

Universidad  
Continental



# Mecánica Vectorial-Dinámica

Carlos Alberto Coaquira Rojo



Datos de catalogación bibliográfica

**COAQUIRA ROJO, Carlos Alberto**

*Mecánica Vectorial-Dinámica: manual autoformativo interactivo*  
/ Carlos Alberto Coaquira Rojo. -- Huancayo: Universidad  
Continental, 2017

Datos de catalogación del Cendoc

*Mecánica Vectorial-Dinámica . Manual Autoformativo Interactivo*  
Carlos Alberto Coaquira Rojo  
Primera edición digital

Huancayo, setiembre de 2017

De esta edición

© Universidad Continental  
Av. San Carlos 1980, Huancayo-Perú  
Teléfono: (51 64) 481-430 anexo 7361  
Correo electrónico: [recursosucvirtual@continental.edu.pe](mailto:recursosucvirtual@continental.edu.pe)  
<http://www.continental.edu.pe/>

Versión e-book

Disponible en <http://repositorio.continental.edu.pe/>  
ISBN electrónico N.º 978-612-4196-











Dirección: Emma Barrios Ipenza  
Edición: Miguel Angel Cordova Solis  
Asistente de edición: Andrid Kary Poma Acevedo  
Asesor didáctico: Fabio Contreras Oré  
Corrección de textos: Juan Guillermo Gensollen Sorados  
Diseño y diagramación: Alexander Frank Vivanco Matos










Todos los derechos reservados. Cada autor es responsable del contenido de su propio texto.

Este manual autoformativo no puede ser reproducido, total ni parcialmente, ni registrado en o transmitido por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio sea mecánico, fotográfico, electrónico, magnético, electro-óptico, por fotocopia, o cualquier otro medio, sin el permiso previo de la Universidad Continental.















## ÍNDICE










 <b>Introducción</b>	9
 <b>Organización de la asignatura</b>	11
 <b>Resultado de aprendizaje de la asignatura</b>	11
 <b>Unidades didácticas</b>	11
 <b>Tiempo mínimo de estudio</b>	11
 <b>U-1 CINEMÁTICA-CINÉTICA DE PARTÍCULAS</b>	13
 Diagrama de organización de la unidad I	13
 Organización de los aprendizajes	13
 <b>Tema n.º 1 Cinemática de partículas – Movimiento rectilíneo</b>	14
1. Introducción a la Dinámica	14
1.1. Cantidades básicas	15
1.2. Idealizaciones importantes	15
1.3. Principios fundamentales	15
2. Posición, velocidad y aceleración	16
2.1. Movimiento de un punto	17
2.2 Posición de una partícula	17
2.3 Velocidad de una partícula	17
2.4 Aceleración de una partícula	18
3. Determinación del movimiento de una partícula	18
3.1. Movimiento rectilíneo uniforme	18
3.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado	19
4. Solución gráfica del movimiento	20
4.1. Gráficas del MRU	20
Actividad n.º 1	23
 <b>Tema n.º 2 Cinemática de la partícula – Movimiento curvilíneo</b>	24
1. Posición, velocidad y aceleración en el movimiento curvilíneo	24
1.1. Posición	25
1.2. Desplazamiento	25
1.3. Velocidad	25
1.4. Aceleración	26







2. Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración	27
3. Movimiento de proyectiles	28
Actividad n.º 2	29
 <b>Tema n.º 3 Cinética de la partícula – Movimiento de traslación. Segunda ley de Newton</b>	31
1. Momento lineal de una partícula	31
2. Ecuación del movimiento, coordenadas rectangulares	33
3. Equilibrio dinámico	33
Actividad n.º 3	35
 <b>Tema n.º 4 Cinética de la partícula – Movimiento curvilíneo</b>	37
1. Ecuación del movimiento	37
2. Componentes radial y transversal	38
3. Conservación de la cantidad de movimiento angular	39
Actividad n.º 4	40
Lectura seleccionada n.º 1	41
 Glosario de la unidad I	42
 Bibliografía de la unidad I	43
Problemas resueltos	44
 Autoevaluación n.º 1	46
 <b>CINÉTICA DE PARTÍCULAS Y DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS</b>	49
 Diagrama de organización de la unidad II	49
 Organización de los aprendizajes	49
 <b>Tema n.º 1 Trabajo mecánico</b>	50
1. Trabajo de una fuerza	50
1.1. Definición de trabajo mecánico	51
1.2. Trabajo de una fuerza constante en magnitud y dirección	51
1.3. Definición escalar de trabajo	52
2. Energía cinética de una partícula y teorema del trabajo	53



3. Potencia mecánica	53
3.1. Eficiencia	54
Actividad n.º 5	56
 <b>Tema n.º 2 Conservación de la energía</b>	58
1. Energía y fuerzas conservativas	58
1.1. Energía cinética	58
1.2. Energía potencial gravitacional	59
1.3. Origen de la energía potencial gravitacional	60
1.4. Fuerzas conservativas	60
2. Principio de conservación de la energía	61
2.1. Conservación de la energía para fuerzas solo gravitacionales	61
2.2. Conservación de la energía cuando realizan trabajo fuerzas distintas a la gravedad	62
Actividad n.º 6	63
 <b>Tema n.º 3 Momento lineal e impulso</b>	65
1. Principio del impulso y de la cantidad de movimiento	65
1.1. Cantidad de movimiento	65
1.2. Impulso	65
1.3. Relación entre el impulso y cantidad de movimiento	66
1.4. Conservación de la cantidad de movimiento	67
2. Impactos o colisiones	68
2.1. Choque	68
2.2. Choques elásticos	68
2.3. Choque inelástico	69
2.4. Conservación de la cantidad de movimiento en el choque perfectamente inelástico	69
Actividad n.º 7	70
 <b>Tema n.º 4 Sistemas de partículas</b>	72
1. Aplicación de las leyes del movimiento a un sistema de partículas	72
2. Momento lineal y momento angular de un sistema de partículas	74
3. Centro de masa	75
Actividad n.º 8	77
Lectura seleccionada n.º 2	78
 Glosario de la unidad II	79

 Bibliografía de la unidad II	80
Problemas resueltos	81
 Autoevaluación n.º 2	83
 <b>U - III CINEMÁTICA-CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO</b>	<b>87</b>
 Diagrama de organización de la unidad III	87
 Organización de los aprendizajes	87
 <b>Tema n.º 1 Cinemática plana del cuerpo rígido</b>	<b>88</b>
1. Traslación. Ecuaciones	88
2. Rotación alrededor de un eje fijo. Ecuaciones	89
3. Movimiento plano general	89
3.1. Cuerpo rígido	90
3.2. Traslación	90
3.3. Rotación respecto a un eje fijo	91
3.4. Movimiento plano	91
3.5. Movimientos generales: velocidades	91
4. Velocidades absoluta y relativa	91
5. Aceleración absoluta y relativa	92
Actividad n.º 9	93
 <b>Tema n.º 2 Movimiento plano de cuerpos rígidos. Fuerza y aceleración</b>	<b>95</b>
1. Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido	95
2. Momento angular. Principio de D'Alembert. Sistemas de cuerpos rígidos	96
Actividad n.º 10	100
 <b>Tema n.º 3 Cinética plana de un cuerpo rígido. Trabajo y energía</b>	<b>102</b>
1. Energía cinética	102
2. Trabajo de una fuerza	104
3. Principio del trabajo y la energía	106
4. Conservación de la energía	108
Actividad n.º 11	110

 <b>Tema n.º 4 Cinética plana de un cuerpo rígido. Impulso y cantidad de movimiento</b>	112
1. Cantidad de movimiento lineal y momento angular	112
2. Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido	113
3. Sistemas de cuerpos rígidos	115
4. Conservación de la cantidad de movimiento angular	116
Actividad n.º 12	117
Lectura seleccionada n.º 3	119
 Glosario de la unidad III	120
 Bibliografía de la unidad III	121
Problemas resueltos	122
 Autoevaluación n.º 3	124
 <b>U-IV CINEMÁTICA-CINÉTICA TRIDIMENSIONAL DEL CUERPO RÍGIDO Y VIBRACIONES MECÁNICAS</b>	127
 Diagrama de organización de la unidad IV	127
 Organización de los aprendizajes	127
 <b>Tema n.º 1 Cinemática tridimensional del cuerpo rígido</b>	128
1. Rotación alrededor de un eje fijo	128
2. Velocidad angular y aceleración angular	130
3. Movimiento general	131
Actividad n.º 13	133
 <b>Tema n.º 2 Cinética tridimensional de cuerpos rígidos</b>	135
1. Cantidad de movimiento angular	135
2. Energía cinética	138
3. Ecuaciones de movimiento	139
Actividad n.º 14	141

 <b>Tema n.º 3 Vibraciones mecánicas: Vibración libre no amortiguada</b>	143
1. Vibración libre no amortiguada	143
2. Métodos de energía	147
Actividad n.º 15	148
 <b>Tema n.º 4 Vibraciones mecánicas: Vibración forzada no amortiguada</b>	150
1. Vibración forzada no amortiguada	150
2. Vibración libre viscosa amortiguada	152
3. Vibración forzada viscosa amortiguada	153
Actividad n.º 16	156
Lectura seleccionada n.º 4	157
 Glosario de la unidad IV	158
 Bibliografía de la unidad IV	159
Problemas resueltos	160
 Autoevaluación n.º 4	162
 Anexos	166

## INTRODUCCIÓN

**M**ecánica Vectorial-Dinámica es una asignatura teórico-práctica diseñada para la modalidad a distancia; pretende proporcionar al estudiante la información básica sobre las leyes y principios de la Dinámica, la cual resulta importante en la formación académica del estudiante de ingeniería por el acelerado avance tecnológico en todas las ramas del conocimiento, que ha dado luces a nuevas aplicaciones para el bienestar de la sociedad. La elaboración del presente manual es fruto de la investigación y reformulación de temas que han sido enriquecidos a partir de la revisión y contrastación de diversas fuentes del conocimiento, entre ellas los textos universitarios de mayor connotación mundial. Asimismo, la experiencia docente ha permitido percibir la importancia del aprendizaje de esta asignatura pues trasciende en el estudio de diversas asignaturas posteriores en sus planes académicos, aportando una base sólida e imprescindible de conocimiento.

En general, los contenidos propuestos en el manual autoformativo se dividen en cuatro unidades: en primer lugar, trataremos la dinámica de partículas; luego la cinética de partículas y de sistemas de partículas; a continuación, la dinámica del cuerpo rígido; y, por último, la cuarta unidad trata sobre la dinámica del cuerpo rígido en tres dimensiones y vibraciones mecánicas. En el estudio de la asignatura resulta fundamental la adecuada comprensión de los vectores; seguida de la aplicación correcta de los conceptos de posición, velocidad y aceleración, así como de la correcta interpretación de la segunda ley de

Newton y del principio de conservación de la energía. Luego, en las dos últimas unidades, se tendrán aplicaciones de los conceptos indicados a cuerpos rígidos y sistemas de partículas.

Se recomienda que el estudiante implemente un hábito de estudio con la revisión permanente de la teoría; asimismo, que sea minucioso en la investigación, a fin de consolidar el aprendizaje. El contenido del manual se complementará con las clases por videoconferencia, y con el uso continuo del aula virtual de la Universidad, de los foros de consulta y revisión de las diapositivas animadas, a fin de desarrollar la asignatura en forma más detallada y amplia. Se sugiere la siguiente secuencia de estudio para cada unidad: 1.º Realizar el estudio de los contenidos en forma analítica y reflexiva resumiendo y asimilando la información. 2.º Revisar las lecturas seleccionadas, que representan una ampliación y actualización científico-tecnológica. 3.º Desarrollar las actividades programadas para cada semana en el aula virtual. 4.º Resolver la autoevaluación, que es una preparación para la prueba final de la asignatura.

Organice su tiempo, esa es la clave para lograr el éxito, los buenos resultados son la consecuencia de optimizar el uso del tiempo en las diversas actividades que asuma como estudiante. El estudio a distancia requiere perseverancia y disciplina; por lo tanto, su motivación de ser mejor cada día será determinante para el logro del aprendizaje de la Mecánica Vectorial-Dinámica.

El autor







## ORGANIZACIÓN DE LA ASIGNATURA



### Resultado de aprendizaje de la asignatura

Al finalizar la asignatura, el estudiante será capaz de aplicar los principios de la Dinámica en el análisis de partículas y cuerpos rígidos en condición de movimiento, para analizar problemas y definir los requerimientos apropiados para su solución en el campo de la ingeniería.



### Unidades didácticas

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
Dinámica de partículas	Cinética de una partícula y sistema de partículas	Dinámica del cuerpo rígido	Dinámica tridimensional del cuerpo rígido y vibraciones
Resultado de aprendizaje	Resultado de aprendizaje	Resultado de aprendizaje	Resultado de aprendizaje
Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de analizar, con rigurosidad, la velocidad, la aceleración, las componentes intrínsecas de la aceleración de un punto móvil en diversos sistemas de coordenadas, además de aplicar la segunda ley de Newton al análisis de problemas de la dinámica de una partícula.	Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de desarrollar el principio de trabajo y energía y lo aplica para resolver problemas que implican fuerza, velocidad, desplazamiento, potencia y eficiencia; asimismo, interpreta el concepto de fuerza conservadora y aplica el teorema de la conservación de la energía para resolver problemas de cinética de partículas.	Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de modelar, eficientemente, los problemas relativos a la cinemática y cinética del cuerpo rígido, aplicando las expresiones matemáticas apropiadas para la solución de problemas relacionados con la dinámica de una partícula y de un sistema de partículas, considerando los teoremas de trabajo y energía.	Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de aplicar, con facilidad, las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido para resolver problemas relacionados con la dinámica del cuerpo rígido en tres dimensiones, teniendo en cuenta los teoremas de trabajo y la energía; asimismo, resuelve problemas de vibraciones con un grado de libertad.



### Tiempo mínimo de estudio

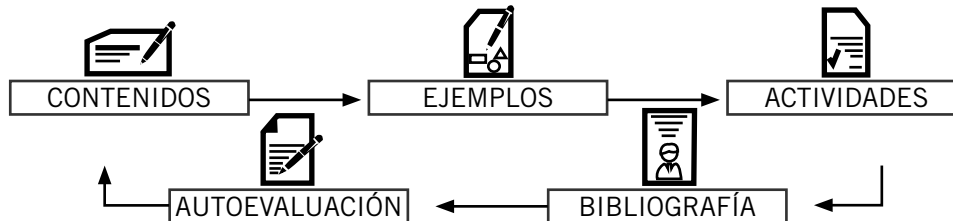
UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
Semana 1 y 2	Semana 3 y 4	Semana 5 y 6	Semana 7 y 8
16 horas	16 horas	16 horas	16 horas



# UNIDAD I

## CINEMÁTICA-CINÉTICA DE PARTÍCULAS

### DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD I



### ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

**RESULTADO DE APRENDIZAJE:** Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de analizar, con rigurosidad, la velocidad, la aceleración, las componentes intrínsecas de la aceleración de un punto móvil en diversos sistemas de coordenadas, además de aplicar la segunda ley de Newton al análisis de problemas de la dinámica de una partícula.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
<p><b>Tema N.º 1: Cinemática de partículas. Movimiento rectilíneo</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Introducción a la Dinámica.</li> <li>Posición, velocidad y aceleración.</li> <li>Determinación del movimiento de una partícula.</li> <li>Solución gráfica del movimiento.</li> </ol> <p>Actividad N.º 1</p> <p><b>Tema N.º 2: Cinemática de la partícula. Movimiento curvilíneo</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Posición, velocidad y aceleración.</li> <li>Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración</li> <li>Movimiento de proyectiles</li> </ol> <p>Actividad N.º 2</p> <p><b>Tema N.º 3: Cinética de la partícula. Movimiento de traslación. Segunda ley de Newton</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Momento lineal de una partícula.</li> <li>Ecuación del movimiento, coordenadas rectangulares.</li> <li>Equilibrio dinámico.</li> </ol> <p>Actividad N.º 3</p> <p><b>Tema N.º 4: Cinética de la partícula. Movimiento curvilíneo</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Ecuación del movimiento.</li> <li>Componentes radial y transversal.</li> <li>Conservación de la cantidad de movimiento angular.</li> </ol> <p>Actividad N.º 4</p> <p><b>Lectura seleccionada N.º 1</b></p> <p><b>Autoevaluación N.º 1</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Analiza el movimiento, la velocidad y la aceleración de una partícula, estableciendo las ecuaciones de su movimiento en movimiento rectilíneo.</li> </ul> <p><b>Actividad N.º 1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Identifica y relaciona las magnitudes básicas de la cinemática: posición, velocidad y aceleración.</li> </ul> <p>Resuelve ejercicios y problemas de cinemática de partículas en movimiento rectilíneo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Analiza el movimiento, la velocidad y la aceleración de una partícula, estableciendo las ecuaciones de su movimiento en movimiento curvilíneo.</li> </ul> <p><b>Actividad N.º 2</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Resuelve ejercicios y problemas de cinemática de partículas en movimiento curvilíneo.</li> <li>✓ Aplica la segunda ley de Newton en el análisis del movimiento de una partícula con traslación rectilínea.</li> </ul> <p><b>Actividad N.º 3</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Resuelve ejercicios y problemas sobre la aplicación de la segunda ley de Newton en movimiento rectilíneo.</li> <li>✓ Aplica la segunda ley de Newton en el análisis del movimiento de una partícula con traslación rotacional.</li> </ul> <p><b>Actividad N.º 4</b></p> <p>Elabora un diagrama de flujo para representar el algoritmo del movimiento de una partícula. Además, desarrolla los ejercicios propuestos.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Valora la importancia que tiene el uso de los principios de la cinemática del cuerpo rígido de gran aplicación en la industria, técnica, construcción y máquinas, entre otros usos en nuestra sociedad.</li> <li>Participa y dialoga sobre nuevos conocimientos y aplicaciones de la cinemática en diversas situaciones, desde cotidianas hasta tecnológicas.</li> </ol>

## Cinemática de partículas – Movimiento rectilíneo

### Tema n.º 1



Figura 1: Cuerpo rígido en equilibrio. Fuente: Pytel & Kiusalaas, 2013.

La mecánica es una rama de las ciencias físicas que estudia en sí el estado de reposo o movimiento de los cuerpos que están sometidos a la acción de fuerzas. En general, esta materia puede dividirse a su vez en tres ramas: *mecánica de cuerpos rígidos*, *mecánica de cuerpos deformables* y *mecánica de fluidos* (Hibbeler, 2010, p. 4); sin embargo, la clasificación de la mecánica es mucho más amplia.

