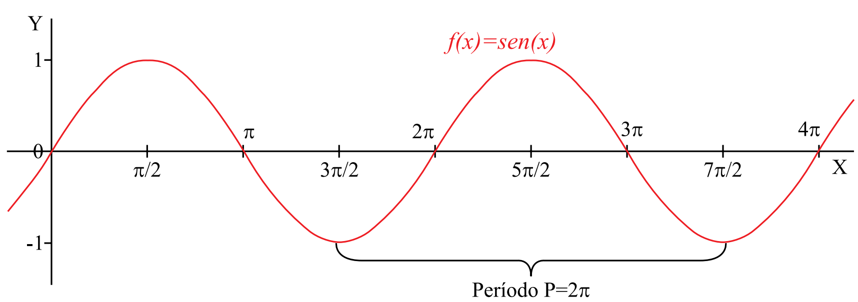


Figura 31. Función seno. Tomada de http://bit.ly/2cs63uq

Todas las funciones trigonométricas son periódicas. En particular, la función seno es periódica de período *P* = 2π. Se cumple que

$$f(0) = f(2\pi) = f(4\pi) = f(6\pi) = \ldots = f(k \cdot 2\pi)$$
$$f(2) = f(\pi) = f(3\pi) = f(5\pi) = \ldots = f(\pi + k \cdot 2\pi)$$
$$\textit{siendo } k \textit{ un número entero cualquiera}$$

Como podemos ver en las figuras anteriores, si conocemos la forma de la función en el intervalo [0,T], la conoceremos en todo el espacio, debido a que con una simple traslación de período T podemos extender su campo de existencia hasta donde nos sea necesario, lo cual es una característica intrínseca de las funciones periódicas. Teniendo en cuenta esta característica, evaluemos cualitativamente el aspecto que debe tener la imagen recíproca (transformada de Fourier) asociada a una función periódica f(t). Consideremos para ello que la función f(t) solo se encuentra definida en el intervalo acotado 0,T. En este intervalo, podemos representar la función como combinación lineal de funciones armónicas que llamamos series de Fourier (Ramón, 2000).

Fernández (2004) dice en su página web:

La característica principal de estas series es que solo están permitidos unos determinados valores propios o frecuencias propias, dependiendo de las condiciones de borde a las que estuviese sometida la función. Fijándonos en este hecho, será de esperar que el aspecto de la transformada de Fourier de la función f(t), periódica y definida en el intervalo [0,T], sea discreto. De hecho, esta discretización, deberá de ser proporcional al período en el que se encuentra definida la función, es decir, proporcional al inverso del período T.

B. Funciones ortogonales

Dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en un intervalo [a,b] si

$$(f_1,f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx = 0$$

Ejemplo:

Las funciones $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo [−1, 1], puesto que

$$(f_1, f_2) - \int_{-1}^{1} x^2.x^3 dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1} = 0$$

Conjuntos ortonormales

Se dice que un conjunto de funciones de valores reales $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ es ortogonal en un intervalo [a, b] si (2)

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x), \phi_n(x)\,dx = 0\,,\ m \neq n$$

La expresión (**u**, **u**) = ||**u**||^2 se llama norma cuadrada. Por tanto, podemos definir la norma cuadrada de una función como

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2 dx, \qquad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}$$

Si $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal en [*a*, *b*] con la propiedad de que $||\phi_n(x)|| = 1$ para todo “*n*”, entonces se llama conjunto ortonormal en [*a, b*].

Ejemplo 1:
Demuestra que el conjunto {1, cos x, cos 2x, …} es ortogonal en [−π, π].

Solución:

Sea $\phi_0(x) = 1$, $\phi_n(x) = \cos nx$, comprobamos que

$$(\phi_0, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, for\ n \neq 0$$

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2 dx, \qquad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}$$

Ejemplo 2:

$$(\phi_m,\phi_n)=\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(x)\phi_n(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0, m\neq n$$

Ejemplo 3:
Determina la norma de cada función del ejemplo 1.

Solución:

$$\phi_0=1, \|\phi_0\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi\Rightarrow\|\phi_0\|=\sqrt{2\pi}$$

$$\phi_n=\cos nx,$$

$$\|\phi_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\pi$$

$$\|\phi_n\|=\sqrt{\pi}, n>0$$

$$\phi_n=\cos nx,$$

$$\|\phi_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\pi$$

$$\|\phi_n\|=\sqrt{\pi}, n>0$$

Analogía con vectores

Recordando la teoría de vectores en 3 dimensiones, tenemos

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{u}=\frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1+\frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2+\frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3=\sum_{n=1}^{3}\frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n$$

Así, podemos hacer una analogía entre funciones y vectores.

Desarrollo en series ortogonales

Considerando que $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal en $[a, b]$, y que $f(x)$ está definida en $[a, b]$, escribimos primero

$$f(x)=c_0\phi_0(x)+c_1\phi_1(x)+\cdots+c_n\phi_n(x)+\cdots?$$

Entonces,

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\,dx$$

$$= c_0\int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)\,dx + c_1\int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)\,dx + \cdots$$

$$+ c_n\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx + \cdots$$

$$= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \cdots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \cdots$$

Como $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal en [*a*, *b*], cada término en el lado derecho es nulo, excepto *m* = *n*. En este caso, tenemos

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx = c_n(\phi_n, \phi_n) = c_n\int_a^b \phi_n^{\,2}(x)dx$$

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b \phi_n^{\,2}(x)dx}, \quad n = 0,1,2,...$$

En otras palabras,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x),$$

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2}$$

Entonces, se transforma en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2}\phi_n(x)$$

Conjunto ortogonal y función peso

Se dice que en un conjunto de funciones de valores reales $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es ortogonal con respecto a una función peso w en [a,b] si

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0\,, m \neq n$$

Bajo la condición de la definición anterior, tenemos:

$$\boldsymbol{c_n} = \frac{\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)w(x)}\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^{\boldsymbol{2}}}$$

$$\|\phi_n(x)\|^{\boldsymbol{2}} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{w(x)}\phi_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{2}}(x)dx$$

Conjuntos completos

Un conjunto ortogonal es completo si la única función ortogonal continua a cada miembro del conjunto es función nula.

2. Series de Fourier

Una serie trigonométrica
Podemos demostrar que el conjunto

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \cos\frac{3\pi}{p}x, \ldots, \sin\frac{\pi}{p}x, \sin\frac{2\pi}{p}x, \sin\frac{3\pi}{p}x, \ldots\right\} \quad (1)$$

es ortogonal en [−*p*, *p*]. Así, una función *f* definida en [−*p*, *p*] puede escribirse como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right) \quad (2)$$

Ahora, calculamos los coeficientes.

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-p}^{p} \cos\frac{n\pi}{p}xdx + b_n \int_{-p}^{p} \sin\frac{n\pi}{p}xdx\right) \quad (3)$$

Como $\cos(n\pi x/p)$ y $\sin(n\pi x/p)$ son ortogonales a 1 en este intervalo, entonces (3) se transforma en

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-p}^{p} = pa_0$$

Así tenemos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \quad (4)$$

Además,

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi}{p}xdx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}xdx + \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx + b_n \int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx\right)$$

Por ortogonalidad tenemos:

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}xdx = 0, m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{p}xdx = 0$$

Así (5) se reduce a

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}xdx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$$

Y, por tanto,

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx = a_n p$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \qquad (6)$$

Finalmente, si multiplicamos (2) por sin($m\pi x/p$) y usamos

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi}{p}x dx = 0, \quad m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi}{p}x \sin\frac{n\pi}{p}x dx = 0$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi}{p}x \sin\frac{n\pi}{p}x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$$

Obtenemos que

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi}{p}x \sin\frac{n\pi}{p}x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases} \qquad (7)$$

Series de Fourier

La serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $(-p,p)$ se determina mediante

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi}{p}x + bsen\frac{n\pi}{p}x) \text{.................}(8)$$

Donde

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \text{...}(9)$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)cos\frac{n\pi}{p}xdx \text{......................................}(10)$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)sen\frac{n\pi}{p}xdx \text{.......................................}(11)$$

Ejemplo 1:
Desarrolle (12) en una serie de Fourier.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Solución:

La gráfica de f se muestra en la Figura 32 con $p = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] \\
&= -\frac{1}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}
\end{aligned}
$$

De (11) tenemos

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx = \frac{1}{n}$$

Por tanto,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right\} \quad (13)$$

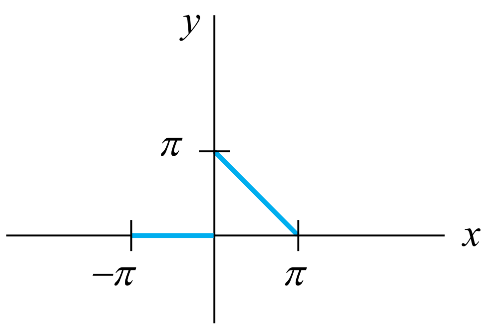


Figura 32. Gráfico del ejemplo 1. Tomada de http://bit.ly/2cxEz7c

Condiciones de convergencia

Sean f y f' continuas por partes en el intervalo *(-p,p)*; esto es, sean f y f' continuas, excepto en un número finito de puntos en el intervalo y discontinuidades finitas solo en estos puntos. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo converge a $f(x)$ en un punto de continuidad, mientras que en un punto de discontinuidad la serie de Fourier converge al promedio.

Tenemos

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan el límite de f en x por la derecha y por la izquierda, respectivamente.

Ejemplo 2:

- La función *f* en el ejemplo 1 es continua en $(-\pi, \pi)$, excepto en x = 0, así que la serie (13) converge a

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}$$

En x = 0.

