Universidad Continental

Cálculo II

Manual Autoformativo Interactivo

Joel J. Bastidas Valdivia

MAI

Datos de catalogación bibliográfica

Cálculo II. Manual Autoformativo Interactivo
Joel J. Bastidas Valdivia
Primera edición

Huancayo, marzo de 2017

De esta edición
© Universidad Continental
Av. San Carlos 1980, Huancayo-Perú
Teléfono: (51 64) 481-430 anexo 7361
Correo electrónico: recursosucvirtual@continental.edu.pe
http://www.continental.edu.pe/

Versión e-book
Disponible en http://repositorio.continental.edu.pe/
ISBN electrónico N.° 978-612-4196-

Dirección: Emma Barrios Ipenza
Edición: Eliana Gallardo Echenique
Asistente de edición: Andrid Poma Acevedo
Asesoría didáctica: Karine Bernal Serna
Corrección de textos: Eliana Gallardo Echenique
Diseño y diagramación: Francisco Rosales Guerra

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o antiderivación; es muy común en la ingeniería y en la matemática en general y se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos de este último y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

La integral definida de una función representa el área limitada por la gráfica de la función, con signo positivo cuando la función toma valores positivos y negativo cuando toma valores negativos.

Las derivadas y las integrales tienen diferentes campos de aplicación, pero en este caso en particular, nos referiremos a los beneficios que se obtienen mediante el uso de las integrales.

Para llevar a cabo estas aplicaciones, nos valemos del uso de dos herramientas elementales:

* Las integrales definidas y

* El Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Los creadores del Análisis Infinitesimal introdujeron el Cálculo Integral, considerando los problemas inversos de sus cálculos. En la teoría de fluxiones de Newton la mutua inversibilidad de los problemas del cálculo de fluxiones y fluentes se evidenciaba claramente. Para Leibniz el problema era más complejo: la integral surgía inicialmente como definida. N.ºobstante, la integración se reducía prácticamente a la búsqueda de funciones primitivas. La idea de la integración indefinida fue inicialmente la dominante.

El Cálculo Integral incluía además de la integración de funciones, los problemas y la teoría de las ecuaciones diferenciales, el cálculo variacional, la teoría de funciones especiales, etc. Tal formulación general creció inusualmente rápido. Euler necesitó en los años 1768 y 1770 tres grandes volúmenes para dar una exposición sistemática de él.

Según Euler el Cálculo Integral constituía un método de búsqueda, dada la relación entre los diferenciales o la relación entre las propias cantidades. La operación con lo que esto se obtenía se denominaba integración. El concepto primario de tal Cálculo, por supuesto, era la integral indefinida. El propio Cálculo tenía el objetivo de elaborar métodos de búsqueda de las funciones primitivas para funciones de una clase lo más amplia posible.

Los logros principales en la construcción del Cálculo Integral inicialmente pertenecieron a J. Bernoulli y después a Euler, cuyo aporte fue inusitadamente grande. La integración llevada por este último hasta sus últimas consecuencias y las cuadraturas por él encontradas, todavía constituyen el marco de todos los cursos y tratados modernos sobre Cálculo Integral, cuyos textos actuales son sólo modificaciones de los tratados de Euler en lo relativo al lenguaje.

Principales objetivos a estudiar en el presente texto son:

* Integrales indefinidas

* Métodos de integración

* Integrales definidas

* Aplicaciones de la integral definida.

* Las integrales múltiples.

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

RESULTADO DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA

Al finalizar la asignatura, el estudiante será capaz de resolver problemas de cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos en revolución considerando los fundamentos de la integral indefinida, definida y múltiple en los diferentes campos de acción profesional.

UNIDADES DIDACTICAS:

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
La integral indefinida	La integral definida	Aplicaciones de la integral definida	Las integrales múltiples

TIEMPO MÍNIMO DE ESTUDIO:

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
1ra. y 2da. semana 16 horas	3ra. y 4ta. semana 16 horas	5ta. y 6ta. semana 16 horas	7ma. y 8va. semana 16 horas

UNIDAD I

"INTEGRALES INDEFINIDAS"

DIAGRAMA DE ORGANIZACIÓN DE LA UNIDAD I

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de explicar la solución de una integral Indefinida usando diferentes métodos de integración.

CONOCIMIENTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUD
Tema N°1:Integrales indefinidas 1 Antiderivadas o primitivas. 2 La integral indefinida definición y propiedades. **Tema N°2: Métodos de integración I** 1 Integración directa. 2 Integración por cambio de variable 2.1.1 Integración de las funciones logaritmo natural. 2.1.2 Integración de las funciones exponenciales. 3 Integración de funciones con trinomio cuadrado perfecto. 4 Integración por partes. **Lectura seleccionada 1: "Un poco de historia y el nacimiento del cálculo"** Engler A., Muller D., Vrancken S. & Hecklein M. (2005). El Cálculo Diferencial. Buenos Aires: Universidad Nacional del Litoral. **Tema N° 3: Métodos de integración II** 1 Integración de funciones trigonométricas. 2 Integración por sustituciones trigonométricas. 3 Integración mediante fracciones parciales. 4 Métodos para integrales binomiales y fórmulas de reducción. **Autoevaluación N° 1**	1. Calcula integrales inmediatas usando las reglas. Analiza las antiderivadas usando un sistema de coordenadas. Resuelve ejercicios de cálculo. Como una manera de afianzar sus conocimientos. 2. Aplica la integración por partes adecuadamente. Resuelve ejercicios de cálculo integral utilizando el método de integración por partes. **Actividad N° 1** Aplicación: "Integrándonos al turismo interno" Los contenidos de apoyo para el desarrollo de la actividad 1 pertenecen a los temas 1 y 2 de la semana 1. 3. Aplica las reglas de integración adecuadamente para funciones trigonométricas. 4. Aplica la integración para fracciones simples o parciales y otras técnicas de integración. **Actividad N° 2** Resuelve un conjunto de ejercicios respecto al tema 3 y 4.	Demuestra perseverancia para resolver los diferentes problemas del cálculo integral que se apliquen dentro del campo de acción de su profesión, mostrando interés por conocer los campos teóricos del cálculo integral.

RECURSOS:

Videos

Tema n° 1: Integrales Indefinidas
https://www.youtube.com/watch?v=Q1nRFIYIYbU
https://www.youtube.com/watch?v=BTmPllWJkd8

Tema n° 2: Métodos de Integración 1
https://www.youtube.com/watch?v=EXbU5RQ8lec
https://www.youtube.com/watch?v=O8AEgZ_i0WE
https://www.youtube.com/watch?v=BtjRozA77X4
https://www.youtube.com/watch?v=slafcLnIfFA
http://integrals.wolfram.com/index.jsp (Calculadora para integrar)

Tema n° 3: Métodos de Integración 2
https://www.youtube.com/watch?v=KtvGbmv-4Go
https://www.youtube.com/watch?v=gRSg-f1OFH8
https://www.youtube.com/watch?v=8W0eyd5Vhzg
https://www.youtube.com/watch?v=FKuNl8pL1Ms
https://www.youtube.com/watch?v=sIJtWkE-t3w
https://www.youtube.com/watch?v=cmq909Unsyw

Lectura seleccionada 1:

Un poco de historia y el nacimiento del cálculo (pp. 14-16).
Engler A., Muller D., Vrancken S. & Hecklein M. (2005). *El Cálculo Diferencial.* Buenos Aires: Universidad Nacional del Litoral.

TEMA N° 1:
INTEGRALES INDEFINIDAS

1. Antiderivadas o primitivas:

Suponer que se decide encontrar una función *F* cuya derivada es $f(x) = 3x^2$. Por lo que se sabe de derivadas es posible afirmar que:

$F(x) = x^3$ Porque $\dfrac{d}{dx}\left[x^3\right] = 3x^2$

La función *F* es una *antiderivada* de *f*.

Definición de una antiderivada o primitiva

Se dice que una función *F* es una antiderivada o primitiva de *f*. en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo *x* en *I*.

Nótese que *F* es una antiderivada de *f*, en vez de la antiderivada de *f*. Para entender por qué, observar que:

$F_1(x) = x^3{}_1 \quad F_2(x) = x^3 - 5, \quad y \quad F_3(x) = x^3 + 97$

Son todas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$.

De hecho, para cualquier constante *K*, la función dada por $F(x) = x^3 + K$ es una antiderivada de *f*.

> **TEOREMA 1: Representación de antiderivadas o primitivas**
> Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + K,$ para todo x en I, donde C es una constante.

2. La integral indefinida, definición y propiedades:

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$

Es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente: $dy = f(x)dx.$

La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina antiderivación (o integración indefinida) y se denota mediante un signo integral $\int$ La solución general se denota mediante:

$$\underbrace{y}_{\text{Integrando}} = \int (x)\overbrace{dx}^{\text{Variable de integración}} = F(x) + \overbrace{C}^{\text{Constante de integración}}.$$

La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la antiderivada o primitiva de f con respecto a *x*. De tal manera, la diferencial de *dx* sirve para identificar a *x* como la variable de integración. El término integral indefinida es sinónimo de antiderivada.

La naturaleza inversa de la integración y la derivación pude verificarse sustituyendo $F(x)$ por $f(x)$ en la definición de integración indefinida para obtener:

$\boxed{\int F'(x)dx = F(x)+K}$ La integración indefinida es la "inversa" de la derivación.

Además, si $\int f(x)dx = F(x)+C$ entonces

$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)}$ La derivación es la "inversa" de la integración indefinida.

Estas dos ecuaciones permiten obtener directamente fórmulas de integración a partir de fórmulas de derivación, como se muestra en el siguiente resumen.

Reglas básicas de integración y algunas propiedades de la integral indefinida

FÓRMULA DE DERIVACIÓN	FÓRMULA DE INTEGRACIÓN
$\frac{d}{dx}[C]=0$	$\int 0dx = C$
$\frac{d}{dx}[kx]=k$	$\int k\,dx = ck+C$
$\frac{d}{dx}[kf(x)]=kf'(x)$	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
$\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=f'(x)\pm g(x)$	$\int[f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \neq \int g(x)dx$
$\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq 1$
$\frac{d}{dx}[sen\,x]=\cos x$	$\int \cos x\,dx = sen\,x+C$
$\frac{d}{dx}[\cos x]=-sen\,x$	$\int sen\,x\,dx = \cos x+C$
$\frac{d}{dx}[\tan x]=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x+C$
$\frac{d}{dx}[\sec x]=\sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x+C$
$\frac{d}{dx}[cot\,x]=-cosec^2 x$	$\int cosec^2 x = -\cot x+C$
$\frac{d}{dx}[cosec\,x]=-cosec\,x.cot\,x$	$\int cosec\,x.\cot x = -\mathrm{cosec}x+C$

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=Q1nRFIYIYbU
https://www.youtube.com/watch?v=BTmPlIWJkd8

TEMA N° 2: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1. Integración directa:

En esta sección se calcula integrales indefinidas utilizando de manera directa las reglas básicas de integración presentadas en la sección anterior, en los siguientes ejemplos se muestra el procedimiento.

EJEMPLO 1: Aplicación de las reglas básicas de integración

Describir las antiderivadas o primitivas de 5x.

Solución:

$\int 5x\,dx = 5\int x\,dx$ Regla del múltiplo constante.

$= 5\int x^{-1}\,dx$ Rescribir x como x^2

$= 5\left(\frac{x^2}{2}\right) + K$ Regla de potencia (n = 1)

$= \frac{5}{2}x^2 + K$ Simplificar.

De tal manera, las antiderivadas o primitivas de 5x son de la forma $\frac{5}{2}x^2 + K$, donde K es cualquier constante.

Cuando se evalúan integrales indefinidas, una aplicación estricta de las reglas básicas de integración tiende a producir complicadas constantes de integración. En el caso del ejemplo 1 se podría haber escrito:

$$\int 5x\,dx = 5\int x\,dx = 5\left(\frac{x^2}{2} + K\right) = \frac{5}{2}x^2 + 5K.$$

Sin embargo, como *K* representa cualquier constante, es tanto problemático como innecesario escribir 5K como la constante de integración. De tal modo, $\frac{3}{2}x^2 + 3K$ se escribe en la forma más simple, $\frac{3}{2}x^2 + K.$

En el ejemplo 1, advertir que el patrón general de integración es similar al de la derivación.

INTEGRACIÓN ORIGINAL

Reescribir

Integrar

Simplificar

RESULTADO

Figura 1. Pasos para integrar
Fuente: En *Cálculo integral* (2da ed.), por Larson, Hostetler & Edwards, 2011, p.13.

EJEMPLO 2: Reescribir antes de integrar

INTEGRAL ORIGINAL	REESCRIBIR	INTEGRAR	SIMPLIFICAR
$a)\ \int \frac{1}{x^3}dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2}+K$	$-\frac{1}{2x^2}+K$
$b)\ \int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2}+K$	$\frac{2}{3}x^{3/2}+K$
$c)\ \int 2\,sen\,x\,dx$	$2\int sen\,x\,dx$	$2(-\cos x)+K$	$-2\cos x+K$

Recordar que, por simple derivación, puede comprobarse si una primitiva es correcta. Así, en el ejemplo 2b, para saber si la primitiva $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+K$ es correcta, basta con derivarla para obtener

$$D_x\left[\frac{2}{3}x^{3/2}+K\right]=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2}=\sqrt{x}$$

Usar la derivación para verificar la antiderivada.

Las reglas básicas de infracción listadas en la sección anterior permiten integrar cualquier función polinómica, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3: Integración de funciones polinómicas

$a)\ \int dx=\int 1dx$ Se entiende que el integrando es uno.

$=x+K$ Integrar.

$b)\ \int (x+2)dx=\int x\,dx+2\,dx$

$=\frac{x^2}{2}+K_1+2x+K_2$ Integrar.

$=\frac{x^2}{2}+2x+K$ $\quad K=K_1+K_2$

La segunda línea en la solución suele omitirse.

$c)\ \int (3x^4-5x^2+x)dx=3\left(\frac{x^5}{5}\right)-5\left(\frac{x^3}{3}\right)+\frac{x^2}{2}+K$ Integrar

$=\frac{3}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+K$ Simplificar

EJEMPLO 4: Reescribir antes de integrar

$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ Reescribir como dos fracciones

$$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2})dx$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + K$$ Reescribir con exponentes fraccionarios

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + K$$ Integrar

$$= -\sqrt{x}(x+3) + K$$ Simplificar

NOTA: Cuando se integren los cocientes, no deben integrarse numerador y denominador por separado. Esto es incorrecto tanto en la integración como en la derivación. Al respecto, obsérvese el ejemplo 4.

$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + K$ no es lo mismo que $\frac{\int (x+1)dx}{\int \sqrt{x}\,dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + K_1}{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + K_2}$

EJEMPLO 5: Reescribir antes de integrar

$$\int \frac{sen\,x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{sen\,x}{\cos x}\right)dx$$ Reescribir como un producto

$$= \int \sec x \tan x\, dx$$ Rescribir utilizando identidades trigonométricas

$$= \sec x + K$$ Integrar

Condiciones iniciales y soluciones particulares

Se ha visto que la ecuación $y = \int f(x)dx$ tiene muchas soluciones (cada una difiriendo de las otras en una constante). Eso significa que las gráficas de cualesquiera dos antiderivadas o primitivas de *f* son traslaciones verticales una de otra. Por ejemplo, la figura 2.2 muestra las gráficas de varias de las antiderivadas o primitivas de la forma.

$$y = \int (3x^3 - 1)dx = x^3 - x + K$$ Solución general

Para diversos valores enteros de *C*. Cada una de estas antiderivadas o primitivas es una solución de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

En muchas aplicaciones de la integración se da suficiente información para determinar una solución particular. Para hacer esto, sólo se necesita conocer el valor de $y = F(x)$ para un valor de x. Esta información recibe el nombre de condición inicial. Por ejemplo, en la figura 2.2 sólo una de las curvas pasa por el punto (2,4) Para encontrar esta curva, se utiliza la siguiente información.

$$F(x) = x^3 - x + K$$ Solución general

$$F(2) = 4$$ Condición inicial

Utilizando la condición inicial en la solución general, es posible determinar que $F(2) = 8 - 2 + K = 4,$ lo que implica que $K = -2$. De tal modo, se obtiene

$$F(x) = x^3 - x - 2$$ Solución particular

EJEMPLO 6: Solución de un problema de movimiento vertical

Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo a partir de una altura inicial de 80 pies.

a) Encontrar la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo *t*.

b) ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

Solución:

a) Considerar que t = 0 representa el tiempo inicial. Las dos condiciones iniciales indicadas pueden escribirse de la siguiente manera:

$s(0) = 80$ La altura inicial es 80 pies

$s'(0) = 64$ La velocidad inicial es de 64 pies por segundo

Utilizando – 32 pues/s^2 como la aceleración de la gravedad, se tiene:

$$s''(t) = -32$$

$$s'(t) = \int s''(t)dt = \int -32dt = -32t + C_1$$

Empleando la velocidad inicial, se obtiene s'(0) = 64 = –32(0) + C_1, lo cual implica que C_1 = 64. Después, integrando s'(*t*), se obtiene:

$$s(t) = \int s''(t)dt = \int (-32 + 64)dt = -16t^2 + 64t + C_2$$

Al utilizar la altura inicial se encuentra que

$$s(0) = 80 = -16(0\ \ ) + 64(0) + C$$

Lo que implica que C_2 = 80. De ese modo, la función posición es

$$s(t) = 16t^2 + 64t + 80$$

b) Utilizando la función posición que se encontró en el apartado a), es posible determinar el tiempo en que la pelota pega en el suelo al resolver la ecuación s(t) =0.

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80$$

$$-16(t + 1)(t - 5) = 0$$

$$t = -1, 5$$

Como *t* debe ser positiva, se puede concluir que la pelota golpea el suelo 5 segundos después de haber sido lanzada.

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=EXbU5RQ8lec

2. Integración por cambio de variable

Con un cambio de variable formal se puede reescribir por completo la integral en términos de *u* y du (o cualquier otra variable conveniente). Aunque este procedimiento puede implicar más pasos escritos que el reconocimiento de patrones ilustrado en los ejemplos 1 a 3, resulta útil para integrados complicados. La técnica del cambio de variable utiliza la notación de Leibniz para la diferencial. Eso es, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx,$ y la integral en el teorema 2.2 toma la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

EJEMPLO 1: Cambio de variable

Encontrar $\int \sqrt{2x-1}\, dx$

Solución: Primero, sea *u* la función interior $u = 2x-1$ Calcular después la diferencial du de manera que $du = 2dx$ Ahora, utilizando $\sqrt{2x-1} = \sqrt{u}\ \ y\ dx = du/2$, sustituir para obtener:

$\int \sqrt{2x-1}dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right)$ Integrar en términos de u

$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}du$ Regla del múltiplo constante

$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C$ Antiderivada en términos de

$= \frac{1}{3}u^{3/2} + C$ Simplificar

$= \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$ Antiderivada en términos de x

EJEMPLO 2: Cambio de variable

Encontrar $\int x\sqrt{2x-1}\, dx$

Solución: Como en el ejemplo previo, considerar que $u = 2x-1$ para obtener $dx = du/2$ Como el integrando contiene un factor de x se tiene que despejar x en términos de u, como se muestra:

$u = 2x-1 \Rightarrow x = (u-1)/2$ Resolver x en términos de u.

Después de esto, utilizando la sustitución, se obtiene:

$$\int x\sqrt{2x-1}\, dx = \int \left(\frac{u+1}{2}\right) u^{1/2} \left(\frac{du}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{10}(2x-1)^{3/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C$$

Para completar el cambio de variable en el ejemplo 5, debe resolverse para *x* en términos de *u*. Algunas veces esto es muy difícil. Por formula no siempre es necesario, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3: Cambio de variable

Determinar $\int sen^2 3x \cos 3x \, dx$

Solución Debido a que $sen^2 3x = (sen3x)^2$, podemos tomar $u = sen3x.$ Entonces:

$du = (\cos 3x)(3)dx$

Luego, debido a que $\cos 3x \, dx$ es parte de la integral original, puede escribirse:

$$\frac{du}{3} = \cos 3x \, dx$$

Sustituyendo u y $du/3$ en la integral original, se obtiene

$$\int sen^2 3x \cos 3x \, dx = \int u^2 \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^2 du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{9} sen^3 3x + C$$

Es posible verificar lo anterior derivando

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9} sen^3 3x\right] = \left(\frac{1}{9}\right)(3)(sen3x)^2(\cos 3x)(3)$$

$$= sen^2 3x \cos 3x$$

Como la derivación produce el integrando original, se ha obtenido la antiderivada o primitiva correcta.

Los pasos que se utilizan para la integración por sustitución se resumen en la siguiente guía.

Estrategia para realizar un cambio de variable

1. Elegir la sustitución $u = g(x)$. Usualmente es mejor elegir la parte interna de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $du = g'(x)dx$
3. Reescribir la integral resultante en términos de la variable u.
4. Encontrar la integral resultante en términos de u.
5. Reemplazar u por $g(x)$ para obtener una antiderivada o primitiva en términos de x.
6. Verificar la respuesta por derivación.

La regla general de las potencias para integrales

Una de las sustituciones *u* más comunes incluye cantidades en el integrando que se elevan a una potencia. Debido a la importancia de este tipo de sustitución, se le da un nombre especial: la regla general de las potencias para integrales. Una prueba de esta regla sigue directamente de la regla (simple) de las potencias para la integración, junto con el teorema 2.2.

TEOREMA 2: La regla general de las potencias para integrales

Si g es una función derivable de x, entonces: $\int [g(x)]^n g'(x)dx = \dfrac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

De manera equivalente, si $u = g(x)$, entonces: $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

EJEMPLO 4: Sustitución y regla general de las potencias

a) $\int 3(3x-1)^4 dx = \int \overbrace{(3x-1)^4}^{u^4} \overbrace{(3)dx}^{du} = \overbrace{\dfrac{(3x-11)^5}{5}}^{u^5/5} + C$ b) $\int (2x+1)(x^2+x)dx = \int \overbrace{(x^2+x)}^{u^1} \overbrace{(2x+1)dx}^{du} = \overbrace{\dfrac{(x^2+x)^2}{2}}^{u^2/2} - C$

c) $\int 3x^2\sqrt{x^3-2}dx = \int \overbrace{(x^2+2)^{1/2}}^{u^{1/2}} \overbrace{(3x^2)dx}^{du} = \overbrace{\dfrac{(x^3-2)^{3/2}}{3/2}}^{u^{3/2}/(3/2)} + C = \dfrac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C$

d) $\int \dfrac{-4x}{(1-2x^2)}dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}} \overbrace{(-4x)dx}^{du} = \overbrace{\dfrac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}}^{u^{-1}(-1)} + C - \dfrac{1}{1-2x^2} + C$

e) $\int \cos^2 xsen\ dx = -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2} \overbrace{(-sen\,x)dx}^{du} = -\overbrace{\dfrac{(\cos x)^3}{3}}^{u^3/3} + C$

Algunas integrales cuyos integrados incluyen cantidades elevadas a potencias no pueden determinarse mediante la regla general de las potencias. Considerar las dos integrales:

$$\int x(x^2+1)^2 dx \quad y \quad \int (x^2+1)^2\, dx$$

La sustitución $u = x^2 + 1$ funciona en la primera integral pero no en la segunda. En la segunda, la sustitución falla porque al integrando le falta el factor *x*necesario para formar du. Por fortuna, esta integral particular puede hacerse desarrollando el integrando como $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ y utilizando la regla (simple) de las potencias para integrar cada término.

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=O8AEgZ_i0WE

2.2.1 Integración de las funciones logaritmo natural.

Regla log para integración

Las reglas de derivación

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|x|\right] = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\left[\ln|u|\right] = \frac{u'}{u}$$

Que se estudiaron en la sección anterior producen las siguientes reglas de integración:

TEOREMA 2.5 Regla log para integración

Sea u una función derivable de x.

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ 2. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$

Como $du = u' dx$ la segunda fórmula puede expresarse como

$\int \frac{u'}{u} = dx = \ln|u| + C$ Forma alternativa para la regla log.

EJEMPLO 1: Uso de la regla log para integración-

$\int \frac{2}{x} dx = 2\int \frac{1}{x} dx$ Regla del múltiplo constante

$= 2\ln|x| + C$ Regla log para integración

$= \ln(x^2) + C$ Propiedad de los logaritmos

Como x^2 no puede ser negativo, el valor absoluto no es necesario en la formula final de la primitiva o antiderivada.

EJEMPLO 2 Uso de la regla log con cambio de variable

Hallar $\int \frac{1}{4x-1} dx$

Solución: Si se toma $u = 4x - 1,$ entonces $du = 4dx$

$\int \frac{1}{4x-1} dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{4x-1}\right) 4\, dx$ Multiplicar y dividir por 4

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u} du$ Sustituir $u = 4x - 1$

$= \frac{1}{4}\ln|u| + C$ Aplicar la regla log

$= \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$

En el ejemplo 3 usar la alternativa de la regla log. Para aplicar esta regla, buscar cocientes en los que el numerador sea la derivada del denominador.

EJEMPLO 3: Integración de cocientes para la regla log

a) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx = \ln|x^3 + x| + C$ $u = x^3 + x$

b) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = \ln|\tan x| + C$ $u = \tan x$

c) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x}dx \qquad u = x^2+2x$

$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x\right| + C$

d) $\int \frac{1}{3x+2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+2}dx \quad u = 3x+2$

$= \frac{1}{3}\ln\left|3x+2\right| + C$

Con antiderivadas o primitivas que contienen logaritmos es fácil obtener formas que hasta cierto punto se ven diferentes, pero que, sin embargo, son equivalentes. Por ejemplo, ¿cuáles de las siguientes son equivalentes a la antiderivada o primitiva en el ejemplo 3d?

$$\ln\left|(3x+2)^{1/3}\right| + C, \qquad \frac{1}{3}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right| + C, \qquad \ln\left|3x+2\right|^{1/3} + C$$

Las integrales a las que se aplica la regla log aparecen a menudo disfrazadas. Por ejemplo, si una función racional tiene el numerador de grado mayor o igual que el del denominador, una división puede revelar una forma a la que se pueda aplicar la regla log. Esto se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Dividir antes de integrar

Hallar $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}dx$

Solución: Primero se utiliza la división larga para rescribir el integrado.

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{x^2}{x^2+1}$$

Ahora, se puede integrar para obtener:.

$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}dx = \int\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$ Reescribir usando la división larga

$= \int dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ Reescribir como dos integrales

$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$ Integrar

Verificar este resultado por derivación para obtener el integrado original,

El siguiente ejemplo presenta otro caso en que el uso de la regla log está disfrazado. En este caso, un cambio de la variable ayuda a reconocer la regla log.

EJEMPLO 5: Cambio de variable con la regla log.

Hallar $\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$

Solución Si se toma $u = x+1$, entonces $du = dx$ y $x = u-1$

$\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{2(u-1)}{u^2}du$ Sustituir

$= 2\int \left(\frac{u}{u^2} - \frac{1}{u^2} \right) du$ Reescribir como dos fracciones

$= 2\int \frac{du}{u} - 2\int u^{-3} du$ Rescribir como dos integrales

$= 2\ln|u| - 2\left(\frac{u^{-1}}{-1} \right)$ Integrar

$= 2\ln|u| + \frac{2}{u} + C$ Simplificar

$= 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$ Sustitución regresiva

Comprobar este resultado por derivación para obtener el integrado original.

Al estudiar los métodos mostrados en los ejemplos 4 y 5, está claro que ambos involucran reescribir el integrado disfrazado ajustando a una o más fórmulas básicas de integración. En las próximas secciones del capítulo 2 se estudiarán ampliamente las técnicas de integración. Para dominar estas técnicas se requiere reconocer la naturaleza de "probar y error" de la integración. En este sentido, la integración no es tan directa como la derivación. La derivación se plantea así:

"He aquí la pregunta: ¿Cuál es la respuesta?

La integración viene a ser más bien:

"He aquí la respuesta: ¿Cuál es la pregunta?

Las siguientes son estrategias que se pueden usar para la integración:

Estrategias para la integración

1. Memorizar una lista básica de fórmulas de integración, (Incluyendo las dadas en esta sección, ya disponemos de 12 fórmulas: la regla de las potencias, la regla log y 10 reglas trigonométricas. Al final del capítulo 2 la lista se ampliará a 20 reglas básicas)
2. Buscar una fórmula de integración que se parezca total o parcialmente al integrado y, por pruebas y error, elegir una u que ajuste el integrando a la fórmula.
3. Si no se puede hallar una sustitución u adecuada, intentar transformar el integrando, mediante identidades trigonométricas, multiplicación y división por la misma cantidad, o suma y resta de una misma cantidad. Se requiere ingenio.
4. Si se tiene acceso a un software de computadora que resuelva antiderivadas, es conveniente usarlo.

EJEMPLO 6: Sustitución de u y la regla log.

Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln x}$

Solución: La solución se puede escribir como una integral indefinida $y = \int \frac{1}{x\ln x} dx$

Como el integrando es un cociente con denominador de potencia 1 se puede intentar utilizar la regla log. Hay tres formas posibles para u. La forma $u = x$ y $u = x\ln x$ no logra ajustarse a la forma u'/u de la regla log, pero sí la tercera forma. Haciendo $u = \ln x,\ u' = 1/x$ se obtiene lo siguiente.