En este material estudiaremos la mecánica de cuerpos rígidos, la misma que es un requisito básico para el estudio de las otras ramas de la mecánica (Hibbeler, 2010, p. 4). La mecánica de cuerpos rígidos es esencial para el diseño y el análisis de muchos tipos de elementos estructurales, componentes mecánicos, mecanismos diversos, o dispositivos electrónicos que pueden encontrarse en la práctica de la ingeniería.

La mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos áreas: estática y dinámica. Comúnmente a la Mecánica del cuerpo rígido se le denomina Mecánica Vectorial.

### 1. Introducción a la Dinámica

Previamente es importante establecer diferencias entre Estática y Dinámica, así como el conocimiento de algunos conceptos importantes (Hibbeler, 2010, p. 4).

**Estática:** Estudia el equilibrio de los cuerpos, cuerpos en reposo o a velocidad constante (Hibbeler, 2010, p. 4).

**Dinámica:** Estudia el movimiento acelerado de los cuerpos (Hibbeler, 2010, p. 4).

A su vez, la Dinámica se divide en dos partes básicas, que son:

- ✓ La **cinemática** estudia la geometría del movimiento. Las características de trayectoria y medidas del movimiento como posición, velocidad y aceleración.
- ✓ La **cinética** básicamente estudia la relación entre las fuerzas y los cambios que se originan en el movimiento de las partículas. Es decir, la cinética estudia el movimiento teniendo en cuenta las causas que lo producen (Hibbeler, 2010, p. 4).

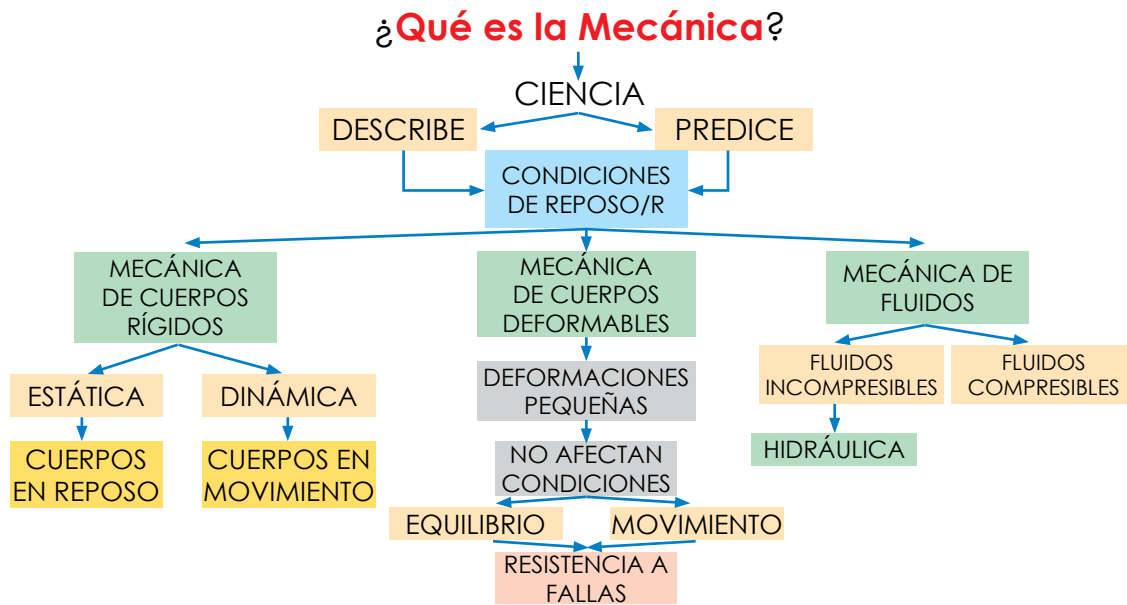


Figura 2: Clasificación de la Mecánica. Fuente: Pytel & Kiusalaas, 2013.

### 1.1. Cantidades básicas

Las cantidades básicas que se utilizan en la Dinámica son las siguientes cuatro (Hibbeler, 2010, p. 4):

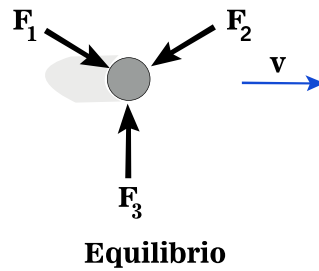
- *Longitud*: Se usa para describir la posición de un punto en el espacio y describir el tamaño de un sistema físico. Define distancias y propiedades geométricas (Hibbeler, 2010, p. 4).
- *Tiempo*: El tiempo se concibe como una secuencia de eventos (Hibbeler, 2010, p. 4).
- *Masa*: Es una medición de una cantidad de materia usada para comparar la acción de un cuerpo con la de otro (Hibbeler, 2010, p. 4).
- *Fuerza*: Representa la acción ejercida de un cuerpo sobre otro. La interacción puede darse por contacto físico o entre cuerpos separados como las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por completo con su magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación (Hibbeler, 2010, p. 4).

### 1.2. Idealizaciones importantes

- *Partícula*: Es el modelo matemático de un cuerpo y se representa como un punto, se considera la masa del cuerpo, pero no sus dimensiones (Hibbeler, 2010, p. 5).
- *Cuerpo rígido*: Es una combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí, tal que las propiedades del material no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo.
- *Fuerza concentrada*: Una fuerza concentrada representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo. Una carga puede representarse mediante una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la que se aplique la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Un ejemplo sería la fuerza de contacto entre una rueda y el suelo (Hibbeler, 2010, p. 5).

**1.3. Principios fundamentales:** Basados en la evidencia experimental, permiten cimentar el estudio de la mecánica. Son seis (Hibbeler, 2010, p. 5):

- *Principio de Transmisibilidad*: En toda la línea de acción de una fuerza, su efecto externo ejercido, sobre un cuerpo rígido, es invariable.
- *Primera ley de Newton*: Una partícula originalmente en reposo, o que se mueve en línea recta con velocidad constante, tiende a permanecer en este estado siempre que la partícula no se someta a una fuerza no balanceada.



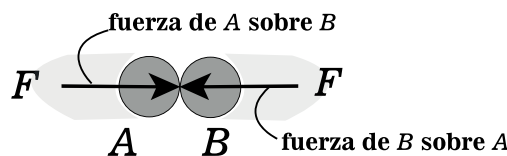
- *Segunda ley de Newton.* Una partícula sobre la que actúa una fuerza no balanceada  $\mathbf{F}$  experimenta una aceleración  $\mathbf{a}$  que tiene la misma dirección que la fuerza y una magnitud directamente proporcional a la fuerza.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



**Movimiento acelerado**

- *Tercera ley de Newton:* Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.



**Acción - reacción**

- *Ley del paralelogramo para la adición de fuerzas:* Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula, pueden sustituirse por una fuerza llamada resultante.
- *Ley de gravitación de Newton:* Hibbeler (2010) propone que:

dos partículas cualesquiera o cuerpos tienen una fuerza de atracción (gravitacional) que actúa entre ellos. Sin embargo, en el caso de una partícula localizada en la superficie de la Tierra, o cerca de ella, la única fuerza gravitacional que tiene alguna magnitud significativa es la que existe entre la Tierra y la partícula. En consecuencia, esta fuerza, conocida como *peso*, será la única fuerza gravitacional que se considere en nuestro estudio de la mecánica (p. 5).

## 2. Posición, velocidad y aceleración

Para Bedford y Fowler (2008), una reflexión para conocer el campo de acción de la Dinámica, a la vez que su importancia, es: "¿Cómo diseñan y construyen los ingenieros, actualmente, los dispositivos que se usan en la vida diaria, desde objetos simples como mesas y sacapuntas hasta estructuras complicadas como presas, automóviles, bandas transportadoras, aviones y naves espaciales?" (p. 3).

Respondiendo la pregunta anterior: Los ingenieros deben tener un conocimiento profundo de la física subyacente al diseño de tales dispositivos y ser capaces de usar modelos matemáticos para predecir su comportamiento. Al estudiar dinámica, los estudiantes de ingeniería comienzan a aprender cómo analizar y predecir los comportamientos de los sistemas físicos (Bedford & Fowler, 2008, p. 3).

Por ejemplo, según Bedford y Fowler (2008), "los movimientos de un trineo y su tripulación (posiciones, velocidades y aceleraciones) pueden analizarse usando ecuaciones de la dinámica. Por tanto, todo ello contribuirá al correcto diseño de este trineo" (p. 3).



## 2.1. Movimiento de un punto

En este tema se inicia el estudio del movimiento. Aquí no se tiene interés en las propiedades de los objetos ni en las causas de sus movimientos; el objetivo consiste solo en describir y analizar el movimiento de un punto en el espacio.

Luego de definir la posición, velocidad y aceleración de un punto, se considera el caso más sencillo: el movimiento a lo largo de una línea recta.

Posteriormente se muestra la manera en que el movimiento de un punto a lo largo de una *trayectoria* arbitraria se expresa y analiza usando diversos sistemas coordenados (Bedford & Fowler, 2008, p. 21).

## 2.2. Posición de una partícula

Podemos describir la posición de un punto  $P$  escogiendo un punto de referencia  $O$  presentando el vector de posición  $r$  de  $O$  a  $P$  (Fig. 3a). Supongamos que  $P$  está en movimiento respecto a  $O$ , de manera que es una función del tiempo  $t$  (Fig. 3b). Expresamos esto con la notación:

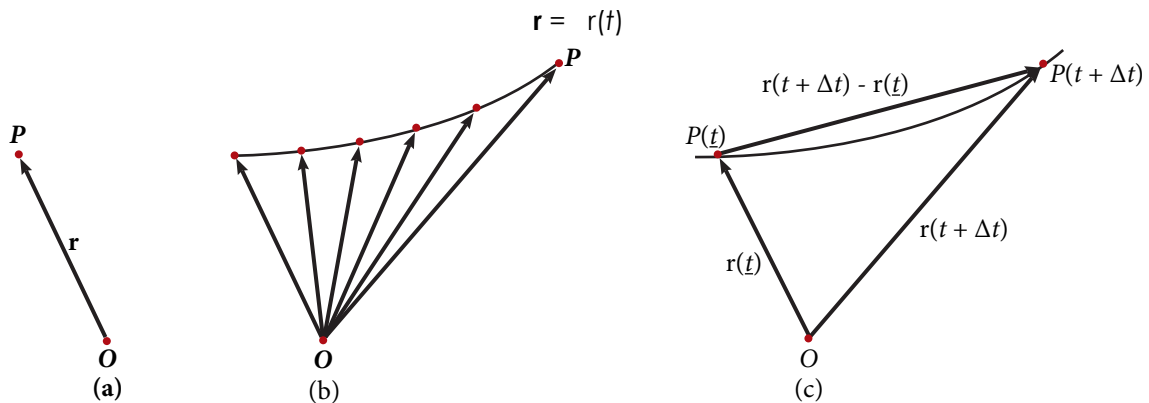


Figura 3: Posición y cambio de posición. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 22.

### Ejemplos de posición de un objeto o partícula:

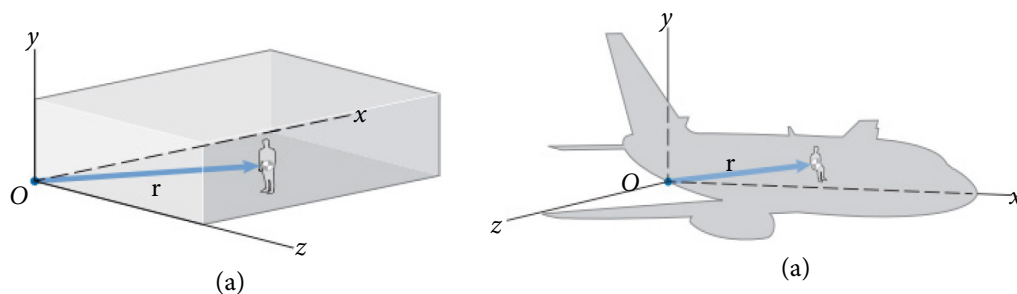


Figura 4: Ejemplos de posición. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 22.

## 2.3. Velocidad de una partícula

Podemos describir la velocidad como una función del tiempo. Supongamos que  $P$  está en movimiento respecto de  $O$ , de manera que es una función del tiempo  $t$  (Fig. b).

La velocidad de  $P$  respecto de  $O$  en el tiempo  $t$  se define como:

$$v = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

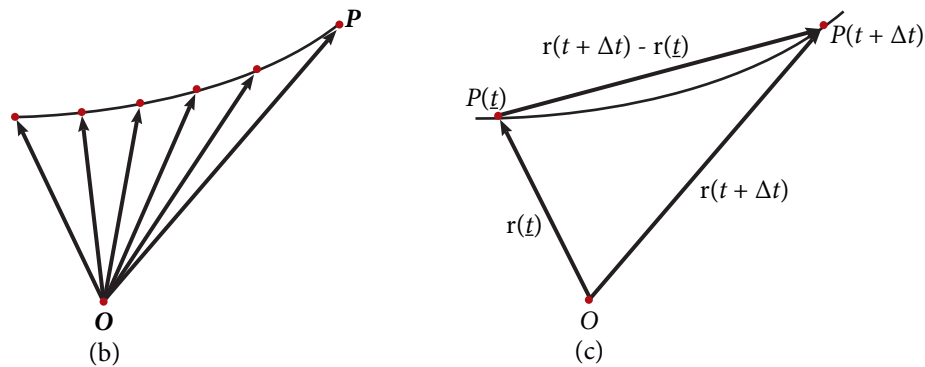


Figura 5: Velocidad. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 23.

La **velocidad** es la razón de cambio de la posición de  $P$  en el tiempo  $t$ . (La primera derivada de la posición respecto al tiempo).

## 2.4. Aceleración de una partícula

La aceleración de  $P$  respecto a  $O$  en un tiempo  $t$  se define como:

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

donde el numerador del límite es el cambio en la velocidad de  $P$  durante el intervalo de tiempo (figura 6).

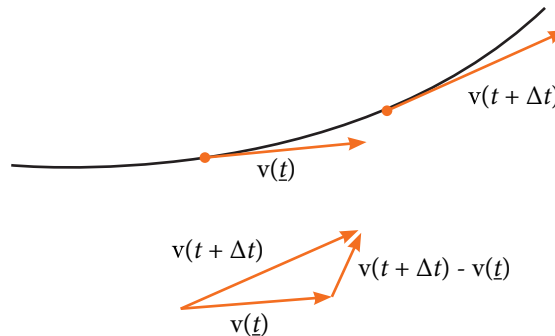


Figura 6: Aceleración. Fuente: Bedford & Fowler, 2008.

La **aceleración** es la razón de cambio de la velocidad de  $P$  en el tiempo  $t$ . (Es decir, la segunda derivada de la posición respecto al tiempo).

## 3. Determinación del movimiento de una partícula

### 3.1. Movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento uniforme en línea recta es un tipo de movimiento que a menudo se encuentra en aplicaciones prácticas.

En este movimiento, la aceleración  $a$  de una partícula es cero para todo valor de  $t$ . En consecuencia, la velocidad  $v$  es constante.

Este tipo simple de movimiento se analiza primordialmente para obtener experiencia antes de pasar al estudio del caso general del movimiento de un punto. Sin embargo, frecuentemente, en

otras situaciones prácticas, también se hace necesario analizar movimientos en línea recta, como el movimiento de un vehículo sobre un camino recto o el movimiento de un pistón en un motor de combustión interna.

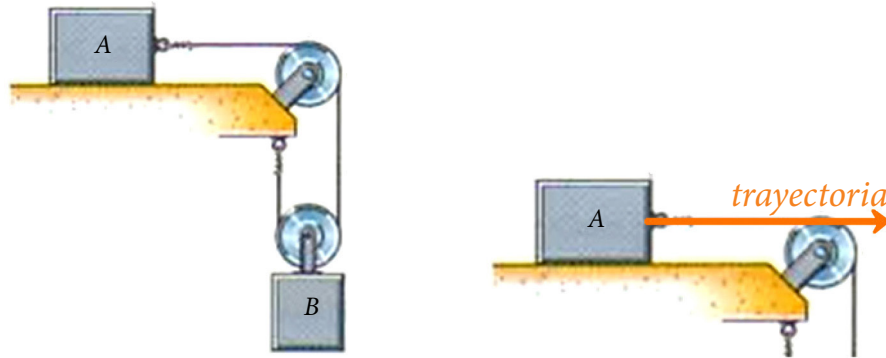


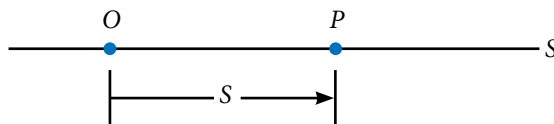
Figura 7: Trayectoria de un movimiento en línea recta. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 29.

### Ecuación del movimiento

Es posible especificar la posición de un punto  $P$  sobre una línea recta respecto a  $O$  por medio de una coordenada  $s$  medida a lo largo de la línea que va de  $O$  a  $P$ .

En la figura se define a  $s$  como positiva hacia la derecha, por lo que  $s$  es positiva cuando  $P$  está a la derecha de  $O$  y negativa cuando  $P$  está a la izquierda de  $O$ .

El desplazamiento de  $P$  durante un intervalo de tiempo de  $t_0$  a  $t$  es el cambio de posición  $s(t) - s(t_0)$ , donde  $s(t)$  denota la posición en el tiempo  $t$ .



$$\int_{s_0}^s ds = v \int_{t_0}^t dt \rightarrow s - s_0 = vt$$

$$\rightarrow s = s_0 + vt$$

$$s_0 = \text{Posición inicial (en m)}$$

$$s = \text{Posición en el tiempo } t \text{ (en m)}$$

$$v = \text{Velocidad constante (en } \frac{m}{s} \text{)}$$

$$t = \text{Tiempo (en s)}$$

### 3.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Es aquel movimiento en el cual la aceleración ( $a$ ) de la partícula permanece constante, puede ser con aumentos constantes de velocidad o con decrementos constantes de velocidad.

Ejemplo de movimiento rectilíneo uniformemente variado.

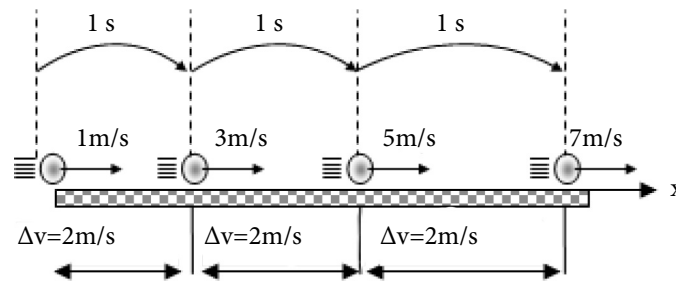


Figura 8: Movimiento rectilíneo con aceleración constante. Fuente: Zavala, 2013.