Extensión periódica

- La Figura 33 grafica la extensión periódica de la función *f* del ejemplo 1, así que la discontinuidad en x = 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, … converge a

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

y en x = $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, … converge a $\frac{f(\pi+)+f(0-)}{2}=0$

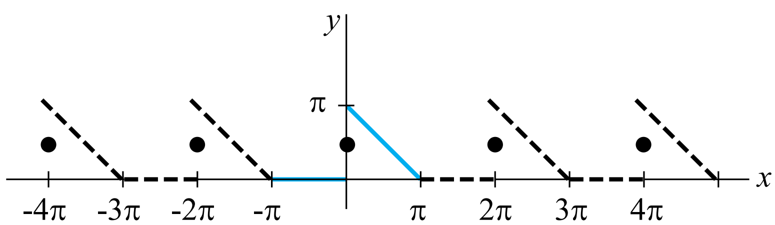


Figura 33. Gráfico del ejemplo 2. Tomada de http://bit.ly/2co6NP8

Secuencia de sumas parciales

- Secuencia de sumas parciales
  Para (13), escribimos las sumas parciales como

$$S_1=\frac{\pi}{4},\ S_2=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x,$$
$$S_3=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$$

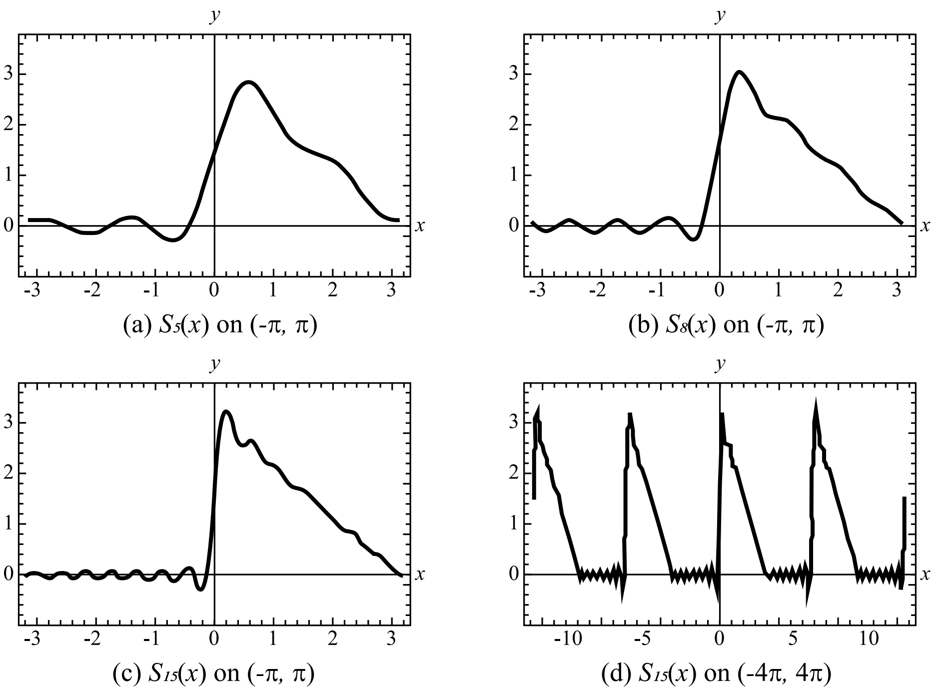


Figura 34. Gráfico del ejemplo 2. Tomada de http://bit.ly/2co140V

Las series de Fourier permiten representar funciones periódicas mediante combinaciones de senos y cosenos (serie trigonométrica de Fourier) o de exponenciales (forma compleja de la serie de Fourier).

Si *f* es una función periódica de período *2T* seccionalmente continua, admite la siguiente representación en los puntos de continuidad:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n-1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{T} + b_n sen\frac{n\pi t}{T} \right)$$

Donde:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+2T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}dt$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+2T} f(t)\text{sen}\frac{n\pi t}{T}dt$$

Nótese que las integrales pueden ejecutarse entre dos valores cualesquiera separados por un período. En los puntos de discontinuidad de la función, la serie anteriormente mencionada converge a la semisuma de los límites laterales de la función.

Otra forma de representar la misma función es mediante una serie compleja, en la cual se aprovecha la fórmula de Euler $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\,\text{sen}\,b)$. En tal caso, resulta de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/T}$$

Donde:

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-in\pi t/T}dt$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1) Serie de Fourier de una función periódica de período distinto a 2π. Hallar la serie trigonométrica de Fourier para la función periódica definida por

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & , \quad 0<t<2 \\ f(t+2)=f(t) \end{cases}$$

Solución:

Siendo T = 1, hallemos en primer lugar los coeficientes:

$$a_n=\int_0^2 t^2\cos n\pi t dt \underset{\text{por partes}}{=} \left.\frac{2n\pi t\cos(n\pi t)-2sen(n\pi t)+n^2\pi^2t^2sen(n\pi t)}{n^3\pi^3}\right|_0^2=$$

$$=\frac{4n\pi\cos(2n\pi)-2sen(2n\pi)+4n^2\pi^2sen(2n\pi)}{n^3\pi^3}=\frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$b_n=\int_0^2 t^2 sennπt dt=\left.\frac{2n\pi t sen(2n\pi)-2\cos(n\pi t)+n^2\pi^2t^2\cos(n\pi t)}{n^3\pi^3}\right|_0^2=$$

$$=\frac{4n\pi sen(2n\pi)-2\cos(2n\pi)+4n^2\pi^2\cos(2n\pi)}{n^3\pi^3}-\frac{2}{n^3\pi^3}=-\frac{1}{n\pi}$$

Debemos calcular el coeficiente a_0 por separado dado que la forma de a_n obtenida arriba no está definida para n = 0. Calculamos así:

$$a_0=\int_0^2 t^2\cos 0\pi t dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^2=\tfrac{8}{3}$$

De esa forma, la serie de Fourier buscada será:

$$f(t)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t-\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi t\right)$$

2) Aprovechamiento de la serie de Fourier para calcular una serie numérica. Dada

$$f(t)=\begin{cases} -\pi & , \quad -\pi<t<0 \\ t & , \quad 0<t<\pi \end{cases}$$

a) Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$.
b) Grafique la suma de esa serie en [-4π; 4π].
c) Aproveche dicha serie para calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados de todos los enteros impares positivos.

Solución:

a) Podemos hacer una extensión periódica de esta función considerándola como de período 2π. De esa manera, tenemos $T = \pi$ y podemos calcular los coeficientes como:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}dt$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+2T} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{T}dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt =$$

$$-\frac{\operatorname{sen} n\pi}{n} - \frac{1}{n^2\pi} + \frac{\cos n\pi + n\pi\operatorname{sen} n\pi}{n^2\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi\operatorname{sen}(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\operatorname{sen}(nt)dt =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\operatorname{sen} n\pi + n\pi\cos n\pi}{n^2\pi} = \frac{1}{n}\left(1 - 2\cos n\pi\right)$$

El coeficiente a_0 lo calculamos por separado y da:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(0t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t dt = -\frac{\pi}{2}$$

De modo que la serie queda:

$$S(t) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n-1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)\cos nt + \frac{1}{n}(1 - 2\cos n\pi)\operatorname{sen} nt\right)$$

b) Para graficar la suma de la serie, recordemos que coincide con la función en los puntos en que esta es continua y converge con la semisuma de los límites laterales en los puntos de discontinuidad. Así tenemos:

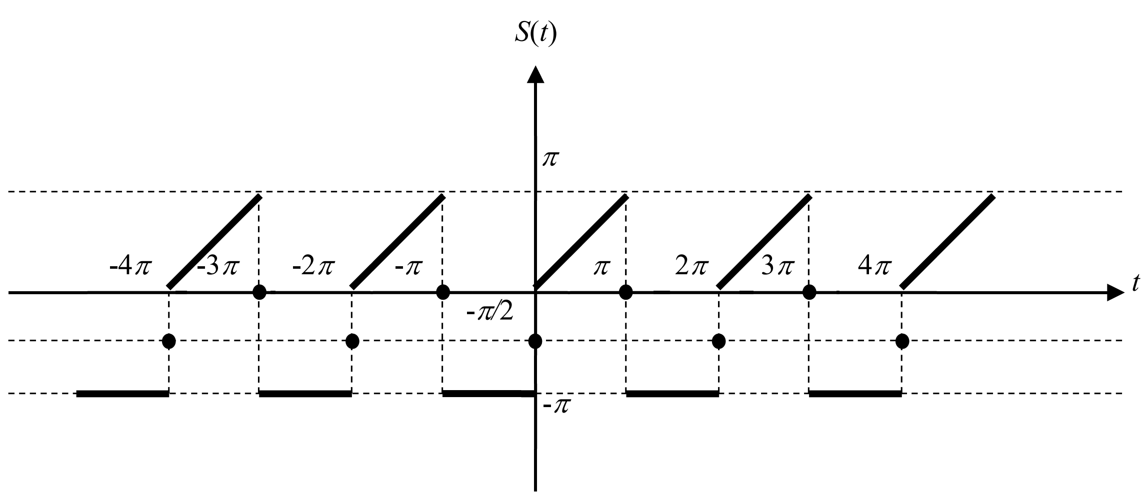


Figura 35. Gráfico del ejercicio 2. Tomada de https://goo.gl/hBcBPC

Los puntos indican los valores que la serie alcanza en los puntos de discontinuidad, que son la semisuma de los límites laterales en cada caso.

c) Para evaluar la serie numérica que nos piden, evaluaremos la serie en un punto adecuado. Notamos que el punto más sencillo para evaluar la serie es $t = 0$. Allí tenemos que los sen(nt) se hacen todos cero y los cos(nt) se hacen todos unos. De esa manera, la serie quedaría

$$S(0) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

El valor de cos($n\pi$) será -1 cuando n sea impar y 1 cuando n sea par. Por ende, resultará que (cos($n\pi$) - 1) es -2 cuando n es impar y 0 cuando n es par. De esa manera, en la serie sobreviven solo los términos impares, y en ellos reemplazamos (cos($n\pi$) - 1) por -2. Entonces, podemos escribir:

$$S(0) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2\pi}$$

Por otro lado, y de la gráfica anterior, resulta $S(0) = -\pi/2$. Reemplazando esto, arriba queda la siguiente expresión:

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2\pi} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2\pi} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Obtuvimos así la suma de los recíprocos de todos los naturales al cuadrado, como nos pedía el enunciado.