$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1/x}{x \ln x} dx$ Dividir numerador y denominador entre x

$= \int \frac{1}{u} dx$ Sustituir $u = \ln x$

$= \ln|u| + C$ Aplicar regla log

$= \ln|\ln x| + C$ Sustitución regresiva

Por lo tanto, la solución es $y = \ln|\ln x| + C$

2.2.2 Integrales de funciones exponenciales.

Cada fórmula de derivación para exponenciales tiene su correspondiente fórmula de integración.

TEOREMA 3: Regla de integración para funciones exponenciales

Si u es una función derivable de x.

1. $\int e^x dx = e^x + C$
2. $\int e^u du = e^u + C$

EJEMPLO 1: Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\int e^{3x+1} dx$

Solución: si se hace $u = 3x+1$, entonces $du = 3dx$

$\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}(3)dx$ Multiplicar y dividir por 3.

$= \frac{1}{3}\int e^u du$ Sustituir $u = 3x+1$

$= \frac{1}{3} e^u du$ Aplicar la regla exponencial

$= \frac{e^{3x+1}}{3} + C$ Sustituir nuevamente

NOTA: En el ejemplo 10, el factor constante 3 se ha introducido para crear $du = 3dx$. Sin embargo, recordemos que no se puede introducir un factor variable faltante en el integrando. Por ejemplo:

$$\int e^{-x^2} dx \neq \frac{1}{x}\int e^{-x^2}(x\,dx)$$

EJEMPLO 2: Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\int 5xe^{-x^2} dx$

Solución: Si se tiene $u = -x^2$, entonces $du = -2x\,dx$ o $x\,dx = -du/2$

$\int 5xe^{-x^2} dx = \int 5e^{-x^2}(x\,dx)$ Reagrupar el integrando

$= \int 5e^{u}\left(-\frac{du}{2}\right)$ Sustituir $u = -x^2$

$= -\frac{5}{2}\int e^{u}du$ Regla del múltiplo constante

$= -\frac{5}{2}e^{u} + C$ Aplicar la regla exponencial

$= -\frac{5}{2}e^{-x^2} + C$ Sustitución regresiva

EJEMPLO 3: Integración de funciones exponenciales.

a) $$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -\int \overbrace{e^{1/2}}^{e^u}\overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx}^{du} \qquad u = \frac{1}{x}$$

b) $$\int sen\,x\,e^{\cos x}dx = -\int \overbrace{e^{\cos x}}^{e^u}\overbrace{(-senx\,dx)}^{du} \qquad u = \cos x$$

Fuente: En Cálculo integral (2da ed.), por Larson, Hostetler & Edwards, 2011.

3. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES CON TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

EJEMPLO 1: Integración de funciones con TCP.

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + 4} = \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + 1 + 3} = \int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x}+1)^2 + \sqrt{3}^2}$$ *Haciendo:* $u = x + 1$ *y* $du = 1dx$

Reemplazando:

$$\int \frac{du}{u^2 + \sqrt{3}^2}$$

Recordando:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}arc\tan\left(\frac{u}{a}\right)$$

Por lo tanto: $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x}+1)^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{arc\ tan}\left(\frac{\boldsymbol{x}+1}{\sqrt{3}}\right)$

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=slafcLnIfFA

4. INTEGRACIÓN POR PARTES:

En esta sección se estudiará una técnica importante de integración llamada integración por partes. Esta técnica puede aplicarse a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrados que contengan productos de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, la integración por partes funciona bien con integrales como.

$$\int x\ln x\, dx, \qquad \int x^2e^x\, dx \quad y \quad \int e^x senx\, dx$$

La integración por partes está basada en la fórmula para la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = uv' + vu'$$

Integrando se obtiene $uv = \int udv + \int vdu$

Volviendo a escribir esta ecuación se obtiene el teorema siguiente.

TEOREMA 4: Integración por partes
Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces: $\int udv = uv - \int vdu$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de *u* y *dv*, puede ser más fácil de evaluar la segunda integral que la original. Porque la elección de *u* y *dv* es importante en la integración por el proceso de partes, se proporcionan las pautas siguientes.

Estrategias para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.

2 Intentar tomar como *u* la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que *u*, y como dv el factor restante del integrado.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Encontrar $\int xe^x dx$

Solución Para aplicar la integración por partes es necesario escribir la integral en la forma $\int u\,dv$. Hay varias maneras de hacer esto.

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\underbrace{(e^x\,dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(e^x)}_{u}\underbrace{(x\,dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(1)}_{u}\underbrace{(xe^x\,dx)}_{dv}, \quad \int \underbrace{(xe^x)}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$$

Las estrategias de la página anterior hacen pensar en la elección de la primera opción porque la derivada de $u = x$ es simple que $x, y\, dv = e^x\, dx$ es la porción más complicada del integrando que se adapta a una fórmula básica de la integración.

$$dv = e^x\,dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$

$u = x \Rightarrow du = dx$

Ahora, la integración por partes:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ Fórmula de integración por partes

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$ Sustituir

$= xe^x - e^x + C$ Integrar

Para verificar esto, derivar $xe^x - e^x + C$ para ver que se obtiene el integrando original.

EJEMPLO 2 Integración por partes

Encontrar $\int x^2 \ln x\, dx$

Solución:

En este caso, x^2 se integra más fácil que In *x*. Además, la derivada de In x es más simple que In x. Así se debe hacer:

$$dv = x^2 dx$$
$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

La integración por partes produce:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ Fórmula de integración por partes

$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int\left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$ Sustitución

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$ Simplificar

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$ Integrar

Verificar este resultado derivando

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right] = \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

Una aplicación sorprendente de la integración por partes involucra integrados que constan de un solo factor, tales como $\int \ln x\,dx$ o $\int arc\,sen\,x.dx$ En estos casos hay que tomar $dv = dx,$ como se muestra en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 3: Integración sucesiva por partes

Encontrar $\int x^2 sen\,x\,dx$

Solución:

Los factores x^2 y $sen\,x$ son igualmente fáciles para integrar. Sin embargo la derivada de x^2 se vuelve más simple, considerando que la derivada de $sen\,x$ no lo es. Así que, se debe elegir la opción $u = x^2$

$$dv = sen\,x\,dx \Rightarrow v = \int senx\,dx = -\cos x$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\;dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int x^2 sen\,x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx$$ Primer uso de la integración por partes

Este primer uso de la integración por partes ha tenido éxito simplificando la integral original, pero la integral de la derecha todavía no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esa integral, aplicar de nuevo la integración por partes. Esta vez sea $u = 2x$

$$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \int \cos x\,dx = senx$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$

Ahora, la integración pro partes produce:

$$\int 2x\cos x\,dx = 2x\,sen\,x - \int 2\,sen\,x\,dx$$ Segundo uso de la integración por partes

$$= 2xsenx + 2\cos x + C$$

Combinando estos dos resultados se puede escribir:

$$\int x^2 sen\,x\,dx = -x^2\cos x + 2x\,sen\,x + 2\cos x + C$$

Al hacer aplicaciones repetidas de la integración por partes, tener cuidado de no intercambiar las sustituciones en las aplicaciones sucesivas. Así, en el ejemplo 4, la primera sustitución era $u = x^2\;\;y\;\;dv = senx\,dx.$ Si en la segunda aplicación se hubiera cambiado la sustitución a $u = \cos x\;\;y\;\;dv = 2x,$ se habría obtenido:

$$\int x^2 sen\,x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx$$

$$= -x^2\cos x + x^2\cos x + \int x^2 sen\,x\,dx$$

$$= \int x^2 sen\,x\;dx$$

Deshaciendo como consecuencia la integración anterior y volviendo a la integral original. Al hacer aplicaciones repetidas de integración por partes, también debe percatarse de la aparición de un múltiplo constante de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se usa la integración por partes para evaluar $\int e^x\cos 2x\;dx$ y también ocurre en el próximo ejemplo.

1. **Para integrales de la forma**

$$\int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n sen\, ax\; dx \quad o \quad \int x^n \cos ax\; dx$$

Sea $u = x^n \;\; y \;\; sea \;\; dv = e^{ax} dx \;\; sen\, ax\; dx \; o \; \cos ax\, dx$

2. **Para integrales de la forma**

$$\int x^n \ ln\ x\ dx, \quad \int x^n arc\ sen\ ax\ dx \quad o \int x^n \ arc\ tan\ ax\ dx$$

Sea

$u = \ln x,\;\; arcsen\; ax,\; o\; \arctan ax \;\; y \;\; sea \;\; dv = x^n dx$

3. **Para integrales de la forma**

$$\int e^{ax} sen\, bx\, dx \quad o \quad \int e^{ax} \cos bx\; dx$$

Sea $u = sen\, bx \; o \; \cos bx \;\; y \;\; sea \;\; dv = e^{ax} dx$

Figura 2. Resumen de integrales comunes utilizando integración por partes.

Método tabular

En problemas que contienen aplicaciones repetidas de la integración por partes, un método tabular, ilustrado en el ejemplo 6, puede ayudar para organizar el trabajo. Este método funciona bien para las integrales del tipo $\int x^n sen\, ax\, dx, \int x^n, \cos\ ax\, dx\; y \int x^n\, e^{ax} dx$

EJEMPLO 6 Uso del método tabular

Encontrar $\int x^2 sen\, 4x\, dx$

Solución: Empezar como de costumbre haciendo $u = x^2$ y $dv = v'\ \ dx = sen\, 4x\, dx$. Luego, crear una tabla de tres columnas, como se muestra.

Signos *Alternados*	u y sus *derivadas*	v' y sus *antiderivadas*
$+$ →	x^2	$sen\, 4x$
$-$ →	$2x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
$+$ →	2	$-\frac{1}{16} sen\, 4x$
$-$ →	0	$\frac{1}{64}\cos 4x$

Derivar hasta obtener una derivada nula.

La solución se obtiene sumando los productos con signo de las entradas diagonales.

$$\int x^2 sen 4x\, dx = -\frac{1}{4} x^2 \cos 4x + \frac{1}{8} x\, sen\, 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C$$

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=BtjRozA77X4

LECTURA SELECCIONADA N.º1:

Un poco de historia y el nacimiento del cálculo (pp. 14-16).

Engler A., Muller D., Vrancken S. & Hecklein M. (2005). *El cálculo diferencial. Buenos Aires, Argentina:* Universidad Nacional del Litoral.

El Cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad. Una vez construido, la historia de la matemática ya no fue igual: la geometría, el álgebra y la aritmética, la trigonometría, se colocaron en una nueva perspectiva teórica. Detrás de cualquier invento, descubrimiento o nueva teoría, existe, indudablemente, la evolución de ideas que hacen posible su nacimiento. Es muy interesante prestar atención en el bagaje de conocimientos que se acumula, desarrolla y evoluciona a través de los años para dar lugar, en algún momento en particular y a través de alguna persona en especial, al nacimiento de una nueva idea, de una nueva teoría, que seguramente se va a convertir en un descubrimiento importante para el estado actual de la ciencia y, por lo tanto merece el reconocimiento.

El Cálculo cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos. Una larga lista de personas trabajaron con los métodos “infinitesimales” pero hubo que esperar hasta el siglo XVII para tener la madurez social, científica y matemática que permitiría construir el Cálculo que utilizamos en nuestros días.

Sus aplicaciones son difíciles de cuantificar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia; y las diferentes partes del andamiaje matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

Newton y Leibniz son considerados los inventores del cálculo pero representan un eslabón en una larga cadena iniciada muchos siglos antes. Fueron ellos quienes dieron a los procedimientos infinitesimales de sus antecesores inmediatos, Barrow y Fermat, la unidad algorítmica y la precisión necesaria como método novedoso y de generalidad suficiente para su desarrollo posterior.

Estos desarrollos estuvieron elaborados a partir de visiones de hombres como Torricelli, Cavalieri, y Galileo; o Kepler, Valerio, y Stevin. Los alcances de las operaciones iniciales con infinitesimales que estos hombres lograron, fueron también resultado directo de las contribuciones de Oresme, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente el trabajo de estos últimos estuvo inspirado por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras.

Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada, debe reconocerse que una de las contribuciones previas decisivas fue la Geometría Analítica desarrollada independientemente por Descartes y Fermat.

Sin la contribución de éstos y de muchos otros hombres más, el cálculo de NewtonyLeibniz seguramente no existiría. Su construcción fue parte importante de la revolución científica que vivió la Europa del siglo XVII.Los nuevos métodos enfatizaron la experiencia empírica y la descripción matemática de nuestra relación con la realidad. La revolución científica supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente en Europa entre los siglos V y XV. Esta ruptura y salto en la historia del conocimiento estuvieron precedidos por las importantes transformaciones que se vivieron durante los siglos XV y XVI con el Renacimiento y la Reforma Protestante. El Cálculo Diferencial e Integral están en el corazón del tipo de conocimiento, cultura y de sociedad de la que, esencialmente, somos parte.

El extraordinario avance registrado por la matemática, la física y la técnica durante los siglos XVIII, XIX y XX, se lo debemos al Cálculo infinitesimal y por eso se puede considerar como una de las joyas de la creación intelectual de la que el hombre puede sentirse orgulloso.

EL SIGLO XVII Y LA DISPUTA POR LA CREACIÓN DEL CÁLCULO

En sus comienzos el cálculo fue desarrollado para estudiar cuatro problemas científicos y matemáticos:

- Encontrar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
- Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido.

En parte estos problemas fueron analizados por las mentes más brillantes de este siglo, concluyendo en la obra cumbre del filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz y el físico-matemático inglés Issac Newton: la creación del cálculo. Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes.

Los trabajos de Newton están motivados por sus propias investigaciones físicas (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que Leibniz conserva un carácter más geométrico y, diferenciándose de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y se anota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación dy). Lo que Newton llamó fluxión, para Leibniz fue un cociente de diferenciales (dy/dx).

N.ºresulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal son poco rigurosos. Se puede decir que el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas poco convincentes, y las diferenciales de Leibniz se presentan como entidades extrañas que, aunque se definen, no se comportan como incrementos. Esta falta de rigor, muy alejada del carácter perfeccionista de la época griega, fue muy usual en la época post-renacentista y duramente criticada.

Dos siglos pasaron hasta que las desprolijidades en los fundamentos del cálculo infinitesimal se solucionaron, y hoy aquel cálculo, potencialmente enriquecido, se muestra como uno de los más profundos hallazgos del razonamiento humano.

Resulta muy interesante la larga y lamentable polémica desatada a raíz de la prioridad en el descubrimiento. Al principio la disputa se realizó en el marco de la cortesía pero al cabo de tres décadas comenzó a ser ofensiva hasta que en el siglo XVIII se convirtieron en mutuas acusaciones de plagio. La polémica se tornó cada vez mayor y finalmente se convirtió en una rivalidad entre los matemáticos británicos y los continentales.

La discusión siguió hasta mucho después de la muerte de los dos grandes protagonistas y, afortunadamente, hoy ha perdido interés y la posteridad ha distribuido equitativamente las glorias. Hoy está claro que ambos descubrieron este cálculo en forma independiente y casi simultánea entre 1670 y 1677, aunque fueron publicados unos cuantos años más tarde.

La difusión de las nuevas ideas fue muy lenta y al principio sus aplicaciones escasas. Los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver con facilidad muchos problemas. Los nuevos logros fueron sometidos a severas críticas, la justificación y las explicaciones lógicas y rigurosas de los procedimientos empleados no se dieron hasta avanzado el siglo XIX, cuando aparecieron otros matemáticos, más preocupados por la presentación final de los métodos que por su utilización en la resolución de problemas concretos.

EL SIGLO XVIII

Durante buena parte del siglo los discípulos de Newton y Leibniz se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así, los hermanos Bernoulli inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés Monge la geometría descriptiva. Lagrange, también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrolló la teoría de grupos. Su contemporáneo Laplace escribió *Teoría analítica de las probabilidades* (1812) y el clásico *Mecánica celeste* (1799-1825), que le valió el sobrenombre de "el Newton francés".

Sin embargo el gran matemático del siglo fue el suizo Euler, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Euler escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas. El éxito de Euler y de otros matemáticos para resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sólo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo. La teoría de Newton se basó en la cinemática y las velocidades, la de Leibniz en los infinitésimos, y el tratamiento de Lagrange era completamente algebraica y basada en el concepto de las series infinitas. Todos estos sistemas eran inadecuados en comparación con el modelo lógico de la geometría griega, y este problema no fue resuelto hasta el siglo posterior.

A los matemáticos de fines del siglo el horizonte matemático les parecía obstruido. Se había llegado al estudio de cuestiones muy complicadas a las que nos se les conocía o veía un alcance claro. Los sabios sentían la necesidad de estudiar conceptos nuevos y hallar nuevos procedimientos.

EL SIGLO XX

Un problema importante fue definir el significado de la palabra función. Euler, Lagrange y el matemático francés Fourier aportaron soluciones, pero fue el matemático alemán Dirichlet quien propuso su definición en los términos actuales. En 1821, un matemático francés, Cauchy, consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo y se dedicó a dar una definición precisa de "función continua". Basó su visión del cálculo sólo en cantidades finitas y el concepto de límite. Esta solución planteó un nuevo problema, el de la definición lógica de número real.

Aunque la definición de cálculo de Cauchy estaba basada en este concepto, no fue él sino el matemático alemán Dedekind quien encontró una definición adecuada para los números reales. Los matemáticos alemanes Cantor y Weierstrass también dieron otras definiciones casi al mismo tiempo.

Además de fortalecer los fundamentos del análisis, nombre dado a partir de entonces a las técnicas del cálculo, se llevaron a cabo importantes avances en esta materia. Gauss, uno de los más importantes matemáticos de la historia, dio una explicación adecuada del concepto de número complejo; estos números formaron un nuevo y completo campo del análisis, desarrollado en los trabajos de Cauchy, Weierstrass y el matemático alemán Riemann.

Otro importante avance fue el estudio de las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas, herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas, hecho por Fourier. Cantor estudió los conjuntos infinitos y una aritmética de números infinitos. La teoría de Cantor fue considerada demasiado abstracta y criticada. Encontramos aquí un espíritu crítico en la elaboración de estas nociones tan ricas. Esto constituye un punto de vista muy diferente del que animaba a los matemáticos del siglo anterior. Ya no se trata de construir expresiones ni forjar nuevos métodos de cálculo, sino de analizar conceptos considerados hasta entonces intuitivos.

Gauss desarrolló la geometría no euclidiana pero tuvo miedo de la controversia que pudiera causar su publicación. También en este siglo se pasa del estudio simple de los polinomios al estudio de la estructura de sistemas algebraicos.

Los fundamentos de la matemática fueron completamente transformados durante el siglo XIX, sobre todo por el matemático inglés Boole en su libro *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854).

SIGLO XX Y NUESTROS DÍAS

Es importante el aporte realizado por Lebesgue referido a la integración y a la teoría de la medida y las modificaciones y generalizaciones realizadas por matemáticos que lo sucedieron.

En la Conferencia Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París en 1900, el matemático alemán David Hilbert, quien contribuyó de forma sustancial en casi todas las ramas de la matemática retomó veintitrés problemas matemáticos que él creía podrían ser las metas de la investigación matemática del siglo que recién comenzaba. Estos problemas fueron el estímulo de una gran parte de los trabajos matemáticos del siglo.

El avance originado por la invención del ordenador o computadora digital programable dio un gran impulso a ciertas ramas de la matemática, como el análisis numérico y las matemáticas finitas, y generó nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos. Se convirtió en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, las ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta. Además, el ordenador permitió encontrar la solución a varios problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente.

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando más rápido que nunca. Teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar teorías más completas y abstractas. Aunque la mayoría de los problemas más importantes han sido resueltos, otros siguen sin solución. Al mismo tiempo aparecen nuevos y estimulantes problemas y aún la matemática más abstracta encuentra aplicación.

CONCLUSIONES

El progreso de las ideas no se da en el tiempo a través de una trayectoria perfectamente delineada y preconcebida; existen muchos elementos que en la construcción son desechados, reformulados o agregados. Las concepciones filosóficas sobre la realidad, el papel de la ciencia, y en especial las concepciones sobre las características que debe reunir el conocimiento matemático para ser considerado como conocimiento científico, determinaron los enfoques realizados en cada época. El impacto que tuvieron los personajes y las contribuciones consignadas en la historia difícilmente puede ser comprendida cabalmente si estas consideraciones no se toman en cuenta.

ACTIVIDAD N°1

Aplicación: Los contenidos de apoyo para el desarrollo de la actividad 1 pertenecen a los temas 1 y 2 de la semana 1.

Integrándonos al turismo interno

Con la paulatina recuperación del turismo interno, las autoridades han visto la necesidad de construir nuevas carreteras, o mejorar la calidad de las existentes, para así brindar una mayor comodidad a los turistas nacionales y extranjeros.

Una de las rutas más transitadas para quienes desean desconectarse unos días del bullicio limeño, es la que conduce a las playas del sur. Las autoridades planean mejorar la condición de un tramo estratégico de la Panamericana Sur, la inversión se justificaría s i se cobra un peaje en dicho tramo.

Para saber cuanto se podría recaudar, se realiza un estudio de tráfico en un período de 24 horas. D urante cierto día y a determinadas horas se cuenta el número de vehículos que pasan por el lugar donde seconstruirá la estación de peaje en el lapso de un minuto, obteniéndose la siguiente información para el flujo de tráfico (φ):

$$\varphi = \frac{dN}{dt}$$

Donde N es el número de vehículos que pasan desde el inicio de la medición, hasta un tiempo t.

t (Hora de día)	0	3	5	7	8	9	12	15	18	20	23	24
φ (Vehículos / min.)	1	1	2	3	2	3	3	4	4	2	1	1

Se sabe que aproximadamente el 50% de vehículos que pasan son autos, el 30% camionetas y el 20% camiones.
Las tarifas en el mercado actual son:

Tipo de vehículo	Tarifa S/.
Automóviles	1,5
Camionetas	2
Camiones	4

Se quiere estimar lo que se recaudaría por peaje para esta ruta el día de la medición.

En papel milimetrado traza un eje de coordenadas cartesianas como te mostramos (eje x : tiempo en minutos, eje y : número de vehículos observados en un minuto)

Construye rectángulos con bases [0,3x60[, [3x60, 5x60[, [5x60, 7x60[, ... y alturas determinadas por el número de vehículos por minuto.

* Halla el área de estos rectángulos y súmalas. Obtendrás así una aproximación al área total bajo la verdadera función φ.
* Con este resultado, calcule qué cantidad de camiones, autos o camionetas fueron observados.
* Halla lo recaudado por peaje ese día.
* ¿Cómo extenderías el estudio para estimar lo que se recaudaría por peaje en un mes?
* ¿Qué otros factores crees que deberías considerar?

Fuente. Tori A. & Saal, C. (2000). *Matemática 2.* Lima, Perú: Editorial Metrocolor.

TEMA N° 3: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN II

1. Integración de funciones trigonométricas

En la sección 2.3 se estudiaron seis reglas de integración trigonométricas, las seis que corresponden directamente a reglas de derivación. Con la regla log se puede completar el conjunto de reglas básicas de integración trigonométricas.

EJEMPLO 1: Usando una identidad trigonométrica.

Hallar $\int \tan x\, dx$

Solución: Esta integral no parece adaptable a ninguna de las reglas básicas de la lista. Sin embargo, usando una identidad trigonométrica se tiene:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{sen\, x}{\cos x} dx$$

Sabiendo que $D_x[\cos x] = -sen\, x,$ tenemos $u = \cos x$ y escribimos

$\int \tan x\, dx = -\int \frac{-sen\, x}{\cos x} dx$ Identidad trigonométrica

$= -\int \frac{u'}{u} dx$ Sustituir $u = \cos x$

$= \ln|u| + C$ Aplicar regla de log.

$= -\ln|\cos x| + C$ Sustitución hacia atrás

En el ejemplo 7 se usó una identidad trigonométrica para derivar una regla de integración de la función tangente. En el siguiente ejemplo se efectúa a un paso algo inusual (multiplicar y dividir por una misma cantidad) para llegar a una fórmula de integración para la función secante.

EJEMPLO 2 Obtención de la fórmula para secante

Hallar $\int \sec x\, dx$

Solución: Considerar el siguiente procedimiento.

$$\int \sec x\, dx = \int sex\, x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

Tomando u como el denominador de este cociente se obtiene:

$$u = \sec x + \tan x \Rightarrow u' = \sec x \tan x + \sec^2 x$$

Así, se puede concluir que:

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \quad \text{Reescribir el integrando}$$

$$= \int \frac{u'}{u} dx \qquad \text{Sustituir } u = \sec x + \tan x$$

$$= \ln|u| + C \qquad \text{Aplicar regla de log}$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \text{Sustitución regresiva.}$$

Con los resultados de los ejemplos 7 y 8 se dispone de las fórmulas de integración de $sen\, x,\ \cos x,\ \tan x$ y $\sec x$ Las seis reglas trigonométricas se resumen a continuación.

Integrales de las seis funciones trigonométricas básicas

$\int sen\, u\, du = \cos u + C$	$\int \cos u\, du = \sec u + C$
$\int \tan u\ du = -\ln|\cos u| + C$	$\int \cot u\, du = \ln|sen\, u| + C$
$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$	$\int cosec\, u\, du = -ln|cosec\, u - \cot u| + C$

EJEMPLO 3: Integración de funciones trigonométricas.

Evaluar $\int \sqrt{1+\tan^2 x}\ dx$

Solución: Recordando que $1+\tan^2 x = \sec^2 x,$ para escribir

$$\int \sqrt{1+\tan^2 x}\ dx = \int \sqrt{\sec^2 x}\ dx$$
$$= \int \sec x\, dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x|$$

Integrales de funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 4: Una comparación de tres integrales diferentes

Encontrar cada integral

a) $\int \frac{4}{x^2+9} dx$ b) $\int \frac{4x}{x^2+9} dx$ c) $\int \frac{4x^2}{x^2+9} dx$

Solución:

a) Usar la regla del arcotangente y sea $u = x\ y\ a = 3$

$$\int \frac{4}{x^2+2} dx = 4\int \frac{1}{x^2+3^2} dx \quad \text{Regla del múltiplo constante}$$

$= 4\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C$ Regla del arcotangente

$= \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$ Simplificar

b) Aquí la regla del arcotangente no aplica porque el numerador contiene un factor de *x*. Considerar la regla log y sea $u = x^2 + 9$ Entonces $du = 2x\,dx$ y se tiene.

$\int \frac{4x}{x^2+9}dx = 2\int \frac{2x\,dx}{x^2+9}$ Regla del múltiplo constante

$= 2\int \frac{du}{u}$ Sustitución $u = x^2 + 9$

$= 2\ln|u| + C = 2\ln(x^2+9) + C$ Regla log.

c) Porque el grado del numerador es igual al grado del denominador se debe usar la división primero para volver a escribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y una función racional propia.

$\int \frac{4x^2}{x^2+9}dx = \int\left(4 - \frac{36}{x^2+9}\right)dx$ Reescribir usando la división grande

$= \int 4dx - 36\int \frac{1}{x^2+9}dx$ Escribir como dos integrales

$= 4x - 36\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C$ Integrar

$= 4x - 12\arctan\frac{x}{3} + C$ Simplificar

EJEMPLO 5: Una sustitución del tipo $a^2 - u^2$

Encontrar $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}dx$

Solución: Porque el radical en el denominador puede escribirse en la forma:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{4^2 - (x^3)^2}$$

Se puede probar la sustitución $u = x^3$. Entonces $du = 3x^2\,dx$ se obtiene:

$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{16-(x^3)^2}}$ Rescribir la integral

$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4^2-u^2}}$ Sustitución $u = x^3$

$= \frac{1}{3}arcsen\frac{u}{4} + C$ Regla del arcoseno

$= \frac{1}{3}arcsen\frac{x^3}{4} + C$ Reescribir como una función de *x*.

Sorprendente, dos de las reglas de la integración normalmente pasadas por alto son la regla log y la regla de las potencias. Notar en los próximos dos ejemplos cómo estas dos reglas de la integración pueden ocultarse.

EJEMPLO 6: Una forma disfrazada de la regla log.

Encontrar $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

Solución La integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, la forma del cociente hace pensar en la regla log. Si se expresa $u = 1 + e^x$, entonces $du = e^x\, dx$. Obtener el du requerido sumando y restando e^x en el numerador, como sigue:

$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx$ Sumar y restar e^x en el numerador

$= \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$ Reescribir como dos fracciones

$= \int dx - \int \frac{e^x dx}{1+e^x}$ Rescribir como dos integrales

Integral

$= x - \ln(1+e^x) + C$

NOTA: Hay más de una manera de resolver un problema de integración. Así, el ejemplo 15 demuestra que multiplicando el numerador y denominador por e^{-x} se obtiene una integral de la forma $-\int du/u.$ Ver si se puede conseguir la misma respuesta por este procedimiento (Tener cuidado: la respuesta aparecerá en una forma diferente.)

EJEMPLO 7: Una forma disfrazada de la regla de las potencias.

Encontrar $\int (\cot x)[\ln(senx)]dx$

Solución: De nuevo, la integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, considerando las dos opciones primarias par $u[u = \cot x \;\; y \;\; u = \ln(sen\, x)],$ se puede ver que la segunda opción es la apropiada porque;

$u = \ln(sen\, x)$ y $du = \frac{\cos x}{sen\, x} dx = \cot x\, dx$

Así,

$\int (\cot x)[\ln(sen\, x)]dx = \int u \;du$ Sustitución $u = \ln(sen\, x)$

$= \frac{u^2}{2} + C$ Integrar

$= \frac{1}{2}[\ln(sen\, x)]^2 + C$ Reescribir como una función de x.

NOTA: En el ejemplo 4, verificar que la derivada de $\frac{1}{2}[\ln(sen\, x)]^2 + C$

Es el integrando de la integral original.