Velocidad en función del tiempo.

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_c dt \quad \boxed{v = v_0 + a_c t}$$

Posición en función del tiempo.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt \quad \boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2}$$

Velocidad en función de la posición.

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a_c ds \quad \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_c (s - s_0)}$$

Donde:

$s_0 =$  Posición inicial (en m)

$s =$  Posición en el tiempo  $t$  (en m)

$t =$  Tiempo (en s)

$v_0 =$  Velocidad inicial  $\left(\frac{\text{en m}}{\text{s}}\right)$

$v =$  Velocidad final (en m / s)

$a_c =$  aceleración (en m / s<sup>2</sup>)

## 4. Solución gráfica del movimiento

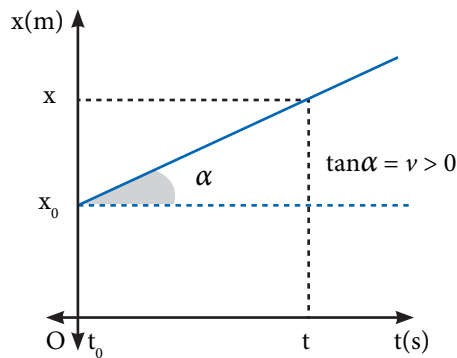
### 4.1. Gráficas del MRU

Gráfica posición-tiempo (x-t)

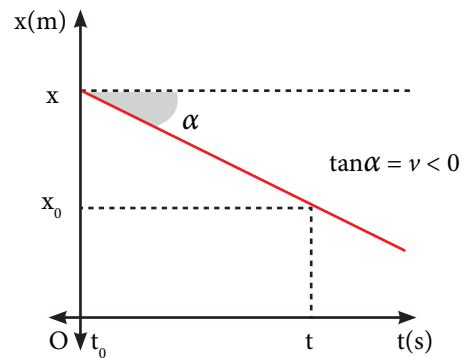
$$x = x_0 + v \cdot t$$

La **gráfica posición-tiempo (x-t)** de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) representa en el eje horizontal (eje x) el tiempo y en el eje vertical la posición. Observe cómo la posición (normalmente la coordenada x) aumenta (o disminuye) de manera uniforme con el paso del tiempo. Podemos distinguir dos casos, cuando la velocidad es positiva o negativa:

**Gráfica x-t en m.r.u.**



velocidad positiva



velocidad negativa

A partir del ángulo  $\alpha$  se puede obtener la velocidad. Recuerde para ello que, en un triángulo rectángulo se define la tangente de uno de sus ángulos como el cateto opuesto dividido entre el cateto contiguo:

$$\tan \alpha = \text{cateto opuesto} / \text{cateto adyacente} = \Delta x / \Delta t = x - x_0 / t = v$$

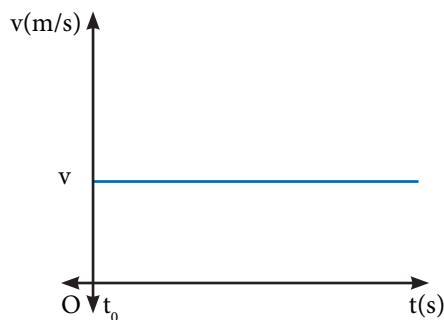
El valor de la pendiente es la propia velocidad. Por tanto, a mayor pendiente de la recta, mayor velocidad posee el cuerpo.

**Gráfica velocidad-tiempo (v-t)**

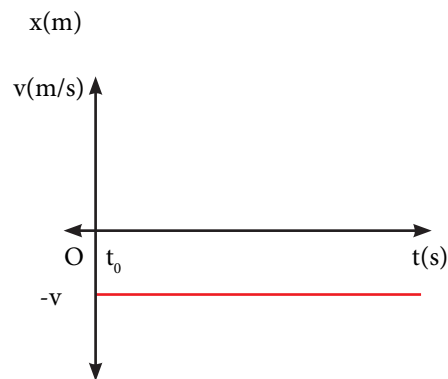
$$v = v_0 = \text{cte}$$

La **gráfica velocidad-tiempo (v-t)** de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) muestra que la velocidad permanece constante a lo largo del tiempo. De nuevo, podemos distinguir dos casos:

**Gráfica v-t en m.r.u.**

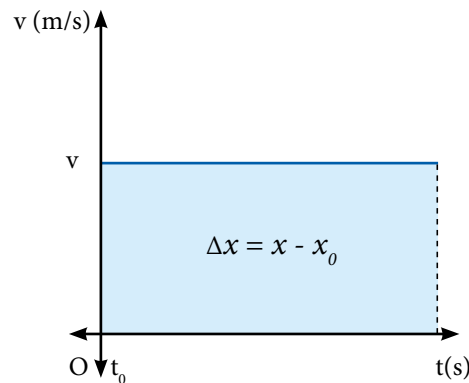


velocidad positiva



velocidad negativa

Observe que el *área limitada bajo la curva v* entre dos instantes de tiempo es el espacio recorrido.



El área encerrada entre la recta  $v-t$ , el eje de abscisas y los instantes de tiempo  $t_0$  y  $t$  corresponde al espacio recorrido. Esta propiedad se valida para cualquier tipo de movimiento. En concreto, para los MRU dado que el área es un rectángulo (base x altura):

$$\Delta x = x - x_0 = v(t - t_0)$$

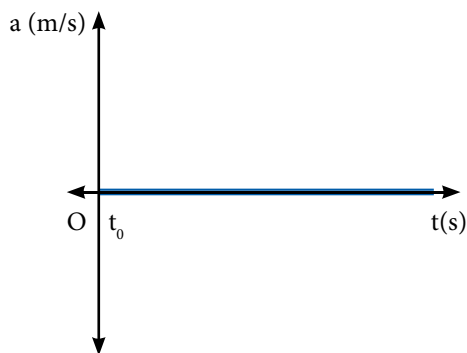
En este caso resulta inmediato calcular dicha área, al tratarse de un rectángulo. Pero ¿sabe qué herramienta matemática permite el cálculo de áreas bajo una curva, sea cual sea su forma?

#### Gráfica aceleración-tiempo (a-t)

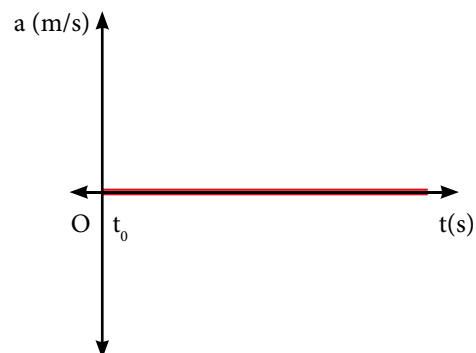
$$a=0$$

La **gráfica aceleración-tiempo (a-t)** de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) muestra que la aceleración es nula en todo momento. En este caso, tanto si la velocidad del cuerpo se considera positiva como negativa, tenemos una sola posibilidad, ilustrada en la figura:

#### Gráfica a-t en m.r.u.



velocidad positiva



velocidad negativa

Ejemplo:

Determine las gráficas de los siguientes movimientos rectilíneos uniformes:

1.  $X = 3 + 4t$
2.  $X = 3 - 4t$
3.  $X = -3 + 4t$
4.  $X = -3 - 4t$
5.  $3X = 9 + 12t$

Donde  $x$  se mide en metros y  $t$  en segundos.

Para profundizar el tema puede visitar el siguiente video: <http://bit.ly/2vt9cF3>



**Actividad n.º 1**

Resuelva ejercicios y problemas de fuerzas en el plano.

1. Completar correctamente los enunciados siguientes:
  - a) La cinemática estudia el movimiento sin considerar a la \_\_\_\_\_ del movimiento.
  - b) La \_\_\_\_\_ es la razón de cambio de la posición respecto al tiempo.
  - c) La segunda derivada de la posición respecto al tiempo es la \_\_\_\_\_.
  - d) El movimiento uniforme en línea recta es un tipo de movimiento en línea recta que a menudo se encuentra en las aplicaciones prácticas. En este movimiento, la aceleración  $a$  de una partícula es \_\_\_\_\_ para todo valor de  $t$ . En consecuencia, la velocidad  $v$  es \_\_\_\_\_.
  - e) La cinética estudia las \_\_\_\_\_ que producen el movimiento.
  
2. Un automovilista que viaja al este, cruza una pequeña ciudad y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad. Su aceleración constante es de  $4.0 \text{ m/s}^2$ . En  $t = 5 \text{ s}$ , está moviéndose al este a  $25 \text{ m/s}$ .
  - a) Calcule su posición y velocidad en  $t = 2 \text{ s}$ .
  - b) Determine el tiempo para que su velocidad sea el triple de la inicial.
  - c) ¿Dónde está el automovilista cuando su velocidad es de  $20 \text{ m/s}$ ?
  - d) Si la velocidad máxima que puede alcanzar el motociclista es de  $40 \text{ m/s}$ . ¿En qué tiempo alcanza dicha velocidad?
  
3. Un conductor de un camión que viaja a rapidez constante de  $15 \text{ m/s}$  pasa por un cruce escolar, cuyo límite de velocidad es de  $10 \text{ m/s}$ . En ese preciso instante, un oficial de policía en su motocicleta, que está parado en el cruce, arranca para perseguir al infractor con una aceleración constante de  $3 \text{ m/s}^2$ . Determine:
  - a) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que el policía alcance al camión?
  - b) ¿Cuál es la rapidez del policía en el instante en que alcanza al infractor?
  - c) ¿Qué distancia ha recorrido el policía para alcanzar al infractor?
  
4. Sobre las aguas de un río de orillas paralelas se desplaza una lancha con una rapidez constante. Si en ir de un punto a otro del río tarda  $100 \text{ s}$  (cuando viaja en la dirección de la corriente) y cuando regresa al punto de partida tarda  $200 \text{ s}$ ; determine la rapidez de la lancha en aguas tranquilas y la distancia entre los dos puntos, si las aguas del río tienen una rapidez de  $5 \text{ m/s}$ .
  
5. Un automóvil viaja a  $30 \text{ mi/h}$  cuando se enciende la luz ámbar de un semáforo que se encuentra  $295 \text{ pies}$  adelante. El conductor tarda  $1 \text{ s}$  en reaccionar antes de aplicar los frenos.
  - a) Después de aplicar los frenos, ¿qué desaceleración constante permitirá que el automóvil se detenga justo antes de llegar al semáforo?
  - b) ¿Cuánto tiempo tardará el automóvil en desplazarse los  $295 \text{ pies}$  hasta el semáforo?

*Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:*

Bedford, F. & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica*. (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F.; Johnston, E. & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*. (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Cinemática de la partícula – Movimiento curvilíneo

### Tema n.º 2



Figura 8: Trayectoria de un coche de montaña rusa. Fuente: Bedford, 2010, p. 691.

Para iniciar el presente tema, hay que considerar si el movimiento de un punto se limita a una línea recta o no, su vector de posición  $r$ , su vector de velocidad  $v$  y su vector de aceleración  $a$  están completamente descritos por los escalares  $v$  y  $a$ , respectivamente. Conocemos las direcciones de esos vectores porque son paralelos a la línea recta, pero si un punto describe una trayectoria curvilínea, debemos especificar tanto las magnitudes como las direcciones de esos vectores, y requerimos de un sistema de coordenadas para expresarlos en términos de componentes escalares necesarias para su análisis.

### 1. Posición, velocidad y aceleración en el movimiento curvilíneo

Se dice que un movimiento curvilíneo se da cuando la partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva. Generalmente se describe este movimiento con análisis vectorial usado para formular la posición de la partícula, la velocidad y la aceleración.

Se tienen las condiciones iniciales en  $t = 0s$ .

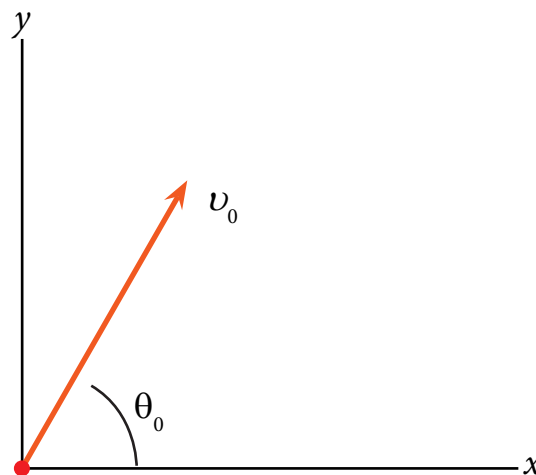


Figura 9: Posición de una partícula. Fuente: Bedford, 2013.

**1.1. Posición.** La posición de una partícula, medida desde un punto fijo  $O$ , será designada mediante el vector de posición (Hibbeler, 2010, p. 32).

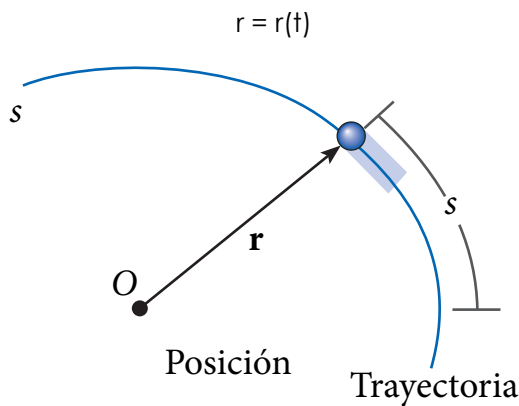


Figura 10: Posición de una partícula en movimiento curvilíneo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 32.

**1.2. Desplazamiento.** El desplazamiento representa el cambio en la posición de la partícula y es determinado por resta vectorial, es decir: (Hibbeler, 2010, p. 32):

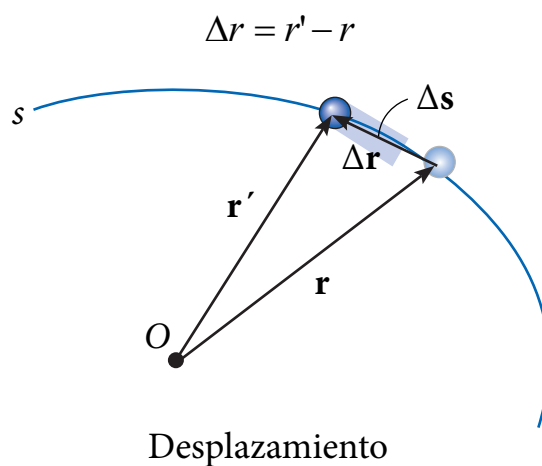


Figura 11: Desplazamiento de una partícula en movimiento curvilíneo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 32.

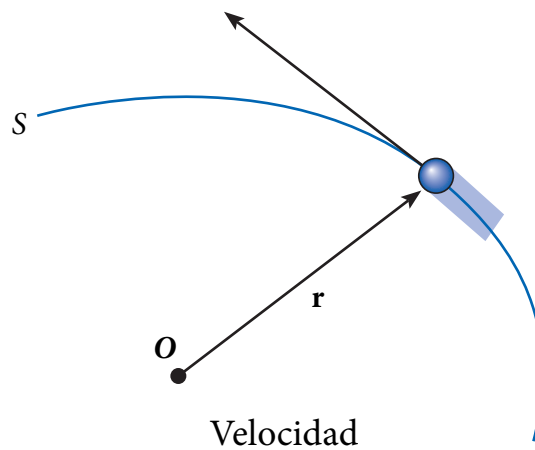
**1.3. Velocidad.** “La velocidad instantánea es la derivada de la posición respecto al tiempo” (Hibbeler, 2010, p. 32), mientras que la rapidez se puede obtener diferenciando la función trayectoria  $s$  con respecto al tiempo.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Velocidad instantánea

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Rapidez



Velocidad

Figura 12: Velocidad de una partícula en movimiento curvilíneo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 32.

**1.4. Aceleración.** “La aceleración promedio es la razón entre el cambio de velocidad respecto al tiempo” (Hibbeler, 2010, p. 33), mientras que la aceleración instantánea es la derivada del vector de posición respecto al tiempo.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Aceleración promedio

$$a = \frac{d^2r}{dt^2}$$

Aceleración instantánea

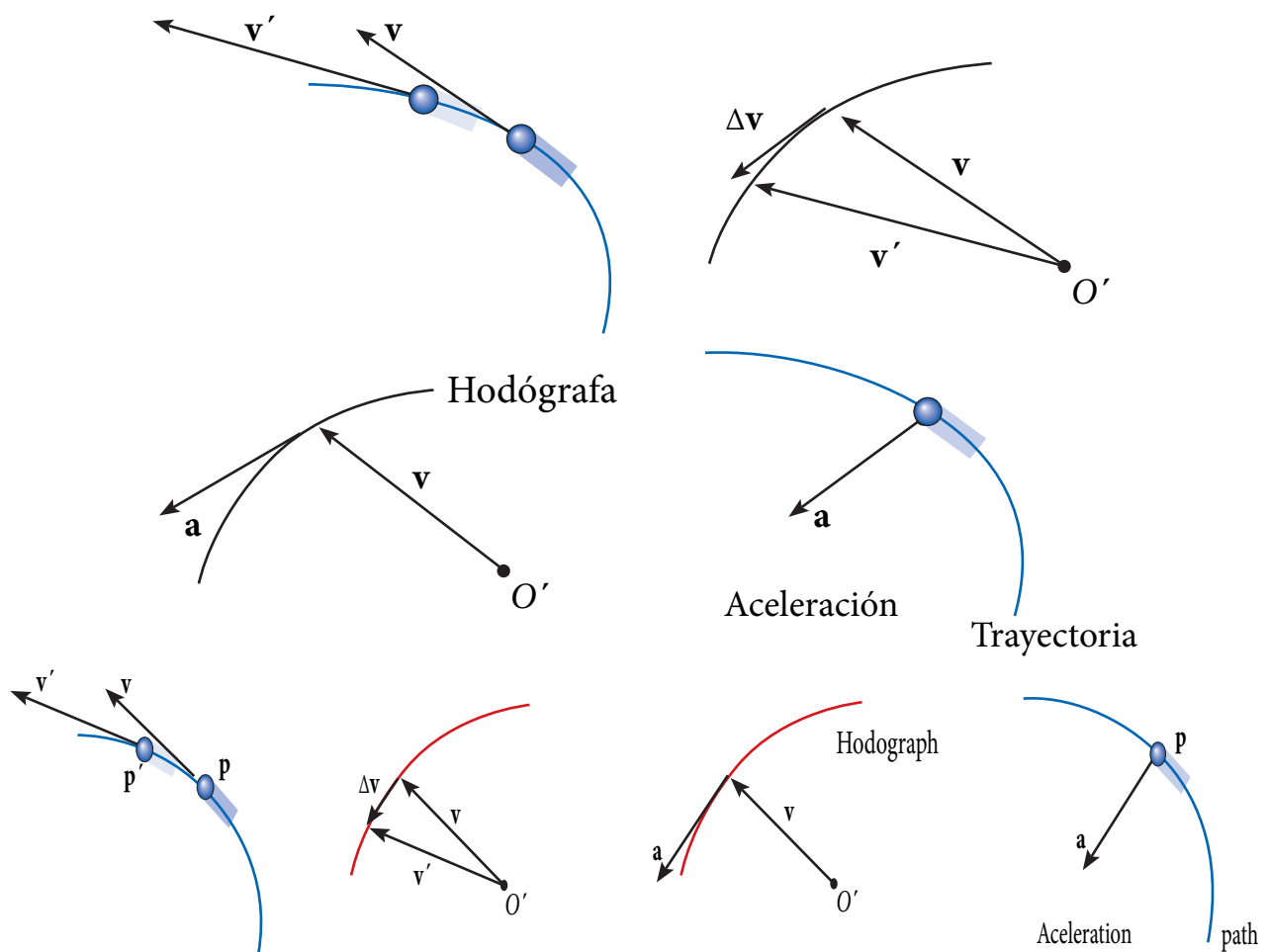
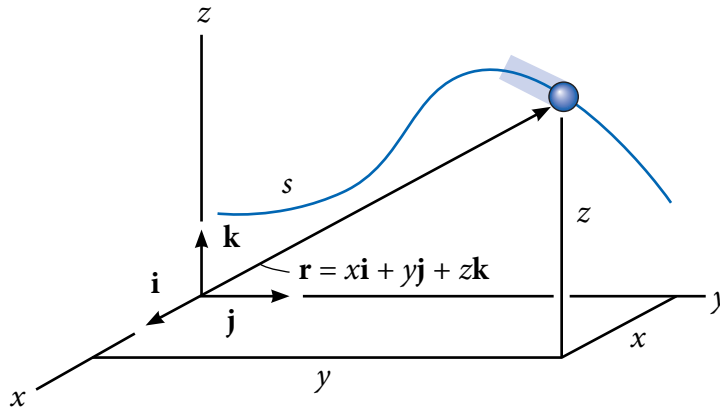


Figura 13: Aceleración de una partícula en movimiento curvilíneo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 33.