3) **Serie compleja de Fourier**. Desarrolle la serie compleja de Fourier $f(t) = e^{-\alpha t}$, donde $-\pi < \alpha < \pi$. Aproveche ese resultado para calcular la suma de la serie.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}$$

Solución:
Hallaremos en primer lugar los coeficientes:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha t} e^{-i\ nt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha - i\ n)t}\,dt = \frac{1}{2\pi(\alpha - in)} e^{(\alpha - i\ n)t}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\begin{array}{c} \textit{fórmula de Euler} \\ \downarrow \end{array}$$

$$= \frac{1}{2\pi(\alpha - in)}(e^{\alpha\pi} e^{-i\ n\pi} - e^{-\alpha\pi} e^{i\ n\pi}) \qquad = \qquad \frac{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{2\pi(\alpha - in)}\cos n\pi$$

Luego:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/T} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{2\pi(\alpha - in)}\cos(n\pi) e^{i\ nt} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})(\alpha + in)}{2\pi(\alpha^2 - n^2)}\cos(n\pi) e^{i\ nt}$$

Esta equivalencia es válida en todos los puntos de continuidad de f, en particular en el 0. Si evaluamos ahora la serie en 0, debe dar lo mismo que $f(0)$, esto es, 1. Por otro lado, la exponencial e^{int}, evaluada en 0, es igual a 1. De allí obtenemos lo siguiente:

$$f(0) = 1 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})(\alpha + in)}{2\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos(n\pi)$$

Obsérvese, por otra parte, que los términos en *in* con *n* positivo se anularán con los que tienen *n* negativo, de modo que podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$1 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})\alpha}{2\pi(\alpha^2 + n^2)} \cos(n\pi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})\alpha}{2\pi(\alpha^2 + n^2)} (-1)^n \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha^2 + n^2)} = \frac{2\pi}{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})\alpha}$$

4) **Serie cosenoidal de Fourier**. Dada la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ 2 & , \quad \dfrac{\pi}{2} \le t < \pi \end{cases}$$

a) Desarrolle la serie cosenoidal de Fourier.
b) Halle la suma de la serie en los intervalos (0; π/2), (π/2; π) y en los puntos 0 y π.
c) Calcule la suma de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Solución:

Para que una serie de Fourier sea solamente de cosenos la función debe ser par. Por ende, debemos plantear una extensión periódica de *f* tal que sea simétrica respecto al eje de ordenadas. Vemos que eso lo logramos planteando que la extensión periódica sea igual a 1 en -π/2, 0 y a 2 entre -π; -π/2. Aparece como cuestión natural en ese caso que el período sea 2π. Entonces, la gráfica será la siguiente:

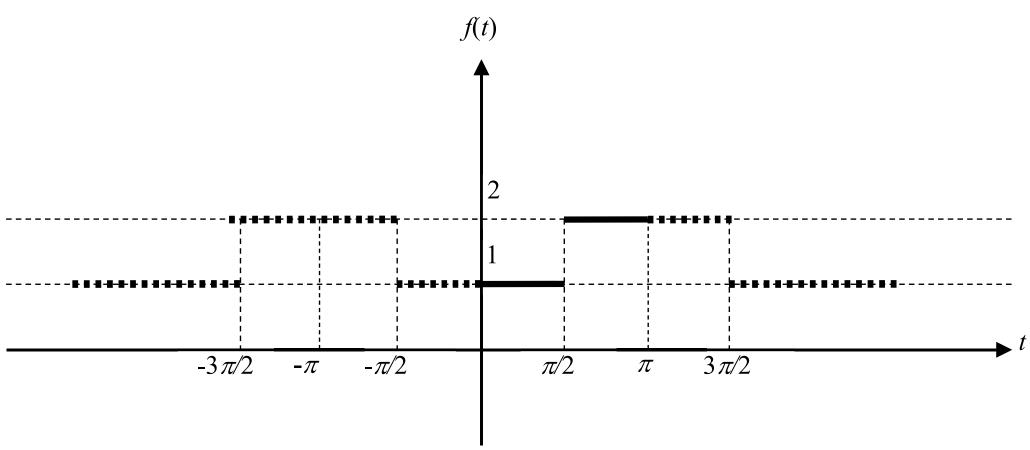


Figura 36. Gráfico del ejercicio 3. Tomada de https://goo.gl/qcshZL

En la gráfica, las líneas gruesas marcan la función original y las de puntos la extensión periódica. Vemos que para calcular los coeficientes conviene tomar el intervalo que va de -π/2 a 3π/2, de modo que hace solo dos integrales por coeficiente. Por otra parte, solo debemos calcular los coeficientes *a*, dado que la función es par y su desarrollo no tendrá senos. Obtenemos así la siguiente expresión:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot\cos nt dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2\cdot\cos nt dt\right] = \frac{2\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{2}}{n\pi}$$

Por otro lado, es fácil calcular que a_0 es 3. De esa forma:

$$s(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{2}}{n\pi}\cos nt$$

Para calcular la serie que nos piden, tengamos en cuenta que $S(0) = 1$ (coincide con el valor de la función, que es continua en ese punto). El $\cos(nt)$ es 1 en el mismo punto. Así, resultará la siguiente expresión:

$$S(0) = 1 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{2}}{n\pi}$$

Sabemos además que el $\operatorname{sen}(3n\pi/2)$ en esa sumatoria vale 0 para n pares, y alterna entre -1 y 1 para n impares. Más precisamente, vale $(-1)^k$ para $n = 2k - 1$. De ese modo, solo sobrevivirán los términos impares y la expresión resultante será

$$S(0) = 1 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$$

que es el valor que buscábamos.

3. Evaluación de los coeficientes de Fourier

Definición

El cálculo de los coeficientes de Fourier se define como una transformada matemática del dominio de tiempo hacia el dominio de frecuencia.

Un hecho importante de la serie de Fourier es que la forma de onda original se puede reconstruir a partir de los coeficientes de frecuencia. En otras palabras, es posible transformar del dominio de frecuencia y regresar hacia el dominio de tiempo sin que se pierda la información. La serie de Fourier está perfectamente adaptada para realizar el análisis de frecuencia en formas de ondas periódicas, esto es, en señales deterministas.

"f" tiene período "p", entonces se calcula sus coeficientes de Fourier en

$$[-p/2, p/2]$$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\ dx$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{p}\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\text{sen}\frac{2n\pi x}{p}\,dx$$

Ahora:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\quad dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos nw_0 x dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,sen\left[nw_0\right]xdx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nw_0x) + b_n sen(nw_0x)\right)$$

Igualamos:

$$a_n\cos(nw_0x) + b_n sen(nw_0x) = c_n\cos(nw_0 + \delta_n)$$
$$a_n\cos(nw_0x) + b_n sen(nw_0x) = c_n\left[\cos(nw_0x)\cos(\delta_n) - sen(nw_0)sen(\delta_n)\right]$$
$$a_n\cos(nw_0x) + b_n sen(nw_0x) = c_n\cos(nw_0x)\cos(\delta_n) - c_n sen(nw_0)sen(\delta_n)$$

Entonces, a_n y b_n forman un triángulo:

$$a_n = c_n\cos(\delta_n)$$
$$b_n = -c_n\text{sen}(\delta_n)$$
$$\delta_n = \tan^{-1}(b_n / a_n)$$
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos\left(\delta_n + nw_0x\right))$$

Ejemplo 1:

Sea $f(x) = x^2\left[0,3\right]$ con $T = 3$

$$a_0 = 6$$
$$a_n = \frac{9}{n^2\pi^2}$$
$$b_n = -\frac{9}{n\pi}$$
$$c_n = \frac{9}{n^2\pi^2}\sqrt{1+n^2\pi^2}$$
$$\delta = \tan^{-1}(-n\pi)$$
$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 = 6$$
$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 \cos\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2\pi^2}\sqrt{1+n^2\pi^2}\cos(\tan^{-1}(n\pi)) + nw_0x$$

Ejemplo 2:

Sea $f(x) = x + \pi$ desde $[-\pi, \pi]$

$$a_0 = 2\pi$$
$$a_n = 0$$
$$b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$$
$$c_n = \sqrt{0^2 + (-\frac{2(-1)^n}{n})^2} = -\frac{2(-1)^n}{n}$$
$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{2(-1)^n}{n}}{0}\right) = \pi/2$$
$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n}\cos(\pi/2 + nw_0x)$$

Ejemplo 3:

$$a_0 = \frac{3}{2}$$
$$a_n = \frac{3}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$
$$b_n = -\frac{3}{n\pi}(-1)^n + 1$$
$$c_n = \sqrt{(\frac{3}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right])^2 + (-\frac{3}{n\pi}(-1)^n + 1)^2\}}$$
$$\delta = \tan^{-1}((-\frac{3}{n\pi}(-1)^n + 1) / (\frac{3}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]))$$
$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nw_0x) + b_n sen(nw_0x)\right)$$

4. Aproximación mediante una serie finita de Fourier

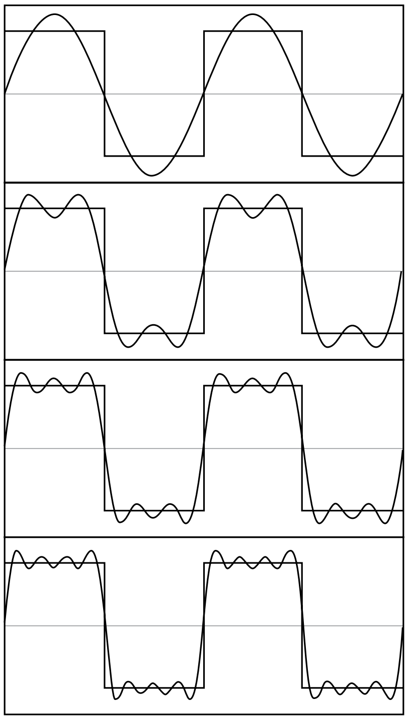


Figura 37. Aproximación mediante una serie finita de Fourier. Tomada de https://goo.gl/rv0kPv

El teorema de Fourier asegura que bajo ciertas condiciones toda función periódica f (t) de período T puede expresarse como suma (serie de Fourier) de funciones seno y coseno:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(nw_0 t) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m sen(mw_0 t)$$

Donde $\omega_0=2\pi T$ es la frecuencia (angular) fundamental y todas las otras frecuencias son múltiplos enteros (armónicos) de ω_0.

El proceso de hallar los coeficientes de los senos y cosenos se denomina *análisis de Fourier* y el proceso de reconstruir la función a partir de dichos coeficientes, *síntesis de Fourier*.

Al usar un ordenador para estas operaciones, la suma infinita debe, obviamente, truncarse y sumar solamente un número finito de términos, obteniendo una aproximación de la función original.

En esta práctica debe construirse una aplicación que permita al usuario especificar una función dada y elegir el número de términos a usar. El modelo debe, entonces, calcular los coeficientes de Fourier (análisis) hasta un cierto índice (a determinar también por el usuario) y representar la aproximación construida a partir de estos coeficientes (síntesis).