Repaso de las reglas básicas de integración (a > ^{o})

1. $\int kf(u)du = k\int f(u)du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]du = \int f(u)du = \int f(u)du + \int g(u)dx$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int e^u du = e^u + C$
7. $\int \alpha^u du = \left(\frac{1}{\ln \alpha}\right)\alpha^u + C$
8. $\int sen\, u\ du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\, du = sen\, u + C$
10. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\int \cos u\, du = \ln|sen\, u| + C$
12. $\int sen\, u\, du = \tan u + C$
13. $\int cosec\, u\, du = -ln|cosec\, u - \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
15. $\int cosec^2 u\, du = \cot u$
16. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$
17. $\int cosec\, u.\cot u.du = cosec\, u + C$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen\frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc\sec\frac{|u|}{a} + C$

Pueden usarse a menudo las identidades trigonométricas para adaptar integrados a una de las reglas básicas de la integración.

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=KtvGbmv-4Go

https://www.youtube.com/watch?v=gRSg-f1OFH8

2. Integración por Sustituciones Trigonométricas.

EJEMPLO 1: Uso de identidades trigonométricas

Encontrar $\int \tan^2 2x\ dx$

Solución:

Notar que la $\tan^2 u$ no está en la lista de reglas básicas de integración. Sin embargo, $\sec^2 u$ está en la lista. Esto hace pensar en la identidad trigonométrica $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$. Si se hace $u = 2x$, entonces $du = 2dx$ y

$\int \tan^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \tan^2 u\, du$ Sustitución $u = 2x$

$=\frac{1}{2}\int(\sec^2 u-1)du$	Identidad trigonométrica
$=\frac{1}{2}\int\sec^2 u\,du-\frac{1}{2}\int du$	Rescribir como dos integrales
$=\frac{1}{2}\tan u-\frac{u}{2}+C$	Integrar
$=\frac{1}{2}\tan 2x-x+C$	Reescribir como una función de x.

Esta sección concluye con un resumen de los procedimientos comunes para adaptar los integrados a la regla básica de integración.

Procedimiento para adaptar los integrales a las reglas básicas

Técnica Ejemplo

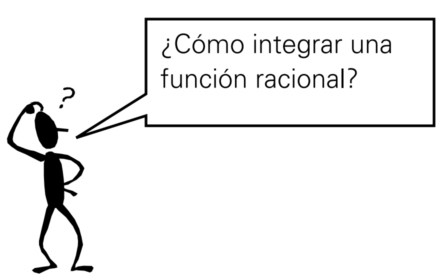
Desarrollar (el numerador)	$(1+e^x)^2=1+2e^x+e^{2x}$
Separar el numerador	$\frac{1+x}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}$
Completar el cuadrado	$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
Dividir la función racional impropia	$\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$
Sumar y restar términos en el numerador	$\frac{2x}{x^2+2x+1}=\frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}=\frac{2x+2}{x^2+2x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}$
Usar identidades trigonométricas	$\cot^2 x=\csc^2 x-1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico	$\frac{1}{1+sen\,x}=\left(\frac{1}{1+senx}\right)\left(\frac{1-senx}{1-senx}\right)=\frac{1-sen\,x}{1-sen^2 x}$ $=\frac{1-senx}{\cos^2 x}=\sec^2 x-\frac{senx}{\cos^2 x}$

NOTA: Recordar que se puede separar los numeradores pero no los denominadores. Se debe tener cuidado con este error común cuando se adapten los integrados a las reglas básicas.

$\frac{1}{x^2+1}\neq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1}$ N.°separar el denominador

3.3. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+2x+4}{x^4+3x^2+2x+1}$$



Respuesta: Expresándola como una suma de fracciones más simples, llamadas **FRACCIONES PARCIALES.**

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

DESCOMPOSICION EN FRACCIONES PARCIALES

Consideremos la función racional:

Es posible expresar f como una suma de fracciones más sencillas, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. Esa función racional se llama **propia.**

Si f es **impropia**; esto es, si **grado(P(x)) ≥ grado(Q(x))**, *debemos dividir Q entre P hasta obtener un residuo* tal que

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

El siguiente paso consiste en expresar la función racional propia R (x) / Q (x) como una suma de fracciones parciales, de la forma:

$$\frac{A}{(ax+b)^{i}}\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{j}}$$

o bien

CASOS DE DESCOMPOSICION EN FRACCIONES PARCIALES

CASO I: EL DENOMINADOR Q (X), ES UN PRODUCTO DE FACTORES LINEALES DISTINTOS.

$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_kx+b_k)$ Esto significa que podemos escribir:

En donde no hay factor que se repita. Es este caso, el teorema de las fracciones parciales establece que existen constantes, A_1, A_2 , ... A_k tales que

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}+\ldots+\frac{A_k}{(a_kx+b_k)}$$

$$\int\frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx$$

Ejercicios: Determine

1. $\displaystyle\int\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}dx$
2. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-4}dx$
3. (a_1x+b_1)

CASO II: Q (X) ES UN PRODUCTO DE FACTORES LINEALES, ALGUNOS DE LOS CUALES SE REPITEN

$(a_1x+b_1)^r$ Considere que el primer factor lineal se repite r veces; esto es, en la factorización de Q (x) se obtiene

$\dfrac{A_1}{(a_1x+b_1)}$ Entonces, en lugar del término único

Emplearíamos:

$$\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(a_rx+b_r)^r}$$

Ejemplo:

Resolver $\displaystyle\int \frac{2x^2+x-2}{x(x-1)^2}dx$

$$\frac{2x^2+x-2}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$ **Solución:**

$$2x^2+x-2=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

x = 1: C = 1 x = 0: A = -2 x = -1: B = 4

$$\frac{2x^2+x-2}{x(x-1)^2}=\frac{-2}{x}+\frac{4}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int\frac{2x^2+x-2}{x(x-1)^2}dx=\int\frac{-2}{x}dx+\int\frac{4}{(x-1)}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx$$ Integrando

$$\int\frac{2x^2+x-2}{x(x-1)^2}dx=-2\ln|x|+\frac{4}{\ln|x-1|}-\frac{1}{(x-1)}$$

Ejercicios: Determine

1. $\displaystyle\int\frac{x^2-4x-1}{x(x-1)}dx$
2. $\displaystyle\int\frac{x^3-x^2}{(x-6)(5x+3)^3}dx$
3. $\displaystyle\int\frac{x^2+3x-4}{(2x-1)^2(2x+3)}dx$

CASO III: Q (X) CONTIENE FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES, NINGUNO DE LOS CUALES SE REPITE

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$ Si Q (x) tiene el factor ax^2 + b x + c, en donde b^2-4ac<0, entonces la expresión R (x) / Q (x)

tendrá un término de la forma:

Ejemplo:

Resolver $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

Solución:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1)$$

De la anterior igualdad:

A = C = 0 ; B = 1/3 ; D = -1/3

$$\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+4}$$

Integrando

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x^2+1}dx + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+4}dx = \frac{1}{3}a\tan(x) - \frac{1}{6}a\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

OBSERVACIÓN: CASO PARTICULAR

$$\frac{D}{ax^2+bx+c}$$

El término se puede integrar completando el cuadrado y con la fórmula (tabla)

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}a\tan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=8W0eyd5Vhzg

https://www.youtube.com/watch?v=FKuNl8pL1Ms

$$\int \frac{x^2-2}{x(x^2+2)}dx$$

Ejercicios: Determine

$$\int \mathrm{x}^{\mathrm{m}}\left(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{p}}\mathrm{dx}$$

1. $\int \frac{dx}{(x^6-x^3)}$ 2.

Fuente: *En Cálculo integral* (2da ed.), por Larson, Hostetler & Edwards, 2011.

3.4. Método para integrales binomiales y fórmulas de reducción.

Son de la forma $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ donde m, n, p ∈ **Q.** Pueden ocurrir los casos siguientes:

1. Si p ∈ Z ⇒ $\begin{cases} p>0: & \text{Desarrollar por el binimio de Newton.} \\ p<0: & \text{Cambio} \Rightarrow x=t^{\alpha}, \text{ siendo } \alpha \text{ el m.c.m.} \\ & \text{de los denominadores de } m \text{ y } n. \end{cases}$

   De este modo se reduce el problema a una integral racional.

2. Si $\left[\dfrac{m+1}{n}\right] \in Z \Rightarrow \text{Cambio}: a+bx^n = t^{\alpha}, \text{ siendo } \alpha \text{ el denominador de } p.$

3. Si $\left[\dfrac{m+1}{n}+p\right] \in Z \Rightarrow \begin{cases} \text{Cambio}: a+bx^n = t^{\alpha}.x^n, \text{ siendo } \alpha \text{ el denominador} \\ \text{de } p. \end{cases}$

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=sIJtWkE-t3w

https://www.youtube.com/watch?v=cmq909Unsyw

ACTIVIDAD N° 2

Resuelve un conjunto de ejercicios respecto al tema 3 y 4.

INSTRUCCIONES

Le dejamos algunos ejercicios, a modo de complemento, con el objeto de que pueda reafirmar los conocimientos adquiridos.

¿Cómo podría verificar sus resultados? Pues muy fácilmente, si usted calcula la derivada de las respuestas que obtiene… debe llegar a la pregunta del ejercicio!

1. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\int 5x^7 dx$

   b) $\int 7x^9 dx$

   c) $\int 3x^2.x^3\, dx$

   d) $\int 9x^6 : x^2\, dx$

   e) $\int 4(x^2)^3\, dx$

   f) $\int 12(x^8)^{\frac{1}{2}}\, dx$

2. Calcule las siguientes integrales desarrollando los integrados:

a) $\int (x+1)^2 dx$

b) $\int (x-1)^2 dx$

c) $\int x(x-1)^2 dx$

d) $\int x^6(x^2+1)^3 dx$

e) $\int (x+1)^3 dx$

f) $\int (x-1)^3 dx$

3. Calcule las siguientes integrales potenciales imples cuyo exponente es un número negativo.

a) $\int x^{-7}\, dx$

b) $\int x^{-9} dx$

c) $\int x^2 - x^{-3}\, dx$

d) $\int x^6 : x^{-2}\, dx$

e) $\int \left(x^{-2}\right)^3 dx$

f) $\int \left(x^{-8}\right)^{\frac{1}{2}} dx$

g) $\int \frac{1}{x^2} dx$

h) $\int \frac{x^{-5}}{x^3} dx$

4. Calcule las siguientes integrales potenciales simples cuyo exponente es un número racional.

a) $\int x^{\frac{2}{3}}\, dx$

b) $\int x^{\frac{-2}{3}}\, dx$

c) $\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$

d) $\int x . x^{\frac{2}{3}}\, dx$

e) $\int \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} dx$

f) $\int \frac{x^{2/3}}{x^{-1/3}} dx$

5. Calcule las siguientes integrales potenciales simples cuyos integrados están escritos en forma radical. Pasa primero a formar potencial:

a) $\int \sqrt{x}\, dx$

b) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

c) $\int x\sqrt{x}\, dx$

d) $\int \sqrt{x}\,.\sqrt[3]{x}\, dx$

e) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

f) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{x}}\, dx$

h) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

i) $\int \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\, dx$

j) $\int \sqrt[3]{\sqrt{x}}\, dx$

6. Calcule las siguientes funciones potenciales compuestas. Piensa que es f y f'

a) $\int (x+1)^2 dx$

b) $\int (7x+5)^2\, dx$

c) $\int (x^2+1).2x\, dx$

d) $\int (x^3+1).2x^2\, dx$

f) $\int x^2(x^3+2)\, dx$

h) $\int (16x+1)(8x^2+x-5)\, dx$

7. Los integrados son funciones racionales; antes de integrar pásalos a la forma potencial.

a) $\int \frac{1}{(2x+1)^2} dx$

b) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+2x+1} dx$

d) $\int \frac{1}{x^3+3x^2+3x+1} dx$

e) $\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$

f) $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^7} dx$

8. En las siguientes integrales aparecen radicales; exprésalos en forma potencial antes de integrar.

a) $\sqrt{1+x}\,dx$

b) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

c) $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}dx$

e) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

9. Calcule las siguientes integrales de tipo logarítmico.

a) $\int \frac{1}{3x+5}dx$

b) $\int \frac{3}{ax+b}dx$

c) $\int \frac{x^2}{x^3+2}dx$

d) $\int \frac{2x^2}{6x^3+1}dx$

10. Calcule las siguientes integrales de tipo logarítmico.

a) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

b) $\int \frac{senx-\cos x}{senx+\cos x}dx$

c) $\int \frac{1}{x\,Lx}dx$

d) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}dx$

11. Calcule las siguientes integrales de tipo exponencial.

a) $\int e^{-x}\,dx$

b) $\int e^{2x}\,dx$

c) $\int e^{-2x}\,dx$

d) $\int e^{2x+1}\,dx$

e) $\int e^{-x^2}.x\,dx$

f) $\int e^{x^3+1}.x^2\,dx$

12. Calcule las siguientes integrales de tipo exponencial.

a) $\int e^{senx} \cos x \, dx$

b) $\int \frac{e^{Lx}}{x} dx$

c) $\int \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

d) $\int \left(6^x\right)^2 dx$

e) $\int \frac{e^{arcsen\, x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

f) $\int 5^x.7^x \, dx$

13. Calcule las siguientes integrales de tipo seno. Observa que son formas compuestas:

a) $\int \cos(x+1)\, dx$

b) $\int \cos(2x+5)\, dx$

c) $\int x \cos x^2 \, dx$

d) $\int 2x \cos(x^2+2)\, dx$

e) $\int \frac{\cos Lx}{x} dx$

f) $\int \frac{\cos(\tan x)}{cos^2 x} dx$

14. Calcule las siguientes integrales de tipo coseno.

a) $\int \frac{sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$

b) $\int \frac{senLx}{x} dx$

c) $\int \frac{senLx}{2x} dx$

d) $\int \frac{sen(\arctan x)}{1+x^2} dx$

15. Calcule las siguientes integrales de tipo tangente.

a) $\int \sec^2 \frac{x}{3} dx$

b) $\int 3\sec^2(2x+6)\, dx$

c) $\int x \sec^2 x^2 \, dx$

16. Calcule las siguientes integrales e tipo arco tangente.

a) $\int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx$

b) $\int \frac{1}{1+(3x+27)} dx$

c) $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$

d) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

e) $\int \frac{sec^2 x}{1+tan^2 x} dx$

f) $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx$

17. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int xe^x \; dx$

b) $\int x\, Lx \; dx$

c) $\int x^2 sen\, x \; dx$

d) $\int x^2 \cos x \; dx$

18. Integra las siguientes funciones racionales directamente.

a) $\int \frac{x-1}{x^2-2x-6} dx$

b) $\int \frac{x+1}{x^2+x-6} dx$

c) $\int \frac{2x^2-8x-1}{2x^2-7x+3} dx$

d) $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx$

19. ¿Cuánto ha de valer k para que la función $f(x) = ke^{5x}$ sea derivada de la función $F(x) = e^{5x}$?

20. Hallar la función que tome en x = 1 el valor 2 y que tenga por derivada la función $f(x) = 12x^2 + 6$.

GLOSARIO

A

Antiderivada: Una función $F(x)$ es un a Antiderivada de $f(x)$, si la derivada de $F(x)$ es igual a $f(x)$. Matemáticamente:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

Observe que la Antiderivada de $f(x)$ se denota por: $F(x) = \int f(x)$

Si $y = F(x)$ es una Antiderivada de la función $y = f(x)$, también lo es $y = F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera.

C

Cálculo: Rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las cantidades que varian continuamente y las relaciones entre ellas.

En el cálculo se estudian los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral y sus aplicaciones.

El cálculo también se denomina Cálculo infinitesimal.

D

Derivada: Dada una función f, la derivada de dicha función en un punto xo de su dominio es el límite, si existe:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

El valor de la derivada $f'(x_0)$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva y=f(x) en $(x_0, f(x_0))$.

I

Infinitesimal: Un infinitesimal o un infinitésimo, es una cantidad infinitamente pequeña. Puedes construir un infinitesimal considerando el intervalo $(0;1)$ en el eje real. Divide este intervalo en n partes iguales. Cuando el valor de n es infinito, cada uno de los subintervalos tiene una longitud.

Integral: En cálculo, una integral es el resultado de la integración de una función.

El símbolo de integral es una s alargada y la expresión $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Se lee: *La integral de la función $f(x)$ respecto de x es igual a la función $F(x)$ más una constante.*

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD I

BÁSICA

Larson, R. & Bruce, E. (2016). *Cálculo* (10 ed.). México, D.F.: Cengage Learning.

COMPLEMENTARIA

Espinoza, R. E. (2004). *Análisis Matemático II.* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Espinoza, R. E. (2004).*Análisis Matemático IV.* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Kreyszig, E**.** (2000). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (3ra ed.). México D.F.: Limusa S.A.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Bruce, E. (2011). *Cálculo Integral–Matemática 2.* México D.F.: Mc Graw Hill.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Bruce, E. (2011). *Cálculo Esencial*. México D.F.: Cengage Learning.

Leithold, L. (1998). *El Calculo.* México: Oxford.

Stewart, J. (2008). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (6ta ed.). México D.F.: Cengage Learning.

Zill D.G. & Wrigth W.S. (2011). *Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas*. México D.F.: Mc Graw Hill.

AUTOEVALUACIÓN N.º 1

Estimado participante, es el momento de verificar su aprendizaje de los temas tratados en esta unidad. Actúe con la máxima responsabilidad y seriedad. Haga el mayor esfuerzo por desarrollar los ejercicios en el tiempo estimado.

1. Lea con atención las siguientes afirmaciones. Si la proposición es verdadera escriba (V), si la proposición es falsa escriba (F), luego marque la alternativa que estime correcta.

   i) El proceso de integración consiste en hallar antiderivadas……... ( )

   ii) La solución de una integral indefinida es única…….………………. ( )

   iii) La integral $\int f'(8x).dx \ es \ f(8x)$ ……………..……………………... ( )

   iv) El método de integración por partes se obtiene a partir de la regla del cociente para diferenciación ……………………………………………( )

   A) FFFV

   B) VFFF

   C) VFFV

   D) VVFF

   E) FFVV

2. Al resolver la integral

   $$I = \int sec^5 x.dx$$

   Mediante una integración por partes el valor de "v" es:

   A) $sec^3x.dx$

   B) tan^2x

   C) $sec^2x.dx$

   D) tanx

   E) secx

3. Evaluar

   $$I = \int \sqrt{\tan x}.sec^2 x.dx$$

   $$\frac{2}{3}tan^{3/2}x + \frac{7}{2}tan^{7/2}x + C$$

$\frac{3}{2}tan^{3/2}x+\frac{7}{2}tan^{7/2}x+C$

$\frac{2}{3}tan^{3/2}x+\frac{2}{7}tan^{7/2}x+C$

$\frac{2}{7}tan^{3/2}x+\frac{2}{3}tan^{7/2}x+C$

$\frac{2}{3}tan^{7/2}x-\frac{2}{7}tan^{7/2}x+C$

4. Al evaluar la integral

$$I=\int\frac{x-3}{5-4x-x^2}.dx$$

Por el método de integración de un trinomio cuadrado perfecto el numerador de la fracción es equivalente a:

$\frac{1}{2}(4-2x)+5$

$-\frac{1}{2}(-4-2x)-5$

$\frac{1}{2}(-4-2x)-5$

$\frac{3}{2}(-4-x)+5$

$\frac{1}{2}(-4-2x)+7$

5. Al evaluar la integral

$$I=\int\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx$$

Mediante fracciones parciales, implica tener

A) 4 fracciones

B) 3 fracciones

C) 2 fracciones

D) 6 fracciones

E) 5 fracciones

6. Calcule: $\int \frac{dx}{sen2x.\cos 2x}$

A) $\frac{1}{2}ln\left|\tan 2x\right|$

$ln\left|\tan 2x\right|+C$

B) $\frac{1}{2}ln\left|\tan x\right|+C$

C) $\frac{1}{4}ln\left|\cot 2x\right|+C$

D) $ln\left|\text{sen}2x\right|+C$

7. Calcule: $\int \frac{(1+x)^2dx}{x(1+x^2)}$

A) $2\,\text{arc}\,senx+\ln x+C$

B) $\arctan x+\ln 2x+C$

C) $2\arctan x$

D) $\arctan x+\frac{1}{2}\ln x+C$

E) $2\arctan x+\ln x+C$

8. Calcule: $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

A) $\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

B) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

C) $\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x+1}+C$

D) $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+C$

E) $\sqrt{(x-1)^3}-\frac{4}{5}\sqrt{x+1}+C$

UNIDAD II

“LA INTEGRAL DEFINIDA”

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD II

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de explicar la solución de una Integral Definida usando diferentes métodos de integración.

CONOCIMIENTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUD
Tema N° 1: La integral definida. 1 Sumas de Rieman y la integral definida. **Tema N° 2: Teorema del valor medio para integrales.** 1 Teorema del valor medio para integrales. 2 Segundo teorema fundamental del cálculo. **Tema N° 3: Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo** 1 Cambio de variable para integrales definidas. 2 Integración por partes para integrales definidas. 3 Integración por Sustituciones trigonométricas para integrales definidas. 4 Integración mediante fracciones parciales para integrales definidas.	1. Aplica las sumas de Reimann para definir la integral definida 2. Reconoce el teorema fundamental del cálculo y teorema del valor medio y las aplica en la resolución de problemas. **Actividad N°1** • Aplicación: "Descarga de un río" 3. Aplica el teorema fundamental del cálculo. Aplica el cambio de variable adecuado en integrales definidas. Aplica la integración por partes adecuado en integrales definidas. **Actividad N°2** • Aplicación: "Puntos de Equilibrio" **Tarea Académica N° 1** Prueba escrita. (De desarrollo) sobre los temas de las semanas 3 y 4.	• Demuestra perseverancia para resolver los diferentes problemas del cálculo integral que se apliquen dentro del campo de acción de su profesión, mostrando interés por conocer los campos teóricos del cálculo integral.

RECURSOS:

Videos:

Integrales Definidas

https://www.youtube.com/watch?v=ky6xZkWiduU

https://www.youtube.com/watch?v=rr2Mm9RxNxU

https://www.youtube.com/watch?v=Z-3Bv7sZA_Y

https://www.youtube.com/watch?v=7_V4XqWFmPg

Aplicación del teorema fundamental del cálculo.

https://www.youtube.com/watch?v=pxUFj0ICOrY

https://www.youtube.com/watch?v=Sv5aHxXP95s

https://www.youtube.com/watch?v=lYhrpYlvWg8

Diapositivas elaboradas por el docente:

Lectura complementaria:

Lectura seleccionada 1: "Área"

Fuente: Larson R. Hostetler R. Edwards B. (2009).

Cálculo integral. México D.F.: Editorial Mc Graw Hill. Pág. 86.

TEMA N° 1:
LA INTEGRAL DEFINIDA

1.1 Sumas de Rieman y la integral definida:

Para definir la integral definida, considera el siguiente límite.

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

Afirmar que este límite existe significa que para $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición con $\|\Delta\| <$ se sigue que:

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i < \varepsilon \right|$$

(Esto debe ser cierto par cualquier elección de c_i en el i-ésimosubintervalo de Δ)

Definición de una integral definida

Si *f* se define en el intervalo cerrado $[a,b]$ y el límite

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Existe (como se describió antes), entonces *f* es integrable en $[a,b]$ y el límite se denota por:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

El límite recibe el nombre de integral definida de *f* de *aab*. El número a es el límite inferior de integración, y el número b es el límite superior de integración.

No es coincidencia que la notación para las integrales definidas sea similar a la que se utilizó para las integrales indefinidas. Se verá la razón en la siguiente sección cuando se introduzca el teorema fundamental del cálculo. Por ahora es importante observar que las integrales definidas y las integrales indefinidas son identidades diferentes. Una integral definida es un número, en tanto que una integral indefinida es una familia de funciones.

Una condición suficiente para que una función *f* sea integrable en $[a,b]$ es que sea continua en $[a,b]$. Una demostración de este teorema está más allá del objetivo de este texto.

TEOREMA 5: La continuidad implica integrabilidad

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$

EJEMPLO 2: Evaluación de una integral definida como límite

Hallar la integral definida $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$

Solución: La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2,1]$ porque es continua en $[-2,1]$ Además, la definición de integrabilidad implica que cualquier partición cuya norma tienda a 0 puede utilizarse para determinar el límite. Por conveniencia computacional, definir Δ, subdividiendo $[-2,1]$ en n subintervalos de la misma anchura.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, se obtiene:

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2\frac{3i}{n}$$

De este modo, la integral definida está dada por:

$$\int_{-2}^{1} 2x\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2+\frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{3i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left\{-2n+\frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-12+9+\frac{9}{n}\right)$$

$$= -3$$

Debido a que la integral definida en el ejemplo 2 es negativa, ésta no representa el área de la región que se muestra en la figura 3.17. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o cero. Para que una integral definida sea interpretada como un área (como se definió en la sección 3.1) la función *f* debe ser continua y no negativa en $[a,b]$, como se establece en el siguiente teorema. (La demostración de este teorema es directa: utilizar simplemente la definición de área en la sección 3.1)

TEOREMA 6: La integral definida como área de una región

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y las rectas verticales x = a y x = b está dada por:

$$Área = \int_a^b f(x)\,dx$$

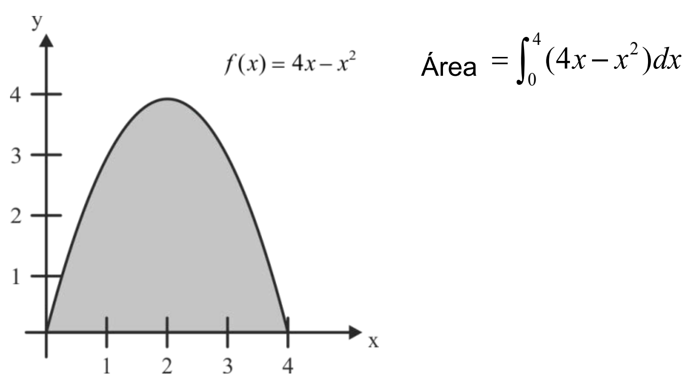


Figura 3. Área
Fuente: En *Cálculo integral* (2da ed.), por Larson, Hostetler & Edwards, 2011, p. 100.

Como en el teorema 3.4, considerar la región delimitada por la gráfica de $f(x) = 4x - x^2$ y el eje *x*, como se muestra en la figura 2.1, debido a que *f* es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[0,4]$, el área de la región es

$$Área = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

Una técnica directa para hallar una integral definida como ésta se analizará en la sección 3.3. Por ahora se puede calcular una integral definida de dos maneras: usando la definición en términos de límites o verificando si la integral definida representa el área de una región geométrica común, tal como un rectángulo, triángulo o semicírculo.

EJEMPLO 3: Áreas de figuras geométricas comunes

Dibujar la región correspondiente a cada integral definida. Evaluar después cada integral utilizando una fórmula geométrica.

a) $\int_1^3 4\,dx$ b) $\int_0^3 (x+2)dx$ c) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

Solución: Un dibujo de cada región se muestra en la figura 3.20.

a) Esta región es un rectángulo de 4 de alto por 2 de ancho.

$$\int_1^3 4dx = (Área\ del\ rectángulo) = 4(2) = 8$$

b) Esta región es un trapezoide con una altura de 3 y bases paralelas de longitudes 2 y 5. La fórmula para el área de un trapezoide es $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

$$\int_0^3 (x+2)dx = (Área\ del\ trapecio) = \frac{1}{2}(3)(2+5) = \frac{21}{2}$$

c) Esta región es un semicírculo de radio 2. La fórmula para el área de un semicírculo es $\frac{1}{2}\pi r^2$.

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4.-x^2}\,dx = (\acute{A}rea\ del\ semic\acute{\imath}rculo) = \frac{1}{2}\pi(2^2) = 2\pi$$

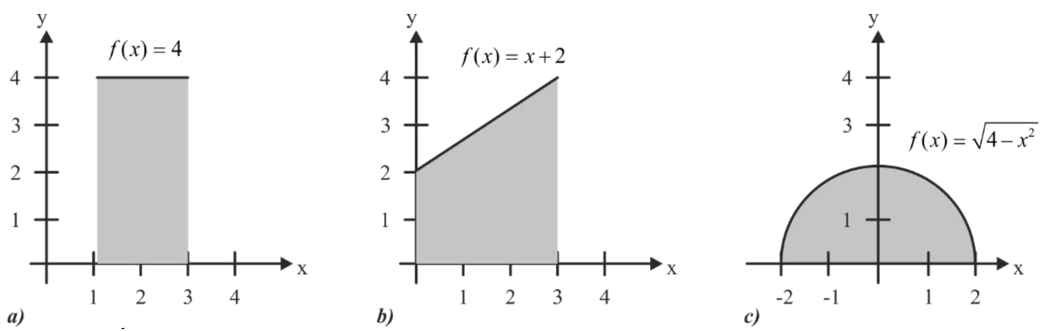


Figura 4. Área
Fuente: En *Cálculo integral* (2da ed.), por Larson, Hostetler & Edwards, 2011, p. 1000.

Propiedades de las integrales definidas

La definición de la integral definida de *f* en el intervalo $[a,b]$ especifica que *a*<*b*. Ahora, es conveniente, sin embargo, extender la definición para cubrir casos en los cuales *a* = *b* y *a*>*b*, Geométricamente, las siguientes dos definiciones parecen razonables. Por ejemplo, tiene sentido definir el área de una región de ancho cero y altura finita igual a 0.