## 2. Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

Para el análisis del movimiento espacial es preciso definir lo siguiente (Hibbeler, 2010, p. 34):

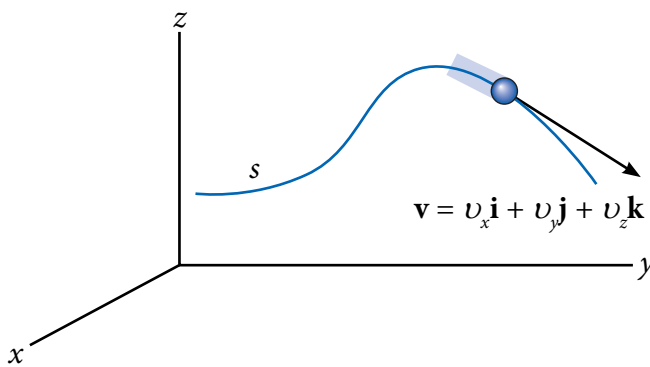


Posición

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Figura 14: Componentes de la posición de una partícula en movimiento curvilíneo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 34.



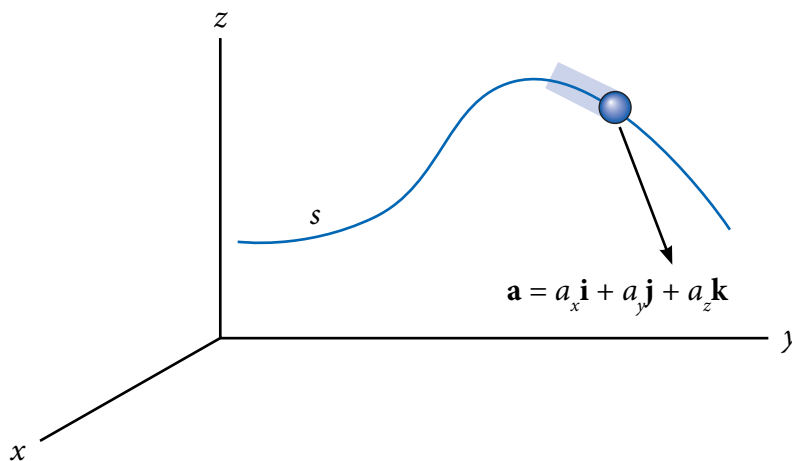
Velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Figura 15: Componentes de la velocidad de una partícula en movimiento curvilíneo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 34.



Aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Figura 16: Componentes de la aceleración de una partícula en movimiento curvilíneo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 35.

### 3. Movimiento de proyectiles

Un caso especial de movimiento –el movimiento en caída o vuelo libre de un proyectil– es estudiado en términos de sus componentes rectangulares, ya que la aceleración del proyectil siempre actúa en la dirección vertical. Para comprender el análisis cinemático, consideramos un proyectil lanzado en el punto  $(x_0, y_0)$ , como se muestra en la figura 17. La trayectoria está definida en el plano x-y de manera tal que la velocidad inicial es  $v_0$  con componentes  $(v_0)_x$  y  $(v_0)_y$ . Cuando la resistencia del aire es despreciada, la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso, el cual causa que el proyectil tenga una aceleración constante hacia abajo de aproximadamente  $a_c = g = 9,81 \text{ m/s}^2$  (Hibbeler, 2010, p. 39).

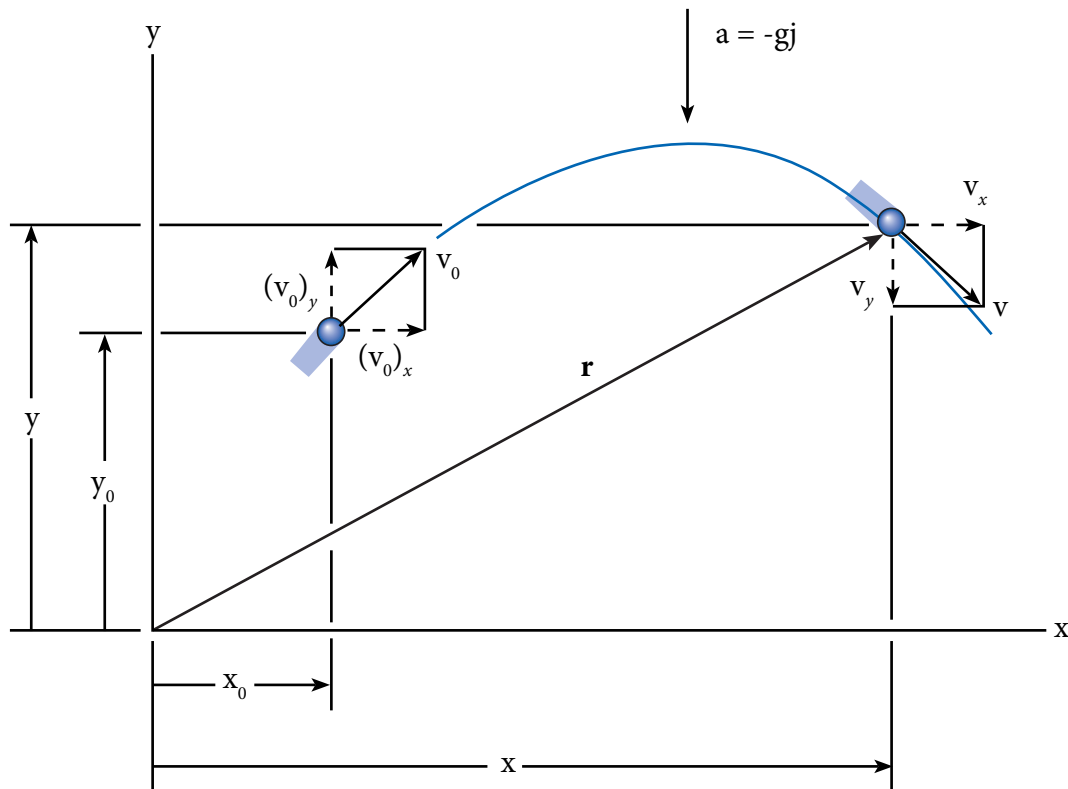


Figura 17: Movimiento de proyectiles. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 39.

Movimiento horizontal. El movimiento horizontal se considera constante (Hibbeler, 2010, p. 39).

$$\begin{aligned} (\longrightarrow) v &= v_0 + a_c t; & v_x &= (v_0)_x \\ (\longrightarrow) x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2; & x &= x_0 + (v_0)_x t \\ (\longrightarrow) v^2 &= v_0^2 + 2 a_c (s - s_0); & v_x &= (v_0)_x \end{aligned}$$

Movimiento vertical. El movimiento vertical se considera variado (Hibbeler, 2010, p. 39).

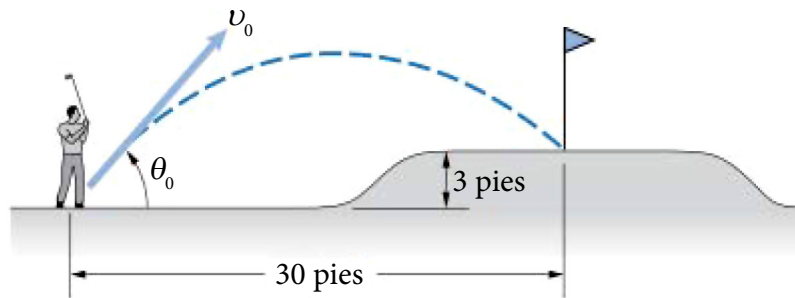
$$\begin{aligned} (+ \uparrow) v &= v_0 + a_c t; & v_y &= (v_0)_y - g t \\ (+ \uparrow) y &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2; & y &= y_0 + (v_0)_y t - \frac{1}{2} g t^2 \\ (+ \uparrow) v^2 &= v_0^2 + 2 a_c (y - y_0); & v_x &= (v_0)_x \end{aligned}$$



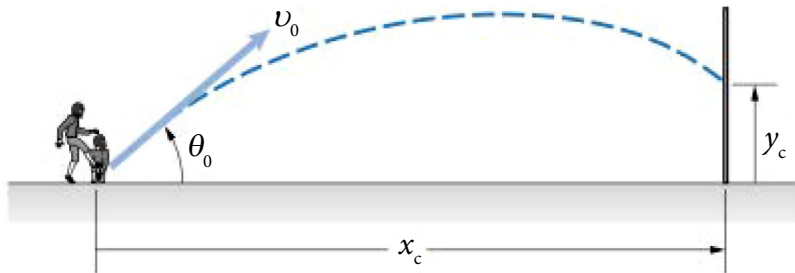
## Actividad n.º 2

Resuelva ejercicios y problemas sobre Equilibrio de una partícula.

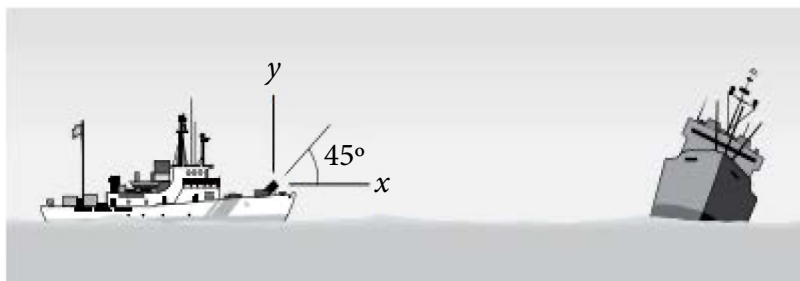
- Si el palo que está usando el golfista de la figura le da a la pelota a un ángulo inicial de  $50^\circ$ , ¿qué rango de velocidades  $v_0$  causará que la pelota aterrice a 3 pies del hoyo? (Suponga que el hoyo se encuentra en el plano de la trayectoria de la pelota).



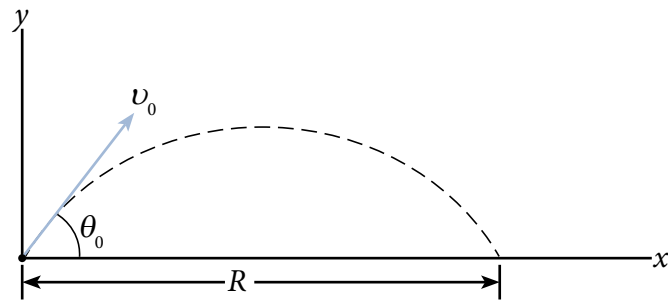
- El travesaño de la zona de gol de campo en fútbol americano está a  $y_c = 10$  pies sobre el terreno. Para anotar un gol de campo, el pateador debe hacer que el balón pase por encima del travesaño y entre los dos postes que lo soportan. Suponga que el pateador intenta un gol de campo de 40 yardas ( $x_c = 120$  pies) y patea el balón con una velocidad inicial  $v_0 = 70$  pies/s y un ángulo inicial de  $40^\circ$ . ¿Cuál es la distancia vertical por la que el balón supera al travesaño?



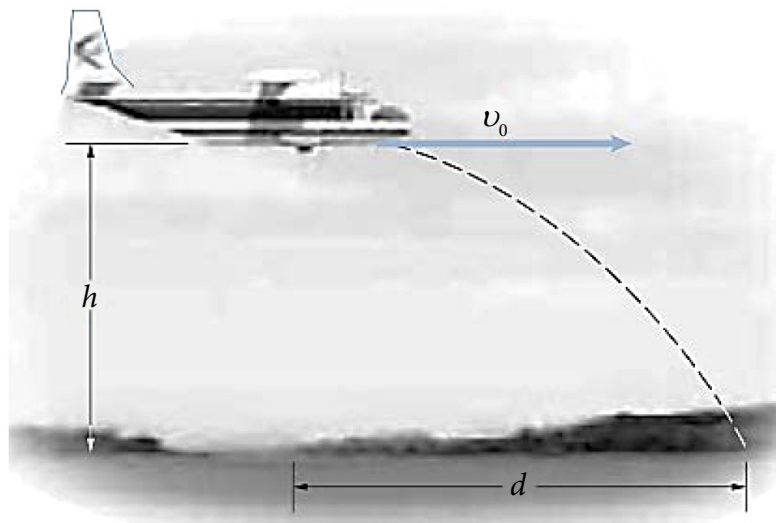
- Suponga que usted está diseñando un mortero para lanzar una cuerda de salvamento desde un guardacostas a un buque en zozobra. La cuerda está unida a un peso que es lanzado por el mortero. Ignore la resistencia aerodinámica y el peso de la cuerda para su análisis preliminar. Si desea que la cuerda alcance un buque que se encuentra a 300 pies cuando el mortero se dispara a  $45^\circ$  sobre la horizontal, ¿cuál es la velocidad inicial requerida en la boca del mortero?



- Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo con velocidad inicial  $v_0 = 20$  m/s. Determine su alcance  $R$  si a)  $\theta_0 = 30^\circ$ , b)  $\theta_0 = 45^\circ$  y c)  $\theta_0 = 60^\circ$ .



5. Un piloto quiere lanzar marcadores de exploración en cierta región remota de Australia. Si vuela a velocidad constante  $v_0 = 40 \text{ m/s}$  a una altura  $h = 30 \text{ m}$  y el marcador se suelta con velocidad cero respecto al avión, ¿a qué distancia horizontal  $d$  del impacto deseado debe soltarse el marcador?



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica*. (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*. (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica*. (12a ed.). México: Pearson Educación.

**Cinética de la partícula – Movimiento de traslación. Segunda ley de Newton**

**Tema n.º 3**



Figura 18: Aterrizaje del transbordador Columbia. Fuente: Beer, Jhonston & Cornwell, 2010, p. 631.

En este tema trataremos la interpretación y el uso pertinente de la Segunda Ley de Newton, ley del movimiento. Debemos tener presente que la Dinámica es la parte de la Física que estudia las relaciones entre los movimientos de los cuerpos y las causas que los provocan, que son las fuerzas que actúan sobre ellos. A esta parte específica de la Dinámica la denominaremos Cinética. Iniciaremos con la cinética del movimiento rectilíneo; es decir, las causas del movimiento rectilíneo en este tema.

### 1. Momento lineal de una partícula

Al respecto, Beer, Jhonston & Cornwell (2010) consideran que la primera y la tercera leyes de Newton del movimiento se emplearon con amplia frecuencia en estática para estudiar cuerpos en reposo y las fuerzas que actúan sobre ellos. Asimismo, estas dos leyes también se utilizan en dinámica; en realidad, son suficientes para el estudio del movimiento de cuerpos que no tienen aceleración. Sin embargo, cuando los cuerpos están acelerados; esto es, cuando cambia la magnitud o la dirección de su velocidad, es necesario recurrir a la segunda ley de movimiento de Newton para relacionar el movimiento del cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él (p. 694).

$$\sum F = ma$$

Si se reemplaza la aceleración  $\mathbf{a}$  por la derivada  $d\mathbf{v}/dt$  en la ecuación anterior, se escribe:

$$\sum F = m \frac{dv}{dt}$$

o, ya que la masa  $m$  de la partícula es constante,

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mv)$$

El vector  $m\mathbf{v}$  se denomina como la *cantidad de movimiento lineal*, o simplemente *cantidad de movimiento* de la partícula. Tiene la misma dirección que la velocidad de la partícula, y su magnitud es igual al producto de la masa  $m$  y la velocidad  $v$  de la partícula (Beer, 2010, p. 694).

Si se desea cambiar la posición de un cuerpo en reposo es necesario empujarlo o levantarlo, es decir, ejercer una acción sobre él. Aparte de estas intuiciones básicas, el problema del movimiento es muy complejo: todos aquellos que se observan en la naturaleza (caída de un objeto en el aire, movimiento de una bicicleta, un coche o un cohete espacial) son complicados (Beer, 2010, p. 695).

En función de la aceleración y fuerza la segunda ley de Newton se enuncia así: "Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es nula, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante" (Beer, 2010, p. 695).

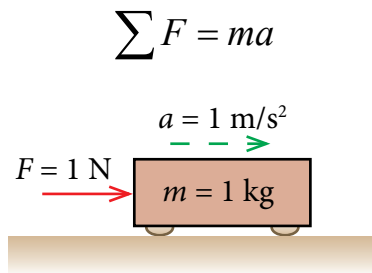


Figura 19: Segunda ley de Newton. Fuente: Beer , 2010, p. 691.