5. Teorema de Parseval

El teorema de Parseval define que la potencia de las señales es equivalente a la suma de la potencia de sus componentes espectrales y se toma dependiendo de si la señal es periódica o no, ya que para su análisis se implementa la serie y la transformada de Fourier, respectivamente.

Respecto a la señal, el valor medio de esta se define como la media de todos los valores que definen y componen esta señal cuya suma representa el área bajo la curva entre un período de tiempo que matemáticamente se representa por la ecuación. Gráficamente corresponde a un triángulo que contiene el área equivalente a la que tiene la señal bajo su curva como se muestra en la Figura 38.

Ecuación 1:

$$Area = \int_0^T f(t)$$

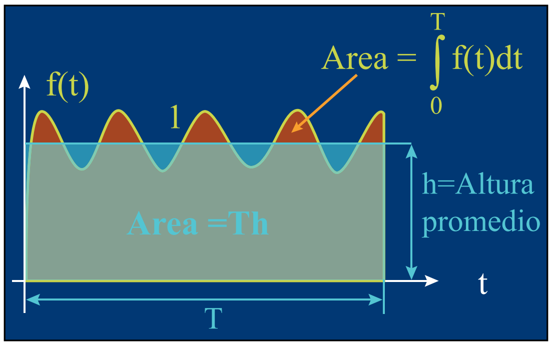


Figura 38. Área bajo la curva de señal. Tomada de https://goo.gl/GhoMNQ

En los sistemas de comunicaciones es importante conocer la potencia promedio de las señales lo que es equivalente al valor cuadrático medio en un período definido (T) de la señal como lo muestra la ecuación 2. Si f(f) corresponde a una señal de corriente o voltaje representa la potencia promedio entregada por la misma a una resistencia de 1Ω. Los límites de integración para una señal periódica corresponden a un período de la señal, ya que si se toman *n* períodos, se aumenta el tiempo *n* veces y de igual manera pasaría con el área; por lo tanto, se obtendría el mismo resultado.

Ecuación 2:

$$p = \int_{-T/2}^{T/2} \{f(t)\}^2 dt$$

Teorema de Parseval para señales periódicas

Dependiendo de si la serie de Fourier corresponde a la serie trigonométrica o a la exponencial compleja, el teorema de Parseval corresponderá a las ecuaciones 3 y 4, respectivamente. Allí se define que la potencia de la señal es equivalente a la suma de la potencia de los componentes espectrales representados por los coeficientes a_0, a_n y b_n para el primer caso y C_n para el segundo. El valor cuadrático medio se correspondería al valor cuadrático medio de los componentes espectrales como lo muestra la ecuación 5, donde C_0 es el nivel de *offset* de la señal y C_n la amplitud de la n-ésimo armónico.

Ecuación 3:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \{f(t)\}^2 dt = \frac{1}{4}a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2)$$

Ecuación 4:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \{f(t)\}^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Ecuación 5:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(t)\}^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right|^2$$

También:

Sea $g(t)$ una señal arbitraria y sea $G(\omega)$ su transformada de Fourier. Generalmente, la energía de la señal $g(t)$ es normalizada (considerando la posibilidad de señales complejas):

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt$$

Para señales reales, esto se reduce a

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt$$

El teorema de Parseval dice que

$$E_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\, df$$

La energía total de la señal es el área bajo el módulo de su transformada de Fourier.

Consideremos, ahora, que la señal $g(t)$ pasa por un filtro ideal de ancho infinitesimal $\Delta\omega$ y ganancia unitaria, centrado en ω_0 [rad/s], tal como se indica en la Figura 39.

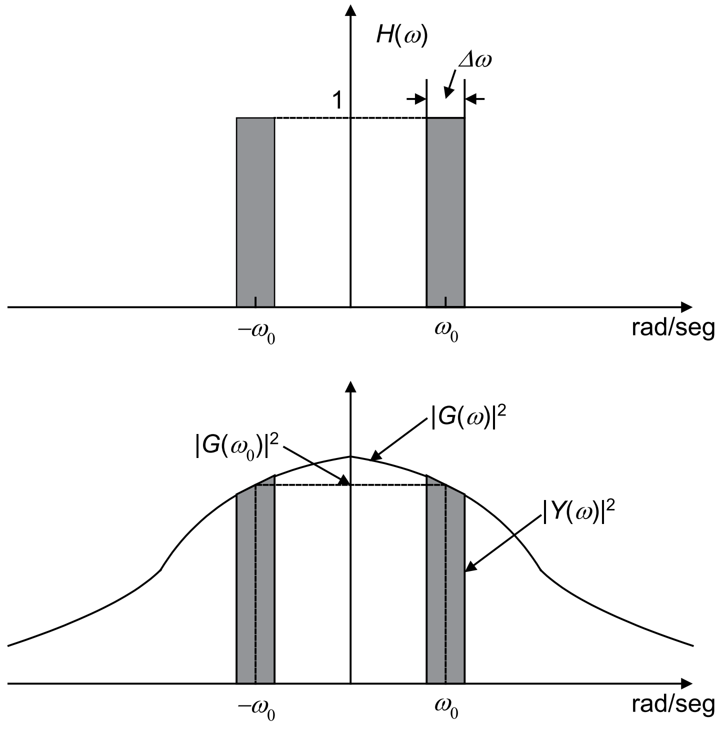


Figura 39. Teorema de Parseval, densidad espectral de energía y de potencia y autocorrelaciones. Tomada de http://bit.ly/2co98cU

Esto implica que $G(\omega)$ y, por lo tanto, también $|G(\omega)|^2$ son recortados a la banda de paso del filtro. La señal de salida de este filtro $y(\tau)$ tendrá una transformada de Fourier $Y(\omega)$ caracterizada por

$$Y(\omega) = \begin{cases} G(\omega) & para \left|\omega \pm \omega_0\right| \leq \Delta\omega \\ 0 \; en\ otro\ caso \end{cases}$$

La energía de la señal $y(\tau)$ E_y será la energía que la señal $g(\tau)$ tiene en la banda $\Delta\omega$ centrada en ω_0.

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|G(\omega)H(\omega)\right|^2 d\omega \approx 2\frac{1}{2\pi}\left|G(\omega_0)\right|^2 \Delta\omega = 2\left|G(f_0)\right|^2 \Delta f$$

De lo cual se desprende lo siguiente:

La energía de la señal $g(\tau)$ en la banda $\Delta\omega$ está centrada en $\omega_0 \approx 2\frac{1}{2\pi}|G(\omega_0)|^2\Delta\omega$

O bien:

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{Energía\ de\ señal\ g(t)\ en\ rango\ \Delta\omega\ en\ torno\ a\ \omega_0}{\Delta\omega} = 2\frac{1}{2\pi}\left|G(\omega_0)\right|^2 = 2\left|G(f_0)\right|^2$$

Por ello, se define que $|G(\omega)|^2$ es la densidad espectral de energía de la señal $g(\tau)$.

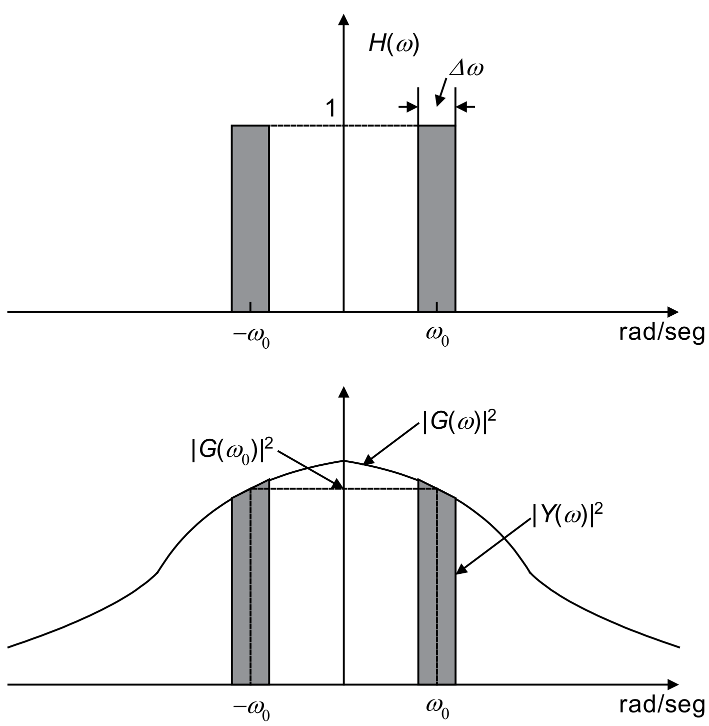


Figura 40. Teorema de Parseval, densidad espectral de energía y de potencia y autocorrelaciones. Tomada de http://bit.ly/2co98cU.

Ejemplo muy importante: densidad espectral de energía de una señal modulada

Consideremos una señal de energía $g(\tau)$ cuyo ancho espectral está limitado a B[Hz] que es modulada (equivale a la multiplicada en nuestro ejemplo) por una señal sinusoidal. En este caso, entonces, el espectro de $g(t)$, $\Psi_g(\omega)$, está limitado al rango $|\omega| \leq 2\pi B$ (considerando frecuencias positivas y negativas).

$$\varphi(t) = g(t)\cos(\omega_0 t)$$

La transformada de Fourier de $\varphi(t)$, $\Phi(\omega)$, es, entonces

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2}\left[G(\omega+\omega_0) + G(\omega-\omega_0)\right]$$

Y la densidad espectral de energía de la señal $\varphi(t)$, $\Psi_\varphi(\omega)$, será

$$\Psi_\varphi(\omega) = \frac{1}{4}\left|G(\omega+\omega_0) + G(\omega-\omega_0)\right|^2$$

Si $\omega_0 \geq 2\pi B$, entonces, los espectros $G(\omega+\omega_0)$ y $+G(\omega-\omega_0)$ no se traslapan y, por lo tanto, su producto es cero para todo valor de ω. De esta consecuencia se desprende esta expresión:

$$\Psi_\varphi(\omega) = \frac{1}{4}\left\{\left|G(\omega+\omega_0)\right|^2 + \left|G(\omega-\omega_0)\right|^2\right\}$$

Y, por lo tanto,

$$\Psi_\varphi(\omega) = \frac{1}{4}\left\{\Psi_g(\omega+\omega_0) + \Psi_g(\omega-\omega_0)\right\}$$