Definiciones de dos integrales espaciales

1. Si *f* está definida en *x* = *a*, entonces se define $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. Si *f* es integrable en $[a,b]$, entonces se define $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

EJEMPLO 4: Cálculo de integrables definidas

a) Debido a que la función seno se define en $x=\pi$, y los límites superior e inferior de integración son iguales, puede decirse que:

$$\int_{\pi}^{\pi} sen\,x\,dx = 0$$

b) La integral $\int_3^0 (x+2)dx$ es la misma que la dada en el ejemplo 3b excepto por el hecho de que los límites superior e inferior se intercambian. Debido a que la integral en el ejemplo 3b tiene un valor de $\frac{21}{2}$, puede escribir:

$$\int_3^0 (x+2)dx = -\int_0^3 (x+2)dx = \frac{21}{2}$$

En la figura 5, la región más grande puede dividirse en $x = c$ en dos subregiones cuya intersección es un segmento de recta. Como el segmento de recta tiene área cero, se concluye que el área de la región más grande es igual a la suma de las áreas de las dos regiones más pequeñas.

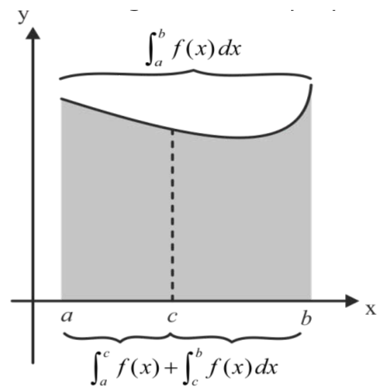


Figura 5. Propiedades de la integral definida
Fuente: En *Cálculo integral* (2da ed.), por Larson, Hostetler & Edwards, 2011, p. 101.

TEOREMA 7: Propiedad aditiva de intervalos

Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

EJEMPLO 5: Empleo de la propiedad aditiva de intervalos

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} -x dx + \int_0^1 x\, dx$$ Teorema 3.5

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$ Área del triángulo

$$= \mathbf{1}$$

Debido a que la integral definida se describe como el límite de una suma, hereda las propiedades de la suma dada en la sección 3.1.

TEOREMA 8: Propiedades de las integrales definidas

Si f y g son integrables en $[a,b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a,b]$, y

1. $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$
2. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Observar que la propiedad 2 del teorema 3.6 puede extenderse a cualquier número finito de funciones. Por ejemplo

$$\int_a^b [f(x)+g(x)+h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

EJEMPLO 6: Evaluación de una integral definida.

Evaluar $\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx$ utilizando los siguientes valores

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}, \quad \int_1^3 x\,dx = 4 \quad \int_1^3 dx = 2$$

Solución:

$$\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx = \int_1^3 (-x^2)dx + \int_1^3 4x\,dx + \int_1^3 (-3)dx$$

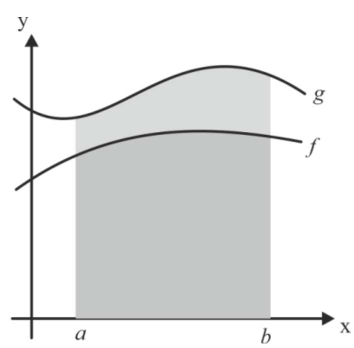
$$= -\int_1^3 x^2 dx + 4\int_1^3 x dx - 3\int_1^3 dx$$

$$= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2)$$

$$= \frac{4}{3}$$

Si *f* y *g* son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $0 \le f(x) \le g(x)$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$



Para $a \le x \le b$ las siguientes propiedades son ciertas. Primero, el área de la región acotada por la gráfica de *f* y el eje *x* (entre *a* y *b*) debe ser no negativa. Segundo, esta área debe ser menor o igual que el área de la región delimitada por la gráfica de g y el eje x (entre a y b), como se muestra en la figura 2.4. Estos dos resultados se generalizan en el teorema 3.7.

TEOREMA 9: Conservación de desigualdades

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces: $0 \le \int_a^b f(x)dx$
2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(x) \le g(x)$ para x en $[a,b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=ky6xZkWiduU

https://www.youtube.com/watch?v=Z-3Bv7sZA_Y

Fuente: Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias.* (2a ed.) Madrid, España: Pearson Prentice.

TEMA N° 2: "TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO"

TEOREMA 10: El teorema fundamental de cálculo

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a,b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración La clave para la demostración consiste en escribir la diferencia F(b) – F(a) en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) - ... - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c_i en i-ésimosubintervalo, tal que:

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Como $F'(c_i) = f(c_i),$ puede dejarse que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Esta importante ecuación indica que al aplicar el teorema del valor medio siempre es posible encontrar una colección de c_i tal que la constante $F(b) - F(a)$ es una suma de Reiman de *f* en $[a,b]$. Tomando el límite (cuando $\|\Delta\| \to 0$ produce:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

La siguiente guía puede ayudar a comprender el uso del teorema fundamental del cálculo.

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. Suponiendo que se conozca una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.

2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo. Las siguientes notaciones resultan convenientes.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big]_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)+C]_a^b$$
$$= [F(b)+C]-[F(a)+C]$$
$$= F(b)-F(a)$$

EJEMPLO 1: Cálculo de una integral definida

Evaluar cada integral definida.

a) $\int_1^2 (x^2-3)dx$ b) $\int_1^4 3\sqrt{x}dx$ c) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$

Solución:

a) $\int_1^2 (x^2-3)dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}-6\right)-\left(\frac{1}{3}-3\right) = -\frac{2}{3}$

b) $\int_1^4 3\sqrt{x}dx = 3\int_1^4 x^{1/2}dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2}-2(1)^{3/2} = 14$

c) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx = \tan x \; \Big]_0^{\pi/4} = 1-0 = 1$

EJEMPLO 2: Integral definida de un valor absoluto

Calcular $\int_0^2 |2x-1|\, dx$

Solución: Utilizando la definición de valor absoluto, se puede reescribir el integrando como se indica.

$$|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A partir de esto, es posible rescribir la integral en dos partes.

$$\int_0^2 |2x-1|\, dx = \int_0^{1/2} -(2x-1)dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)dx$$
$$= \left[-x^2+x\right]_0^{1/2} + \left[x^2-x\right]_{1/2}^2$$
$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)+(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

EJEMPLO 3: Empleo del teorema fundamental para encontrar un área

Encontrar el área de la región delimitadora por la gráfica $y = 2x^2-3x+2$, el eje *x* y las rectas verticales *x* = 0 y *x* = 2, como se muestra en la figura 3.25.

Solución Notar que y > 0 en el intervalo $[0, 2]$

Área $= \int_0^2 (2x^2-3x+2)dx$ Integrar entre *x* = 0 y *x* = 2

$$= \left[\frac{2x^2}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^2$$ Encontrar la antiderivada

$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4 \right) - (0 - 0 + 0)$$ Aplicar el teorema fundamental del cálculo.

$$= \frac{10}{3}$$

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=rr2Mm9RxNxU

https://www.youtube.com/watch?v=7_V4XqWFmPg

1. El teorema del valor medio para integrales

En la sección 3.1 se vio que el área de una región bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y menor que el área de un rectángulo circunscrito. El teorema del valor medio para integrales establece que en alguna parte "entre" los rectángulos inscritos y circunscritos hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva, como se ilustra en la figura 2.5.

Rectángulo de valor medio.

$$\int (c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

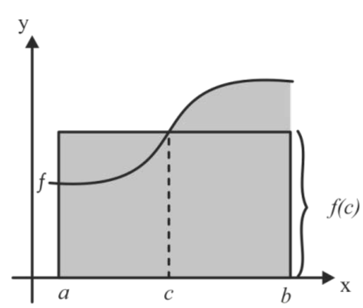


Figura 7

> **TEOREMA 11: Teorema del valor medio para integrales**
>
> Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a,b]$, tal que:
>
> $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Valor medio de una función

El valor de f(c) dada en el teorema de valor medio para integrales recibe el nombre de valor medio de *f* en el intervalo $[a,b]$.

Definición de valor medio de una función en un intervalo

Si *f* es integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces el valor medio de *f* en el intervalo es:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

NOTA: Obsérvese en la figura 3.28 que el área de la región bajo la gráfica *f* es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio.

Para saber por qué el promedio de *f* se define de esta manera, supóngase que se divide $[a,b]$ en n subintervalos de igual anchura $\Delta x=(b-a)/n$. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimosubintervalo, la media aritmética de los valores de la función en los c_i está dado por:

$$a_n=\frac{1}{n}\left[f(c_1)+f(c_2)+\ldots+f(c_n)\right]$$ Porcentaje de $f(c_1)\ldots f(c_n)$

Al multiplicar y dividir entre (b^0-a), puede escribirse la medida como:

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\left(\frac{b-a}{b-a}\right)=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$

Por último, al tomar el límite cuando $n\to\infty$ se obtiene el valor medio de *f* en el intervalo $[a,b]$, como se indicó en la definición anterior.

Este desarrollo del valor medio de una función en un intervalo es sólo uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma.

EJEMPLO 4: Determinación del valor medio de una función

Determinar el valor medio de $f(x)=3x^2-2x$ en el intervalo $[1,4]$

Solución El valor medio está dado por

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{3}\int_1^4(3x^2-2x)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[x^2-x^2\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[64-16-(1-1)\right]=\frac{48}{3}=16$$

EJEMPLO 5: La velocidad del sonido

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a diferentes velocidades. La velocidad del sonido *s*(*x*) (en metros por segundo) puede modelarse mediante:

$$s(x)=\begin{cases}-4x+341 & 0\le x<11.5\\ 295, & 11.5\le x<22\\ \frac{3}{4}x+278.5, & 22\le x<32\\ \frac{3}{2}x+254.5 & 32\le x<50\\ -\frac{3}{2}x+404.5 & 50\le x\le 80\end{cases}$$

Donde *x* es la altura en kilómetros ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo $[0,80]$?

Solución: Se empieza con la integración *s*(*x*) en *e* intervalo $[0,80]$. Para hacer esto, se puede dividir la integral en cinco partes.

$$\int_0^{11.5} s(x)dx = \int_0^{11.5} (-4x+341)dx = \left[-2x^2+341x\right]_0^{11.5} = 3657$$

$$\int_{11.5}^{22} s(x)dx = \int_{11.5}^{22} (295)dx = \left[295x\right]_{11.5}^{22} = 3097.5$$

$$\int_{22}^{32} s(x)dx = \int_{22}^{32} \left(\frac{3}{4}x+278.5\right)dx \left[\frac{3}{8}x^2+278.5x\right]_{22}^{32} = 2987.5$$

$$\int_{32}^{50} s(x)dx = \int_{32}^{50} \left(\frac{3}{2}x+254.5\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^2+254.5x\right]_{32}^{50} = 5688$$

$$\int_{50}^{80} s(x)dx = \int_{50}^{80} \left(-\frac{3}{2}x+404.5\right)dx = \left[-\frac{3}{4}x^2+404.5x\right]_{50}^{80} = 9210$$

Al sumar los valores de las cinco integrales, se obtiene:

$$\int_0^{80} s(x)dx = 24\,640$$

De tal modo, la velocidad media del sonido entre los 0 y los 80 km de altitud es velocidad promedio $= \frac{1}{80}\int_0^{80} s(x)dx = \frac{24640}{80} = 308$ metros por segundo.

Enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=pxUFj0ICOrY

https://www.youtube.com/watch?v=Sv5aHxXP95s

https://www.youtube.com/watch?v=IYhrpYlvWg8

2. El segundo teorema fundamental del cálculo

Al introducir la integral definida de *f* en el intervalo $[a,b]$ se ha tomado como fijo el límite superior de la integración *b* y *x* como la variable de integración. Sin embargo, es posible que surja una situación un poco diferente en la que la variable *x* se use como el límite superior de integración. Para evitar la confusión de utilizar *x* de dos maneras diferentes, se usa temporalmente *t*como la variable de integración. (Recordar que la integral definida no es una función de su variable de integración)

TEOREMA 12: El segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es continúa en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Demostración Empezar difiriendo F como:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, es posible escribir

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt+\int_x^a f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right]$$

Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x=0$), se sabe que existe un número *c* en el intervalo $[x,x+\Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(x)\Delta x$. Además, como $x\le c\le x+\Delta x$ se sigue que $c\to x$ cuando $\Delta x\to 0$.

De tal modo, se obtiene:

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}f(c)\Delta x\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)$$

$$=f(x)$$

Es posible plantear un argumento similar para $\Delta x<0$

NOTA: Utilizando el modelo del área para integrales definidas, considerar la aproximación:

$$f(x)\Delta x=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Se dice que el área del rectángulo de altura *f*(*x*) y anchura Δx es aproximadamente igual al área de la región que se encuentra entre la gráfica *f* y el eje *x* en el intervalo $[x,x+\Delta x]$, como se muestra en la figura 3.32.

Notar que el segundo teorema del cálculo indica que toda *f* continua admite una derivada o primitiva. Sin embargo, ésta no necesita ser una función elemental.

EJEMPLO 7: Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Calcular $\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right]$

Solución: Advertir que $f(t)=\sqrt{t^2+1}$ es continua en toda la recta real. De tal modo, empleando el segundo teorema fundamental del cálculo, es posible escribir:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2-1}\,dt\right]=\sqrt{x^2+1}$$

La derivación que se muestra en el ejemplo 7 es una aplicación directa del segundo teorema fundamental del cálculo. El siguiente ejemplo muestra cómo puede combinarse este teorema con la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función.

EJEMPLO 8: Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo.

Encontrar la derivada de $F(x)\int_{\pi/2}^{x^3} \cot t\, dt$

Solución: Haciendo $u = x^3$ es factible aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena como se ilustra.

$F'(x) = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx}$ Regla de la cadena

$= \frac{d}{du}[F(x)]\frac{du}{sx}$ Definición de $\frac{dF}{du}$

$= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\, dt\right]\frac{du}{dx}$ Sustituir $\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\, dt \; por\; F(x)$

$= (\cos u)(3x^2)$ Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo

$= (\cos x^3)(3x^2)$ Reescribir como función de x.

Debido a que la integral del ejemplo 8 se integra con facilidad, se puede verificar la derivada de modo siguiente:

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\, dt = sen\, t \;\Big]_{\pi/2}^{x^2} = sen\, x^3 - sen\frac{\pi}{2} = (sen\, x^3) - 1$$

En esta forma, se tiene la posibilidad de aplicar la regla de las potencias para verificar que la derivada es la misma que la que se obtuvo en el ejemplo 8.

$$F'(x) = (\cos x^3)(3x^2)$$

TEMA N° 3: APLICACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

1. Cambio de variable para integrales definidas

Cuando se usa la sustitución de *du* en una integral definida, muchas veces es conveniente determinar los límites de integración para la variable *u* en vez de convertir la antiderivada o primitiva de nuevo a la variable *x* y calcularla en los límites originales. Este cambio de variable se establece explícitamente en el siguiente teorema. La demostración sigue del teorema en combinación con el teorema fundamental de cálculo.

TEOREMA 13: Cambio de variable para integrales definidas

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y f es contínua en el recorrido o rango g, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

EJEMPLO 9: Cambio de variables

Calcular $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

Solución:

Para calcular esta integral, sea $u = x^2+1$ después, $u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx$

Antes de sustituir, determina los nuevos límites superior e inferior de integración:

<u>Límite inferior</u>	<u>Límite superior</u>
Cuando $x = 0,\ u = 0^2+1 = 1$	Cuando $x = 1, u = 1^2+1 = 2$

Ahora, es posible sustituir para obtener:

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx \quad \text{Límites de integración para } x$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du \quad \text{Límites de integración para } u$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}$$

Intentar rescribir la antiderivada o primitiva $\frac{1}{2}(u^4/4)$ en términos de la variable *x* y calcular la integral definida en los límites originales de integración, como se muestra:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

EJEMPLO 10: Cambio de variable

Calcular $A = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

Solución: Para calcular esta integral, considerar que $u = \sqrt{2x-1}$ Después, obtener

$$u^2 = 2x-1$$

$$u^2+1 = 2x$$

$$\frac{u^2+1}{2} = x$$

$u\,du = dx$ Diferencia cada lado

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración

<u>Límite inferior</u> <u>Límite superior</u>

Cuando $x = 1,\ u = \sqrt{2-1}+1 = 1$ Cuando $x = 5, u = \sqrt{10-1}+1 = 3$

Ahora, sustituir para obtener:

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2-1}{2}\right)u\ du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(9+3-\frac{1}{3}-1\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$

Geométricamente, es posible interpretar la ecuación:

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^3 \frac{u^2+1}{2}du$$

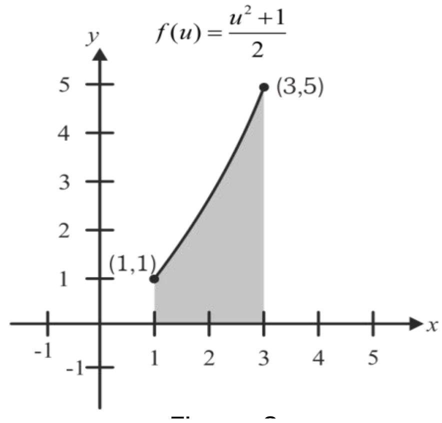


Figura 8

La región después de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$ como se muestra en la figura 8.

Al calcular integrales definidas por cambio de variable (sustitución), es posible que el límite superior de integración correspondiente a la nueva variable u sea más pequeño que el límite inferior. Si esto ocurre, no hay que reordenar los límites. Simplemente se calcula la integral de la manera usual. Por ejemplo, después de sustituir $u=\sqrt{1-x}$ en la integral $\int_0^1 x^2(1-x)^{1/2}dx$

Se obtiene $u=\sqrt{1-1}=0$ cuando $x = 1$, y $u=\sqrt{1-0}=1$ cuando $x = 0$. De tal modo, la forma correcta de esta integral en la variable u es:

$$-2\int_0^1 (1-u^2)u^2\,du$$

2. INTEGRACIÓN POR PARTES PARA INTEGRALES DEFINIDAS

En esta sección se estudiará una técnica importante de integración llamada integración por partes. Esta técnica puede aplicarse a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que contengan productos de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, la integración por partes funciona bien con integrales como:

$$\int x\ln x\,dx, \qquad \int x^2e^x\,dx \quad y \quad \int e^x senx\,dx$$

La integración pro partes está basada en la fórmula para la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$= uv' + vu'$$

Volviendo a escribir esta ecuación se obtiene el teorema siguiente.

TEOREMA 14: Integración por partes

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de *u* y *dv*, puede ser más fácil de evaluar la segunda integral que la original. Porque la elección de *u* y *dv* es importante en la integración por el proceso de partes, se proporcionan las pautas siguientes.

Estrategias para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como *u* el factor restante del integrando.

2 Intentar tomar como *u* la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que *u*, y como dv el factor restante del integrado.

EJEMPLO 1:

$\int x\, arc\tan x\, dx$ Ponemos $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = xdx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$ Así:

$$\int_0^1 x\arctan x dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-2}{4} = 0,285...$$

ACTIVIDAD FORMATIVA Nº 1

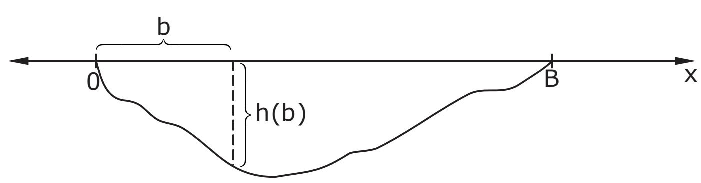
Aplicación: Los contenidos de apoyo para el desarrollo de la actividad 1 pertenecen a los temas 1 y 2 de la II unidad

Descarga de un río

Cuando se estudia el flujo del agua en un canal abierto, como el cauce de un río, la cantidad de agua que pasa a través de una sección cruzada por segundo, denominada descarga (Q), resulta de interés. La siguiente fórmula se utiliza para calcular la descarga:

$$Q = \int_0^B \bar{v}(b)h(b)\,db \qquad (\alpha)$$

siendo b la distancia desde una orilla del río al punto donde se miden la profundidad del río, h(b), y la velocidad media del perfil de velocidad, $\bar{v}(b)$. La anchura total de la sección cruzada es B (ver figura).



Para calcular la integral de (α), es necesario conocer h(b) y $\bar{v}(b)$ en cada posición b a lo largo de la sección cruzada. En la práctica, la sección cruzada se divide en un número finito de subintervalos, y se toman medidas de v y de h, por ejemplo en los extremos derechos de cada subintervalo. La siguiente tabla contiene un ejemplo de estas medidas. La posición 0 corresponde a la orilla izquierda y la posición B = 16 a la orilla derecha del río. Las unidades de posición y de h son metros, y las de v metros por segundo.

Posición	h	$\bar{v}$
0	0	0
1	0,28	0,172
3	0,76	0,213
5	1,34	0,230
7	1,57	0,256
9	1,42	0,241
11	1,21	0,206
13	0,83	0,187
15	0,42	0,116
16	0	0

Aproxime la integral de (α) por una semana de Riemann utilizando las posiciones de la tabla y calcule la descarga aproximada utilizando los datos de dicha tabla.

Fuente: Neuhauser C. (2004). *Matemáticas para ciencias* (2da. ed.). Madrid, España: Editorial Pearson Prentice Hall.

GLOSARIO DE LA UNIDAD II

A

Aproximar: Dar un valor cercano a otro. Por ejemplo, podemos aproximar el valor del número $\pi = 3.141592654\ldots$ como $3{,}1416$. El símbolo matemático que denota aproximación es: $\approx$

C

Continua: Del latín continuus, continúo; derivado de continere, mantener unido. Una función real de variable real y=f(x) es continua en a si y sólo si $\lim_{x \to x_a} f(x) = f(a)$. La función f es continua en un intervalo abierto (a, b), si lo es en cada uno de sus puntos y en uno cerrado [a,b] si lo es en (a,b), a la derecha de a y a la izquierda de b.

I

Integral definida: La integral definida de una función $y = f(x)$ es un escalar, definido por:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Donde a y b son los límites de integración y $y = F(x)$ es una primitiva de $y = f(x)$

Formalmente la integral definida se define por el límite:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \left(\frac{b - a}{n}\right)$$

Integración: La integración de una función $f(x)$ consiste en encontrar una función diferenciable $y = F(x)$ que la derivada de $F(x)$ sea $f(x)$ para toda x en el dominio de f.

e: De la inicial de Euler, matemático suizo, 1707-1783. Número base de los logaritmos neperianos o naturales. Es irracional y trascendente. Lo definiremos como:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$$

BIBLIOGRAFíA DE LA UNIDAD II

BÁSICA

Larson, R. & Bruce, E. (2016). *Cálculo* (10ma ed.). México D.F.: Cengage Learning.

COMPLEMENTARIA

Espinoza, R. E. (2004). *Análisis Matemático II.* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Espinoza, R. E. (2004).*Análisis Matemático IV.* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Kreyszig, E**.** (2000). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (3ra ed.). México D.F.: Limusa S.A.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Bruce, E. (2011). *Cálculo Integral–Matemática 2.* México D.F.: Mc Graw Hill.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Bruce, E. (2011). *Cálculo Esencial*. México D.F.: Cengage Learning.

Leithold, L. (1998). *El Calculo.* México: Oxford.

Stewart, J. (2008). *Cálculo: Trascendentes Tempranas* (6ta ed.). México D.F.: Cengage Learning.

Zill D.G. & Wrigth W.S. (2011). *Cálculo de una variable. Transcendentes Tempranas.* México D.F.: Mc Graw Hill.

AUTOEVALUACIÓN N° 2

Estimado participante: es momento de poder verificar su aprendizaje sobre los temas tratados en esta unidad. Actúe con la máxima responsabilidad y seriedad. Haga el mayor esfuerzo para desarrollar los ejercicios en el tiempo estimado.

1. Lea con atención las siguientes afirmaciones. Si la proposición es verdadera escriba (V), si la proposición es falsa escriba (F), luego marque la alternativa que estime correcta.

$$i)\,Si\ \int_a^b f'(x).dx = f(b) - f(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\quad)$$

$$ii)\,Si\ f\ es\ integrable, entonces\ f\ es\ continua \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\quad)$$

$$iii)\ Si\ F'(x) = 0, \forall x, entonces\ F(x) = C, \forall x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\quad)$$

$$iv)\ Se\,cumple\,que \int_1^3 \sqrt{t^2+7}.dt = -\int_3^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\quad)$$

a) VFVF

b) VVVF

c) VVFF

d) FFVV

e) VVVV

2. El valor de la integral

$$A = \int_1^e lnx.dx, es:$$

a) 3

b) 2

c) 1

d) 4

e) ln2

3. Al realizar el cambio de variable u = 3x + 2, en la siguiente integral

$$\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}.dx$$

Los nuevos límites de integración son:

a) 0 y 8

b) 1 y 7

c) 0 y 2

d) 2 y 8

e) 3 y 5

4. Evalúe

$$I=\int_{-1}^{4} f(x).dx, donde\ f(x)=\begin{cases} x+1, -1\leq x<0 \\ x \qquad ,0\leq x<2 \\ 3 \qquad ,2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

A) 3/4

B) 17/2

C) 5/2

D) -3/5

E) 1/6

5. Hallar

$$I=\int_{1}^{3} g(x).dx, si \quad \int_{3}^{1}\left[3f(x)-4g(x)\right]dx=18\ \ y\ \int_{1}^{3} f(x).dx=4$$

A) 18/2

B) 15/2

C) 17/2

D) 5/2

E) 1/2

6. Al evaluar la integral:

$$\int tan^3 x.sec^7 x.dx,\ \ se\,obtiene$$

$$\frac{1}{9}sec^9 x-\frac{1}{7}sec^7 x$$

$$\frac{1}{9}sec^9 x+\frac{1}{7}sec^7 x+C$$

$$\frac{1}{9}sec^9 x+\frac{3}{7}sec^7 x+C$$

$$\frac{1}{9}sec^9 x-\frac{1}{7}sec^7 x+C$$

$$\frac{4}{9}sec^9 x-\frac{1}{7}sec^7 x+C$$

7. Al evaluar la integral

$$\int \frac{Sec^4(1-t)}{Tg^8(1-t)}.dt$$

¿Qué enunciados se deben utilizar?

i) Usar la identidad $Sec^2u - 1 = Ctg^2x$

ii) Usar la identidad $Sec^2u = Tg^2x + 1$

iii) Hacer dos cambios de variables

iv) Desdoblar $Sec^4(1-t)$ por $Sec^2(1-t).Sec^2(1-t)$

A) Sólo i, ii y iii

B) Sólo i, iii y iv

C) Sólo iii

D) Sólo iii y iv

E) Sólo ii, iii y iv

8. Para resolver la integral

$$\int x.e^{\sqrt{x}}.dx$$

¿Qué enunciados se deben utilizar?

i) Aplicar dos veces la integración por partes

ii) Un cambio de variable

iii) Un buen cambio de variable es $t^2 = x$

A) Sólo I

B) Sólo I y III

C) Sólo II y III

D) Sólo I y II

E) Todas

UNIDAD III

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD III

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar las integrales definidas para resolver problemas de cálculo de áreas, cálculo de volúmenes y superficies de revolución y el cálculo de longitud de arcos.

TEMA N° 1: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS.

EJEMPLO 1: Una región determinada por dos gráficas que se intersecan

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 2–x^2$ y $g(x) = x$.

Solución:

En la figura 2.7, se observa que las gráficas de f y g tienen dos puntos de intersección. Para encontrar las coordenadas x de estos puntos, se hace f(x) y (g) iguales y se resuelve para x.

$2–x^2 = x$ igualar f(x) con g(x)

$- x^2–x + 2 = 0$ escribir en forma general

$- (x + 2)(x–1) = 0$ factorizar

$x =–2$ ó 1 despejar para x

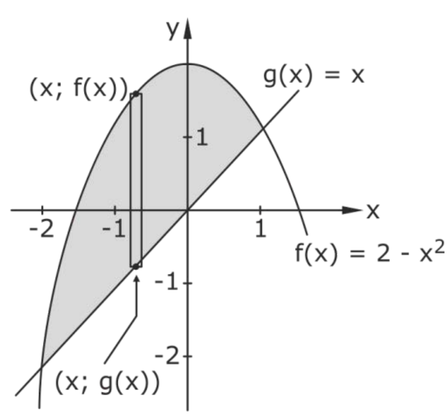


Figura 9

Así, a =–2 y b = 1. Porque g(x) & f(x) para todo x en el intervalo [-2; 1], el rectángulo representativo tiene un área de:

DA = [f(x)–g(x)] Dx

= [(2–x²)–x] Dx

y el área de la región es:

$$A= \int_{-2}^{1} [(2-x^2) - x]\, dx = \left[- \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$$
$$= \frac{9}{2}$$

EJEMPLO 2: Curvas que se intersecan en más de dos puntos

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de

$f(x) = 3x^3–x^2–10x$ y $g(x) =–x^2 + 2x$.

Solución:

Empezar igualando f(x) y g(x) y resolviendo para x. Así se obtienen las coordenadas de x en cada punto de intersección de las dos gráficas.

$3x^3–x^2–10x =–x^2 + 2x$ igualar f(x) a g(x)

$3x^3–12x = 0$ escribir en forma general

$3x(x–2)(x + 2) = 0$ factorizar

$x =–2; 0; 2$ despejar para x

Así, las dos gráficas se cortan cuando x = – 2; 0 y 2. En la figura 2.8 se observa que g(x) ≤ f(x) en el intervalo [- 2; 0]. Sin embargo, las dos gráficas cambian en el origen, y f(x) ≤ g(x) en el intervalo [0; 2]. Así, se necesitan dos integrales, una para el intervalo [-2; 0] y otra para el intervalo [0; 2].