"Si se conocen la masa de una partícula y la fuerza que actúa sobre ella, con la segunda ley podemos determinar su aceleración. Ya aprendimos a determinar la velocidad, posición y trayectoria de un punto si se conoce su aceleración" (Beer. 2010, p. 694).

Por tanto, la segunda ley ayuda a determinar el movimiento de una partícula si se conoce la fuerza que actúa sobre ella.

$$\sum F = ma$$

Siendo:

$m$  = masa (en kg)

$a$  = aceleración (en  $\text{m/s}^2$ )

$\sum F$  = Fuerza resultante en la dirección del movimiento.

Por ejemplo, en la figura 20 si consideramos que la caja resbala acelerando sobre el plano inclinado sin fricción, la dirección del movimiento está dada por el eje  $x$ , paralelo al plano inclinado (eje de movimiento) (Beer. 2010, p. 699).

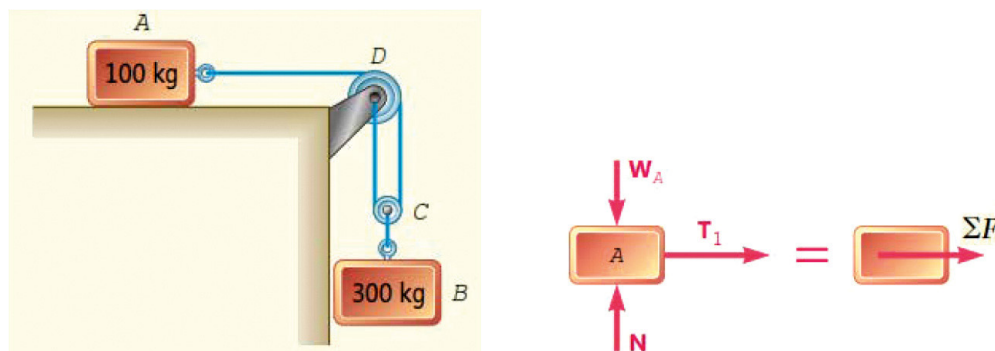


Figura 20: Segunda ley de Newton. Sistema dinámico (izq.) y DCL del bloque A (der.). Fuente: Beer, 2010, p. 701.

$$\sum F = T_1$$

IMPORTANTE:

La aceleración y la fuerza resultante motriz siempre tienen igual dirección y sentido.

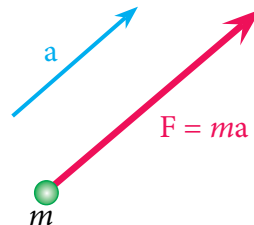


Figura 20: Gráfico de la fuerza resultante y la aceleración. Fuente: Beer, 2010, p. 701.

## 2. Ecuación del movimiento, coordenadas rectangulares

“Considérese una partícula de masa  $m$  sobre la que actúan varias fuerzas. Se tiene que la segunda ley de Newton puede expresarse mediante la ecuación que relaciona las fuerzas que actúan sobre la partícula y el vector  $ma$ ” (Bedford & Fowler, 2008, p. 114).

**Componentes rectangulares.** Al descomponer cada fuerza  $F$  y la aceleración  $a$  en componentes rectangulares, se escribe:

$$\sum (F_x i + F_y j + F_z k) = m(a_x i + a_y j + a_z k)$$

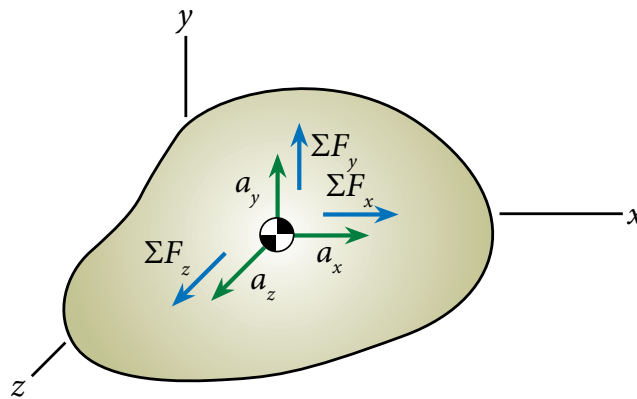


Figura 21: Componentes rectangulares de la aceleración. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 114.

$$\sum F_x = m a_x \quad \sum F_y = m a_y \quad \sum F_z = m a_z$$

## 3. Equilibrio dinámico

Al analizar la ecuación del movimiento de Newton y despejar en el miembro del lado derecho, se escribe la segunda ley de Newton en la forma alternativa  $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$  en la que se expresa que si se suma el vector  $(-m\mathbf{a})$  a las fuerzas que actúan sobre la partícula, se obtiene un sistema de vectores equivalente a cero (figura a). El vector  $(-m\mathbf{a})$ , de magnitud  $ma$  y de dirección opuesta a la de la aceleración, se denomina vector de inercia. De tal modo, es factible considerar que la partícula está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas dadas y del vector de inercia. Se afirma que la partícula está en *equilibrio dinámico*, y el problema que se considera puede resolverse mediante los métodos que se desarrollaron antes en estática (Beer et al., 2010, p. 699).

Para el caso de fuerzas coplanares, definitivamente todos los vectores que se muestran en la figura 22 (a), incluyendo al vector de inercia, "pueden trazarse uno después del otro para formar un polígono vectorial cerrado. También es posible igualar a cero la suma de los componentes de todos los vectores en la figura 22 (b), incluyendo de nuevo al vector de inercia" (Beer, 2010, p. 699).

En consecuencia, utilizando componentes rectangulares, se escribe:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

incluyendo el vector de inercia se tiene:

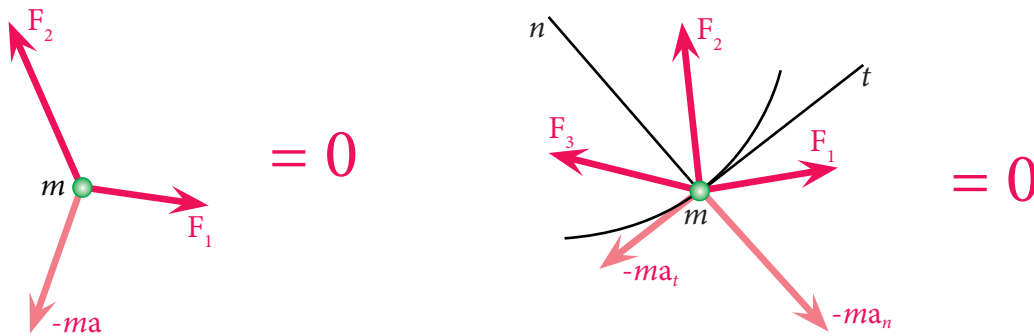


Figura 22 a y 22 b: Equilibrio dinámico. Fuente: Beer et al., 2010, p. 699.

### Actividad n.º 3

Compare el análisis que hace la cinemática con el realizado por la cinética. Aplique la segunda Ley de Newton. Además, resuelva los ejercicios propuestos.

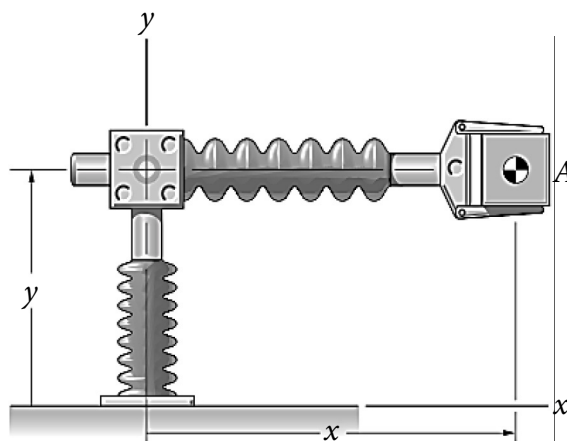
- Completar correctamente los enunciados siguientes respecto a cinética de partículas y segunda ley de Newton:
  - La cinética estudia las \_\_\_\_\_ que producen el movimiento.
  - En la segunda ley de Newton se propone la relación entre fuerza, \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.
  - “El cambio de movimiento es directamente proporcional a la \_\_\_\_\_ impresa y ocurre según la línea \_\_\_\_\_ a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime”.
  - La segunda ley de Newton ayuda a determinar el movimiento de una partícula si se conoce la \_\_\_\_\_ que actúa sobre ella.
  - La \_\_\_\_\_ y la fuerza resultante motriz siempre tienen igual dirección y sentido.
  - La fuerza de rozamiento representa una fuerza con sentido \_\_\_\_\_ al movimiento de un cuerpo, su magnitud está en función del \_\_\_\_\_.
- Las dos masas mostradas se sueltan desde el reposo, ¿con qué rapidez se estarán moviendo las masas cuando  $t = 0.5$  s?



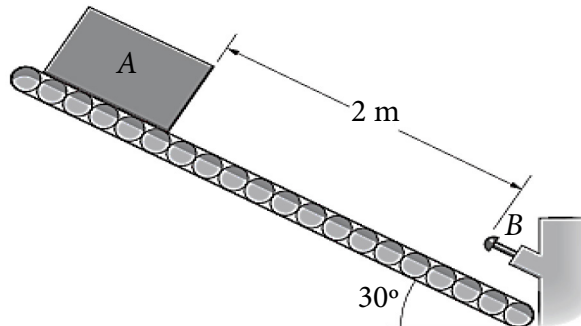
- El manipulador robótico de la figura está programado de manera que:

$$x = 40 + 24t^2 \text{ mm}, y = 4t^3 \text{ mm},$$

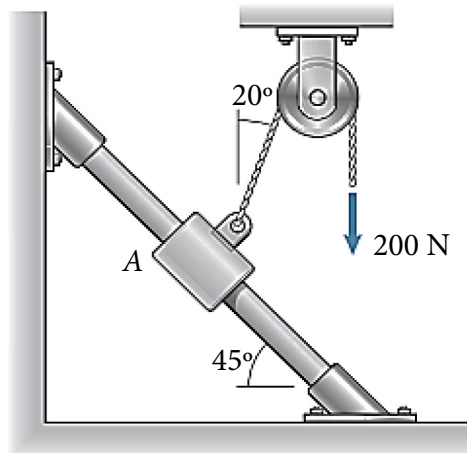
Durante el intervalo de tiempo de  $t=0$  a  $t=4$  s, el eje  $y$  apunta hacia arriba. ¿Cuáles son las componentes  $x$  e  $y$  de la fuerza total ejercida por las tenazas del manipulador sobre la pieza A de 2 kg cuando  $t=3$  s?



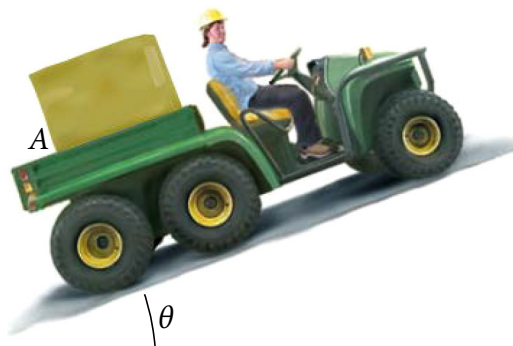
4. El paquete mostrado parte desde el reposo y se desliza hacia abajo por la rampa lisa. El dispositivo hidráulico B ejerce una fuerza constante de 2000 N y detiene al paquete a una distancia de 100 mm del punto en el cual hace contacto. ¿Cuál es la masa del paquete?



5. Determine la aceleración del collarín A de 8 kg respecto a la barra mostrada asumiendo superficies lisas. Además, determine la aceleración del collarín A de 8 kg respecto a la barra mostrada si el coeficiente de fricción cinética entre el collarín y la barra es 0,1.



6. Los coeficientes de fricción entre la carga A y la plataforma del vehículo utilitario son 0.4 y 0.36, respectivamente. Si el piso está nivelado ( $\theta = 0^\circ$ ), ¿cuál es la máxima aceleración del vehículo para la cual la carga no se deslizará sobre la plataforma?



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.



Cinética de la partícula – Movimiento curvilíneo

Tema n.º 4



Figura 22: En el tren que pasa por una curva, los pasajeros experimentan aceleración normal. Fuente: Beer, 2010, p. 666.

En esta ocasión, para completar nuestro estudio, trataremos la interpretación y el uso pertinente de la segunda ley de Newton, ley del movimiento,  $\ddot{\mathbf{r}}$  el movimiento curvilíneo; es decir, las relaciones entre los movimientos curvilíneos de los cuerpos y las causas que los provocan; en concreto, las fuerzas que actúan sobre ellos. En forma semejante a la cinética del movimiento rectilíneo, debemos determinar la fuerza resultante que produce que el movimiento sea curvilíneo.

### 1. Ecuación del movimiento

“Cuando un objeto se mueve en una trayectoria curva plana, es posible descomponer la suma de las fuerzas que actúan sobre él en sus componentes normal y tangencial” (ver figura 23a) (Bedford & Fowler, 2008, p. 133). También se puede expresar la aceleración del objeto en términos de sus componentes normal y tangencial (ver figura 23b) y escribir la segunda ley de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , en la forma:

$$\sum F_t \mathbf{e}_t + \sum F_n \mathbf{e}_n = m(a_t \mathbf{e}_t + a_n \mathbf{e}_n)$$

Donde:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad y \quad a_n = \frac{v^2}{p}$$

Igualando las componentes normal y tangencial en la ecuación inicial, se obtienen dos ecuaciones escalares de movimiento:

$$\sum F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} \quad \sum F_n = ma_n = m \frac{v^2}{p}$$

La suma de las fuerzas en la dirección tangencial es igual al producto de la masa por la razón de cambio de la magnitud de la velocidad, y la suma de las fuerzas en la dirección normal es igual al

producto de la masa por la componente normal de la aceleración. Si la trayectoria del centro de masa pertenece a un plano, la aceleración del centro de masa perpendicular al plano es cero, por lo que la suma de las fuerzas perpendiculares al plano también es igual a cero (Bedford & Fowler, 2008, p. 133).

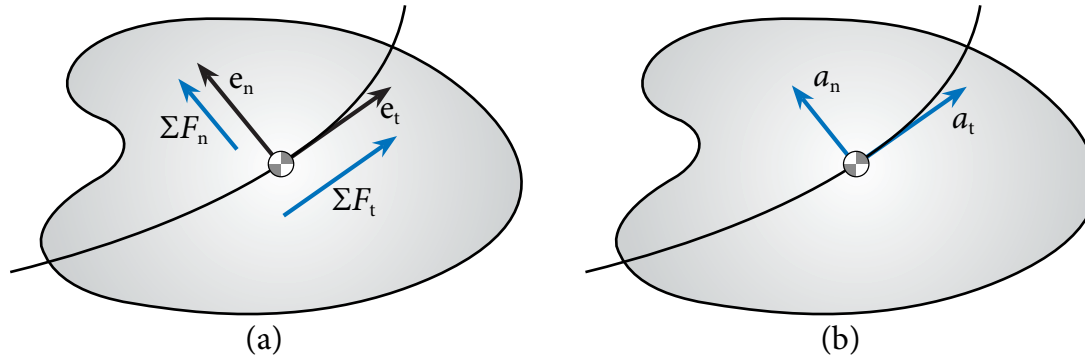


Figura 23: a) Componentes de fuerza normal y tangencial, b) Componentes normal y tangencial de la aceleración. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 133.

## 2. Componentes radial y transversal

Veamos un caso práctico: Se sabe que el “diseño preliminar de una rampa de autopista realizado por un ingeniero es circular con radio  $R = 60$  m. Si se supone que el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino es de por lo menos 0.4, ¿cuál es la máxima velocidad a la que los vehículos pueden entrar a la rampa sin perder tracción?” (Bedford & Fowler, 2008, p. 140). Asimismo,

Como un vehículo sobre la rampa se mueve en una trayectoria circular, tiene una componente de aceleración normal que depende de su velocidad. La componente normal de la fuerza necesaria es ejercida por la fricción entre los neumáticos y el camino, y la fuerza de fricción no puede ser mayor que el producto de  $m$  por la fuerza normal. Suponiendo que la fuerza de fricción es igual a este valor, se puede determinar la velocidad máxima para que no ocurra deslizamiento (Bedford & Fowler, 2008, p. 140).

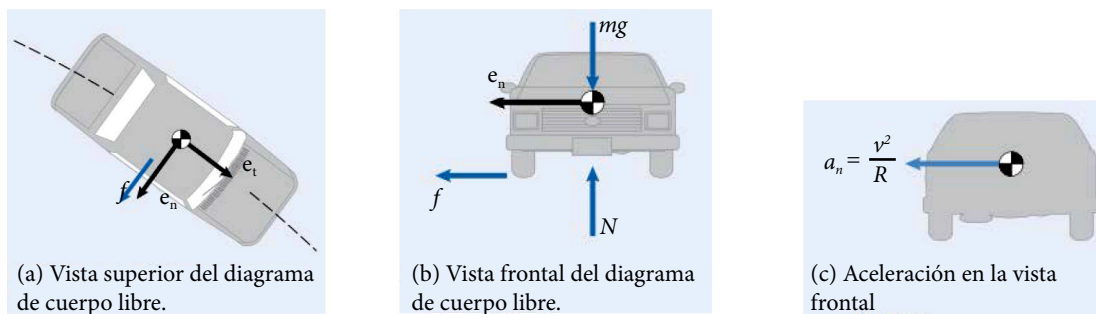


Figura 24: Componentes de aceleración considerando las fuerzas sobre el coche. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 140.

Recordando:

$$\sum F_n = ma_n = m \frac{v^2}{R}, \quad f = m \frac{v^2}{R}$$

La fuerza de fricción requerida aumenta con la velocidad  $v$ . La fuerza de fricción máxima que la superficie puede proporcionar es  $f_{\text{máx}} = \mu_s N = \mu_s mg$ . Por lo tanto, la velocidad máxima para que no ocurra deslizamiento es:

$$v = \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{0.4(9.81 \text{ m/s}^2)(60 \text{ m})} = 15.3 \text{ m/s} \quad 55.2 \text{ km/h}$$

Extraído de Bedford & Fowler, 2008, pp. 140-141.