La figura siguiente ilustra este resultado

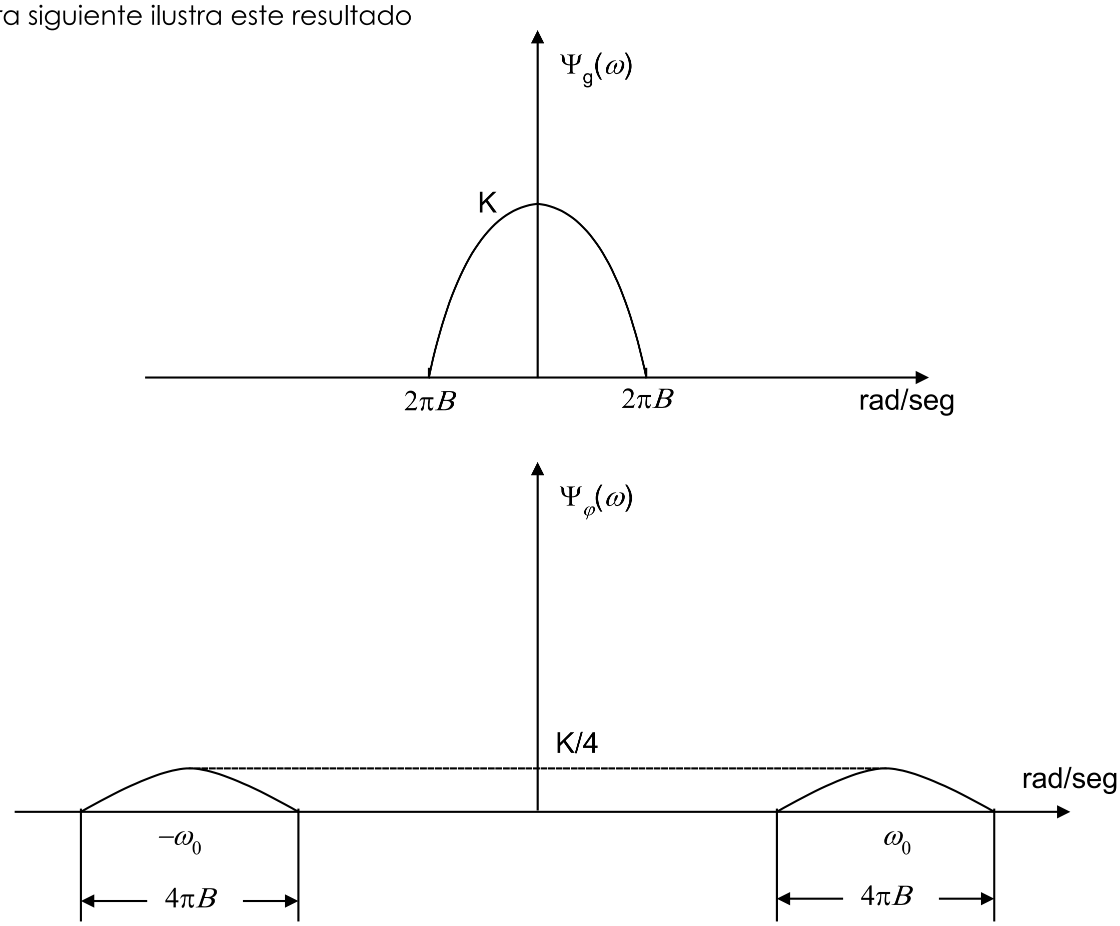


Figura 41. Teorema de Parseval, densidad espectral de energía y de potencia y autocorrelaciones. Tomada de https://goo.gl/0E9ecn

Integrando, concluimos que las energías totales de las señales *φ(t)* y *g(t)*, E_φ y E_g, respectivamente, están relacionadas por

$$E_\varphi = \frac{1}{2} E_g$$

Autocorrelación para señales de energía

La autocorrelación temporal de una señal de energía *g(t)* se define como

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt$$

Observamos que esta función es simétrica en torno a $\mathrm{r} = 0$. En efecto, si hacemos el cambio de variable $x = t + \tau$, la ecuación anterior se convierte en

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x-\tau)dx$$

Pero x solo es una variable de integración y podemos reemplazarla por *t* para obtener:

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t-\tau)dx = Rg(-\tau)$$

Se demuestra fácilmente que $R_g(0) \geq R_g(\tau)$. Para ello calculamos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[g(t) \pm g(t+\tau)\right]^2 dt \geq 0$$

Aprovechando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t+\tau)dt = R_g(0) \quad y \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt = R_g(\tau)$$

Se obtiene el resultado $R_g(0) \geq \left|R_g(\tau)\right|$

Demostraremos ahora que para una señal de energía la transformada de Fourier de autocorrelación es igual a la densidad espectral de energía.

$$F\left[R_g(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt\right]d\tau$$

$$F\left[R_g(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} g(t+\tau)d\tau\right]dt$$

La integral interior es la transformada de Fourier de *g(τ + t)* y, por lo tanto, es igual a $G(\omega)e^{j\omega t}$, donde $G(\omega)=F[g(t)]$. En consecuencia:

$$F\left[R_g(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)G(\omega)e^{j\omega t}dt = G(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{j\omega t}dt = G(\omega)G(-\omega)$$

Y eso equivale a

$F\left[R_g(\tau)\right] = |G(\omega)|^2 = \Psi_g(\omega)$ = densidad espectral de energía de $g(t)$

Aplicación: Definición de ancho de banda esencial de una señal de energía

Muchas señales de energía son acotadas en tiempo y, por lo tanto, contienen frecuencias hasta ∞, si bien evidentemente el contenido espectral decae rápidamente a partir de alguna frecuencia (de lo contrario la integral de la densidad espectral de energía sería infinita). Intuitivamente, es obvio que si se filtra el espectro de una señal de energía a un rango que contiene la mayor parte de la energía (por ejemplo, el 90%), entonces el pulso filtrado será muy similar al pulso original. Definimos el ancho de banda esencial de una señal de energía como aquel rango de frecuencias que contiene la parte más significativa de la energía.

Consideremos como ejemplo un pulso g(t) de amplitud unitaria y de duración *T*. Escribimos esto como

$$g(t) = rect\left[\frac{t}{T}\right]$$

La densidad espectral de energía de esta señal es

$$\Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2 = T^2 \frac{sen^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} = T^2 sen\ c^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

La Figura 42 ilustra estas funciones:

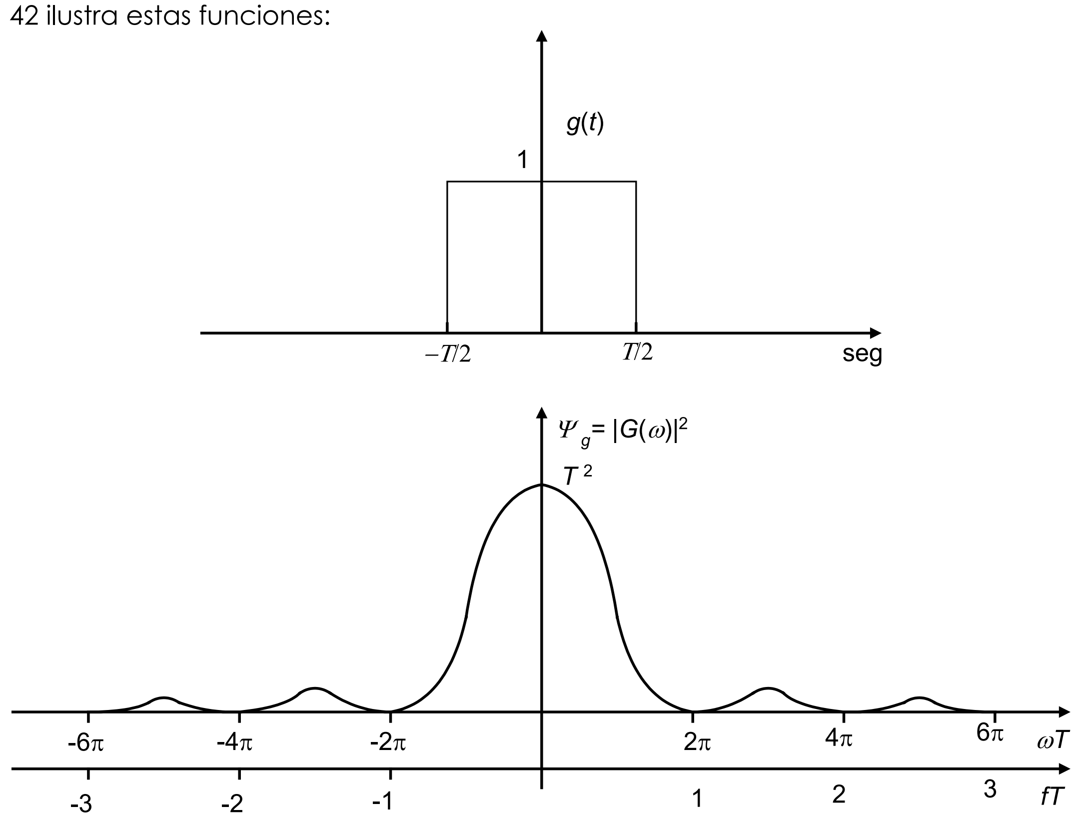


Figura 42. Autocorrelación para señales de energía. Tomada de http://bit.ly/2co98cU

Ahora integraremos la densidad espectral de energía sobre un rango de frecuencias angulares $|\omega| \leq W$ para obtener la energía asociada a ese rango de frecuencias. Evidentemente, si $W = \infty$, entonces se obtendrá la energía total del pulso $g(t)$, E_g, la que vale T según resulta trivial comprobar integrando $g^2(t)$.

Llamamos E_w a la energía contenida en el rango $|\omega| \leq W$, lo que es igual a la energía del pulso $g(t)$ filtrado mediante un filtro pasabajos ideal, con frecuencia de corte W rad/seg como se indica en la Figura 43.