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1}[f(x)-g(x)]\,dx + \int_{0}^{2}[g(x)-f(x)]\,dx \\
&= \int_{-2}^{0}(3x^3-12x)\,dx + \int_{0}^{2}(-3x^2+12x)\,dx \\
&= [\frac{3x^4}{4}-6x^2]_{-2}^{0} + [\frac{-3x^4}{4}+6x^2]_{0}^{2} \\
&= -(12-24)+(-12+24) \\
&= 24
\end{aligned}
$$

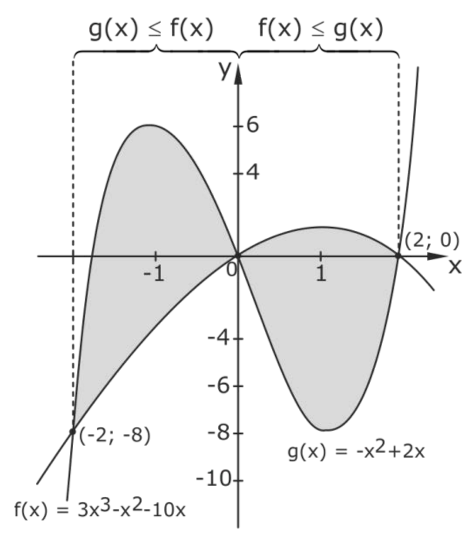


Figura 10

NOTA: En el ejemplo anterior se observa que se obtiene un resultado incorrecto si se integra de – 2 a 2.

Tal integral produce:

$$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{2} (3x^3 - 12x)dx=0$$

Si la gráfica de una función de y es una frontera de una región, a menudo es conveniente usar rectángulos representativos horizontales y encontrar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se usan:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]}_{\text{en la variable x}} dx \qquad \text{rectángulos verticales}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]}_{\text{en la variable y}} dy \qquad \text{rectángulos horizontales}$$

Donde $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ son los puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos sobre las rectas de la frontera especificadas.

EJEMPLO 3: Rectángulos representativos horizontales

Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 – y^2$ y $x = y + 1$.

Solución:

Considerar $g(x) = 3–y^2$ y $f(y) = y + 1$

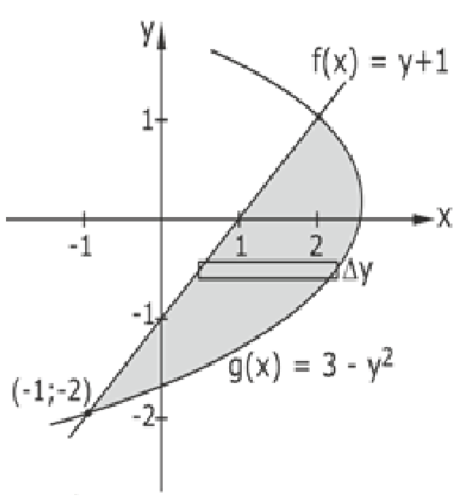
Estas dos curvas se intersecan cuando $y =–2$ y $y = 1$, como se muestra en la figura (1).

Porque $f(y) \leq g(x)$ en este intervalo, se tiene:

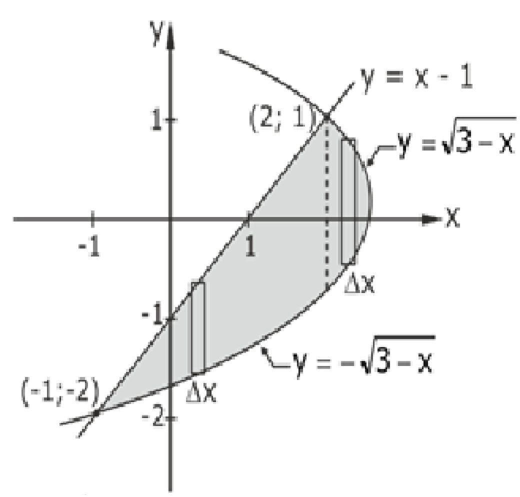
$\Delta A = [g(y)–f(y)]\, \Delta y = [(3–y^2)–(y + 1)]\, \Delta y$

Así, el área es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]\, dy \\ &= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)dy \\ &= [\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y]_{-2}^{1} \\ &= (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2) - (\frac{8}{3} - 2 - 4) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$



Rectángulos horizontales
(integración con respecto a y) Fig. 11



Rectángulos verticales
(integración con respecto a x) Fig. 12

En el ejemplo anterior se observa que integrando con respecto a y se necesita solo una integral.

Si se integran con respecto a x, se necesitarán dos integrales porque la frontera superior habría cambiado en x = 2, como se muestra en la figura (2).

$$A= \int_{-1}^{2} [(x - 1) + \sqrt{3 - x}\,]\, dx \; + \int_{2}^{3} (\sqrt{3 - x} \; + \sqrt{3 - x})\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [x - 1 + (3 - x)^{1/2}]\, dx + 2\int_{2}^{3} (3 - x)^{1/2}]\, dx$$

$$= [\frac{x^2}{2} - x - \frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}]_{-1}^{2} - 2\, [\frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}]_{2}^{3}$$

$$= (2 - 2 - \frac{2}{3}) - (\frac{1}{2} + 1 - \frac{16}{3}) - 2(0) + 2(\frac{2}{3})$$

$$= \frac{9}{2}$$

2. LONGITUD DE ARCO Y SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN.

En esta sección se usan las integrales definidas para encontrar las longitudes de arco de las curvas y las áreas de superficies de revolución. En ambos casos, un arco (un segmento de una curva) se aproxima por segmentos de recta cuyas longitudes son dadas por la fórmula de la distancia conocida.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Una curva rectificable es aquella que tiene una longitud de arco finita. Se verá que una condición suficiente para que la gráfica de una función f sea rectificable entre (a, f(a)) y (b, f(b)) es que f’ sea continua sobre [a; b]. Dicha función es continuamente derivable sobre [a; b], y su gráfico en el intervalo [a; b] es una curva suave.

Considerar una función y = f(x) tal que es continuamente derivable en el intervalo [a; b]. Se puede aproximar la gráfica de f por n segmentos de recta cuyos puntos terminales son determinados por la partición.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

como se muestra en la figura (1). Sea $x_i = x_i – x_i – 1$ y $y_i – y_i = y_i – 1$, se puede aproximar la longitud de la gráfica por:

$$S= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})(\Delta x_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})(\Delta x_i)^2}$$

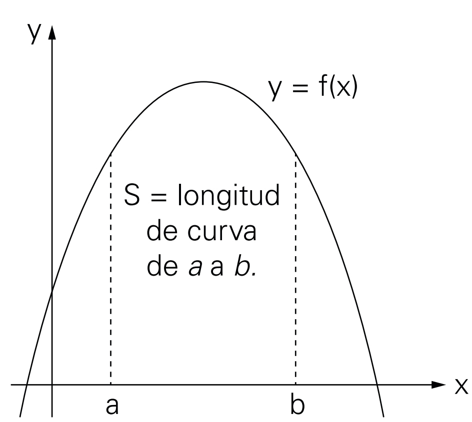


Fig. 13

Esta aproximación parece ser mejor al hacer $\|x\| \to 0 (n \to \infty)$. Así, la longitud dela gráfica es:

$$S = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i)$$

Porque f'(x) existe para todo x en (xi–1; xi), el teorema de valor medio garantiza la existencia de ci en (xi–1; xi) tal que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$

Porque f' es continua en [a; b], se tiene que $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también es continua (y por consiguiente integrable) en [a; b] lo que implica que:

$$S = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (\Delta x_i)$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Donde S es llamada la longitud del arco de f entre a y b.

Definición de longitud de arco

Sea la función dada por y = f(x) que representa una curva suave en el intervalo [a; b].

La longitud del arco de f entre a y b es:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Similarmente, para una curva suave dada por x = g(y), la longitud de arco de g entre c y d es:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

Porque la definición de longitud de arco puede aplicarse a una función lineal, es posible comprobar que esta nueva definición se corresponde con la fórmula estándar de la distancia para la longitud de un segmento de la recta. Esto se muestra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1: Longitud de un segmento de recta

Encontrar la longitud de arco de $(x_1; y_1)$ a $(x_2; y_2)$ en la gráfica de f(x) = mx + b, como se muestra en la figura:

Solución:

Porque

$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

se tiene

$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

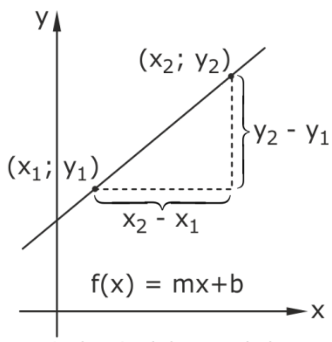
$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \qquad \text{fórmula para longitud de arco}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}(x)\Bigg|_{x_1}^{x_2} \qquad \text{integrar y simplificar}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}(x_2 - x_1)$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



La longitud de arco de la gráfica f de $(x_1; y_1)$ a $(x_2; y_2)$ es igual que la fórmula estandar de la distancia.

que es la fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano.

Ejemplo 2: Cálculo de la longitud de arco.

Encontrar la longitud de arco de:

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

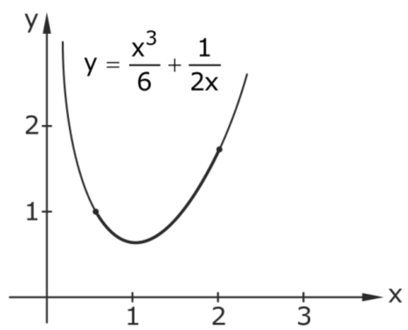


Figura 14

en el intervalo [1/2; 2], como se muestra en la figura nº 14.

Solución:

Usando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{x^2})$$

se tiene una longitud de arco de:

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+[\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})]^2}\,dx \qquad \text{fórmula de longitud de arco}$$
$$=\int_{1/2}^{2}\sqrt{\frac{1}{4}(x^4+2+\frac{1}{x^4})}\,dx$$
$$=\int_{1/2}^{2}\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{x^2})}\,dx \qquad \text{simplificar}$$
$$=\frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}]_{1/2}^{2} \qquad \text{integrar}$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{13}{6}+\frac{47}{24})$$
$$=\frac{33}{16}$$

EJEMPLO 3: Cálculo de la longitud de arco

Encontrar la longitud de arco del $(y–1)^3 = x^2$ en el intervalo de [0; 8] como se muestra en la figura 2.9:

Solución:

Empezar resolviendo para x en términos y: $x = \pm (y–1)^3$. Eligiendo el valor positivo de x produce:

El intervalo x [0; 8] corresponde al intervalo y [1; 5] y la longitud de arco es:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{3}{2}(y-1)^{1/2}$$

$$S=\int_c^d\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=\int_1^5\sqrt{1+[\frac{3}{2}(y-1)^{1/2}]^2}\,dy \qquad \text{fórmula de longitud de arco}$$
$$=\int_1^5\sqrt{\frac{9}{4}y-\frac{5}{4}}\,dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^5\sqrt{9y-5}\,dy \qquad \text{simplificar}$$
$$=\frac{1}{8}[\frac{(9y-5)^{3/2}}{3/2}]_1^5 \qquad \text{integrar}$$
$$=\frac{1}{27}(40^{3/2}-4^{3/2})$$
$$\approx 9{,}073$$

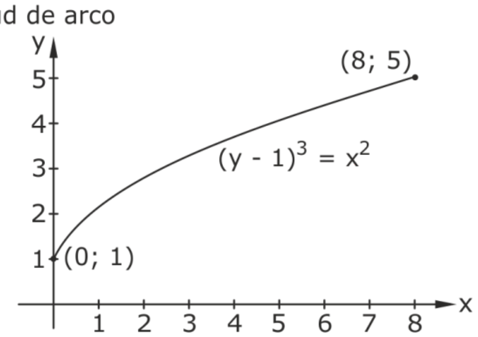


Figura 15

EJEMPLO 4: Cálculo de la longitud de arco

Encontrar la longitud de arco de y = ln(cosx) de x = 0 para x = π/4 como se muestra en la figura nº 16:

Solución:

Usando

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=-\tan x$$

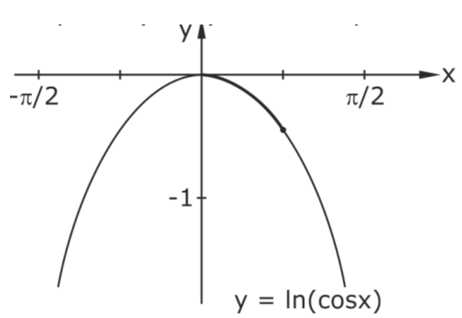


Figura 16

se tiene una longitud de arco de:

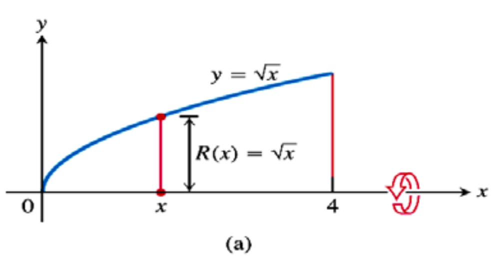
$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx && \text{fórmula de longitud de arco}\\
&= \int_0^{\pi/4}\sqrt{\sec^2 x}\,dx && \text{identidad trigonométrica}\\
&= \int_0^{\pi/4}\sec x\,dx && \text{simplificar}\\
&= \left[\ln|\sec x+\tan x|\right]_0^{\pi/4} && \text{integrar}\\
&= \ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1\\
&\approx 0{,}881
\end{aligned}
$$

Fuente: En *Cálulo Integral*, por Larson, Hostetler & Edwards, 2009.

3. CÁLCULO DE VOLÚMENES POR EL MÉTODO DE LOS DISCOS, ARANDELAS (ANILLOS) Y LAS CAPAS.

"VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN"

Sólido de revolución es el que se obtiene al girar una región del plano alrededor de una recta del plano llamada eje de revolución.



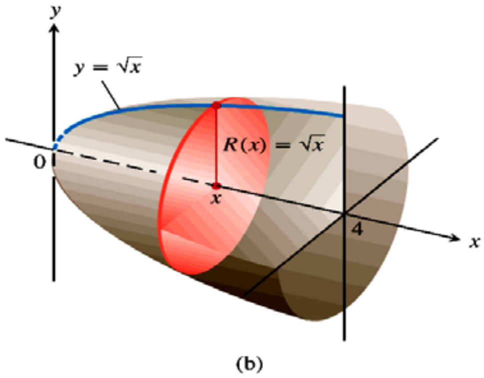
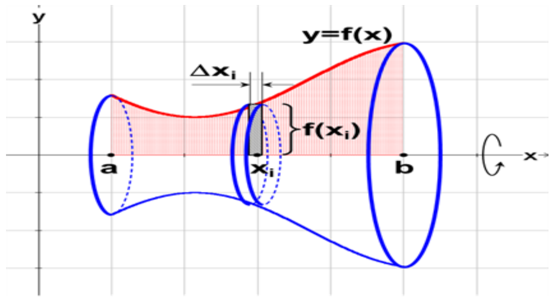


Figura 17 Figura 18

(VOLÚMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN: Aquiles Páramo Fonseca. Colombia–Junio, 2004)

MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE VOLUMEN

1. MÉTODO DEL DISCO



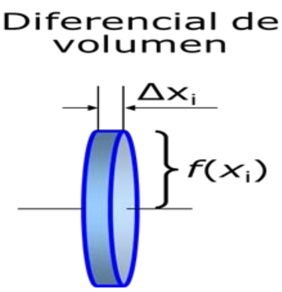


Figura 19 Figura 20

(MÉTODO DEL DISCO: Aquiles Páramo Fonseca. Colombia–Junio, 2004)

TEOREMA 15: $\Delta V_i = \pi\left[f\left(x_i\right)\right]^2 \Delta x_i$

Sea *f* una función continua en el intervalo [*a*, *b*] y *f*(*x*) ≥ 0 en [a, b]. El volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje X la región limitada por la curva *y*= *f*(*x*), las rectas x=*a*, x=*b* y el eje X es:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i \\ &= \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx \end{aligned}$$

Ejemplo:

Calcule el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje X la región acotada por la curva y = x^2 y las rectas x = 1, x = 2, y = 0.

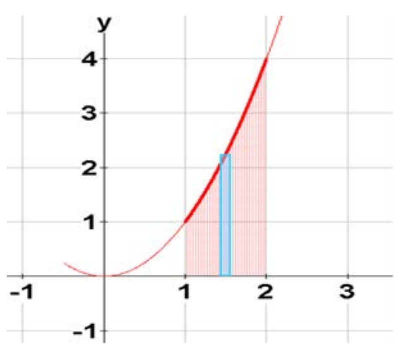
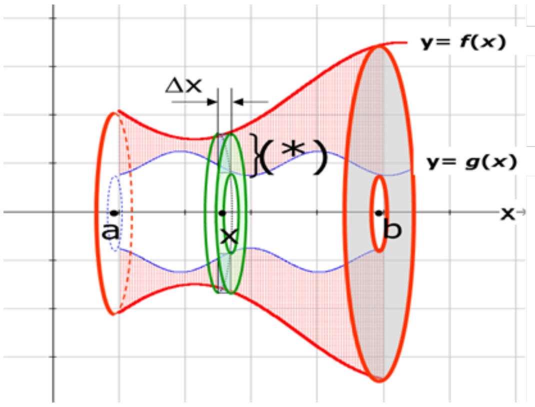


Figura 21

2. MÉTODO DE LA ARANDELA

Cuando la región a girar está limitada por dos funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) continuas en [a, b], las rectas x=a y x=b.



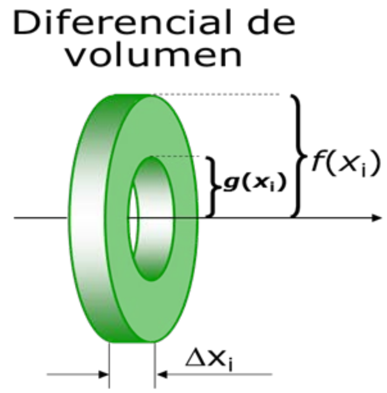


Figura 22 *Figura 23*
Fuente: Método de la arandela. Aquiles Páramo Fonseca. Colombia–Junio, 2004

TEOREMA 16: $\Delta V_i = \pi\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\Delta x_i$

Sean *f* y *g* dos funciones continuas en [*a*, *b*] tales que *f*(*x*) ≥ *g*(*x*) para toda x en [*a*, *b*]. El volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje X la región limitada por *f*(*x*), *g*(*x*) y las rectas *x=a* y *x=b* será:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi([f(x_i)]^2 - [g(x_i)]^2)\Delta x_i \\ &= \pi\int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx \end{aligned}$$

Ejemplo 1:

Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje X la región acotada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$.

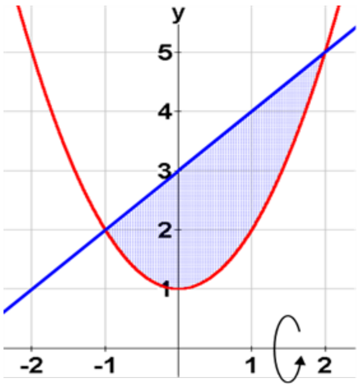


Figura 24

Ejemplo 2:

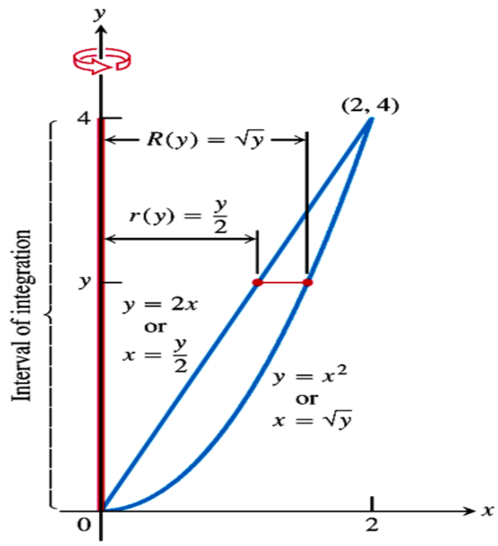


Figura 25

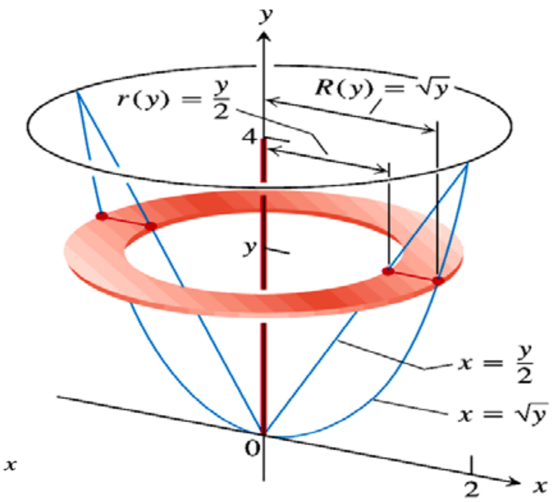


Figura 26

3. MÉTODO DE CASQUETES CILÍNDRICOS

Introducción: Cebollas y troncos de madera.

El método que se explica en esta parte, el de los casquetes cilíndricos, proporciona una forma alternativa de calcular volúmenes de sólidos de revolución. En ciertos casos es el único método viable porque el de las secciones transversales puede resultar a veces difícil de aplicar o no puede aplicarse en absoluto.

Piénsese, por ejemplo, en el problema de hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar sobre el eje y la región que está comprendida, en el primer cuadrante, entre la curva $y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ y la vertical $x = 3$.

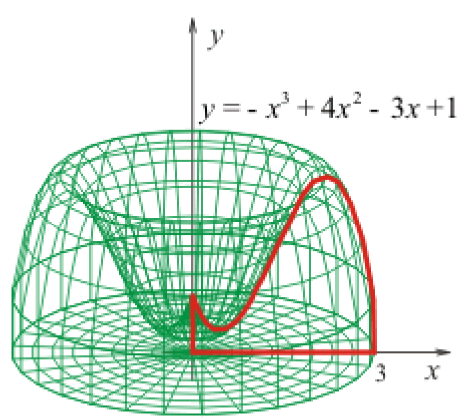


Figura 27. Volúmenes por casquetes cilíndricos. Aquiles Páramo Fonseca. Bogota, Colombia, 2004.

A primera vista puede parecer que el método más adecuado para este cálculo consiste en hacer repetidas secciones transversales horizontales del sólido –tajarlo por decirlo así– y en integrar luego los volúmenes de todos los trozos. Sin embargo, se presentan varias dificultades. La primera está en que las secciones transversales son, en unas zonas del sólido, discos completos y, en otras, arandelas, es decir, discos con hueco. Esto conduce a tener que dividir la región de integración en varias subregiones, lo que resulta algo engorroso. Pero por otra parte, para plantear la integral es necesario expresar tanto el radio de los discos como el radio interior y exterior de las arandelas en función de la variable y, lo que no es fácil de lograr en este caso:

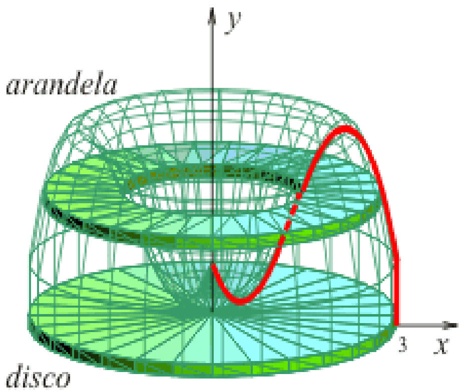


Figura 28. Volúmenes por casquetes cilíndricos. Aquiles Páramo Fonseca.Bógota. Colombia–Junio, 2004.

En cambio, el método de los casquetes cilíndricos funciona muy bien en esta situación. Básicamente consiste en dividir el sólido de revolución en una serie de casquetes cilíndricos que se incrustan unos dentro de otros y en integrar luego los volúmenes de estos casquetes para obtener el volumen total. En la Figura 29, se puede ver cómo se van agregando y se van retirando sucesivamente estos elementos y cómo se produce el sólido de revolución. Es por esto por lo que a este método se le conoce también como el método de las "capas", las "envolturas", las "envolventes" o los "cascarones" cilíndricos.

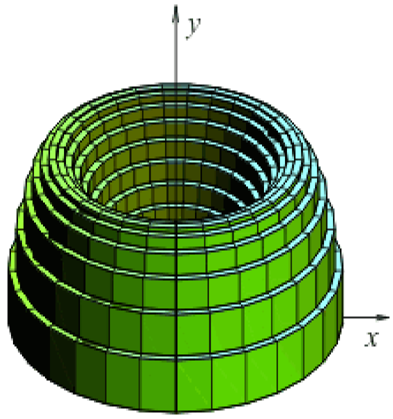


Figura 29. Cálculo de volúmenes mediante el método de casquetes cilíndricos. Aquiles Páramo Fonseca. Bógota.Colombia–Junio, 2004

Pero antes de entrar en detalles es importante entender bien la estructura geométrica que está involucrada en este método. Quizás resulte útil pensar en objetos cotidianos que presentan la misma configuración.. El primero que viene a la mente es posiblemente un trozo de cebolla pues es bien conocido el hecho de que en su interior los tejidos de un trozo de este vegetal están dispuestos en una serie de capas más o menos cilíndricas que, cuando se cortan transversalmente y se sirven en las ensaladas, forman los característicos «anillos» de la cebolla (Figura 30).

Figura 30. Las cebollas en el interior están formadas por capas cilíndricas.

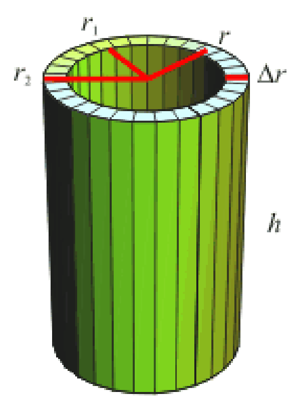
También puede resultar útil pensar en la estructura interna de un tronco de árbol pues ésta consiste en una serie de casquetes, hechos de distintas clases de madera, aproximadamente cilíndricos, que en los cortes transversales se ven como una serie de anillos de diferente color (Figura 31).

Figura 31 El tronco en el interior está formado por capas cilíndricas

Planteamiento general

El método de los casquetes cilíndricos.

Para comenzar a entender en detalle el método de los casquetes cilíndricos debemos establecer cómo calcular el volumen V de un casquete cilíndrico de altura h cuyo radio interior es r_1 y cuyo radio exterior es r_2 como el que aparece en la Figura 4. Naturalmente procedemos restando el volumen V1 del cilindro interior al volumen V2 del cilindro exterior, así:



$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\ &= \pi (r_2^2 - r_1^2) h \\ &= \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) h \\ &= 2\pi \left(\frac{r_2 + r_1}{2} \right) (r_2 - r_1) h \end{aligned}$$

Figura 32. Cálculo de volúmenes mediante el método de casquetes cilíndricos.

En esta expresión podemos reconocer varias cosas. Si ponemos $r = 1/2\,(r_2 + r_1)$, el radio medio de los cilindros, y si ponemos $\Delta r = r_2 - r_1$, el grosor del casquete cilíndrico, entonces podemos expresar el volumen V de la forma siguiente:

$$V = 2\pi r h \Delta r$$

Esta expresión puede recordarse fácilmente si se piensa en que el casquete cilíndrico se abre y se aplana convirtiéndose en un caja rectangular de escaso grosor como lo muestra la Figura 33.

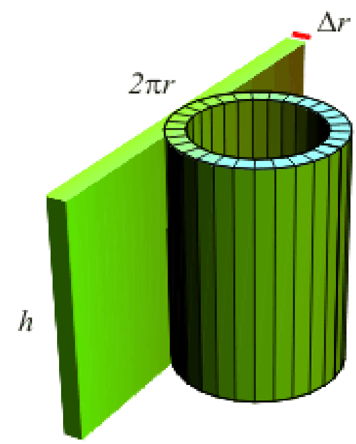
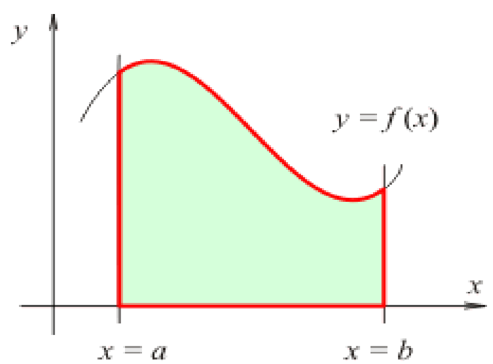


Figura 33

Ahora bien, consideremos el problema general de hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje *y* la región que está comprendida entre la curva $y = f(x)$, con $f(x) > 0$, el eje *x*, es decir, la recta horizontal $y = 0$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde $0 < a < b$. La región aparece representada en la 34 y el sólido de revolución que engendra en la Figura 35.



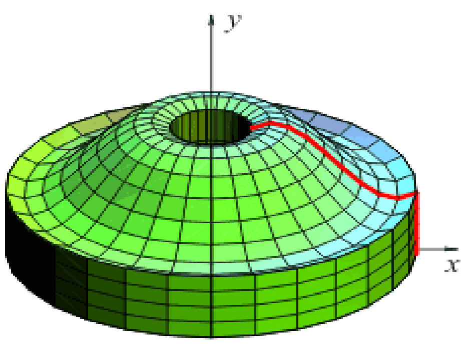


Figura 34 *figura 35*

Fuente: Volúmenes por casquetes cilíndricos: Aquiles Páramo Fonseca. Bógota.Colombia–Junio, 2004.