### 3. Conservación de la cantidad de movimiento angular

Cuando la suma de los momentos externos es cero, se sabe que:

L es una constante. Y siendo L una constante se puede decir que:

$$dL / dt = 0$$

$$L_i = L_f$$

Y como:  $L = mvr$ ,  $L = I\omega$  entonces se cumple las condiciones:

$$mv_i r_i = mv_f r_f$$

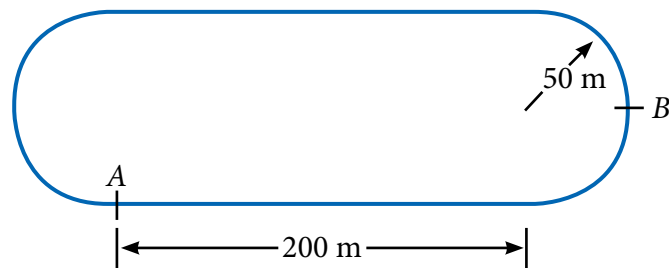
$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

El principio de conservación del momento angular afirma que si el momento de las fuerzas exteriores es cero (lo que no implica que las fuerzas exteriores sean cero, que sean un sistema aislado), el momento angular total se conserva; es decir, permanece constante.

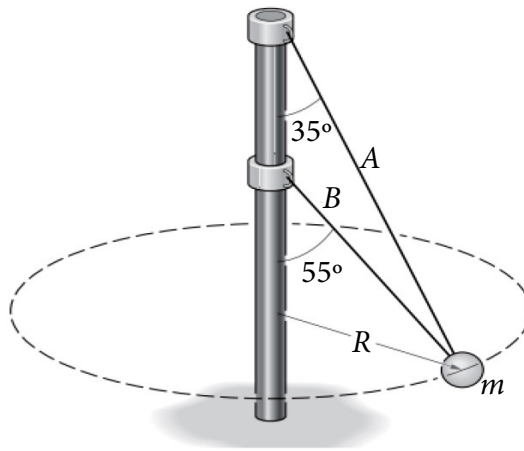
### Actividad n.º 4

Compare las componentes de fuerza normal y tangencial para la aplicación de la segunda ley de Newton. Además, resuelva los ejercicios propuestos.

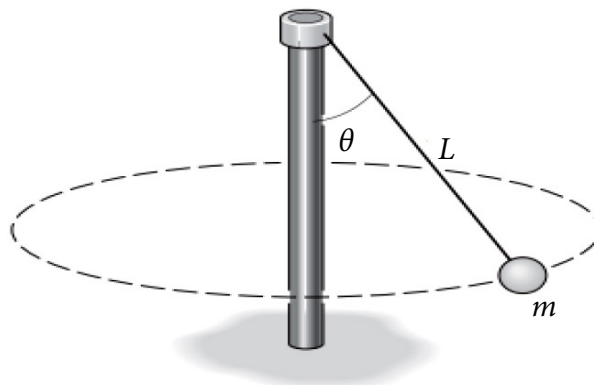
1. En estudios de diseño preliminar para un automóvil de energía solar se estima que la masa del vehículo y el conductor será de 100 kg y el par de torsión producido por el motor resultará en una fuerza tangencial de 60 N sobre el automóvil. Suponga que el vehículo parte desde el reposo sobre la pista en A y está sometido a una fuerza tangencial constante de 60 N. Determine la magnitud de la velocidad del automóvil y la componente normal de la fuerza sobre el vehículo cuando llega a B.



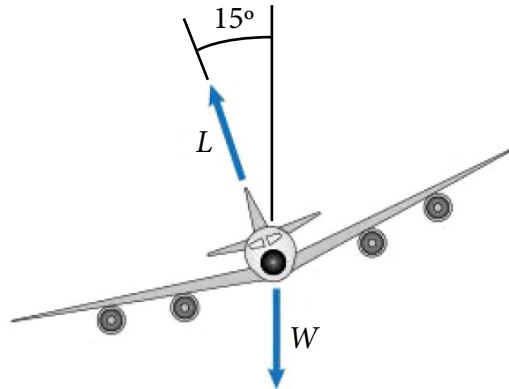
2. La masa  $m$  de 10 kg gira alrededor del poste vertical mostrado en una trayectoria circular horizontal de radio  $R = 1$  m. Si la magnitud de su velocidad es 3 m/s, ¿cuáles son las tensiones en las cuerdas A y B?



3. La masa  $m$  de 1 slug gira alrededor del poste vertical en una trayectoria horizontal circular. La longitud de la cuerda es  $L = 4$  pies. Determine la magnitud de la velocidad de la masa y el ángulo  $\theta$  si la tensión en la cuerda es de 50 lb.



4. Un avión con peso  $W = 200\,000$  lb realiza un viraje a altitud constante y a velocidad constante  $v = 600$  pies/s. El ángulo de inclinación es de  $15^\circ$ .
- Determine la fuerza  $L$  de sustentación.
  - ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria del avión?



5. Un automóvil viaja a  $30$  m/s y está en la cima de una colina. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y el camino es  $\mu_k = 0.8$ . El radio de curvatura instantánea de la trayectoria del automóvil es de  $200$  m. Si el conductor aplica los frenos y las ruedas del vehículo se bloquean, ¿cuál es la desaceleración resultante en la dirección tangente a la trayectoria?



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F.; Johnston, E. & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*. (9ª ed.). México : McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica*. (12ª ed.). México : Pearson Educación.

## Lectura seleccionada n.º 1

*Tren Coradia Liner V200*

Rodríguez, E. (21 de setiembre de 2014). *Tren Coradia Liner V200. Fieras de la Ingeniería*. Disponible en <http://bit.ly/2v8uqXN>



## Glosario de la Unidad I

---

### A

#### **Aceleración**

Magnitud vectorial que mide la variación de velocidad de un cuerpo. Esta variación puede ser en magnitud y/o dirección del vector velocidad (Hibbeler, 2010, p. 5).

### C

#### **Cinética**

Parte de la Dinámica que estudia la causa y efecto del movimiento (Hibbeler, 2010, p. 3).

#### **Cuerpo rígido**

Cuerpo que se considera no afecto a la deformación que producen las fuerzas (Hibbeler, 2010, p. 5).

### D

#### **Dinámica**

Parte de la Mecánica que estudia la relación entre la aceleración de un cuerpo y la fuerza que la produce (Hibbeler, 2010, p. 3).

### F

#### **Fuerza**

Medida de la interacción entre cuerpos (Hibbeler, 2010, p. 4).

### M

#### **Masa**

Medida de la inercia de un cuerpo (Hibbeler, 2010, p. 4)

#### **Mecánica**

Rama de la Física y la ingeniería que estudia el movimiento y el equilibrio (Hibbeler, 2010, p. 3).

### P

#### **Partícula**

Se dice así del Cuerpo de dimensiones despreciables (Hibbeler, 2010, p. 5).

#### **Peso**

Medida de la interacción gravitacional del planeta sobre un cuerpo (Hibbeler, 2010, p. 5).



## **Bibliografía de la Unidad I**

---

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

Pytel, A., & Kiusalaas, P. (2013). *Ingeniería Mecánica, Dinámica* (3a ed.). Estados Unidos: Cengage Learning.

## Problemas resueltos

1. Si la posición del camión de la figura durante el intervalo de tiempo de  $t = 2$  s a  $t = 4$  s está dada por la ecuación:

$$s = 6 + \frac{1}{3}t^3 \text{ m,}$$

Determine la velocidad y la aceleración en el instante  $t = 4$  s.

### Resolución:

1° Para obtener la velocidad, derivamos respecto del tiempo la ecuación de la posición.

$$v = \frac{ds}{dt} = t^2 \text{ m/s}$$

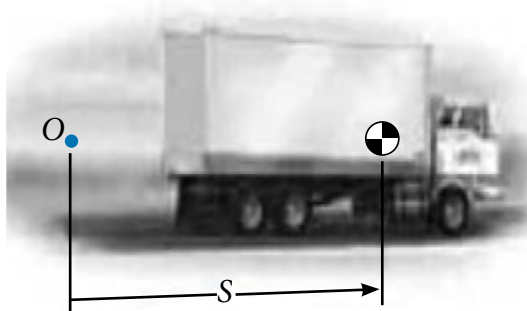
$$v = 4^2 = 16 \text{ m/s}$$

2° Para obtener la aceleración, derivamos respecto del tiempo la ecuación de la velocidad.

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t \text{ m/s}^2.$$

$$a = 2(4) = 8 \text{ m/s}^2$$

2. El camión mostrado en la figura tiene velocidad constante igual a  $v = 20$  m/s. Inicialmente se encuentra en la posición  $s_0 = 10$  m. Determine su posición en el instante  $t = 15$  s.



### Resolución:

1° Datos:  $s_0 = 20$  m       $v = \frac{20 \text{ m}}{\text{s}}$        $t = 15$  s       $s(15) = ?$

2° Fórmula:

$$s = s_0 + vt$$

$$s(15) = (10\text{m}) + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(15\text{s})$$

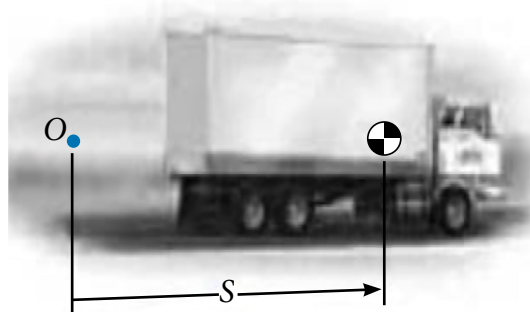
$$s(15) = 310\text{m}$$

3. El camión mostrado en la figura parte del reposo en la posición  $s_0 = 10$  m, tiene aceleración constante  $a = 0.20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .



Determine:

- La posición  $s$  en el instante  $t = 15s$ .
- La velocidad final en el instante  $t = 15s$ .



**Resolución:**

Datos:  $s_0 = 10m$     $a = 0.20 \frac{m}{s^2}$     $t = 15s$     $v_0 = 0 m/s$

$s(15) = ?$     $v(15) = ?$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$s(15) = (10) + (0)(15) + \frac{1}{2} (0.2) (15)^2$$

$$s(15) = 32.5m$$

$$v = v_0 + a_c t$$

$$v(15) = (0) + (0.20)(15)$$

$$v(15) = 3 m/s$$

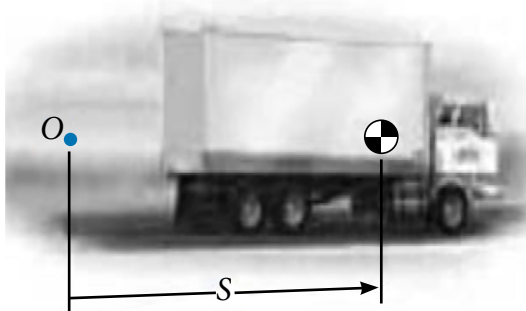
Nota: Los ejercicios han sido tomados del texto siguiente:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.



## Autoevaluación n.º 1

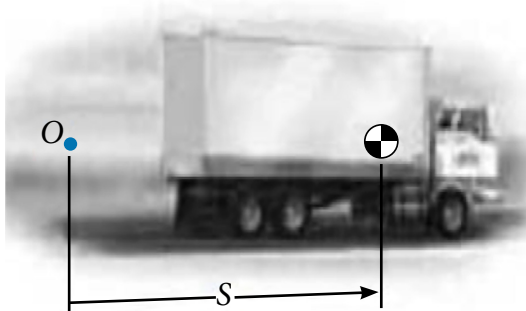
1. El camión mostrado en la figura tiene velocidad constante igual a  $v = 30\text{m/s}$ . Inicialmente se encuentra en la posición  $s_0 = 8\text{m}$ . Determine su posición en el instante  $t = 10\text{s}$ .



- a) 308 m  
b) 38 m  
c) 76 m  
d) 8 m  
e) 3 m
2. El automóvil mostrado en la figura tiene velocidad constante  $v$ . Inicialmente se encuentra en la posición  $s_0 = -10\text{m}$ . Se sabe que en el instante  $t = 10\text{s}$  se encuentra en la posición  $s = 140\text{ m}$ . Determine su velocidad.



- a) 10 m/s  
b) 15 m/s  
c) 18 m/s  
d) 20 m/s  
e) 30 m/s
3. El camión mostrado en la figura parte del reposo en la posición  $s_0 = 20\text{m}$ , tiene aceleración constante  $a = 0.10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Determine la posición  $s$  en el instante  $t = 10\text{s}$ .



- a) 308 m
- b) 38 m
- c) 25 m
- d) 8 m
- e) 3 m

4. El bote mostrado en la figura parte del reposo en la posición  $s = 0\text{m}$ , se sabe que a los 10s se encuentra en la posición  $s = 5\text{m}$ . Determine la aceleración del bote.



- a)  $1\text{ m/s}^2$
- b)  $10\text{ m/s}^2$
- c)  $1.1\text{ m/s}^2$
- d)  $0.1\text{ m/s}^2$
- e)  $0.01\text{ m/s}^2$

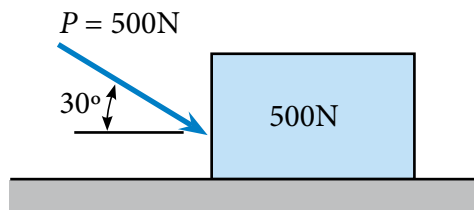
5. En el problema anterior determine la posición  $s$  en el instante  $t = 1\text{ min}$ .

- a) 308 m
- b) 38 m
- c) 25 m
- d) 8 m
- e) 180 m

6. Un auto que se desplaza rectilíneamente con rapidez constante de  $10\text{ m/s}$ , aplica los frenos y se detiene después de recorrer  $50\text{ m}$ . Si en dicho proceso experimenta MRUV, determine el tiempo que demoró en detenerse.

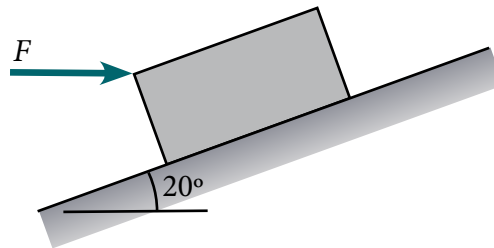
- a) 10 s
- b) 20 s
- c) 30 s
- d) 40 s
- e) 50 s

7. Se muestra en la figura adjunta un bloque A de  $500\text{ N}$  de peso, el mismo que se encuentra en reposo, en  $t = 0\text{ s}$ , sobre el plano horizontal cuyos coeficientes de rozamiento cinético y estático son iguales a  $0.1$ . Determine la magnitud de la fuerza de rozamiento cinético que actúa sobre el bloque.



- a) 70 N
- b) 75 N
- c) 80 N
- d) 90 N
- e) 95 N

8. En el problema anterior, calcular la magnitud de la aceleración del bloque.
- 1.05 m/s<sup>2</sup>
  - 10.23 m/s<sup>2</sup>
  - 7.02 m/s<sup>2</sup>
  - 0.13 m/s<sup>2</sup>
  - 0.01 m/s<sup>2</sup>
9. En el problema 7, ¿cuál es la velocidad del bloque al transcurrir  $t = 5$  s?
- 10.5 m/s
  - 15.3 m/s
  - 18.4 m/s
  - 35.1 m/s
  - 30.6 m/s
10. La superficie inclinada que se muestra en la figura es lisa. El valor de la velocidad de la caja de 14 kg es cero cuando se somete a una fuerza horizontal constante  $F = 20$  N. ¿Cuál es la velocidad de la caja dos segundos después?



- 10.5 m/s
- 15.3 m/s
- 18.4 m/s
- 35.1 m/s
- 4.03 m/s

Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

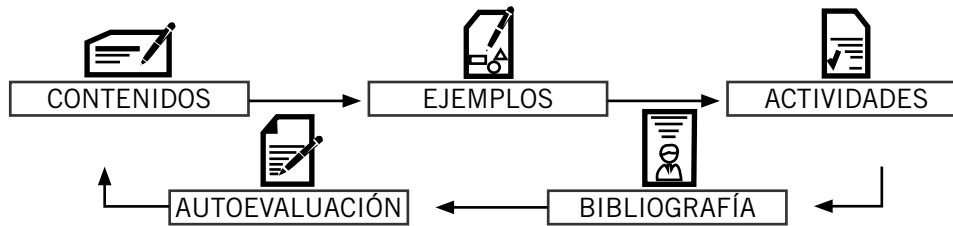
Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## UNIDAD II

# CINÉTICA DE PARTÍCULAS Y DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS

### DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD II



### ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

**RESULTADO DE APRENDIZAJE:** Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de desarrollar el principio de trabajo y energía y lo aplica para resolver problemas que implican fuerza, velocidad, desplazamiento, potencia y eficiencia; asimismo, interpreta el concepto de fuerza conservadora y aplica el teorema de la conservación de la energía para resolver problemas de cinética de partículas.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
<p><b>Tema N.º 1:</b> <b>Trabajo mecánico</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Trabajo de una fuerza.</li> <li>Energía cinética de una partícula y teorema del trabajo.</li> <li>Potencia mecánica.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Analiza problemas relacionados con la dinámica de una partícula y de un sistema de partículas aplicando los teoremas del trabajo y la energía cinética.</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Se motiva por la utilidad que tienen el trabajo y la energía en diversas aplicaciones tanto en el campo de la ingeniería como en la vida cotidiana, considerando el uso de la energía como fundamental en el desarrollo de nuestra sociedad.</li> <li>✓ Participa en lograr su aprendizaje de los métodos para analizar el momento lineal y la cantidad de movimiento.</li> </ul>
<p><b>Tema N.º 2:</b> <b>Conservación de la energía</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Energía y fuerzas conservativas.</li> <li>Principio de conservación de la energía.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas trabajo mecánico.</li> <li>Analiza problemas relacionados con la dinámica de una partícula y de un sistema de partículas aplicando los teoremas de la conservación de la energía.</li> </ol>	
<p><b>Tema N.º 3:</b> <b>Momento lineal e impulso</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Principio del impulso y de la cantidad de movimiento.</li> <li>Impactos o colisiones.</li> </ol>	<p><b>Actividad N.º 5</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas de la conservación de la energía.</li> <li>Desarrolla el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal para una partícula y lo aplica en la resolución de problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.</li> </ol>	
<p><b>Tema N.º 4:</b> <b>Sistemas de partículas</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Aplicación de las leyes del movimiento a un sistema de partículas.</li> <li>Momento lineal y momento angular de un sistema de partículas.</li> <li>Centro de masa.</li> </ol>	<p><b>Actividad N.º 6</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas sobre impulso y cantidad de movimiento.</li> </ol>	
<p><b>Lectura seleccionada N.º 2</b></p>	<p><b>Actividad N.º 7</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas sobre impulso y cantidad de movimiento.</li> </ol>	
<p><b>Autoevaluación N.º 2</b></p>	<p><b>Actividad N.º 8</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Elabora un diagrama de flujo para representar el algoritmo del movimiento de un sistema de partículas. Además, desarrolla los ejercicios propuestos.</li> </ol>	

## Trabajo mecánico

### Tema n.º 1



Figura 25: Ejemplo de trabajo mecánico, trabajo sobre una pelota de golf. Fuente: Beer , 2010, p. 759.