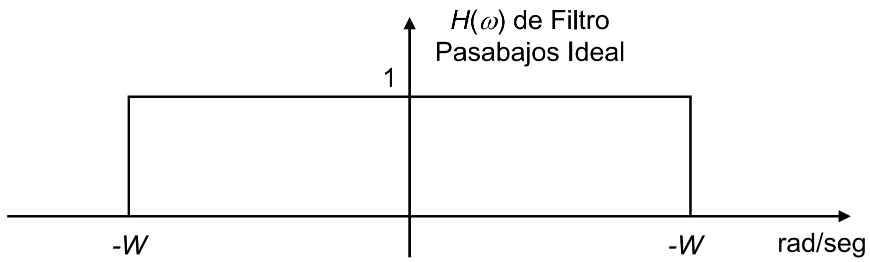


Figura 43. Autocorrelación para señales de energía. Tomada de http://bit.ly/2co98cU

Entonces,

$$E_w = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} T^2 sen\,c^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) d\omega$$

Haciendo el cambio de variable $\omega T = x$, se obtiene

$$E_w = \frac{T}{\pi} \int_{0}^{WT} sen\,c^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Reemplazando $E_g = T$, se obtiene:

$$\frac{E_w}{E_g} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{WT} sen\,c^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

La integral de la función seno al cuadrado se obtiene numéricamente. Se comprueba que si $WT = 2\pi$ o equivalentemente $fT = 1$, entonces $\frac{E_w}{E_g} = 0.903$.

Concluimos que el 90% de la energía del pulso rectangular está contenido en el rango entre los primeros nulos del espectro. Por ello, se suele especificar que el ancho de banda de un pulso de duración *T* es igual a 1/*T* [Hz]. Nótese que el ancho de banda siempre se especifica como aquel correspondiente al rango de frecuencias positivas.

Extendemos ahora estos resultados al caso de señales de potencia. Para ello aprovechamos que todos los desarrollos anteriores serán válidos si truncamos la señal de potencia a un tiempo finito.

Sea $g(t)$ una señal de potencia con potencia media P_g dada por

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t)dt$$

Sea $g_T(t)$ la versión truncada en el tiempo de $g(t)$ según

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t) & |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 \ en\ otro\ caso \end{cases}$$

Sea E_{gT} la energía de $g_T(t)$, entonces se cumplirá que

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{g_T}}{T}$$

Definimos como $G_T(\omega)$ la transformada de Fourier de $g_T(t)$.

Entonces, del teorema de Parseval obtenemos la siguiente expresión:

$$E_{g_T} = \int_{-\infty}^{\infty} g_T{}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|G_T(\omega)\right|^2 d\omega$$

Reemplazamos esta igualdad en la expresión para la potencia de $g(t)$:

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{g_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|G_T(\omega)\right|^2 d\omega\right]$$

Dado que E_{gT} crecerá linealmente con T, el límite será finito. Ello permite intercambiar el orden de integración con la operación de límite para obtener:

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{g_T}}{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\left|G_T(\omega)\right|^2\right]\right\} d\omega$$

Comparando esta expresión con la utilizada para justificar el concepto de densidad espectral de energía, observamos que para señales de potencia

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|G_T(\omega)\right|^2$$

juega el mismo rol que $\left|G_T(\omega)\right|^2$ para señales de energía. Repitiendo el mismo desarrollo concluimos que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|G_T(\omega)\right|^2$$

es la densidad espectral de potencia de la señal de potencia $g(t)$. Entonces, para esta última definimos la densidad espectral de potencia , indicada anteriormente, como

$$S_g(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|G_T(\omega)\right|^2$$

Y

$$P_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} 2S_g(f)df$$

Entonces, $S_g(f)$ es la densidad espectral de potencia bilateral (DEP bilateral) y $2S_g(f)$ es la DEP unilateral.

Autocorrelación para señales de potencia

Si $g(t)$ es una señal de potencia, su autocorrelación temporal se define como

$$R_g(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)g(t+\tau)dt$$

La demostración de que esta es una función par en τ y tiene un máximo en $\tau = 0$ es idéntica a la presentada para señales de energía.

$$R_g(\tau) = R_g(-\tau) \ \ y \ \ R_g(0) \geq \left|R_g(\tau)\right|$$

Demostramos a continuación que, al igual que para señales de energía, la densidad espectral es la transformada de Fourier de la autocorrelación. Observamos, en primer lugar, que si $g_T(t)$ es la versión truncada de $g(t)$, según se definió anteriormente, entonces

$$R_g(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} g_T(t)g_T(t+\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}R_{g_T}(\tau)$$

Aplicando la transformada de Fourier a esta ecuación, y teniendo presente que la transformada de Fourier de $R_{gt}(\tau)$ es igual a la densidad espectral de energía de la señal truncada $|G_T(\omega)|^2$, obtenemos:

$$F\left[R_g(\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}F\left[R_{g_T}(\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|G_T(\omega)\right|^2$$

Y, finalmente,

$$F\left[R_g(\tau)\right] = S_g(\omega)$$

Caso especial: Para una señal periódica, la DEP es, según ya se explicó antes, igual a

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} V_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

o sea, es una colección de impulsos en las frecuencias armónicas de la frecuencia fundamental.

$$G(f)=\sum_{-\infty}^{\infty}|V_n|^2\,\delta(f-nf_0)$$

La potencia asociada a la componente de frecuencia nf_0 es, por lo tanto, $2|V_n|^2$.

6. Convergencia de la serie de Fourier

Las series de Fourier cumplen con ciertas condiciones para que se cumpla la convergencia. Esas condiciones son las siguientes:

1. f y f' continuas en el intervalo $(-p,p)$ por pedazos.
2. La serie de Fourier converge a la función f en los puntos continuos.
3. En los discontinuos, la serie de Fourier converge a $\dfrac{f(x+)+f(-x)}{2}$, donde:

$$f(x^+)=Lim_{h\to 0}f(x+h)$$

$$f(x^-)=Lim_{h\to 0}f(x-h)$$

Sea f(x) una función definida para todo x, con período 2π. Entonces, bajo condiciones muy generales, la serie de Fourier de f converge a f(x) para todo x. Describiremos las dos condiciones que aseguran dicha convergencia.

La primera condición es que la función f es continua en cada intervalo de longitud 2π, excepto en un número finito de discontinuidades de salto, donde el valor de f es el promedio de sus límites por la izquierda y por la derecha.

La segunda condición es que en cada intervalo de longitud 2π la función f tiene una derivada continua, excepto en los puntos de salto y en un número finito de esquinas. En los puntos de salto y en las esquinas hay un valor límite para la derivada por la derecha y por la izquierda.

La función f que satisfaga estas condiciones se llama una función continua a trozos. Así, la serie de Fourier de una función f(x) continua a trozos, de período 2π, converge a f(x) para todo x. Se trata de una convergencia uniforme. La convergencia es uniforme en cada intervalo cerrado donde a ≤ x ≤ b que no contenga puntos de salto.

7. Diferenciación e integración de la serie de Fourier

A. Diferenciación de la serie de Fourier

Generalmente, la diferenciación de series de Fourier término a término lleva a resultados absurdos incluso para funciones que tengan un comportamiento extremadamente bueno. Consideremos, por ejemplo, $f(x)=x$ para $-\pi\le x\le\pi$. La serie de Fourier es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}sen(nx)$$

que converge a x para $-\pi \leq x \leq \pi$. Por supuesto $f^{/}(x)=1$ para $-\pi \leq x \leq \pi$, de manera que f es suave a pedazos. Sin embargo, si diferenciamos la serie de Fourier término a término, tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\cos(nx)$$

la cual ni siquiera converge en $(-\pi,\pi)$. La derivada término a término de esta serie de Fourier no está relacionada con la derivada de $f(x)$..

TEOREMA

Sea f continua a pedazos en -L,L, con serie de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n\, sen(\frac{n\pi x}{L})$$

Entonces, para cualquier x con $-L \leq x < L$, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\int_{-L}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0(x+L) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[a_n\, sen\frac{n\pi x}{L} - b_n(\cos n\pi x L - (-1)^n)\right]$$

En esta ecuación, la expresión de la derecha es exactamente lo que se obtiene cuando se integra la serie de Fourier término a término de $-L$ a x. Esto se satisface, aunque la serie de Fourier no converja a $f(x)$ en esta x en particular (por ejemplo, f puede tener una discontinuidad de salto en x).

B. Integración de la serie de Fourier

La extensión natural de la serie de Fourier abarca señales de tiempo de una longitud infinita. Se trata de señales no repetitivas continuas; es decir, es la transformada integral de Fourier, o simplemente la transformada de Fourier.

Esta integración transformará cualquier señal continua de tiempo de forma arbitraria en un espectro continuo con una extensión infinita de frecuencias.

Una característica interesante de la transformada de Fourier es el hecho de que un evento que abarca un período de tiempo corto se extenderá sobre un largo rango de frecuencias o viceversa.

De la serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\frac{\pi}{p}x) + b_n\, sen(\frac{n\pi}{p}x)\right]$$

Considerando que una función f está definida en $(-p,p)$, utilizamos las definiciones integrales de los coeficientes en la expresión, entonces la serie de Fourier de f en el intervalo es

$$f(x)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(t)dt+\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[\int_{-p}^{p}f(t)\cos(\frac{n\pi}{p}t)dt\right]\cos(\frac{n\pi}{p}x)+\left[\int_{-p}^{p}f(t)sen(\frac{n\pi}{p}t)dt\right]sen(\frac{n\pi}{p}x)\right]$$

Si establecemos que $\alpha_n=n\pi/p$ y $\Delta\alpha=\alpha(n-1)-\alpha_n=\pi/p$, entonces se convierte en

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}(\int_{-p}^{p}f(t)dt)\Delta\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[\int_{-p}^{p}f(t)\cos\alpha_n t)dt\right]\cos(\alpha_n x)+\left[\int_{-p}^{p}f(t)sen(\alpha_n t)dt\right]sen(\alpha_n x)\right]\Delta\alpha$$

Ahora vamos a expandir el intervalo $(-p,p)$ haciendo que $p\to\infty$. $p\to\infty$ implica que $\Delta\alpha\to\infty$; por tanto, si la integral definida de menos infinito a más infinito existe, el límite del primer término es cero y el límite de la suma se convierte en

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\alpha t)dt)\cos(\alpha x)+(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)sen(\alpha t)dt)sen(\alpha x)\right]d\alpha$$

Como señala el siguiente resumen, la estructura básica de la integral de Fourier está dada por

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(A(\alpha)\cos(\alpha x)+B(\alpha)sen(\alpha x))d\alpha$$

Donde:

$$A(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\alpha x)dx$$

$$B(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)sen(\alpha x)dx$$

Lectura seleccionada n.º 5:

Análisis de Fourier

Lea el apartado “Parte A: Análisis de Fourier” desde la p. 3 hasta la p. 9.