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en *n*subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, todos con el mismo ancho: $\Delta x = (b - a) / n$. Sea x_i^* el punto medio del *i*-ésimosubintervalo. Consideremos el rectángulo R_i construido sobre el *i*-ésimosubintervalo con una altura de $f(x_i^*)$ y hagámoslo girar en torno del eje *y*. Entonces se produce un casquete cilíndrico que tiene como radio medio x_i^*, como altura $f(x_i^*)$ y cuyo grosor es $\Delta x = x_{i-1} - x_i$. (Véase figura 36). Por lo tanto, el volumen V_i de este casquete cilíndrico está dado por:

$$V_i = (2\pi x_i^*)\, f(x_i^*)\, \Delta x$$

Para obtener un cálculo aproximado del volumen total del sólido de revolución debemos poner *n* casquetes cilíndricos de éstos, unos dentro de los otros, como lo ilustra la Figura 37, y después sumar los volúmenes de todos ellos:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi x_i^*)\, f(x_i^*)\, \Delta x$$

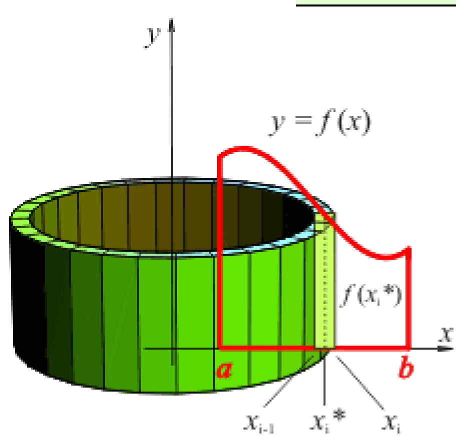
Se puede probar que esta aproximación será mejor entre más grande sea *n*, el número de casquetes cilíndricos. Por eso, se puede poner:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (2\pi x_i{}^*)\, f(x_i{}^*)\, \Delta x = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$

Y de esta manera hemos llegado a formular una regla general para el cálculo de volúmenes con el método de los casquetes cilíndricos. Es la siguiente:

<u>Regla general</u>: El volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje *y* la región que está comprendida entre la curva $y = f(x)$, con $f(x) > 0$, el eje *x* y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde $0 < a < b$, está dado por la integral:

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx}$$



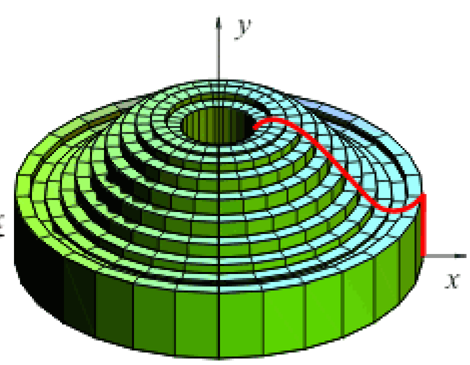
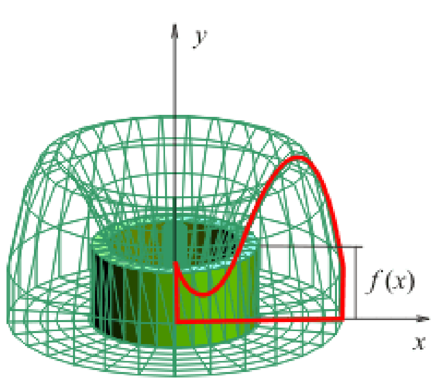


Figura 36 *Figura 37*

Ejemplo 1

Volvamos al problema planteado al comienzo de esta página, el de hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar sobre el eje *y* la región comprendida, en el primer cuadrante, entre la curva $y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ y la vertical $x = 3$. Como los señalamos en la introducción, este volumen no puede calcularse fácilmente con el método de las secciones transversales pero sí con el método de los casquetes cilíndricos. En este caso la región que gira está delimitada por la curva $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$, por el eje *x* y por las rectas verticales $x = 0$ y $x = 3$. La altura de los casquetes cilíndricos varía de acuerdo a la función $f(x)$ como lo muestra la Figura 38 y por eso, la integral para el volumen es:



$$\int_0^3 2\pi x\, f(x)\, dx = 2\pi \int_0^3 x(-x^3 + 4x^2 - 3x + 1)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (-x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x)\, dx$$

$$= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{99}{5}\pi$$

Figura 38

TEMA N° 2: "INTEGRALES IMPROPIAS"

Es aquella integral donde no se cumple alguno de los requisitos que se verifican en las integrales vistas hasta ahora o propias, es decir, donde el intervalo de integración no es acotado.

Se tiene 2 casos

Integrales impropias de intervalo no acotado.

Integrales impropias de función no acotada.

1. Integrales impropias de intervalo no acotado:

1. $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$

2. $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Donde $f\left(x\right)$ está acotada.

El modo de resolverlas es:

1. $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = Lím_{u\to\infty}\int_{a}^{u} f(x)dx$

2. $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = Lím_{u\to-\infty}\int_{u}^{a} f(x)dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=$

   $=Lím_{u\to\infty}\int_{a}^{u} f(x)dx + Lím_{u\to-\infty}\int_{u}^{a} f(x)dx$

2. Integrales impropias de función no acotada.

$\int_{a}^{b} f(x)dx$ Donde en algún punto del intervalo [a, b] la función no está acotada.

Ejemplo $\int_{0}^{2} \frac{1}{x}dx$

Modo de resolverlas:

Si no está acotada en el extremo inferior:

$$Lím_{u\to a}\int_u^b f(x)dx$$

Si no está acotada en el extremo superior:

$$Lím_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx$$

Si no está acotada en algún punto intermedio *c*, bastará con separar el intervalo en dos por ese punto *c*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

UNA INTEGRAL IMPROPIA SERÁ CONVERGENTE CUANDO EL LÍMITE SEA FINITO UNA INTEGRAL IMPROPIA SERA DIVERGENTE CUANDO EL LÍMITE SEA INFINITO

Ejemplos:

1. Integral impropia de intervalo no acotado

$\int_0 3e^{-x}dx = Lím_{u\to\infty}\int_0^u 3e^{-x}dx = 3\lim_{u\to\infty}(-e^{-u}+1) =$ Comprobamos que es convergente.

$$3(0+1) = 3$$

2. Integral impropia de intervalo no acotado

$$\int_0^\infty \frac{3x}{x^2+1}dx$$

$$3\lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{x}{x^2+1}dx = \qquad \frac{3}{2}\lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{3}{2}\lim_{u\to\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^u =$$

$$\frac{3}{2}\lim_{u\to\infty}\left[\ln(u^2+1)-\ln(1)\right] = \frac{3}{2}(\infty-0) = \infty$$

Divergente

3. Integral impropia de función no acotada:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx = \lim_{a\to3}\int_a^4 (x-3)^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{a\to3}\left[\frac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_a^4 =$$

$$2\lim_{a\to3}\left[(x-3)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2\left[(x-3)^{\frac{1}{2}}-0\right] = 2$$

Convergente.

Enlaces:

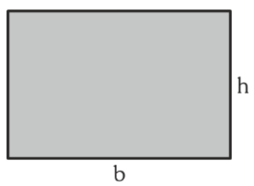
https://www.youtube.com/watch?v=1Jv77h8PGYc

LECTURA SELECCIONADA N° 1

"Área"

Larson, R., Hostetler R. & Edwards B. (2009). *Cálculo integral.* México D.F.: Mc Graw Hill. Pág. 86.

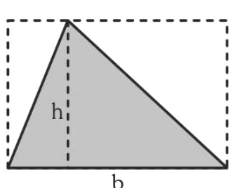
En la geometría euclideana, el tipo más simple de región plana es un rectángulo. Aunque la gente a menudo afirma que la fórmula para el área de un rectángulo es A = bh, como se muestra en la figura nº 39, resulta más apropiado decir que ésta es la definición del área de un rectángulo.



Rectángulo $A = bh$

Figura 1

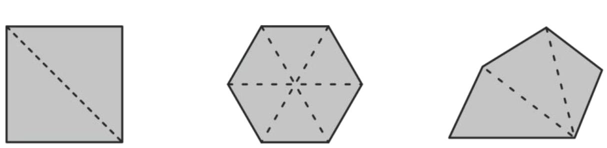
De esta definición, se puede deducir fórmulas para áreas de muchas otras regiones planas. Por ejemplo, para determinar el área de un triángulo, se puede formar un rectángulo cuya área es dos veces la del triángulo, como se indica en la figura 40.



Triángulo A = $A = \frac{1}{2}bh$

Figura 2

Una vez que se sabe cómo encontrar el área de un triángulo, se puede determinar el área de cualquier polígono subdividiéndolo en regiones triangulares, como se ilustra en la figura 3.3.

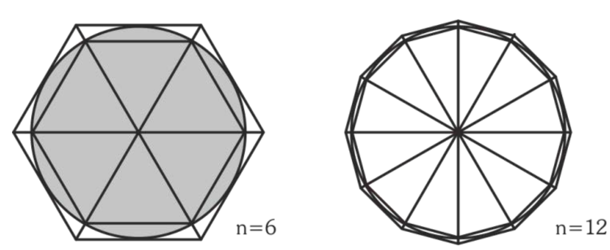


Paralelogramo Hexágono Polígono

Figura 3

Hallar las áreas de regiones diferentes a las de los polígonos es más difícil. Los antiguos griegos fueron capaces de determinar fórmulas para las áreas de algunas regiones generales (principalmente aquellas delimitadas por cónicas) mediante el método de exhaución. La descripción más clara de este método la hizo Arquímedes. En esencia, el método es un proceso de límites en el que el área se encierra entre dos polígonos (uno inscrito en la región y otro circunscrito alrededor de la región).

Por ejemplo, en la figura 41 el área de una región circular se aproxima mediante un polígono inscrito de n lados y un polígono circunscrito de n lados. Para cada valor de n el área del polígono inscrito es menor que el área del círculo, yu el área del polígono circunscrito es mayor que el área del círculo. Además, a medida que n aumenta, las áreas de ambos polígonos van siendo cada vez mejores aproximaciones al área del círculo.



El método de exhaución para determinar el área de una región circular

El área de una región plana

Recordar que los orígenes del cálculo están relacionados con dos problemas clásicos: el problema de la recta tangente y el problema del área. En el ejemplo 3 se inicia la investigación del problema del área.

EJEMPLO 3 Aproximación del área de una región plana

Emplear los cinco rectángulos de la figura 42 a) y b) para determinar dos aproximaciones del área de la región que se encuentra entre la gráfica de

$f(x) = x^2 + 5$

y el eje x entre x = 0 y x = 2

Solución

a) Los puntos terminales de la derecha de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}i$, donde i = 1, 2, 3, 4, 5. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada rectángulo se puede obtener al hallar f en el punto terminal derecho de cada intervalo.

$$\left[0,\frac{2}{5}\right],\left[\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right],\left[\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right],\left[\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right],\left[\frac{8}{5},\frac{10}{5}\right]$$
$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

Evaluar f en los puntos terminales de la derecha de estos intervalos

La suma de las áreas de los cinco rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{5}\overbrace{f\left(\frac{2i}{5}\right)}^{\text{Altura}}\overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Acho}}=\sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2+5\right]\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{162}{25}=8,08$$

Como cada uno de los cinco rectángulos se encuentra dentro de la región parabólica, se concluye que el área de la región parabólica es mayor que 6,48.

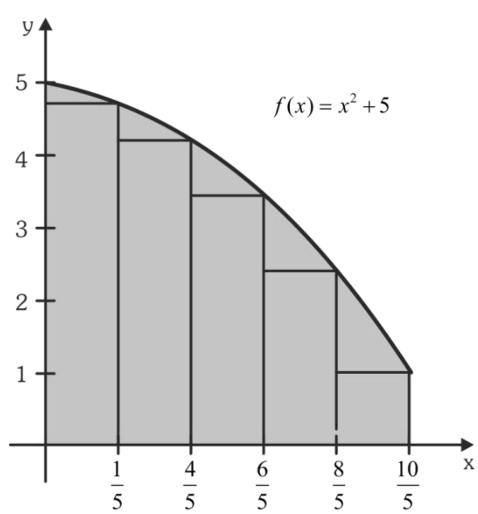


Figura 4

El área de una región parabólica es mayor que el área de los rectángulos

b) Los puntos terminales izquierdos de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}(i-1)$, donde i = 1, 2, 3, 4, 5 El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$ y la altura de cada uno puede obtenerse evaluando f en el punto terminal izquierdo de cada intervalo.

$$\sum_{i=1}^{5}\overbrace{f\left(\frac{2i}{5}\right)}^{\text{Altura}}\overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Acho}}=\sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2+5\right]\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{162}{25}=8,08$$

Debido a que la región parabólica se encuentra contenida en la unión de las cinco regiones rectangulares, es posible concluir que el área de la región parabólica es menor que 8.08

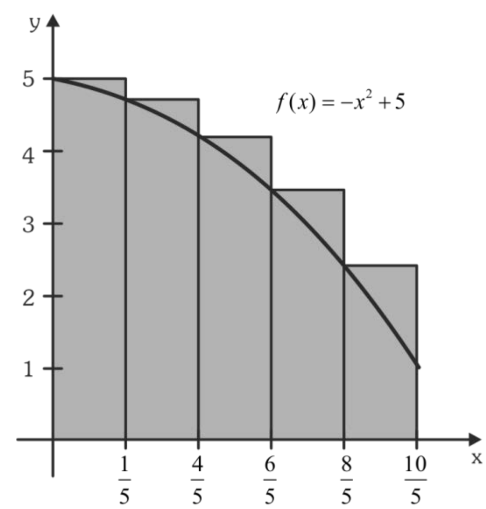


Figura 5

El área de la región parabólica es menor que el área de los rectángulos

Figura 43

Combinando los resultados de los apartados a) y b), es posible concluir que

6,48 < (Área de la región) < 8,08.

NOTA Al incrementar el número de rectángulos utilizados en el ejemplo 3, se pueden obtener apoximaciones más y más cercanas al área de la región. Por ejemplo, al utilizar 25 rectángulos, cda uno de ancho $\frac{2}{25}$, puede concluirse que

7,17 < (Área de la región) < 7,49.

ACTIVIDAD FORMATIVA N.º 2

- **Aplicación:** A continuación se da una breve reseña sobre los puntos de equilibrio.

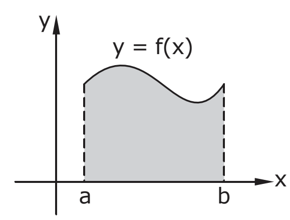
Lee atentamente y sigue los pasos indicados en la lectura.

Puntos de equilibrio

El centro de gravedad de un cuerpo físico es el punto que se encuentra en el centro de su distribución de peso. Los equilibristas tratan de mantener la vertical que pasa por su centro de gravedad dentro de su base y de este modo mantener el equilibrio; un ejemplo muy conocido de esto lo muestra la famosa torre de Pisa: como la vertical que pasa por el centro de gravedad de la torre cae dentro de su base, la torre permanece en equilibrio; de lo contrario caería.

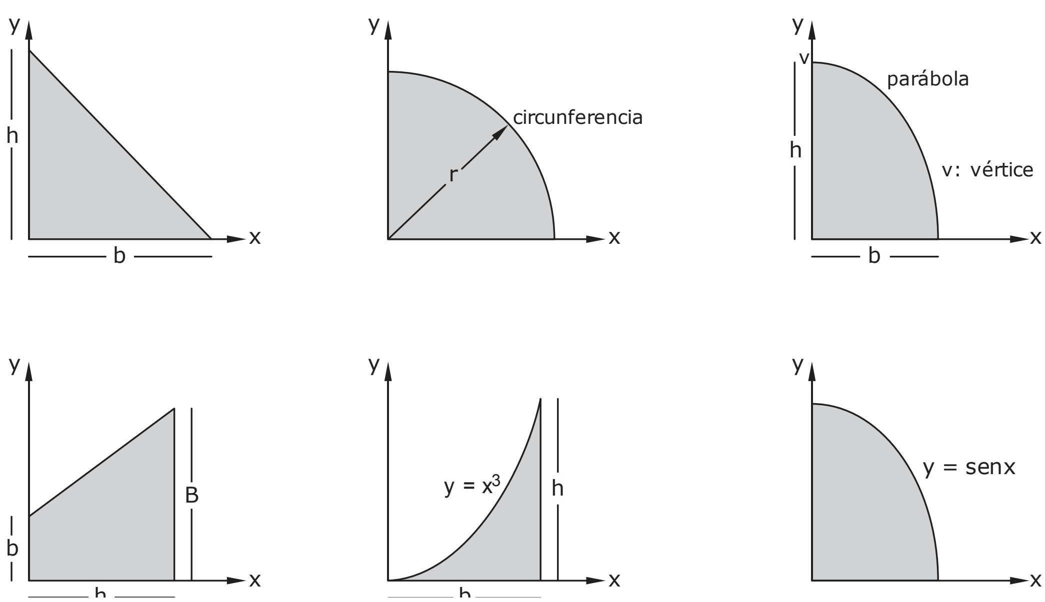
En varios problemas de ingeniería es necesario conocer el centro de gravedad de figuras geométricas básicas. En esta actividad investigarán los centros de gravedad de figuras, como triángulos, rectángulos, sectores parabólicos, cuadrantes circulares, etc.

Para hallar el centro de gravedad de una región plana como la que te mostramos deberás ejecutar los siguientes pasos:



1. Hallar el área de la región.
2. Calcula la integral $\int_a^b x\,f(x)\,dx$
3. Calcula $\bar{x}$ dividiendo el valor hallado en (2) entre el área de la región.
4. Calcular la integral $\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx$
5. Calcula y dividiendo el valor hallado en (4) entre el área de la región.
6. El centro de gravedad de la región (referido al sistema de referencia mostrado) es: (x, y).

Utiliza estos pasos con tus estos pasos con tus compañeros para calcular los centros de gravedad de las figuras geométricas que te mostramos; realicen una adecuada división del trabajo y comprueben sus resultados, con un libro de mecánica o de resistencia de materiales. Redacten un pequeño informe acerca del uso de los centros de gravedad en la ingeniería.

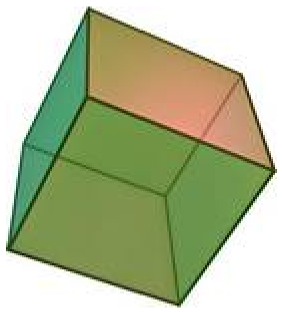


GLOSARIO DE LA UNIDAD III

A

Área: Medida de la superficie que cubre un cuerpo o figura geométrica. Sus unidades se miden en unidades cuadradas, también denomindas de superficie, como centimetros cuadrados (cm^2), metros cuadrados (m^2), etc.

Área superficial: Medida del tamaño de una superficie.



Ejemplo: El área de superficie de un cubo es $6\times(longitud\ del\ borde)^2$

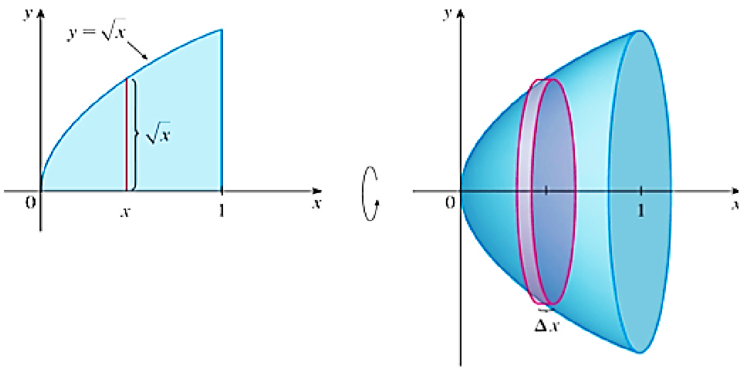
L

Longitud de curva: En matemática, la longitud de arco, también llamada rectificación de una curva, es la medida de la distancia o camino recorrido a lo largo de una curva o dimensión lineal. Históricamente, ha sido difícil determinar esta longitud en segmentos irregulares; aunque fueron usados varios métodos para curvas específicas, la llegada del cálculo trajo consigo la fórmula general para obtener soluciones cerradas para algunos casos.

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

S

Sólido de revolución: Se denomina sólido de revolución o volumen de revolución, al sólido obtenido al rotar una región del plano alrededor de una recta ubicada en el mismo, las cuales pueden o no cruzarse. Dicha recta se denomina eje de revolución. Sea f una función continua y positiva en el intervalo $[a,b]$



V

Volumen: Espacio que ocupa un cuerpo. Sus unidades se miden en litros, o unidades de longitud cubicas, como metro cúbico (m3).

BIBLIOGRAFíA DE LA UNIDAD III

BÁSICA

Larson, R. & Bruce, E. (2016). *Cálculo* (10ma ed.). México, D.F.: Cengage Learning.

COMPLEMENTARIA

Espinoza, R. E. (2004). *Análisis Matemático II.* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Espinoza, R. E. (2004).*Análisis Matemático IV.* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Kreyszig, E**.** (2000). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (3ra ed.). México D.F.: México: Limusa S.A.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Bruce, E. (2011). *Cálculo Integral–Matemática 2.* México D.F.: Mc Graw Hill.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Bruce, E. (2011). *Cálculo Esencial*. México D.F.: Cengage Learning.

Leithold, L. (1998). *El Calculo.* México: Oxford.

Stewart, J. (2008). *Cálculo: Trascendentes Tempranas* (6ta ed.). México D.F.: Cengage Learning.

Zill D.G. & Wrigth W.S. (2011). *Cálculo de una variable. Transcendentes Tempranas.* México D.F.: Mc Graw Hill.

AUTOEVALUACIÓN N° 3

Estimado participante: es momento de poder verificar su aprendizaje sobre los temas tratados en esta unidad. Actúe con la máxima responsabilidad y seriedad. Haga el mayor esfuerzo para desarrollar los ejercicios en el tiempo estimado.

1. La función posición de un objeto que se mueve sobre una recta de coordenadas es $s(t) = t^2 - 6t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la distancia recorrida en el intervalo de tiempo [0, 9]

   a) 45 m

   b) 55 cm

   c) 65 m

   d) 45 cm

   e) 35 cm

2. Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje X sobre el intervalo [– 2, 2]

   a) 7

   b) 8

   c) 3

   d) 6

   e) 9

3. Una pelota de tenis se lanza verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pies con una velocidad inicial de 8 pies/s. ¿Cuál es la velocidad de impacto si la pelota golpea en la cabeza a una persona de 6 pies de estatura?

   A) -45 pies/s

   B) -36 pies/s

   C) -56 pies/s

   D) -25 pies/s

   E) -75 pies/s

4. Calcule el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje X la región acotada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

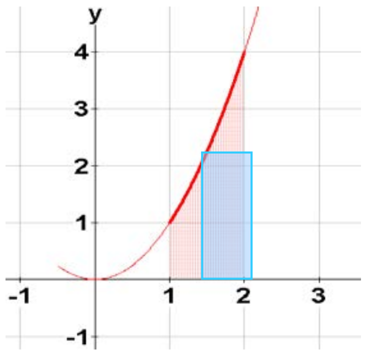
A) 5.5π

B) 6π

C) 9π

D) 24π/5

E) 31π/5



5. Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $\left[0,\sqrt{2}\right]$ alrededor del eje Y

A) 16π/3

B) 25π/4

C) 13π/3

D) 7π/3

E) 35π/4

6. Calcule el área encerrada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$

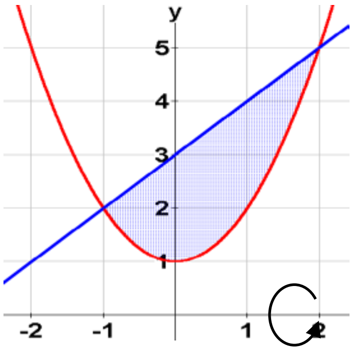
A) 5,5

B) 6

C) 9

D) 4,5

E) 3,5



7. Encuentre el área acotada por las gráficas $y=\sqrt{x}$ y $y=x^2$

a) 9/2

b) 1/3

c) 7/2

d) 17/4

e) 5/2

8. Hallar el volumen del paraboloide de revolución que se genera al rotar la ecuación de la parábola en su forma canónica con eje focal el eje "y", si el radio de su base es "R" y su altura es "H".

A) $V = \pi \dfrac{H + R^2}{2}$

B) $V = \pi \dfrac{HR^2}{2}$

C) $V = \pi \dfrac{H / R^2}{2}$

D) $V = \pi \dfrac{H - R^2}{2}$

E) $V = \pi \dfrac{3HR^2}{2}$

UNIDAD IV

"LAS INTEGRALES MÚLTIPLES"

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD IV

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de calcular centroides, centro de masa y momentos de inercia en sólidos, utilizando Integrales dobles y triples, sus teoremas y corolarios.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
TEMA N° 1: Integrales Dobles: 1 Definición de la integral doble. 2 Cálculo de una integral doble. 3 Cambio de variables en las integrales Dobles: Teorema y Corolarios. 4 Integrales Dobles en coordenadas Polares. **TEMA N° 2: Integrales Triples**: 1 Definición. 2 Cálculo de integrales triples. **TEMA N° 3: Aplicaciones** 1 Cambio de variables en integrales triples. 2 Coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas. 3 Momentos de Regiones Planas. Centroides y el Teorema de Pappus. 4 Centro de Masa y Momentos de Inercia en sólidos.	• Resuelve integrales Dobles. • Aplica el cambio de variable en las integrales dobles • Resuelve integrales dobles en coordenadas polares. • Resuelve Integrales Triples mediante integrales iteradas. • Aplica el cambio de variable en el cálculo de integrales triples. • Aplica las integrales múltiples en el cálculo de centroides, centro de masa y momentos de inercia en sólidos.	• Desarrolla una actitud positiva a los nuevos conocimientos y métodos de solución de integrales dobles y triples. • Demuestra responsabilidad, trabaja en equipo. • Respeta a los demás y es tolerante frente a la diferencia de procedimientos para resolver un mismo problema de integrales múltiples. • Muestra interés por superarse y proponer nuevos criterios para realizar los ejercicios del cálculo integral.

RECURSOS:

Videos:

Tema n° 1

Integrales dobles

https://www.youtube.com/watch?v=9gh8UAuuCVY (definición didáctica)

https://www.youtube.com/watch?v=hHJzmjkVVs8 (ejemplo)

Tema n° 2

Integrales triples

https://www.youtube.com/watch?v=G5nwF2hibX4 (ejemplo)

Tema n° 3

Aplicaciones

https://www.youtube.com/watch?v=RuAy6tQ0zcc (ejemplo de coordenadas esfericas)

https://www.youtube.com/watch?v=xOsGfaACbNQ (ejemplo de coordenadas cilindricas)

Diapositivas elaboradas por el docente:

Lectura complementaria:

Lectura seleccionada 1: "Arquímedes, Bernoulli. El mundo mágico de las espirales"

Fuente: Curvas con historia. Recuperado de http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/curvashistoria.pdf el 26 de marzo de 2016.

TEMA N° 1: INTEGRALES DOBLES

Recordemos una integral simple donde x es tomado como una constante (número)

Ejemplo 1. Integración respecto a y

Se pide evaluar $\int_2^x \left(2x^2y^{-2}+2y\right)dy$

Solución:

Considerando a $"x"$ constante se integra con respecto a $"y"$ de manera que se obtiene:

$$\int_2^x (2x^2y^{-2}+2y)dy = \left[\frac{-2x^2}{y}+y^2\right]_2^x$$

$$\left(\frac{-2x^2}{x}+x^2\right)-\left(\frac{-2x^2}{2}+2^2\right)$$

$$2x^2-2x-4$$

Aquí podemos observar, que la integral define una función de $"x"$

1. DEFINICION DE INTEGRAL DOBLE:

Sea F una región de área A del plano “xy”, F incluye su frontera (Región Cerrada).

Subdividimos al plano “xy” en rectángulos mediante rectas paralelas a los ejes de coordenadas (figura 1).

Partiendo de algún lugar conveniente (tal como el extremo superior izquierdo de F), numeramos sistemáticamente todos los rectángulos que están dentro de F.

Supongamos que hay “n” de tales rectángulos y los designamos con r_1, r_2,....r_n.

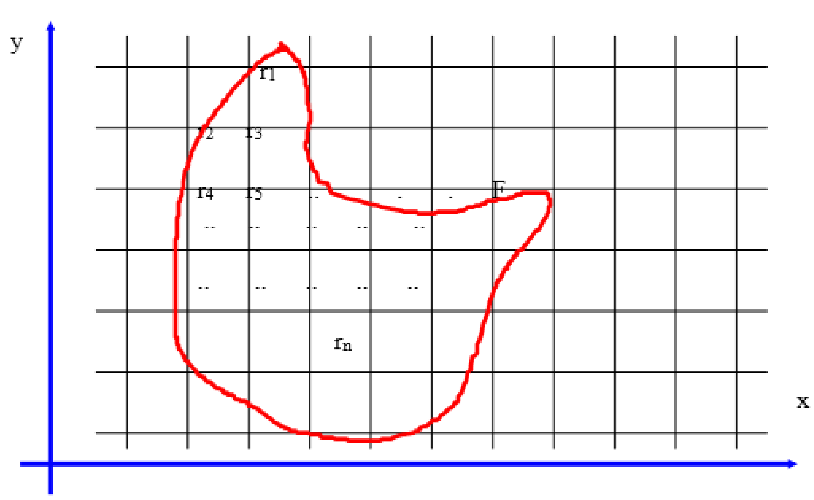


Figura 39

Utilizamos los símbolos A (r_1), A (r_2),..., A (r_n) para las áreas de estos rectángulos.