La idea común y difundida que se tiene del trabajo es muy genérica. Se asocia al hecho de realizar alguna tarea o cumplir con un cierto rol. Incluso se le considera como una actividad que provoca cansancio. En mecánica, sin embargo, el concepto de trabajo se emplea en forma más restringida; es decir, más específica. En física se dice que una fuerza realiza trabajo cuando esta es capaz de desplazar un cuerpo cualquiera.

### 1. Trabajo de una fuerza

Para el trabajo mecánico, según la Física, hay que considerar dos conceptos fundamentales: la fuerza y el movimiento.



Figura 26: Ejemplo de trabajo mecánico. Elaboración propia.

Por ejemplo, la fuerza del motor realiza trabajo mecánico, porque la fuerza que aplica es capaz de mover un automóvil; por tanto, dicha fuerza produce trabajo mecánico. En su defecto, existe una situación en la que la fuerza de una persona empujando el automóvil no produce movimiento; entonces, se dice que la fuerza de la persona no produce trabajo mecánico. Luego, concluimos:

El trabajo mecánico es una magnitud que mide la transmisión de movimiento que produce una fuerza.

### 1.1. Definición de trabajo mecánico

Considere una partícula de masa  $m$  que se mueve a lo largo de la curva  $C$ , bajo la acción de la fuerza  $F$ .

En un intervalo de tiempo  $dt$  la partícula experimenta un desplazamiento:

$$\overrightarrow{AA'} = d\vec{r}$$

El trabajo se define como

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

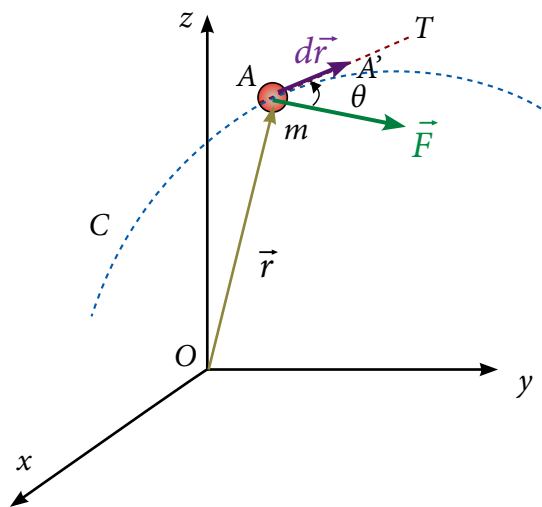


Figura 27: Trabajo mecánico para una trayectoria arbitraria. Fuente: Pytel & Kiusalaas, 2013, p. 67.

Usando la definición de producto escalar:

$$dU = F \cdot ds \cdot \cos \theta$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre el desplazamiento y la fuerza

De la ecuación, se deduce:

- ✓ Si  $\theta$  es agudo, el trabajo es positivo.
- ✓ Si  $\theta$  es obtuso, el trabajo es negativo.
- ✓ Si  $\theta = 90^\circ$ , el trabajo es nulo.

Unidad de trabajo en el SI

$$\text{Joule (J)} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

### 1.2. Trabajo de una fuerza constante en magnitud y dirección

“Cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza de magnitud y dirección constante el trabajo será:

$$U_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r}$$

$$U_{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

La ecuación indica que si la fuerza es constante en magnitud y dirección, el trabajo es independiente de la trayectoria seguida" (Pytel & Kiusalaas, 2013, p. 68).

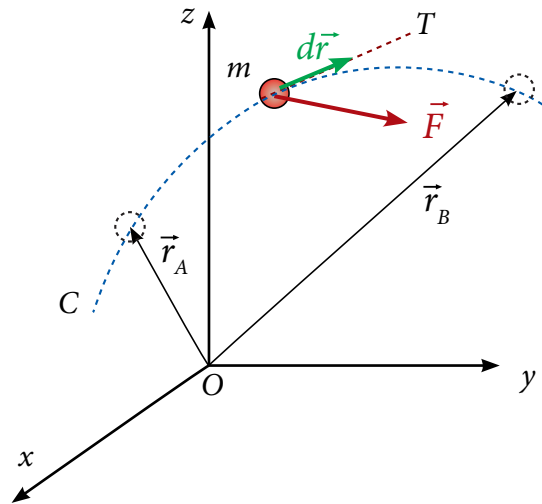


Figura 28: Trabajo mecánico en función de la posición. Fuente: Pytel & Kiusalaas, 2013, p. 69.

### 1.3. Definición escalar de trabajo

El trabajo no es un vector; se trata más bien de una cantidad escalar igual al producto del desplazamiento  $x$  y el componente de la fuerza  $F_x$  en la dirección del desplazamiento.

*Trabajo = Componente de fuerza  $\times$  desplazamiento*

$$U_{A \rightarrow B} = F \cdot d$$

#### Trabajo positivo

El trabajo es positivo si el vector fuerza y el vector desplazamiento son codirigidos.



Figura 29: Trabajo mecánico positivo. Fuente: Tippens, 2010, p. 203.

Ejemplo: Si  $F = 40 \text{ N}$  y  $x = 4 \text{ m}$ , entonces:  
 Trabajo =  $U = F d = (40 \text{ N})(4 \text{ m}) = 160 \text{ N}\cdot\text{m}$   
 Trabajo =  $U = 160 \text{ J}$

#### Trabajo negativo

El trabajo es negativo si el vector fuerza y el vector desplazamiento son opuestos.

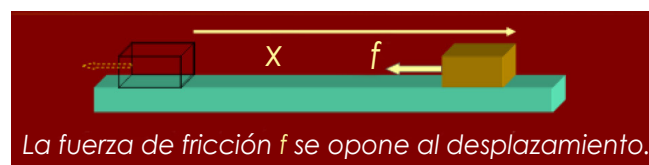


Figura 30: Trabajo mecánico negativo. Fuente: Tippens, 2010, p. 203.



Ejemplo: Si  $f = -10 \text{ N}$  y  $x = 4 \text{ m}$ , entonces:  
 Trabajo =  $U = -F d = (-10 \text{ N})(4 \text{ m}) = -40 \text{ J}$   
 Trabajo =  $U = -40 \text{ J}$

**Trabajo resultante o trabajo neto**

El trabajo resultante es la suma algebraica de los trabajos individuales de cada fuerza.

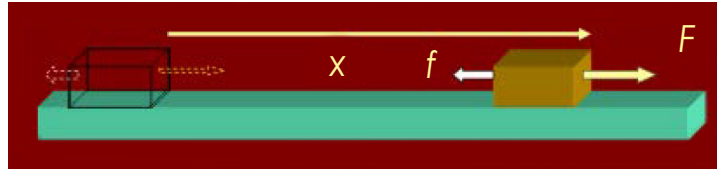


Figura 31: Trabajo mecánico neto. Fuente: Tippens, 2010, p. 203.

El trabajo resultante o neto también es equivalente al trabajo de la fuerza resultante.



Figura 32: Trabajo mecánico neto, forma alternativa. Fuente: Tippens, 2010, p. 204.

Ejemplo: Trabajo =  $(F - f) x$

Trabajo neto =  $U_{neto} = (40 - 10 \text{ N})(4 \text{ m})$

Trabajo =  $U_{neto} = 120 \text{ J}$

**2. Energía cinética de una partícula y teorema del trabajo**

Expresa la relación entre el trabajo y la energía cinética, esto es:

$$U_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1$$

Ecuación que expresa que cuando una partícula se mueve de  $A_1$  a  $A_2$  bajo la acción de una fuerza  $F$ , el trabajo es igual a la variación de la energía cinética. A esta expresión se llama *teorema de la fuerza viva*.

Reordenando la ecuación anterior se tiene:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

La energía cinética representa *la capacidad de realizar trabajo asociada a la velocidad de la partícula*.

**3. Potencia mecánica**

La potencia es una base del criterio para elegir un motor, sea térmico o eléctrico. Para realizar una cantidad de trabajo dado puede emplearse un motor pequeño o una gran central eléctrica; la diferencia es que el motor más pequeño demora un tiempo más grande que la central eléctrica (Bedford & Fowler, 2008, p. 168).

La potencia es el trabajo por unidad de tiempo. La potencia mecánica relaciona la cantidad de "energía" por unidad de tiempo.



Figura 33: Aparato motor de un teleférico. Fuente: Pytel y Kiusalaas, 2013, p. 214.

Si  $\Delta U$  es el trabajo realizado en un intervalo de tiempo  $\Delta$ , la potencia media desarrollada durante ese intervalo de tiempo es:

$$P_m = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

La potencia instantánea será:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{dU}{dt} = \frac{U}{t}$$

Remplazando  $dU$  por el producto escalar  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ , se tiene:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Como la potencia es el trabajo por unidad de tiempo, sus unidades serán el joule/segundo, unidad llamada Watt (W).

$$1 \text{ W (watt)} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N.m/s}$$

- Existen otros múltiplos del SI, que son frecuentes en aplicaciones industriales, tales como:

$$1 \text{ kW} = 10^3 \text{ watt}$$

$$1 \text{ MW} = 10^6 \text{ watt}$$

$$1 \text{ GW} = 10^9 \text{ watt}$$

### 3.1. Eficiencia

También conocido como rendimiento de una máquina, se define como la relación entre el trabajo y el trabajo total realizado. Esta ecuación es usada cuando el trabajo se realiza a ritmo constante. Debido a las pérdidas de energía por fricción, la eficiencia es menor que 1 (Bedford & Fowler, 2008, p. 168).

Normalmente, la potencia que tiene que desarrollar una máquina (o nosotros mismos) es mayor que el trabajo útil efectuado, ya que parte de la misma se emplea en realizar trabajo de rozamiento, o en todo caso se pierde (Bedford & Fowler, 2008, p 169).

- Se llama rendimiento ( $\eta$ ) a la relación:

$$\eta = \frac{U_{\text{útil}}}{U} \times 100$$

## Actividad n.º 5

### Parte 1

Complete los enunciados siguientes:

- El trabajo resultante es la suma algebraica de los \_\_\_\_\_ individuales de cada fuerza.
- El trabajo resultante o neto también es equivalente al trabajo de la fuerza \_\_\_\_\_.
- El trabajo del peso se obtiene multiplicando el peso del cuerpo por el \_\_\_\_\_ vertical.
- La potencia es el \_\_\_\_\_ por unidad de tiempo; sus unidades serán el joule/segundo, unidad llamada \_\_\_\_\_.
- La potencia es el trabajo por unidad de \_\_\_\_\_.
- Normalmente, la potencia que tiene que desarrollar una máquina es \_\_\_\_\_ que el trabajo útil realizado.
- Una fuerza desarrolla trabajo positivo o motriz si la fuerza y el desplazamiento son vectores \_\_\_\_\_.
- Una fuerza desarrolla trabajo negativo si la fuerza y el desplazamiento son vectores \_\_\_\_\_.
- La potencia efectiva es la relación entre el \_\_\_\_\_ y el tiempo empleado.
- La eficiencia relaciona el trabajo \_\_\_\_\_ y el trabajo consumido.

### Parte 2

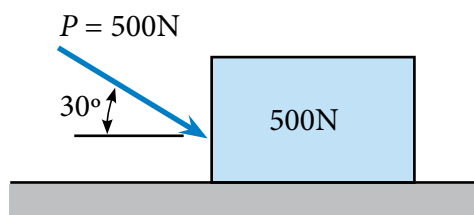
Responda y/o grafique según lo solicitado:

- ¿Qué tipo de trabajo realiza la resistencia del aire? Fundamente y/o grafique.
- ¿Qué tipo de trabajo realiza la fuerza de reacción normal a un movimiento horizontal sobre superficie lisa? Fundamente y/o grafique.
- Grafique una situación en la que el trabajo realizado sea negativo.
- Elabore el DCL de una persona de pie que "se deja elevar" por un ascensor, e indique el tipo de trabajo que desarrolla cada una de las fuerzas actuantes sobre la persona.
- Elabore el DCL de un camión en movimiento sobre una pista con pendiente de  $20^\circ$  e indique el tipo de trabajo que desarrolla cada una de las fuerzas actuantes sobre el camión.

### Parte 3

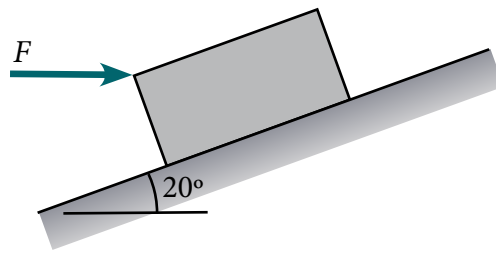
Resuelva los siguientes ejercicios:

- Se muestra en la figura adjunta un bloque A de 500 N de peso, el mismo que se encuentra en reposo, en  $t = 0s$ , sobre el plano horizontal cuyos coeficientes de rozamiento cinético y estático son iguales a 0.1

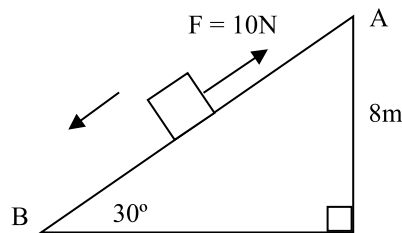


Determine, luego de un minuto partiendo desde el reposo:

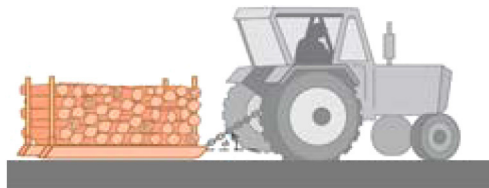
- El trabajo de cada fuerza que actúa sobre el bloque.
  - El trabajo total sobre el bloque.
- El coeficiente de fricción cinética entre la caja de 14 kg y la superficie inclinada es de 0.1. La velocidad de la caja es cero cuando se somete a una fuerza horizontal constante  $F = 20\text{ N}$ . Determine, luego de un minuto partiendo desde el reposo:
    - El trabajo de la fuerza  $F$  menos el trabajo de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque.
    - El trabajo neto sobre el bloque.



3. El bloque de 5 kg realiza un movimiento acelerado cuyo valor es  $2 \text{ m/s}^2$ . Calcular el trabajo realizado por la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque, desde "A" hasta "B". Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



4. Un granjero arrastra con su tractor un trineo cargado con leña 40 m sobre el suelo horizontal. El peso total del trineo y la carga es de 14,900 N. El tractor ejerce una fuerza constante de 6000 N a  $36.98^\circ$  sobre la horizontal, como se indica en la figura. Una fuerza de fricción de 3500 N se opone al movimiento del trineo. Calcule el trabajo realizado por cada fuerza que actúa sobre el trineo y el trabajo total de todas las fuerzas.



5. En el problema anterior suponga que la rapidez inicial  $v_i$  es  $1 \text{ m/s}$ . ¿Cuál es la rapidez final del trineo después de avanzar 40 m?
6. Se sabe que cada uno de los dos motores a reacción de un avión Boeing 757 desarrolla un empuje (fuerza hacia adelante sobre el avión) de  $197\,000 \text{ N}$  ( $44\,300 \text{ lb}$ ). Si el avión está volando a  $250 \text{ m/s}$  ( $900 \text{ km/h}$  o aproximadamente  $560 \text{ mi/h}$ ), ¿cuántos caballos de potencia desarrolla cada uno de los motores?



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Conservación de la energía

### Tema n.º 2



Figura 34: Cascada en el parque Yellowstone (Estados Unidos), ejemplo de energía en la naturaleza. Fuente: Bedford & Fowler, 2010, p. 735.

Para iniciar el presente tema, vale considerar la importancia de la energía en el desarrollo tecnológico. Durante siglos el hombre intentó construir, sin jamás lograrlo, la máquina del movimiento perpetuo. Este supuesto fracaso fue motivación para que los científicos Julius Robert von Mayer (1814-1878) y James Prescott Joule (1818-1889) descubrieran el principio de conservación de la energía. “*La energía no se crea ni se destruye, solo se transforma*”. Lo que en la práctica se traduce en el hecho de que cuando una máquina entrega energía, lo que propiamente hace es transformar una clase de energía en otra.

### 1. Energía y fuerzas conservativas

La energía es una cualidad de los cuerpos que permite que se puedan producir cambios en ellos mismos y en otros. La energía se presenta en formas muy variadas y se puede modificar de una en otra. Sin embargo, la energía se conserva en las transformaciones, aunque se degrada al pasar de formas más útiles a menos útiles.

#### 1.1. Energía cinética

Es la energía que posee un cuerpo en virtud de su estado en movimiento. Todo cuerpo en movimiento tiene capacidad de realizar un trabajo, el cual se pone de manifiesto cuando el objeto se detiene bruscamente (estrellándose, por ejemplo). Dicha energía se invierte en un trabajo de destroz.



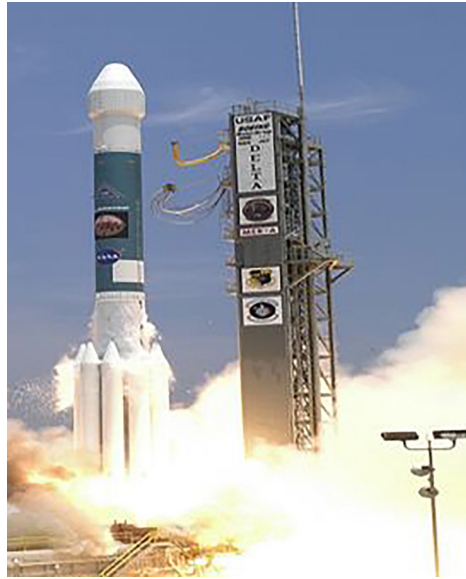


Figura 35: Lanzamiento de un cohete a propulsión. Fuente: Tippens, 2010, p. 315.

La energía cinética es directamente proporcional al producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de su velocidad.

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

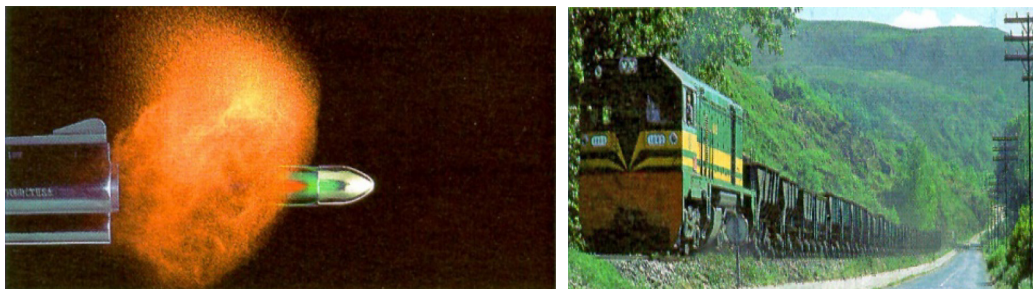


Figura 36: La bala tiene mucha energía cinética porque sale a una velocidad muy elevada. El tren también tiene este tipo de energía porque posee una gran masa. Fuente: Tippens, 2010, p. 316.