Buccella, J. M. (2001). *Teoría de los circuitos I.* (Capítulo V: Transitorio de circuitos). Mendoza, Argentina: Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional. Disponible en https://goo.gl/cTYrgG

Actividad n.º 5

Foro de discusión sobre el teorema de Parseval que establece que la energía de una señal real calculada en el dominio del tiempo es igual a la calculada en el dominio de la frecuencia.

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X[k]\right|^2$$

$$\textit{Dominio del Tiempo} \qquad \textit{Dominio de la Frecuencia}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]\right|^2 \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X[k]\right|^2$$

La siguiente información sobre el teorema de Parseval le será de ayuda para su intervención.

El teorema de Parseval, por lo general, se refiere al resultado de que la transformada de Fourier es unitaria; es decir, que la suma de una función es igual a la suma de su transformación o que la integral de una función es igual a la integral de su transformación. Se origina a partir de un teorema de 1799 sobre la serie de Marc Antoine Parseval, que se aplicó más tarde a la serie de Fourier.

También se conoce como el teorema de la energía de Rayleigh o la identidad de Rayleigh.

La energía total de una señal no depende de la representación seleccionada: la frecuencia o el tiempo.

Fórmula de Parseval

Sea f una función continua a trozos en el intervalo [¼, ¼]. Sean a_0, a_n y b_n los coeficientes del desarrollo de Fourier de f, entonces se verifica que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)\right]^2dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

La relación de Parseval demuestra que la transformada de Fourier es unitaria, lo cual significa que la suma del cuadrado de una función es igual a la suma del cuadrado de su transformada.

Siendo F[f(t)](a) una transformada continua de Fourier, se usa generalmente para indicar la unicidad de cualquier transformada de Fourier.

Ahora bien, sabiendo que el promedio de una señal cualquiera f(t) en un período dado (T), se puede calcular como la altura de un rectángulo que tenga la misma área bajo la curva f(t). En ese caso, la fórmula de Parseval está definida por la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
Ex = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x*(t)dt = \\
\int_{-\infty}^{\infty} x*(t)\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\ dt = \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(f)\int_{-\infty}^{\infty} x*(t)e^{j2\pi ft}dtdf = \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right]^{*} df = \\
\int_{-\infty}^{\infty} \left|X(f)\right|^{2} df
\end{aligned}
$$

Esta relación es conocida como el teorema de Parseval y establece que la potencia promedio normalizada de una señal periódica F(t) es igual a la suma de los cuadrados de las amplitudes de sus componentes armónicas. Por tanto, este teorema implica superposición de potencias promedios.

Instrucciones

- Ingrese al foro y participe con comentarios críticos y analíticos del tema “El teorema de Parseval”.
- Lea y analice el tema n.º 1.
- Responda en el foro a las preguntas acerca del teorema de Parseval.
    1. Explique la importancia del teorema.
    2. Explique la relación del teorema de Parseval con la serie de Fourier.

Glosario de la Unidad IV

A

Análisis de señales en ingeniería

El análisis de señales en el dominio de la frecuencia se realiza a través de las series de Fourier, por cuanto es muy común, reemplazar la variable x por ωt, resultando las componentes:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-j\omega kt}dt$$

Por tanto,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\omega kt}$$

Aplicaciones de la serie de fourier

- Generación de formas de onda de corriente o tensión eléctrica por medio de la superposición de sinusoides generados por osciladores electrónicos de amplitud variable cuyas frecuencias ya están determinadas.
- Análisis en el comportamiento armónico de una señal.
- Reforzamiento de señales.
- Estudio de la respuesta en el tiempo de una variable circuital eléctrica donde la señal de entrada no es sinusoidal o cosinusoidal, mediante el uso de transformadas de Laplace y/o solución en régimen permanente sinusoidal en el dominio de la frecuencia.
- La resolución de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales permite obtener soluciones particulares en forma de series de Fourier fácilmente computables, además de soluciones prácticas, en la teoría de la transmisión del calor, la teoría de placas, etc.

F

Forma compacta

En ocasiones es más útil conocer la amplitud y la fase en términos cosinusoidales en lugar de amplitudes cosinusoidales y sinusoidal.

Una forma de expresar la compleja forma de la serie de Fourier es

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

Donde

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Forma exponencial

Por la identidad de Euler para la exponencial compleja, se opera adecuadamente si

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

La serie de Fourier se puede expresar como la suma de dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\, e^{-inx} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{inx}$$

En forma más compacta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{inx}$$

Estas ecuaciones solo son válidas cuando el período $T = 2\pi$ con $\omega = 1$. Otra forma de expresar la forma compleja de la serie de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{j\omega_n t}$$

Donde

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-j\omega_n t}dt = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{j\omega_n t}dt = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Formulación general

Las propiedades útiles de las series de Fourier se deben principalmente a la ortogonalidad y a la propiedad de homomorfismo de las funciones e^{inx}.

Otras sucesiones de funciones ortogonales tienen propiedades similares, aunque algunas identidades útiles, concerniendo por ejemplo a las convoluciones, no seguirán cumpliéndose si se pierde la propiedad de homomorfismo.

Algunos ejemplos son las secuencias de funciones de Bessel y los polinomios ortogonales. Tales sucesiones se obtienen normalmente como soluciones de una ecuación diferencial; una gran clase de tales sucesiones útiles son soluciones de los llamados problemas de Sturm-Liouville.

Formulación moderna

Realmente el desarrollo en serie de Fourier se hace para funciones de cuadrado integrable; es decir, para funciones que cumplan lo siguiente:

$$\int \left| f(x) \right|^2 dx < \infty$$

El conjunto de todas las funciones integrables definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se denota con $L^2([-\pi, \pi])$. Este conjunto tiene definido un producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

que lo dota de estructura de espacio de Hilbert. De este modo, todas las funciones de $L^2([-\pi, \pi])$ pueden desarrollarse en series de Fourier. Así, el conjunto $\{e_n = e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal del espacio $L^2([-\pi, \pi])$. Entonces, el desarrollo de Fourier se puede expresar como

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Donde $c_n = \langle f, e_n \rangle$ son los coeficientes del desarrollo de Fourier.

Por último, la identidad de Parseval dice que dados una función f de cuadrado integrable y los coeficientes de Fourier C_n, se verifica que:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

En lenguaje técnico, podríamos decir que hay una isometría entre el espacio de funciones de cuadrado integrable y el espacio de sucesiones lineales indexadas en los enteros cuyos términos tienen cuadrados sumables.

I

Identidad de parseval

En análisis matemático, la identidad de Parseval, también conocida como la igualdad de Parseval, es una generalización del teorema de Pitágoras aplicado a los espacios de Hilbert separables. Si *B* es una base ortonormal en un espacio vectorial, entonces

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{v \in B} \left| \langle x, v \rangle \right|^2.$$

El nombre procede de la relación de Parseval para las series de Fourier, que es un caso especial. La identidad de Parseval se puede demostrar mediante el teorema de Riesz-Fischer.

R

Relación con series de fourier

Informalmente podemos expresar la identidad de Parseval aplicada a las series de Fourier, tanto en forma compleja como real.

Forma compleja (o exponencial):

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

Forma real (o trigonométrica):

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(x)|^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Siendo T el periodo y c_n , a_n , b_n los coeficientes de Fourier complejos y reales respectivamente. Aquí se utiliza la convención de que

$a_0=\frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(x)dx$, en otro caso el coeficiente de a_0^2 será diferente.

Relación de parseval

En física e ingeniería, la relación de Parseval se suele escribir como

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left[f(t)\right](\alpha)\right|^2\,d\alpha$$

Donde $F\left[f(t)\right](\alpha)$ representa la transformada continua de Fourier de $f(t)$ y α representa la frecuencia en hercios de f.

La interpretación de esta fórmula es que la energía total de la señal $f(t)$ es igual a la energía total de su transformada de Fourier $F\left[f(t)\right]$ a lo largo de todas sus componentes frecuenciales.

Para señales de tiempo discreto, la relación es la siguiente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x\left[n\right]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{i\phi})\right|^2d\phi$$

Donde X es la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) de x y ϕ representa la frecuencia angular (en radianes) de “x”.

Por otro lado, para la transformada discreta de Fourier (DFT), la relación es:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x\left[n\right]\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X\left[k\right]\right|^2$$

Donde $X\left[k\right]$ es la DFT de $x\left[n\right]$, ambas de longitud N .

Bibliografía de la Unidad IV

Cengel, Y. A. & Palm III, W. J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias.* (1ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Espinoza, E. (2014). *Análisis matemático IV* (cuarta reimpresión). Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

Larson, R. & Edwards, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Zill, D.G & Wright, W.S. (2012). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. (4ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Recursos educativos digitales

Bayón, L. (s.f.). Series de Fourier. Disponible en http://www.unioviedo.es/bayon/mm/serfour

Buccella, J. M. (2001). *Ondas no senoidales*. Mendoza, Argentina: Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional. Disponible en https://goo.gl/cTYrgG

Fernández Ruiz, R. (2000). Funciones periódicas y transformada de fourier (en línea). Disponible en https://uam.es/personal_pas/txrf/fourier.html

Inostroza, J. s.f.). Cálculo avanzado: Series de Fourier. Disponible en https://goo.gl/YGnc7t

López, J. (s.f.). Sistemas y señales. Teorema de Perseval [blog post]. Disponible en https://goo.gl/DfTvu6.

PassItEDU (12 de setiembre de 2013). Cálculo - serie de Fourier [archivo de video]. Disponible en www.youtube.com/watch?v=ixJ

Wikipedia. (s.f). Identidad de Parseval. Disponible en https://es.wikipedia.org/wiki/Identidad de Parseval

Autoevaluación n.º 4

Determine si la función es par o impar o de ninguna de las dos formas.

- $f(x) = sen3x$
- $f(x) = xcosx$
- $f(x) = x^2 + x$
- $f(x) = x^3 - 4x$
- $f(x) = e^{|x|}$
- $f(x) = e^x - e^{-x}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x+5, & -2 < x < 0 \\ -x+5, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
- $f(x) = x^3\ ,\ 0 \leq x \leq 2$
- $f(x) = |x^5|$

Desarrolle la función dada en una serie apropiada de cosenos o senos.