El conjunto de los n rectángulos $\{r_1, r_2,..., r_n\}$ se llama una SUBDIVISION Δ de F.

La NORMA de la subdivisión que generalmente se indica con $||\Delta||$, es la longitud de la diagonal del mayor rectángulo de la subdivisión Δ.

Supongamos que z = f(x, y) es una función definida para todo (x, y) de la región F.

La definición para la INTEGRAL DOBLE de f SOBRE LA REGION F es análoga a la definición de integrales para funciones de una variable. Elegimos un punto arbitrario en cada uno de los rectángulos de la subdivisiónΔ, designando las coordenadas del punto en el rectángulo r_i con (ξ_i, η_i). Ahora formamos la suma: $f(\xi_1, \eta_1). A(r_1) + f(\xi_2, \eta_2). A(r_2) + ... + f(\xi_n, \eta_n). A(r_n)$ en forma general

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i).A(r_i)$$

Esta suma es una aproximación a la integral doble que definiremos; y se denomina "**SUMA INTEGRAL**".

Las sumas tales como (1) pueden formarse para subdivisiones con cualquier Norma positiva y con el iésimo punto (ξ_i, η_i) elegido en forma arbitraria en el rectángulo r_i.

DEFINICION

Un número L es el límite de las sumas del tipo (1) $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) A(ri) = L$ Si dado un $\xi > 0$; $\exists\ \delta > 0$ / $\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) A(\dot{r}) - L\right] < \varepsilon$ para toda subdivisión Δ con $||\Delta|| < \delta$ y para todas las elecciones posibles de los puntos (ξ_i, η_i) en los rectángulos r_i. Puede demostrarse que si el número L existe entonces debe ser único.

DEFINICION

Si f está definida en una región F y el número L, definido anteriormente, existe, decimos que f es **INTEGRABLE SOBRE F**, y escribimos: $\int\int_F f(x,y).\ dA$

A está expresión la llamaremos también **INTEGRAL DOBLE DE f SOBRE F**. La integral doble tiene una interpretación geométrica como volumen de un sólido. Efectivamente cada término de la sumatoria (1) representa el volumen de un cuerpo elemental de base (r_i) y altura $h = f(\xi_i, \eta_i)$.

Siendo z= f(x,y) una función continua en el dominio cerrado representado por la REGION F, la sumatoria (1) tiene un límite si la diagonal máxima de Δr_i tiende a cero con n tendiendo a infinito. Siendo este límite siempre el mismo, cualquiera sea el modo de la división del dominio de los elementos Δr_i, y la selección del punto de coordenadas (ξ_i, η_i) en los dominios parciales Δr_i.

Este límite se llama integral doble de la función f(x,y) sobre F y si f(x,y) ≥ 0, la integral doble es igual al volumen del cuerpo limitado por la superficie z = f(x,y), el plano z = 0 y la superficie cuyas generatrices son paralelas al eje 0z a través de la frontera de F. (fig.40)

V(s) = $\int\int_F$ f(x,y). dA Siendo V(s) el volumen del sólido definido por (x,y) $\in$ F $\wedge$ 0 $\leq$ z $\leq$ f(x,y)

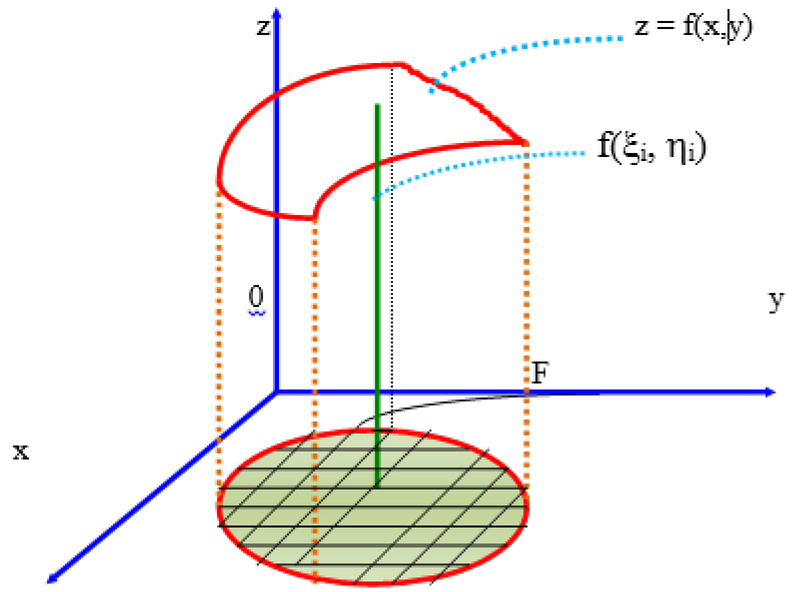


Figura 40

Ejemplo: La integral de una integral

Se pide evaluar la siguiente integral:

$$\int_1^2\left[\int_2^x\left(2x^2y^{-2}+2y\right)dy\right]dx$$

Si utilizamos el resultado del ejemplo introductorio se tiene:

$$\int_1^2\left[\int_2^x\left(2x^2y^{-2}+2y\right)dy\right]dx=\int_1^2\left(2x^2-2x-4\right)dx=$$

$$=\left(\frac{16}{3}-4-8\right)-\left(\frac{2}{3}-1-4\right)=\frac{-7}{3}$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE

Enunciaremos varias propiedades de las integrales dobles en analogía con las propiedades de la integral definida de funciones de una variable.

TEOREMA

Si c es un número y f es integrable sobre una región cerrada F, entonces c.f es integrable y:

$$\int\int_F c.f(x,y).dA = c.\int\int_F f(x,y).dA$$

TEOREMA

Si f y g son integrables sobre una región cerrada F, entonces:

$$\int\int_F [f(x,y) + g(x,y)].dA = \int\int_F f(x,y).dA + \int\int_F g(x,y).dA$$

El resultado de este teorema se puede extender a cualquier número finito de funciones integrables.

Las demostraciones de los teoremas anteriores resultan directamente de la definición.

TEOREMA

Supongamos que f es integrable sobre una región cerrada F y $m \leq f(x,y) \leq M \ \forall \ (x,y) \in F$ entonces si A(F) designa el área de la región F, tenemos: $m \, . \, A(F) \leq \int\int_F f(x,y).dA \leq M \, . \, A(F)$

TEOREMA

Si f y g son integrables sobre F y $f(x,y) \leq g(x,y) \ \forall \ (x,y) \in F$, entonces

$\int\int_F f(x,y).dA \leq \int\int_F g(x,y).dA$

TEOREMA

Si se hace una partición de la región cerrada F en las regiones F_1 y F_2; es decir $F_1 \cap F_2 = 0$ y $F_1 \cup F_2 = F$ y si f(x,y) es continua en F se tiene: $\int\int_F f(x,y).dA = \int\int_{F1} f(x,y).dA + \int\int_{F2} f(x,y).dA$

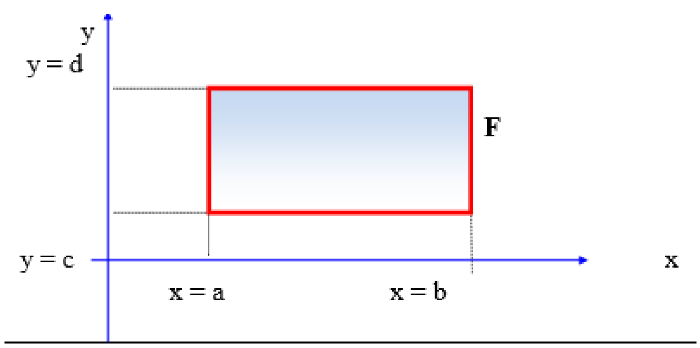
1.2. CALCULO DE LAS INTEGRALES DOBLES:

La definición de integral doble no es muy útil para la evaluación en cualquier caso particular.

Naturalmente, puede suceder que la función f(x,y) y la región F sean simples, de manera que el límite de la suma (1) pueda calcularse directamente. Sin embargo, en general no se pueden determinar tales límites.

Como en el caso de las integrales ordinarias y curvilíneas, conviene desarrollar métodos simples y de rutina para determinar el valor de una integral doble dada.

Sea F en rectángulo cuyos lados son x = a, x = b, y = c, y = d.



Suponemos que $z = f(x,y)$ es continua en cada $(x,y) \in F$. Formemos la integral simple con respecto a x $\int_a^b f(x,y).dx$ donde se mantiene fijo **y** al realizar la integración.

Naturalmente, el valor de la integral anterior dependerá del valor utilizado para **y** o sea que podemos escribir:

$$A(y) = \int_a^b f(x,y).dx$$

La función A(y) está definida para $c \leq y \leq d$ y se puede demostrar que si f(x,y) es continua en F entonces A(y) es continua en [c,d].

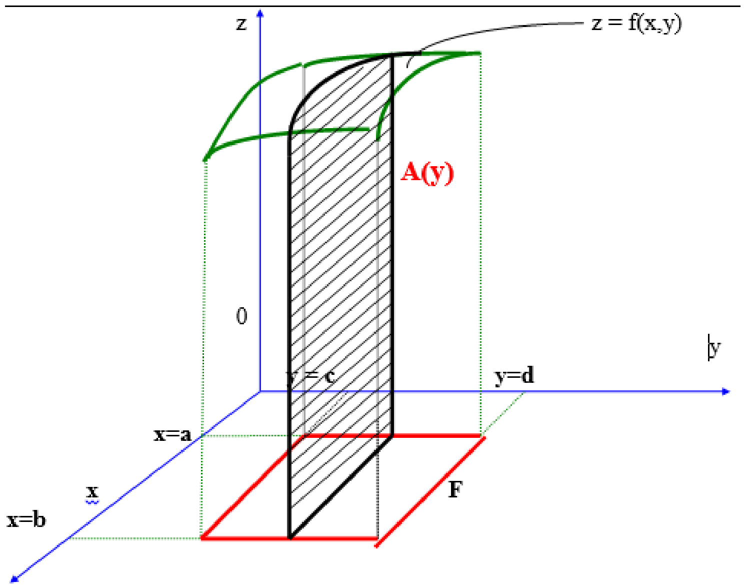


Figura 41

Se puede calcular la integral de A(y) $\int_c^d A(y).dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y).dx \right] dy$ (2)

Podríamos haber fijado primero x, luego formar la integral $B(x) = \int_c^d f(x,y).dy$ entonces

$$\int_a^b B(x).dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y).dy \right] dx^{(3)}$$

Obsérvese que las integrales se calculan sucesivamente por lo que reciben el nombre de:

INTEGRALES ITERADAS.

En (2) integramos primero con respecto a x (considerando y constante) y luego con respecto a y; en (3) integramos utilizando un orden inverso.

Se pueden definir las integrales iteradas sobre regiones F limitadas por curvas.

Esta situación es más complicada que la que hemos visto.

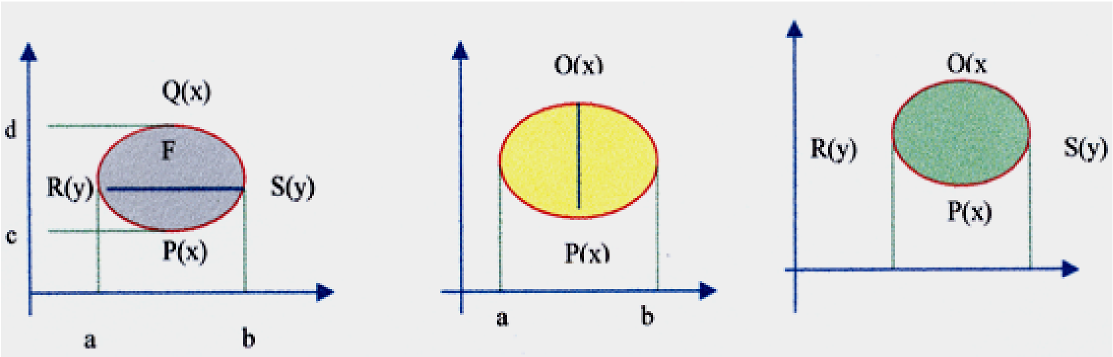


Figura 42

Consideremos una región F (ver figuras) donde la frontera está formada por las rectas x = a, x = b, $y = p_{(x)}$, $y = q_{(x)}$ con $p_{(x)} < q_{(x)}$ para a ≤ x ≤ b. Definimos $\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y).dy.dx$ donde primero integramos (para x fijo) desde la curva inferior hasta la superior, es decir a lo largo de un segmento típico. Luego integramos con respecto a x desde **a** hasta **b**. Con mayor generalidad se puede definir las integrales iteradas sobre una región F, integrando primero respecto de y tenemos $\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y).dy.dx$ integrando respecto de x será $\int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y).dx.dy$

EJEMPLO

Dada la función f(x,y) = x.y la región triangular F limitada por las rectas y = 0, y = 2x, x = 2, hallar los valores de ambas integrales iteradas. Integrando respecto a y primero tenemos:

$$\int_0^2\int_0^{2x} x.y.dx.dy = \int_0^2 \left[x.\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x} dx = \int_0^2 2.x^3.dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^2 = 8$$

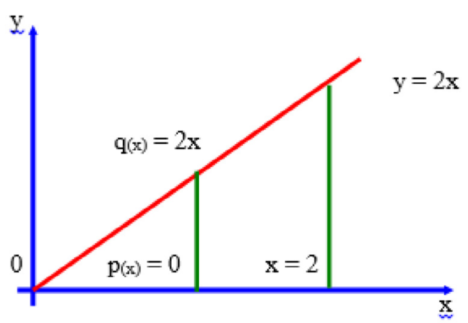


Figura 43

Integrando en x tendremos:

$$\int_0^4\int_{y/2}^{2} x.y.dx.dy = \int_0^4 \left[y.\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{2} dy = \int_0^4 [2y-(y^3/8)].dy = \left[y^2-\frac{y^4}{32}\right]_0^4 = 16-8=8$$

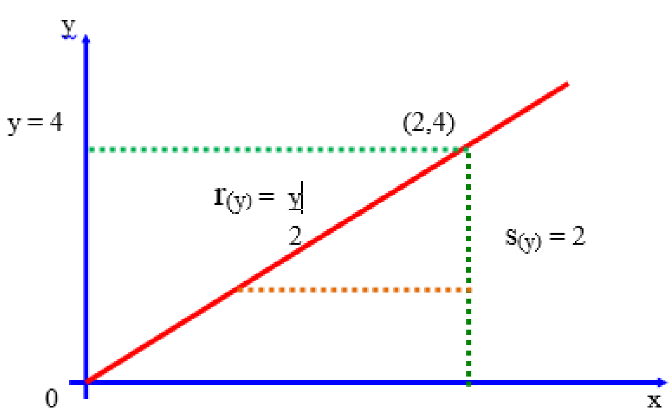


Figura 44

No es coincidencia que las dos integrales tengan el mismo valor. El siguiente teorema describe esta situación.

TEOREMA

Supongamos que F es una región cerrada que consta de todo (x,y) / $a \le x \le b$, $p_{(x)} \le y \le q_{(x)}$ donde p y q son continuas y $p_{(x)} < q_{(x)}$ para $a \le x \le b$.

Suponemos que f(x,y) es continua en (x,y) de F. Entonces: $\int_F\int f(x,y).dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y).dy.dx$

El resultado vale si la región F se representa en la forma $c \le y \le d$; $r_{(y)} \le x \le s_{(y)}$; $r_{(y)} \le s_{(y)}$ para $c \le y \le d$. En tal caso: $\int_F\int f(x,y).dA = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y).dx.dy$

Es decir que cuando ambas integrales se pueden calcular coinciden con la integral doble y por lo tanto son iguales entre si. Hemos considerado dos formas de expresar una región F en el plano xy. Ellas son: $a \le x \le b$; $p_{(x)} \le y \le q_{(x)}$

$c \le y \le d$; $r_{(y)} \le x \le s_{(y)}$

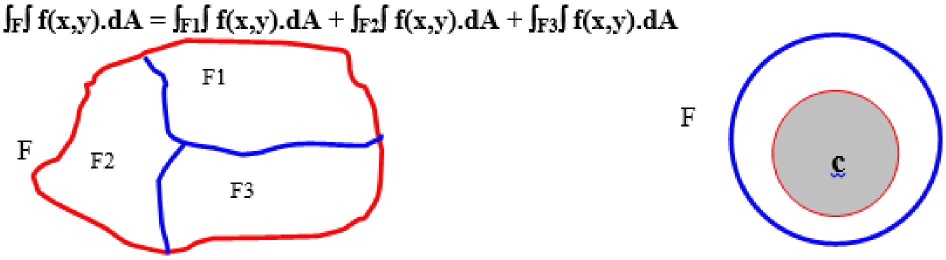
Frecuentemente ocurre, que una región F se puede expresar más simplemente en una de las formas dadas anteriormente que en la otra.

En casos dudosos, una gráfica de F permite ver cual es más simple y por lo tanto, cual de las integrales iteradas se calcula más fácilmente.

Una región F a veces no puede expresarse en la forma anterior. En tales casos se puede subdividir F en un número de regiones, tal que cada una de ellas tenga alguna de las dos formas. Efectuándose las integraciones en cada una de las subregiones y se suman los resultados.

Las siguientes figuras ilustran algunos ejemplos de como se pueden efectuar tales subdivisiones en virtud de la propiedad aditiva de conjuntos:

$\int_F\int f(x,y).dA = \int_{F1}\int f(x,y).dA + \int_{F2}\int f(x,y).dA + \int_{F3}\int f(x,y).dA$



$\int_F\int f(x,y).dA = \int_{CUF}\int f(x,y).dA - \iint_C f(x,y).dA$

Figura 45

Ejemplo:

Se desea calcular la integral doble $\iint_R x^2 y dx dy$ siendo $R = [1,2] \times [0,1]$

Solución: dado que la función $x^2 y$ es continua en R basta aplicar el Teorema de Fubini para obtener

$$\iint_R x^2 y dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2 y dy \right) dx = \int_1^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

1.3. CAMBIO DE VARIABLE EN LAS INTEGRA DOBLES:

Sea $\iint_R f(x,y).dx.dy$ de donde $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ (1) y que esta transformación posee una inversa única dada por: $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ por lo que el Jacobiano de (1)

$$J = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

Al recinto R del plano x, y le corresponde un recinto R′ en el plano u, v.

Haciendo entonces una partición en R′ con rectas paralelas a los ejes u, v; le corresponde en el plano x, y una partición de R por curvas continuas dadas por (1).

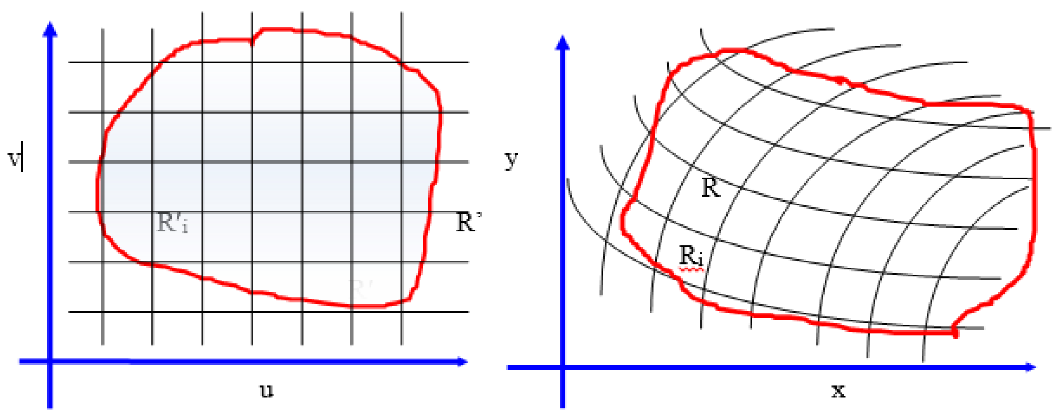


Figura 46

A un subrecinto R'_i de R′ le corresponde un subrecinto R_i de R.

Queremos encontrar como se transforma cada elemento rectangular R'_i en el elemento curvilíneo R_i correspondiente. Para mejor ilustración ampliaremos el dibujo de ambos recintos:

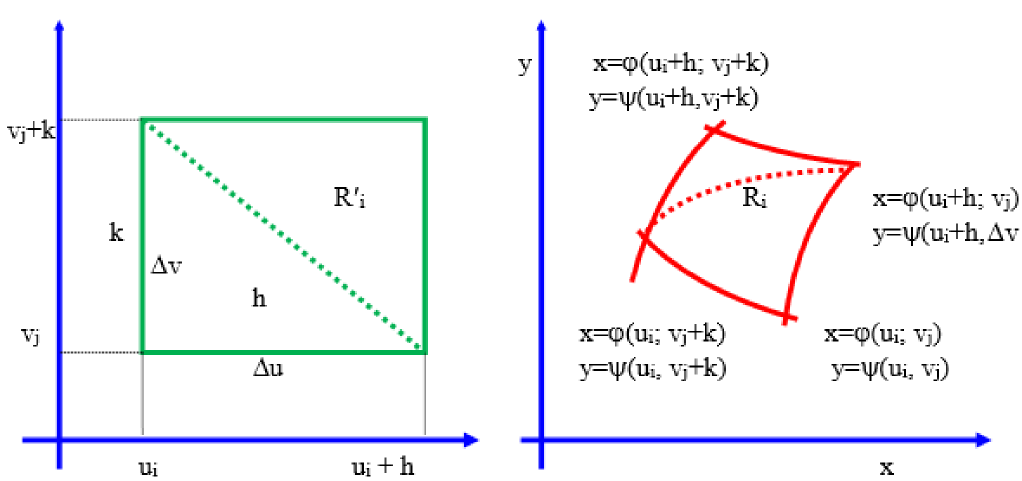


Figura 47

Buscamos la relación que existe entre las áreas de R'_i y R_i; para lo cual podemos considerar a R'_i compuesto por dos triángulos iguales; lo mismo que a R_i.

Para una partición con $||\Delta||$ suficientemente pequeña, podemos considerar a los triángulos curvilíneos de R_i como planos, siendo el área de cada uno de ellos:

$$\frac{A(R)}{2}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\varphi(u_i,v_j) & \varphi(u_i+h,v_j) & \varphi(u_i,v_j+k)\\ \psi(u_i,v_j) & \psi(u_i+h,v_j) & \psi(u_i,v_j+k)\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\varphi(u_i,v_j) & h.\varphi_u(u_i,v_j) & k.\varphi_v(u_i,v_j)\\ \psi(u_i,v_j) & h.\psi_u(u_i,v_j) & k.\psi_v(u_i,v_j)\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Esta última expresión resulta de restar a los elementos de la segunda y tercera columna, los de la primera y aplicando Taylor (despreciando los términos de orden superior al primero) es:

Desarrollando por los elementos de la tercera fila, es:

$$\frac{A(R)}{2}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}h.\varphi_u(u_i,v_j) & k.\varphi_u(u_i,v_j)\\ h.\psi_u(u_i,v_j) & k.\psi_u(u_i,v_j)\end{bmatrix}=\frac{h.k}{2}\begin{bmatrix}\varphi_u(u_i,v_j) & \varphi_u(u_i,v_j)\\ \psi_u(u_i,v_j) & \psi_u(u_i,v_j)\end{bmatrix}=\frac{h.k}{2}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}=\frac{h.k}{2}J\frac{(\varphi,\psi)}{(u,v)}$$

$A(r_i) = h \,.\, k \,.\, J = \Delta u \,.\, \Delta v \,.\, J = A(R'_i)\; J\dfrac{(\varphi,\psi)}{(u,v)}$ Recordando la definición de integral doble

$$\iint_R f(x,y)dx.dy=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(xi,yi).A(ri)$$ y como $f(x,y) = f[\varphi(u,v);\ \psi(u,v)] = F(u,v)$ será

$$\iint_R f(x,y)dx.dy=\iint_R F(u,v).J.du.dv=\iint_R F(u,v).\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}.du.dv$$

con lo que hemos obtenido la relación que liga las variables (x,y) con (u,v).

1.4. INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES:

Sea $F: D\to \mathbf{R}$ con $D \subseteq \mathbf{R}^2$ integrable. Interesa calcular $\iint_D F(x;y)\,dx\,dy$

haciendo el cambio de coordenadas $\begin{cases} x=\rho.\cos\varphi \\ y=\rho.\operatorname{sen}\varphi\end{cases}$

Para calcular la integral en coordenadas polares, hay que expresar el recinto y el campo escalar en esas coordenadas $(F(x;y) = F^*(\rho;\varphi)$.) Definiremos integral doble en coordenadas polares.

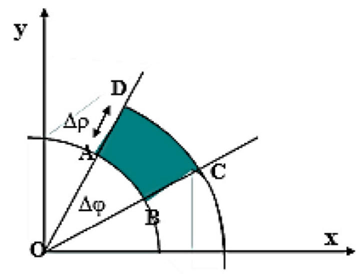
Provocamos particiones regulares en los intervalos de variación de ρ y de φ.

Para valores constantes de ρ, quedan definidas circunferencias concéntricas y para valores constantes de φ se determinan semirrectas con origen en el centro de coordenadas.

El recinto queda, entonces, dividido en trapecios circulares de área A_{ij}.

$$A_{ij} = \text{área}\,\widehat{ODC} - \text{área}\,\widehat{OAB} = \frac{1}{2}\rho_2^2\,\Delta\varphi - \frac{1}{2}\rho_1^2\,\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\rho_2^2 - \rho_1^2)\,\Delta\varphi$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_1)(\rho_2 - \rho_1)\,\Delta\varphi = \rho_m\,\Delta\rho\,\Delta\varphi$$



Para definir la integral doble, hacemos una partición regular en el recinto de integración expresado en coordenadas polares. En cada elemento de área, es decir, en cada uno de los trapecios circulares elegimos un punto arbitrario $P_{ij}(\rho_i;\varphi_j)$ y calculamos $F^*(\rho_i;\varphi_j)$. Por definición de integral doble:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F^*(\rho_i;\varphi_j).A_{ij} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F^*(\rho_i;\varphi_j).\rho_{mij}\Delta\rho_i.\Delta\varphi_j = \iint_{D(\rho;\varphi)} F^*(\rho;\varphi).\rho.d\rho.d\varphi$$

Como las integrales dobles en cartesianas o en polares, deben dar lo mismo, resulta:

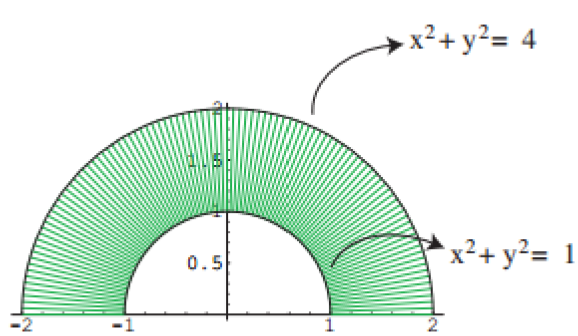
$$\boxed{\iint_{D(x;y)} F(x;y).dx.dy = \iint_{D(\rho;\varphi)} F^*(\rho;\varphi).\rho.d\rho.d\varphi}$$

Observación: Vemos que para resolver una integral doble pasando de coordenadas cartesianas a polares, debemos expresar el recinto y la función en las nuevas coordenadas , reemplazar los diferenciales y multiplicar por un factor de conversión que es ρ.

Ejemplo

Calculemos la integral doble

$\iint_R (3x+4y^2)dA$ Donde R es la región circular que se encuentra en el semiplano superior y esta limitada por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$ como puede verse en la siguiente figura:



Solución:

La región R se describe como:

$$\iint_R (3x+4y^2)dA = \int_0^{\pi}\int_1^{2}(3r\cos\theta + 4(rsen\theta)^2)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[r^3\cos\theta + r^4 sen^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(7\cos\theta + 15sen^2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(7\cos\theta + \frac{15}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

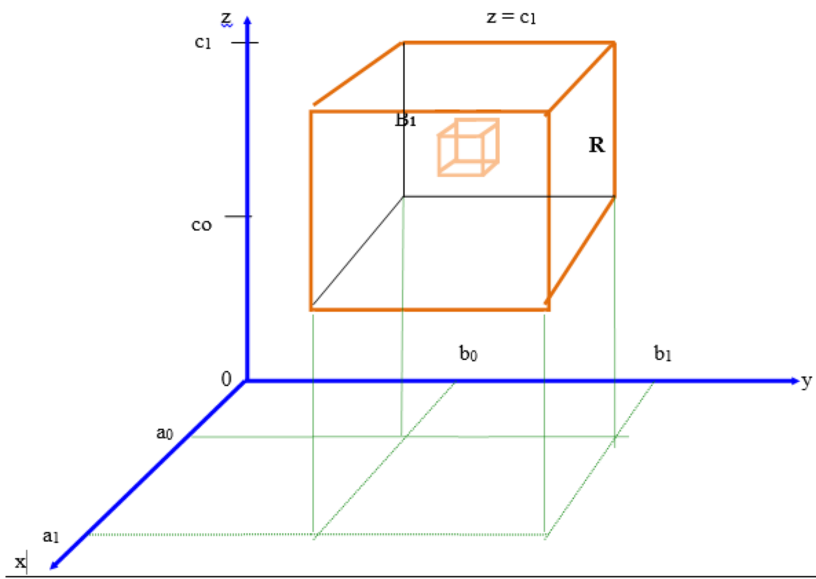
$$= \left[7sen\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}sen(2\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}$$

TEMA N° 2: INTEGRALES TRIPLES:

2.1 Definición.

La definición de integral triple es análoga a la de integral doble. En el caso más simple consideremos una caja rectangular R acotada por 6 planos $x= a_0$, $x= a_1$, $y = b_0$, $y = b_1$, $z = c_0$, $z = c_1$; y sea $u = f(x,y,z)$ una función de tres variables definida en todo (x,y,z) de R.

Subdividimos el espacio en cajas rectángulares mediante planos paralelos a los planos coordenados. Sean B_1, B_2,..., B_n aquellas cajas de la subdivisión que contienen puntos de R.



Designaremos con $V(B_i)$ el volumen de la i-ésima caja B_i.

Elegimos un punto $P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)$ en B_i, esta elección se puede hacer en forma arbitraria.

La suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)\, V(B_i)$ es una aproximación de la integral triple.

La norma de subdivisión es la longitud de la mayor diagonal de las cajas B_1, B_2,..., B_n.

Si las sumas anteriores tienden a un límite cuando la norma de la subdivisión tiende a cero y para elecciones arbitrarias de los puntos P_i, a este límite lo llamaremos la

INTEGRAL TRIPLE DE f SOBRE R

La expresión: $\iiint\limits_R f(x,y,z).dV$ se utiliza para representar el límite.

Así como la integral doble es igual a dos integrales iteradas, también la integral triple es igual a tres integrales iteradas.

Para el caso de la caja rectángular R

$$\iiint_R f(x,y,z).dV = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f(x,y,z).dz.dy.dx$$

Suponemos ahora que una región S está limitada por los planos x = a_0; x = a_1; y = b_0; y = b_1 y por las superficies z = r(x,y), z = s(x,y).

La integral triple se puede definir de igual forma

2.2 Cálculo de integrales triples.

TEOREMA

Sea S una región definida por las desigualdades:

S:{P(x,y,z)/a ≤ x ≤ b; $p_{(x)}$ ≤ y ≤ $q_{(x)}$; r(x,y) ≤ z ≤ s(x,y)

Donde las p; q; r y s son continuas. Si f es una función continua en S, tenemos:

$$\iiint_S f(x,y,z).dV = \int_{a0}^{a1}\int_{p(x)}^{q(x)}\int_{r(x,y)}^{s(x,y)} f(x,y,z).dz.dy.dx$$

Las integrales iteradas se efectúan considerando todas las variables constantes, excepto aquella respecto a la cual se integra. Este concepto se puede extender a n variables.

Ejemplo

Calcular la integral sobre $R=[-1,1]\times[0,2]\times[1,2]$ de la función $f(x,y,z)=xyz$

Solución: Se tiene

$$\iiint_R xyzdxdydz = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^2\left(\int_1^2 xyzdz\right)dy\right)dx$$

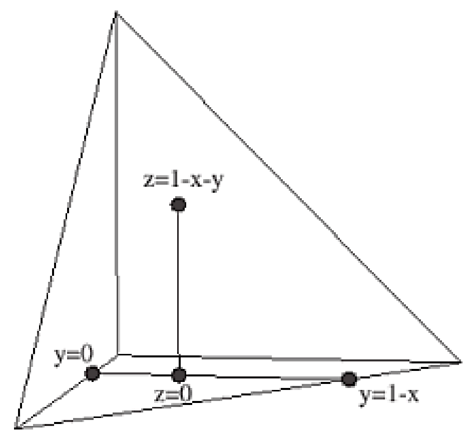
$$=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^2 xy\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=1}^{z=2} dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^2 \frac{3}{2}xydy\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2}dx = \int_{-1}^{1}3xdx = 0$$

Ejemplo:

Se desea calcular el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$

Para ello será necesario calcular $\iiint_\Omega 1dxdydz$ siendo Ω el tetraedro. Para calcular los límites de integración se proyecta el recinto sobre el plano XOY obteniendo el triángulo señalado en la figura. Las variables (x,y) varían en dicho triangulo, mientras que z recorre el recinto desde la superficie inferior z=0 hasta la superficie superior $z=1-x-y$.



Por todo ello resulta:

$$\Omega = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}$$

Y entonces:

$$\iiint_{\Omega} 1dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 1dz \right) dy \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x-x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2})dx$$

$$= \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

TEMA N° 3: APLICACIONES

Iniciaremos el repsente tema con el siguiente ejemplo:

Calcule el área comprendida por la gráfica de las funciones $y = sen\left(x\right)+1$ e $y = cos\left(x\right)+1$ en el intervalo $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

Solución:

Primer paso: Un croquis Para representar gráficamente el área queremos calcular, hallaremos en primer lugar, los puntos de intersección de las dos funciones que se encuentran en ese intervalo, es decir, igualamos las dos funciones y obtenemos que:

$$sen\left(x\right)+1 = \cos\left(x\right)+1$$

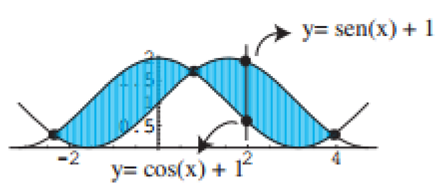
$$sen\left(x\right) = \cos\left(x\right)$$

$$x = -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Luego los puntos de intersección son

$$P_1 = \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right),\ P_2 = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}+1\right),\ P_3 = \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$$

Como podemos ver en la gráfica, Fig. 10.11 se obtienen dos dominios simétricos que tienen la misma área. Es por ello que calcularemos el área que nos piden multiplicando por dos el área de uno de los dominios coloreados en la gráfica.



Segundo Paso: **Los límites de integración en** y Trazamos una recta vertical, L, que pase por el dominio D y marcamos los valores de la variables y por donde entra y sale la recta L. Como puede verse en la Fig. 10.11,

Esos valores son justamente los valores de las funciones $y = sen\left(x\right)+1$ e $y = cos\left(x\right)+1$

Por lo tanto el dominio D sobre el que tenemos que integrar es el dominio de tipo 1:

$$\boldsymbol{D} = \left\{\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) / \frac{\eth}{4} \leq \boldsymbol{x} \leq \frac{5\eth}{4}; \boldsymbol{cos}\left(\boldsymbol{x}\right)+1 \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{sen}\left(\boldsymbol{x}\right)+1\right\}$$

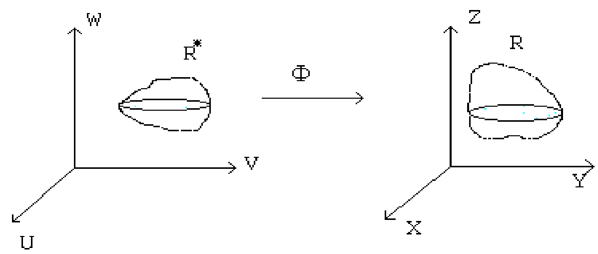
Tercer paso: Calculo de la integral Aplicando la fórmula de integración sobre dominios de tipo I a la fórmula de cálculo de áreas, tendremos que:

$$Área(D) = \iint_D 1dA = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_{\cos(x)+1}^{sen(x)+1} 1dxdy = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} y\Big]_{\cos(x)+1}^{sen(x)+1} dx$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} sen(x)-\cos(x)dx=2-\cos(x)-sen(x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=4\sqrt{2}$$

3.1 Cambio de variables en integrales triples.

Sean R^* y R dos regiones en los espacios (u,v,w) y (x,y,z) respectivamente.



Sea $\Phi:\begin{cases} x=x(u,v,w)\\ y=(u,v,w)\\ z=(u,v,w)\end{cases}$

Un homomorfismo de R^* sobre R continuamente diferenciable sobre R^* y tal que el jacobiano J_* del mismo no cambie de signo en R^*.

$$\boxed{\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{R^*} f\left[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right]\left|J_\Phi(u,v,w)\right|dudvdw} \quad (5)$$

Como en el caso de las transformaciones en el plano, también aquí las coordenadas cartesianas (u,v,w) de un punto P^*de R*, se designan como **coordenadas curvilineas** del correspondiente P=(x,y,z) de R.

La superficie en R correspondiente a $u=u_o$, recibe el nombre de **superficie coordenada** u**=**u_o**.** Analogamente las superficies coordenadas $v=v_o$ ó $w=w_o$.

El $|J_\Phi|$ representa un **factor de ampliación o reducción local del volumen**, al aplicar Φ.

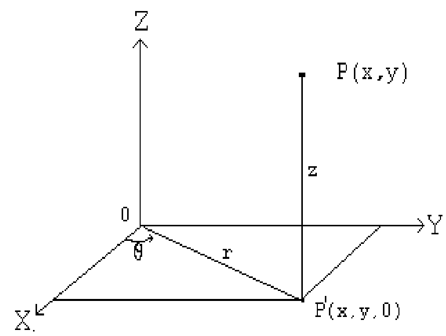
El elemento de volumen en R en coordenadas curvilineas es:

$dV=|J_\Phi(u,v,w)|dudvdw$

3.2 Coordenadas cilíndricas

La posición de un punto P en el espacio se determina por los tres valores (r,θ,z), donde r,θ,son las coordenadas polares de la proyección P' de P, sobre el plano XOY.

Las superficies coordenadas r=cte, θ=cte, z=cte representan respectivamente cilindros circulares con eje OZ, semiplanos que pasan por el eje OZ y planos paralelos al plano XY.



El cambio de coodenadas es: $\Phi:\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$ y $J_\phi = \begin{vmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

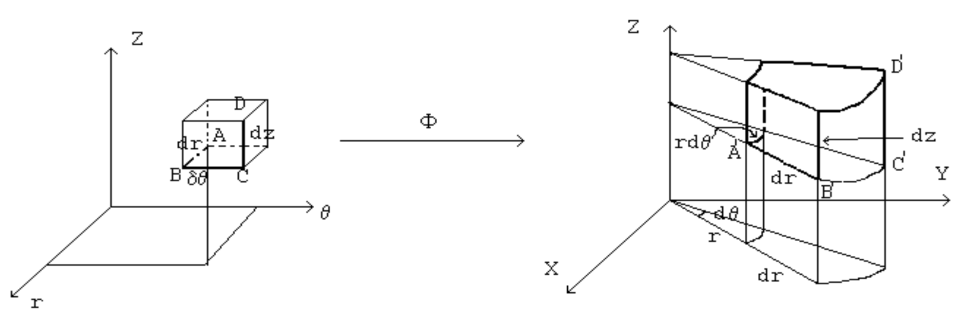
Por tanto: *Si f(x,y,z,) es continua en R, resulta* :

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{R^*} f\left[r\cos\theta, r\,sen\,\theta, z\right] r\,drd\theta dz \quad (6)$$

La expresión dV = r dr dθ dz es el elemento de volumen en coordenadas cilindricas.

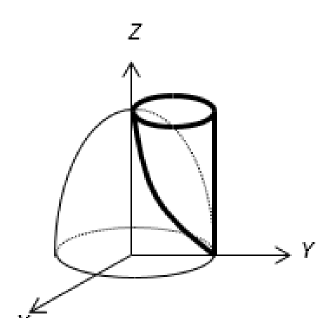
Estas coordenadas son especialmente útiles para trabajar con regiones limitadas por superficies cilindricas de revolución en torno al eje Z, planos que contienen a dicho eje y planos perpendiculares al mismo (Es decir para regiones limitadas por superficies coordenadas).

Nota: Obsérvese que la expresión para el elemento de volumen puede obtenerse simplemente por considera-ciones geométricas



Ejemplo: La superficie de una montaña responde a la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z = 4R^2$$



Sobre una de sus laderas se construye un restaurante cilíndrico, de radio R, según muestra la figura. La temperatura viene dada por

$$T(x;y;z) = 3x^2 + (y-R)^2 + 16z^2$$

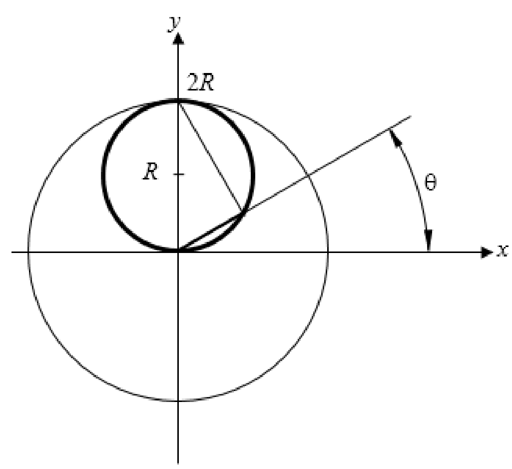
Definamos la función densidad de flujo de calor **V** como $\mathbf{V} = -k\nabla T$, donde k es una constante que depende de los materiales. Determinar el flujo de **V** a través de la superficie de contacto entre el restaurante y la montaña. (La respuesta dependerá de R y de k).

Solución

Se nos pide calcular:

$$\iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{N}dS, \qquad (1)$$

Donde S es la parte *de la superficie paraboloidal* contorneada por el cilindro. Queda claro, pues, que lo que hay que parametrizar es el paraboloide, no el cilindro.



Para esto, veamos cómo se proyectaría con el restaurante sobre el plano xy. Haciendo z = 0 en la ecuación del paraboloide, vemos que éste intersecta al plano mencionado en una circunferencia de radio $2R$. Por ende, el cilindro tendrá radio R.

Puesto que el cilindro está descentrado, usaremos una parametrización cuyos extremos determinaremos de forma parecida a la del ejercicio 3.40 (ver), donde se trata el problema parecido de una esfera descentrada. Usando una parametrización basada en coordenadas cilíndricas, y despejando de la ecuación del paraboloide $z = 4R^2 - x^2 - y^2$, tenemos que $\mathbf{T}(r;\theta)$ tendrá las siguientes componentes:

$$\begin{cases} x(r;\theta) = r\cos\theta \\ y(r;\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z(r;\theta) = 4R^2 - r^2 \end{cases}, \qquad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 2R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{matrix}$$

Donde el límite superior de variación de r, para cada θ, viene dado por la longitud del segmento marcado en línea más gruesa de la figura anterior, que es $2R\mathrm{sen}\theta$ (demostrarlo por consideraciones geométricas elementales). Sacando el producto vectorial fundamental para esta parametrización tenemos

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & -2r \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 2r^2\cos\theta\mathbf{i} + 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

Vemos que la componente *z* de este vector está dirigida hacia arriba. Por lo tanto obtendremos el *flujo entrante* hacia el restaurante. Ahora expresemos el gradiente de *T* multiplicado por -*k*, que es la función que tenemos que integrar, en términos de estos parámetros:

$$\mathbf{V} = -k\nabla T = -k(6x; 2(y-R); 32z) = -k(6r\cos\theta; 2(r\,\mathrm{sen}\,\theta - R); 32(4R^2 - r^2))$$

Por ende:

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{N} = -k(12r^3\cos^2\theta + 4r^3\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 4r^2R\,\mathrm{sen}\,\theta + 128R^2r - 32r^3)$$

Y entonces la integral del flujo calórico expresada en (1) vendrá dada por:

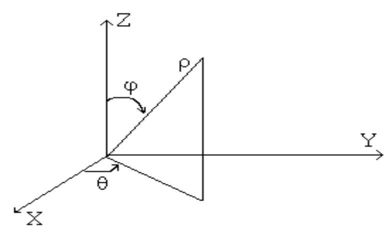
$$\mathrm{Flujo} = -k\int_0^{\pi}\int_0^{2R\,\mathrm{sen}\,\theta}(12r^3\cos^2\theta + 4r^3\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 4r^2R\,\mathrm{sen}\,\theta + 128R^2r - 32r^3)\,dr\,d\theta$$

La resolución de esta integral requiere de la aplicación reiterada de identidades trigonométricas, ejercicio que queda para el lector. Ejecutando la integral obtenemos:

Flujo = $-34\pi kR^4$

3.3 coordenadas esféricas.

La posición de un punto P(x,y,z) en el espacio se determina por los tres valores (ρ,θ,φ) mostrados en la Figura.



Las superficies coordenadas ρ = cte, θ = cte, φ = cte, son respectivamente esferas con centro en el origen de coordenadas, semiplanos por el eje z, y conos de revolución en torno al eje OZ.

Es siempre: $0 \le \rho < +\infty \qquad 0 \le \varphi \le \pi \qquad 0 \le \theta < 2\pi$

El cambio de coordenadas es $\Phi: \begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

Y se verifica: $J_\phi = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & \mathrm{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\,\mathrm{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{J_\Phi = \rho^2\, sen\,\varphi}$

Por tanto: *Si f(x,y,z) es continua en R, resulta :*

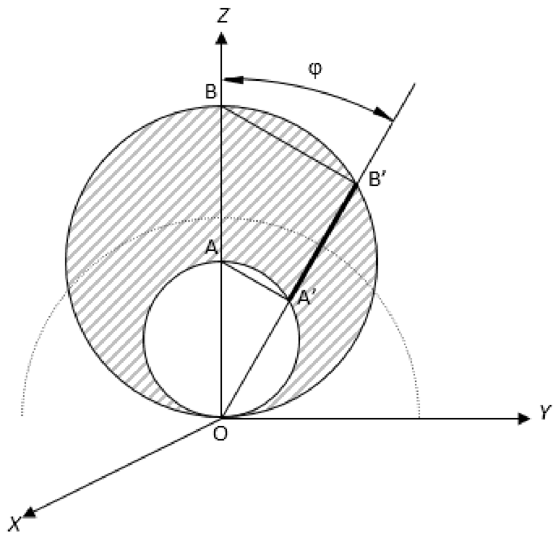
$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_R f\left[\rho\,sen\varphi\cos\theta, \rho\,sen\varphi\,sen\theta, \rho\cos\varphi\right]\rho^2 sen\varphi\,d\rho d\varphi d\theta \quad \textbf{(7)}$$

El elemento de volumen en coodenadas esfericas es: $dV = \rho^2\,sen\,\varphi\,d\rho d\varphi d\theta$

Ejemplo:

Sea una superficie esférica de radio 1 interior y tangente a otra superficie esférica de radio 2. Determinar el valor promedio de la distancia al punto de tangencia de todos los puntos comprendidos entre ambas superficies esféricas. SUGERENCIA: USAR COORDENADAS ESFÉRICAS.

Solución



Los puntos aludidos en el enunciado son los de la región rayada en gris de la figura. Puesto que la función que promediaremos será la distancia al punto de tangencia, aparece como lógico que este último se sitúe en el origen del sistema de coordenadas que utilizaremos.

Al usar coordenadas esféricas, esta distancia será sencillamente ρ.

Recordemos por otra parte el concepto de valor promedio de una función en un dominio. Podemos expresarlo como el cociente entre la integral de esa función sobre el dominio dado y la integral de la función 1 en dicho dominio.

En nuestro caso se trata de cuerpos tridimensionales y por lo tanto las integrales serán volumétricas. Esto es:

$$\overline{f} = \frac{\iiint\limits_V f dV}{\iiint\limits_V dV} \quad (1)$$

Nuestro problema se reducirá a expresar estas integrales en coordenadas esféricas, lo cual en términos prácticos implica encontrar los límites de cada una de las variables.

- φ, el ángulo azimutal, variará entre 0 y $\pi/2$ (nuestro dominio abarca todo el semiespacio situado por encima del plano *xy*).
- θ, el ángulo ecuatorial, variará entre 0 y 2π (ambas esferas son cuerpos de revolución completa alrededor del eje *z*).
- Los únicos extremos que ofrecen alguna dificultad son los de ρ, la distancia al origen. Para determinar correctamente su variación, observemos que esta última es dependiente del ángulo azimutal. En efecto, vemos en la figura que para cada valor de φ los valores de ρ estarán comprendidos en el rango indicado por la línea más gruesa. El valor mínimo será la longitud del segmento OA', y el valor máximo será la longitud del segmento OB'. Ambas longitudes, repetimos, son funciones de φ. Pero, ¿qué funciones?

Para determinar esto observemos, de los radios dados en los datos, que el segmento OA tiene longitud 2, y el segmento OB tiene longitud 4.

Por otro lado recordemos de geometría elemental que un ángulo inscripto en una esfera (esto es, el formado uniendo un punto cualquiera de la misma con los extremos de cualquier diámetro que no lo incluya) es siempre recto. Por lo tanto, los ángulos OA'A y OB'B son ambos rectos.

Entonces, los triángulos OA'A y OB'B son los dos rectángulos y podemos aplicar funciones trigonométricas. Tenemos así:

OA' = OAcosφ = 2cosφ

OB' = OBcosφ = 4cosφ

Por ende la variación de ρ vendrá dada por: 2cosφ ≤ ρ ≤ 4cosφ

Expresando ahora las integrales triples en (1) con sus correspondientes extremos tendremos lo siguiente, donde ρ es la función a promediar y ρ^2senφ es el jacobiano en esféricas:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi\, d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\, 60\cos^4\varphi\, d\varphi\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \frac{56}{3}\cos^3\varphi\, d\varphi\, d\theta}$$

$$= \frac{180}{56}\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\cos^4\varphi\, d\varphi\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi\, d\theta} = \frac{180}{56}\frac{\int_0^{2\pi} -\left.\frac{\cos^5\varphi}{5}\right|_0^{\pi/2} d\theta}{\int_0^{2\pi} -\left.\frac{\cos^4\varphi}{4}\right|_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{18}{7}$$

Esto da una distancia promedio de, aproximadamente, 2,57.

LECTURA SELECCIONADA N° 1

Leer apartado: El mundo mágico de las espirales (pp. 9-11).

Universidad de Cantabria (2005). Matemáticas en acción [En linea]. Disponible en: http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/curvashistoria.pdf

GLOSARIO DE LA UNIDAD IV

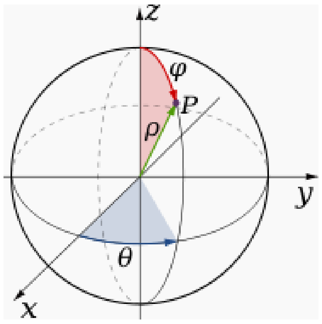
C

Coordenadas Polares: En un espacio R2, un dominio de integración que tenga una simetría circular es muchas veces susceptible de ser transformado de coordenadas rectangulares a polares, lo que significa que cada punto P (x, y) del dominio de una integral doble tomará su valor correspondiente en coordenadas polares mediante la siguiente transformación:

$$f(x,y) \to f(\rho\ \cos\theta, \rho\ \sin\theta)$$

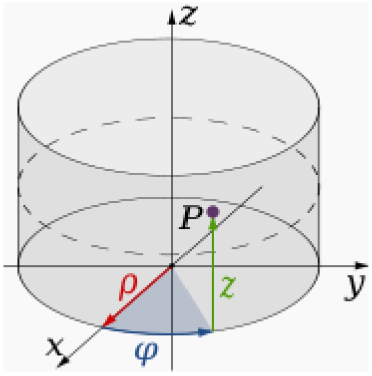
Coordenadas Esféricas: Cuando existe simetría esférica en un dominio en R3, es posible utilizar una transformación hacia coordenadas esféricas para simplificar una integral triple. La función es transformada por la relación:

$$f(x,y,z) \longrightarrow f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$$



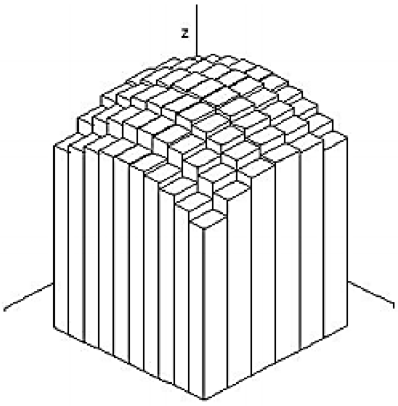
Coordenadas Cilíndricas: El uso de coordenadas cilíndricas para transformar una integral triple, es conveniente especialmente cuando el dominio de integración presenta simetría alrededor del eje z. La función se transforma mediante la siguiente relación:

$$f(x,y,z) \rightarrow f(\rho\ \cos\theta, \rho\ \sin\theta, z)$$



Integrales Iteradas: Una integral iterada es una integral evaluada múltiples veces sobre una misma variable (en contraste con una integral múltiple, que consiste en un número de integrales evaluada con respecto a diferentes variables.

Integrales Dobles: Como referencia para la definición de la integral doble, se debe recordar la integral definida de una función real de variable real, la cual surge como solución al problema del cálculo de área bajo una curva. xΔ es la longitud del subintervalo genérico (también llamado subintervalo i-ésimo).



Paralelepípedos empleados para aproximar el volumen del sólido S definido sobre la región D

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD IV

BÁSICA

Larson, R. & Bruce, E. (2016). *Cálculo* (10 ed.). México, D.F.: Cengage Learnin

COMPLEMENTARIA

Espinoza, R. E. (2004). *Análisis Matemático II.* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Espinoza, R. E. (2004).*Análisis Matemático IV.* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Kreyszig, E**.** (2000). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (3ra. ed.). México D.F.: Limusa S.A.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Bruce, E. (2011). *Cálculo Integral–Matemática 2.* México D.F.: Mc Graw Hill.

Larson, R., Hostetler, R.P. & Bruce, E. (2011). *Cálculo Esencial*. México D.F.: Cengage Learning.

Leithold, L. (1998). *El Calculo.* México D.F.: Oxford.

Stewart, J. (2008). *Cálculo: Trascendentes Tempranas* (6ta ed.). México D.F.: Cengage Learning.

Zill D.G. & Wrigth W.S. (2011). *Cálculo de una variable. Transcendentes Tempranas*. México D.F.: Mc Graw Hil

AUTOEVALUACIÓN N° 4

1. Calcule $\iint_S (2y - 4x)\,dxdy$, siendo $S = \{(x, y) \in R^2 \,/\, 1 \le x \le 3 \,,\, 0 \le y \le 3\}$

A) -30 B) -20 C) -15 D) -25 E) -10

2. Calcule la siguiente integral iterada $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dydx$

A) 2/3 B) 1/6 C) 2/7 D) 1/5 E) 2/5

3. Calcule la siguiente integral iterada $\int_0^{\pi} \int_0^{cos\theta} \rho\, sen\theta\, d\rho\, d\theta$

A) 5/3 B) 1/2 C) 2/5 D) 1/3 E) 2/3

4. Calcule ${}_R\dfrac{x^2}{1+y^2}$ $, siendo\, R = [0,1]x[0,1]$

A) π B) π/12 C) π/5 D) π/3 E) π/6

5. Calcular el volumen de la región del espacio limitada por las superficies cilíndricas

$x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.

A) 7/2 B) 16/3 C) 12/5 D) 11/3 E) 8/3

Fuente: Universidad Nacional del Nordeste-UNNE (2013). Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura: Argentina

ANEXO: CLAVES DE RESPUESTAS DE LAS AUTOEVALUACIONES

AUTOEVALUACIÓN 1

1. Clave B) VFFF
2. Clave D) Tgx
3. Clave C) $\frac{2}{3}Tg^{3/2}x+\frac{2}{7}Tg^{7/2}x+C$
4. Clave B) $-\frac{1}{2}(-4-2x)-5$
5. Clave C) 2 fracciones
6. Clave A) $\frac{1}{2}Ln\left|\tan 2x\right|+C$
7. Clave E) $2\arctan x+\ln x+C$
8. Clave B) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

AUTOEVALUACIÓN 2

1. Clave A) VFVF
2. Clave C) 1
3. Clave D) 2 y 8
4. Clave B) 17/2
5. Clave B) 15/2
6. Clave D) $\frac{1}{9}Sec^9x-\frac{1}{7}Sec^7x+C$
7. Clave E) Sólo ii, iii y iv
8. Clave B) Sólo I y III

AUTOEVALUACIÓN 3

1. Clave A) 45 m
2. Clave C) 3
3. Clave C)-56 pies/s
4. Clave E) 9π
5. Clave C) 13π/3
6. Clave D)4,5
7. Clave A) 9/2
8. Clave B) $V = \pi \frac{HR^2}{2}$

AUTOEVALUACIÓN 4

1. Clave A) -30
2. Clave B) 1/6
3. Clave D) 1/3
4. Clave B) π/12
5. Clave C) 16/3

Universidad Continental

INNOVADOR INTERACTIVO INTEGRAL 3i

MANUAL AUTOFORMATIVO INTERACTIVO

Este manual autoformativo es el material didáctico más importante de la presente asignatura. Elaborado por el docente, orienta y facilita el auto aprendizaje de los contenidos y el desarrollo de las actividades propuestas en el sílabo.

Los demás recursos educativos del aula virtual complementan y se derivan del manual. Los contenidos multimedia ofrecidos utilizando videos, presentaciones, audios, clases interactivas, se corresponden a los contenidos del presente manual. La educación a distancia en entornos virtuales te permite estudiar desde el lugar donde te encuentres y a la hora que más te convenga. Basta conectarse al Internet, ingresar al campus virtual donde encontrarás todos tus servicios: aulas, videoclases, presentaciones animadas, biblioteca de recursos, muro y las tareas, siempre acompañado de tus docentes y amigos.

El modelo educativo de la Universidad Continental a distancia es innovador, interactivo e integral, conjugando el conocimiento, la investigación y la innovación. Su estructura, organización y funcionamiento están de acuerdo a los estándares internacionales. Es innovador, porque desarrolla las mejores prácticas del e-learning universitario global; interactivo, porque proporciona recursos para la comunicación y colaboración síncrona y asíncrona con docentes y estudiantes; e integral, pues articula contenidos, medios y recursos para el aprendizaje permanente y en espacios flexibles. Ahora podrás estar en la universidad en tiempo real sin ir a la universidad.