- $f(x) = \begin{cases} -1\ , & -\pi < x < 0 \\ 1\ , & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1\ , & -2 < x < -1 \\ 0\ , & -1 < x < 1 \\ 1\ , & 1 < x < 2 \end{cases}$
- $f(x) = |x|,\ -\pi < x < \pi$
- $f(x) = x,\ -\pi < x < \pi$
- $f(x) = x^2,\ -1 < x < 1$
- $f(x) = x|x|,\ -1 < x < 1$
- $f(x) = \pi^2 - x^2\ ,\ -\pi < x < \pi$
- $f(x) = x^3\ ,\ -\pi < x < \pi$
- $f(x) = \begin{cases} x-1\ , & -\pi < x < 0 \\ x+1\ , & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x+1\ , & -1 < x < 0 \\ x-1\ , & 0 \leq x < 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1\ , & -2 < x < -1 \\ -x\ , & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -\pi\ , & -2\pi < x < -\pi \\ x\ , & -\pi \leq x < \pi \\ \pi\ , & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$
- $f(x) = |senx|,\ -\pi \leq x < \pi$
- $f(x) = cosx\ , -\frac{\pi}{2} < x < \pi/2$

Determine los desarrollos coseno y seno de semiintervalo para la función proporcionada.

- $f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$
- $f(x) = cosx\ \ , 0 < x < \pi/2$
- $f(x) = senx\ \ , 0 < x < \pi$
- $f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < \pi \\ x - \pi, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

Encuentre la serie de Fourier de la siguiente función en el período indicado.

$$f(x) = \begin{cases} 1; \ -1 < x < 0 \\ x; \ 0 <= x < 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

El período (T) de esta función es igual a 2; por lo tanto, sabiendo que $P = \frac{T}{2}$, entonces $P = \frac{2}{2}$, para lo cual tenemos que $p = 1$

Luego, el paso siguiente consiste en encontrar a $"a_0"$ para lo cual:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\ dx$$

$$\&a_0 = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} x\ \ dx =$$

$$\&a_0 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\&a_0 = \frac{3}{2}$$

Ahora se prosigue a encontrar $"a_n"$, con lo cual tenemos

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\ dx$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{0} \cos n\pi x dx + \int_{0}^{1} x * \cos n\pi x dx$$

$$a_n =: 0 + \left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_0^1 + : 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi\left[(-1)^n - 1)\right]$$

Anexos

CLAVES DE RESPUESTAS

UNIDAD I

N.º	ECUACIÓN DIFERENCIAL	SOLUCIÓN
01	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$	$y=\pm\sqrt{C\lvert x\rvert-x^2}$
02	$y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$	$y=\pm\ x\ \sqrt{ln\,x^2+C}$
03	$xy'-y=x^3$	$y=\frac{1}{2}x^3+Cx\ con\ C\in IR$
04	$2xy+(x^2-1)y'=0$	$x^2y-y=C$
05	$y''-2y=0$	$y=C_1+C_2\,e^{2x}$
06	$y''-6y'+9y=0$	$y=C_1\,e^{3x}+C_2\,x\,e^{x}$
07	$y''+4y'+5y=0$	$y=C_1\,e^{-2x}\cos x+C_2\,e^{2x}sen\,x$
08	$y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{2x}$	$y=y_h+y_p=C_1\,e^x+C_2\,x\,e^x-\frac{1}{2}x\,e^x+(\ln\sqrt{x})\,x\,e^x$
09	$y''-3y'+2y=0$	$y=C_1\,e^{2x}+C_2\,e^{x}$
10	$3x^2+2xy+3y^2+(x^2+6xy)$ $y'=0\ ,\ y(1)=2$	$x^3+x^2y+3y^2x=15$

UNIDAD II

Escriba el sistema lineal en forma matricial

N.º	SISTEMA LINEAL	SOLUCIÓN
01	$\frac{dx}{dt}=3x-5y$ $\frac{dy}{dt}=4x+8y$	$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 4 & 8\end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad donde\,\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
02	$\frac{dx}{dt}=-3x+4y-9z$ $\frac{dy}{dt}=6x-y$ $\frac{dz}{dt}=10x+4y+3z$	$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -9\\ 6 & -1 & 0\\ 10 & 4 & 3\end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad donde\,\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$
03	$\frac{dx}{dt}=-3x+4y-9z$ $\frac{dy}{dt}=6x-y$ $\frac{dz}{dt}=10x+4y+3z$	$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{X}, +\begin{pmatrix}0\\ -3t^2\\ t^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\ 0\\ -t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix},$ $donde\,\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

Reescriba el sistema dado sin el uso de matrices.

N.º	SISTEMA LINEAL	SOLUCIÓN
04	$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\mathbf{X}, +\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^t$	$\frac{dx}{dt}=4x+2y-e^t$ $\frac{dy}{dt}=-x+3y-e^t$
05	$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ -2 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}e^t-\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}t$	$\frac{dx}{dt}=x-y+2z+e^{-t}-3t$ $\frac{dy}{dt}=3x-4y+z+2e^{-t}+t$ $\frac{dz}{dt}=-2x+5y+6z+2e^{-t}-t$

Determine la solución general del sistema dado:

N.º	SISTEMA LINEAL	SOLUCIÓN
06	$\frac{dx}{dt} = x + 2y$ $\frac{dy}{dt} = 4x + 3y$	$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{5t} + c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{-t}$
07	$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y$ $\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y$	$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}e^{t}$
08	$\mathbf{X'} = \begin{pmatrix}10 & -5\\8 & -12\end{pmatrix}\mathbf{X}$	$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}e^{8t} + c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}e^{-10t}$
09	$\mathbf{X'} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\0 & 3 & -1\end{pmatrix}\mathbf{X}$	$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{-t}$
10	$\mathbf{X'} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 3\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\mathbf{X}$	$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}e^{3t} + c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}e^{-2t}$

UNIDAD III

Número	Respuesta
1	$L\{4t-3+2\cos(5t)\}=\dfrac{100-75s+4s^2-s^3}{s^2(s^2+25)}$
2	$L^{-1}\left\{\dfrac{3s-1}{s^2+4}\right\}=3\cos(2t)-\dfrac{1}{2}sen(2t)$
3	$L\{sen(2t)e^{3t}\}=\dfrac{2}{s^2-6s+13}$
4	$L^{-1}\left\{\dfrac{5s}{(s+4)^3}\right\}=e^{-4t}(5t-10t^2)$
5	$L\{y^{//}(t)+3y^{/}(t)-4y(t)\}=(s^2+3s-4)L\{y(t)\}-3s-8$
6	$L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos(2t)$
7	$L\left\{\dfrac{sen(2t)}{t}\right\}=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{s}{2}$
8	$L\{t^2 sen(2t)\}=\dfrac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$
9	$L^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s-1}{s+1}\right)\right\}=-\dfrac{1}{t}(e^t-e^{-t})$
10	$L\{f(t)\}=2\dfrac{1}{s}e^{-2s}-2\dfrac{1}{s}e^{-4s}=\dfrac{2}{s}(e^{-2s}-e^{-4s})$
11	$L\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-2s}}\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{s+1}{s^2}e^{-s}\right)$
12	$L\left\{\int_0^t e^t sen(t-\sigma)d\sigma\right\}=\dfrac{1}{s-1}x\dfrac{1}{s^2+1}=\dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)}$
13	$L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right\}=-\cos(t)+1$

UNIDAD IV

Encuentra la Serie de Fourier de "f" en el intervalo dado:

N°	FUNCIONES DADAS	SOLUCIÓN
01	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$	$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}sen\,nx$
02	$f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0\\ x, & 0\le x<1\end{cases}$	$f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x-\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\right\}$
03	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x^2, & 0\le x<\pi\end{cases}$	$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx+\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right)sen\,nx\right\}$
04	$f(x)=x+\pi,\quad -\pi<x<\pi$	$f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sen\,nx$
05	$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ sen\,x, & 0\le x<\pi\end{cases}$	$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}sen\,x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}\cos nx$
06	$f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<-1\\ -2, & -1\le x<0\\ 1, & 0<x<1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$	$f(x)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{n}sen\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x+\frac{3}{n}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)sen\frac{n\pi}{2}x\right\}$
07	$f(x)=\begin{cases}1, & -5<x<0\\ 1+x, & 0\le x<5\end{cases}$	$f(x)=\frac{9}{4}+5\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{5}x+\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}x\right\}$
08	$f(x)=e^x,\quad -\pi<x<\pi$	$f(x)=\frac{2senh\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\operatorname{sen} nx)\right]$

Determina si la función es PAR, IMPAR o ni una ni otra.

N.º	FUNCIONES DADAS	SOLUCIÓN
09	$f(x) = sen\,3x$	$impar$
10	$f(x) = x^2 + x$	$ni\ par\ ni\ impar$
11	$f(x) = e^{\lvert x\rvert}$	par
12	$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$	$impar$
13	$f(x) = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2$	$ni\ par\ ni\ impar$

Desarrolla cada función dada en una serie adecuada de cosenos o senos:

N.º	FUNCIONES DADAS	SOLUCIÓN
14	$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\leq x<\pi\end{cases}$	$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\,sen\,nx$
15	$f(x)=\lvert x\rvert, \quad -\pi<x<\pi$	$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$
16	$f(x)=x^2, \quad -1<x<1$	$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$
17	$f(x)=\pi^2-x^2, \quad -\pi<x<\pi$	$f(x)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$
18	$f(x)=\begin{cases}x-1, & -\pi<x<0\\ x+1, & 0\leq x<\pi\end{cases}$	$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n(1+\pi)}{n}\,sen\,nx$
19	$f(x)=\begin{cases}1, & -2<x<-1\\ -x, & -1\leq x<0\\ x, & 0\leq x<1\\ 1, & 1\leq x<2\end{cases}$	$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$
20	$f(x)=\lvert sen\,x\rvert, \quad -\pi<x<\pi$	$f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\cos nx$

Huancayo
Av. San Carlos 1980 - Huancayo
Teléfono: 064 - 481430

Lima
Jr. Junín 355 - Miraflores
Teléfono: 01 - 2132760

Cusco
Av. Collasuyo S/N Urb. Manuel Prado - Cusco
Teléfono: 084 - 480070

Arequipa
Calle Alfonso Ugarte 607 - Yanahuara
Oficina administrativa: Calle San José 308 2° piso - Cercado
Teléfono: 054 - 412030