## 1.2. Energía potencial gravitacional

Es la energía que posee un cuerpo en virtud de su posición respecto al centro de la Tierra. Por eso se llama energía potencial gravitacional y está dada por la ecuación:

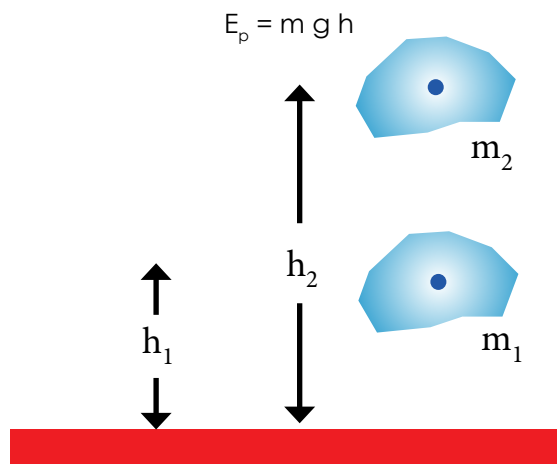


Figura 37: Energía potencial gravitacional. Fuente: Tippens, 2010, p. 317.

Si  $m_1 = m_2$  y  $h_2 > h_1$

$$E_{p_2} > E_{p_1}$$

### 1.3. Origen de la energía potencial gravitacional

La energía potencial es una propiedad del sistema Tierra-cuerpo. Ninguno de los cuerpos tiene energía potencial sin el otro. Solo fuerzas externas pueden agregar o quitar energía.

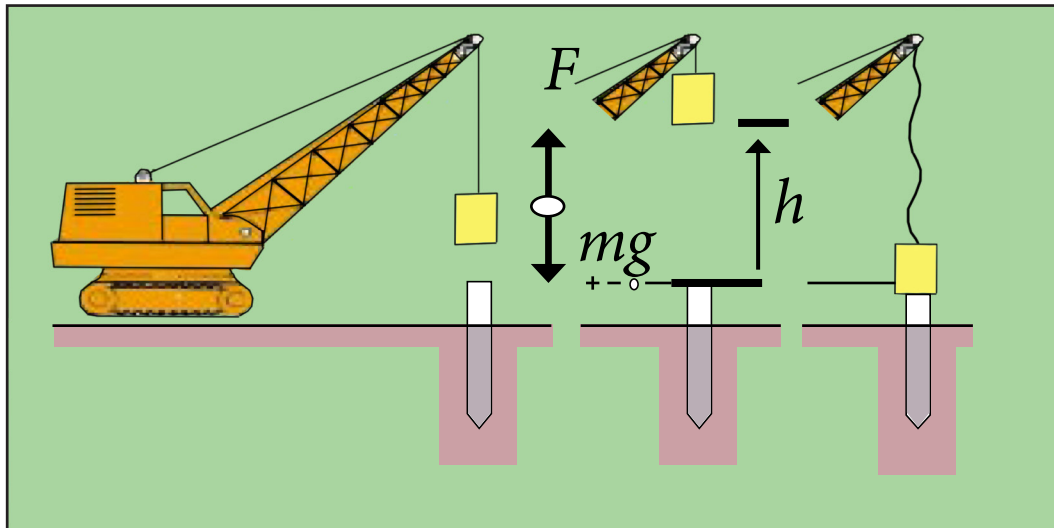


Figura 38: Origen de la energía potencial gravitacional. Fuente: Tippens, 2010, p. 318.

La energía potencial gravitacional  $U$  es igual al trabajo que se puede realizar por la gravedad debido a la altura sobre un punto específico.

Cuando un cuerpo se mueve verticalmente de una altura inicial  $y_1$  a una altura final  $y_2$ , la fuerza gravitacional efectúa trabajo y cambia la energía potencial gravitacional.

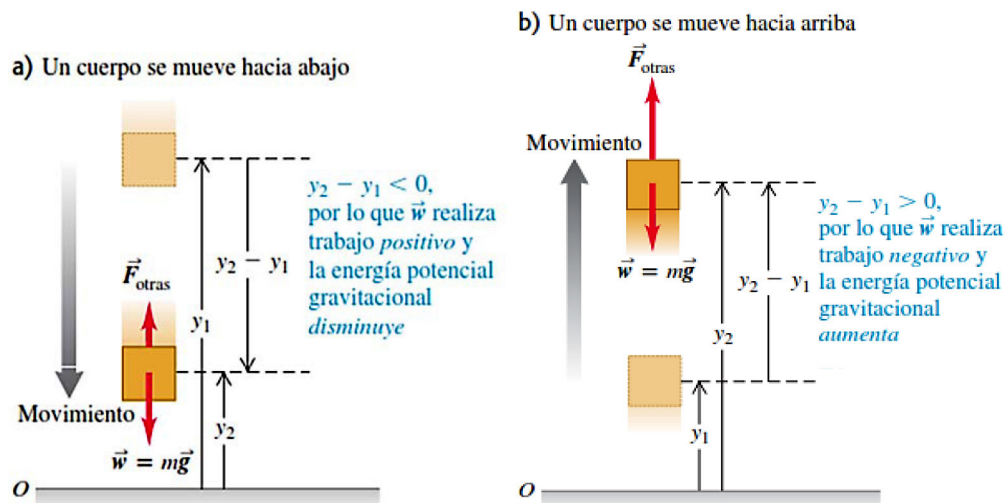


Figura 38: Variación de la energía potencial gravitacional. Fuente: Tippens, 2010, p. 321.

### 1.4. Fuerzas conservativas

Se dice que una fuerza conservativa es aquella que hace trabajo cero durante un viaje "redondo"; es decir, en una trayectoria cerrada.



$$\text{Trabajo neto} = -mgh + mgh = 0$$

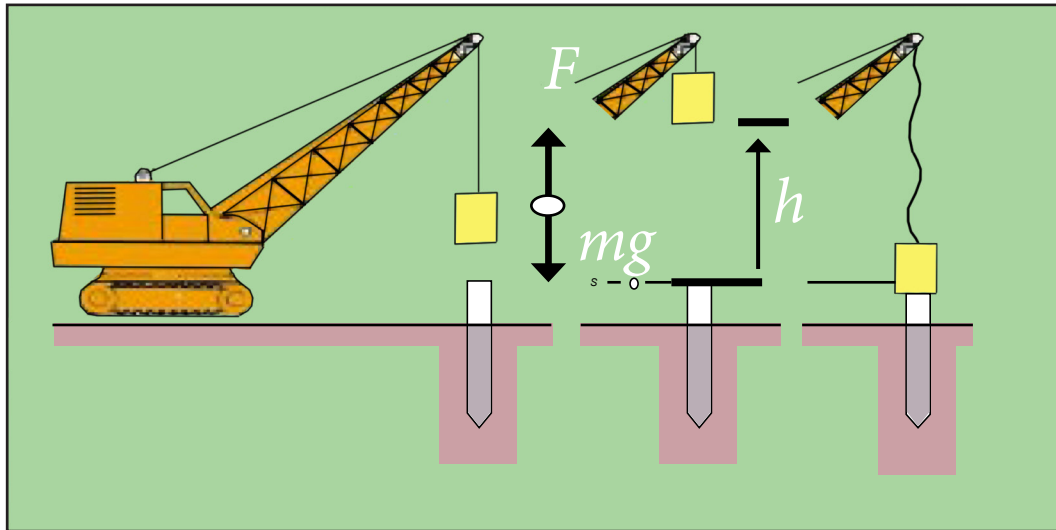


Figura 40: Fuerzas conservativas. Fuente: Tippens, 2010, p. 322.

## 2. Principio de conservación de la energía

### 2.1. Conservación de la energía para fuerzas solo gravitacionales

Si solo la fuerza de gravedad efectúa trabajo, la energía mecánica total no se altera, es constante; es decir, se conserva. Así se tiene en nuestro primer ejemplo de conservación de la energía mecánica (ver figura 41).

$$K_1 + E_{P1} = K_2 + E_{P2} \quad (\text{Si solo actúa la fuerza de gravedad})$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

Cuando lanzamos una pelota al aire, su rapidez disminuye al subir, a medida que la energía cinética se convierte en energía potencial. Al bajar, la energía potencial se convierte en cinética y la rapidez de la pelota aumenta. No obstante, la energía mecánica *total* (cinética más potencial) es la misma en todos los puntos del movimiento, siempre que ninguna otra fuerza realice trabajo sobre la pelota (la resistencia del aire debe ser insignificante) (Bedford & Fowler, 2008, p. 170).

Mientras el atleta está en el aire (figura 41), solo la gravedad efectúa trabajo sobre él (si despreciamos los efectos menores de la resistencia del aire). La energía mecánica (la suma de las energías cinética y potencial gravitacional) se conserva.

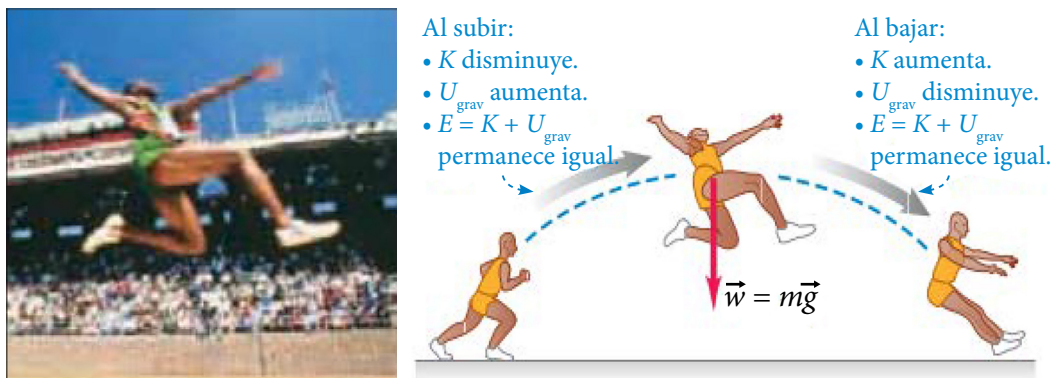


Figura 41: Conservación de la energía mecánica. Fuente: Tippens, 2010, p. 324.

## 2.2. Conservación de la energía cuando realizan trabajo fuerzas distintas a la gravedad

Si otras fuerzas actúan sobre el cuerpo, además de su peso, entonces:

$$K_1 + E_{P1} + U_{otras} = K_2 + E_{P2}$$

(donde  $U_{otras}$  es el trabajo realizado por las fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + U_{otras} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

La ecuación anterior indica que el trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la gravedad es igual al cambio en la energía mecánica total del sistema.

En el caso de un paracaidista cayendo (figura 42), la fuerza hacia arriba de la resistencia del aire (fuerza de rozamiento) hace un trabajo positivo sobre él.

Por lo tanto, la energía mecánica total: la rapidez y la energía cinética del paracaidista aumenta debido a la fuerza de rozamiento que disminuye la energía potencial gravitacional.



Figura 42: Paracaidista cayendo. Conservación de la energía mecánica. Fuente: Tippens, 2010, p. 325.

## Actividad n.º 6

### Parte 1

Complete los enunciados siguientes:

- La energía \_\_\_\_\_ es la energía que posee un cuerpo en virtud de su estado en movimiento, de acuerdo con su \_\_\_\_\_.
- La energía potencial gravitacional es debida a la posición que ocupan los cuerpos respecto al centro de la \_\_\_\_\_.
- La energía potencial gravitacional es igual al trabajo que se puede realizar por la \_\_\_\_\_ debido a la \_\_\_\_\_ sobre un punto específico.
- Si solo la fuerza de gravedad efectúa trabajo, la energía mecánica total es \_\_\_\_\_; es decir, se conserva.
- El trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la fuerza gravitacional es igual al \_\_\_\_\_ en la energía mecánica total del sistema.
- La unidad de energía en el SI es el \_\_\_\_\_.
- La fuerza de fricción es una fuerza \_\_\_\_\_ conservativa.

### Parte 2

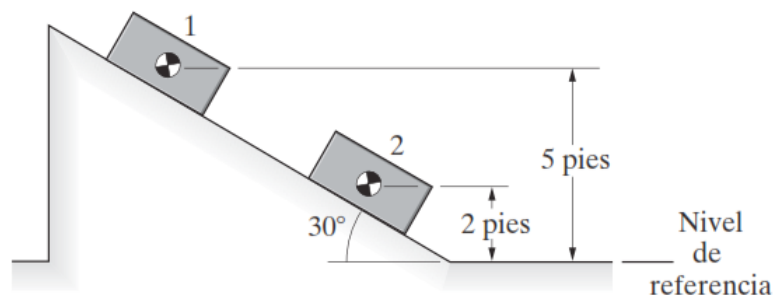
Responda y/o grafique según lo solicitado:

- Se lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba con rapidez inicial  $v_0$ . Si no se desprecia la resistencia del aire, cuando la pelota vuelva a su altura inicial su rapidez será menor que  $v_0$ . Explique esto usando conceptos de energía.
- Si un proyectil tiene la misma energía cinética inicial sin importar su ángulo de lanzamiento, ¿por qué no alcanza la misma altura máxima en todos los casos?
- ¿La rapidez de un objeto en la base de una rampa sin fricción depende de la forma de la rampa o solo de su altura? Explique su respuesta. ¿Y cuando la rampa sí tiene fricción?
- Se deja caer un huevo a partir del reposo, desde la azotea de un edificio al suelo. Un estudiante en la azotea observa la caída, que usa coordenadas con origen en la azotea; y otro estudiante en el suelo usa coordenadas con origen en el suelo. ¿Asignan ambos valores iguales o diferentes a las energías potenciales gravitacionales inicial y final, al cambio de energía potencial gravitacional y a la energía cinética del huevo, justo antes de golpear el suelo? Explique su respuesta.

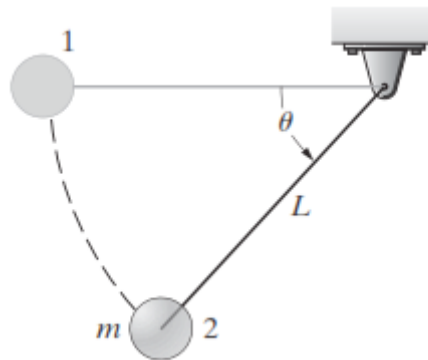
### Parte 3

Resuelva los siguientes problemas:

- La caja de 10 lb que se muestra en la figura se suelta desde el reposo en la posición 1 y se desliza hacia abajo sobre la superficie inclinada lisa hasta la posición 2.
  - Si el nivel de referencia se coloca al nivel del piso, como se muestra en la figura, ¿qué valor tiene la suma de las energías cinética y potencial de la caja cuando esta se encuentra en la posición 1?
  - ¿Qué valor tiene la suma de las energías cinética y potencial de la caja cuando ésta se encuentra en la posición 2?
  - Use la conservación de la energía para determinar la magnitud de la velocidad de la caja cuando esta se encuentra en la posición 2.



2. En cierta ocasión, un alpinista de 85 kg asciende desde el nivel de 1500 m de un risco vertical hasta la cima a 2400 m. Al siguiente día, desciende desde la cima hasta la base del risco, que está a una elevación de 1450 m. ¿Cuál es su cambio en energía potencial gravitacional a) durante el primer día y b) durante el segundo día?
3. Un saco de 25 kg de azúcar se levanta 15 m verticalmente con rapidez constante de 3.50 m/s. a) ¿Qué fuerza se necesita? b) ¿Cuánto trabajo realiza esa fuerza sobre el saco? ¿Qué pasa con dicho trabajo?
4. Se dispone de un saco de correo de 120 kg que cuelga de una cuerda vertical de 3.5 m de longitud. Un trabajador de correos desplaza el saco a una posición lateral a 2.0 m de su posición original, manteniendo la cuerda tensa en todo momento. a) ¿Qué fuerza horizontal se necesita para mantener el saco en la nueva posición? b) Cuando el saco se mueve a esta posición, ¿cuánto trabajo es efectuado i) por la cuerda y ii) por el trabajador?
5. La masa de la bola de la figura es  $m = 2$  kg y la longitud de la cuerda es  $L = 1$  m. La bola se suelta desde el reposo en la posición 1 y oscila hasta la posición 2, donde  $\theta = 40^\circ$ .
  - a) Use la conservación de la energía para determinar la magnitud de su velocidad en la posición 2.
  - b) Dibuje gráficas de la energía cinética, la energía potencial y la energía total para valores de  $\theta$  desde 0 hasta  $180^\circ$ .



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Momento lineal e impulso

### Tema n.º 3

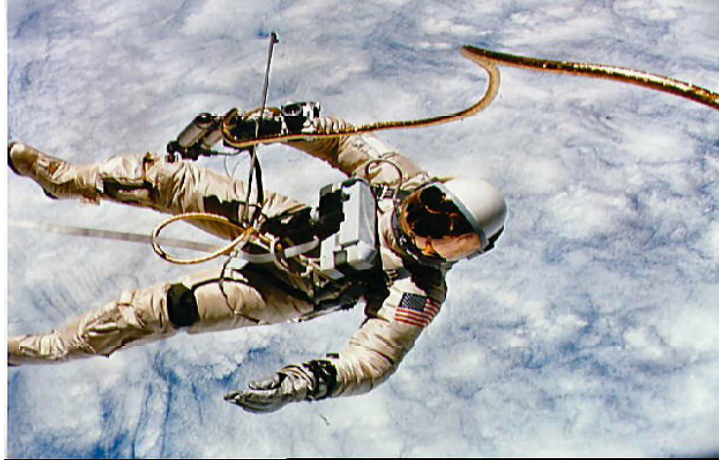


Figura 43: Astronauta Edward H. White flota en el espacio con gravedad cero. Fuente: Tippens, 2010, p. 345.

Tal como se aprecia en la fotografía, el astronauta dispara la pistola de gas, con lo cual se transfiere movimiento y maniobrabilidad a su cuerpo, que le permiten desplazarse en la dirección deseada. Dado este ejemplo, se tiene presente aquí el impulso ejercido por la pistola de gas y la variación en la cantidad de movimiento sobre el astronauta. A continuación, tenemos la fundamentación de estas cantidades físicas importantes en la Dinámica.

### 1. Principio del impulso y de la cantidad de movimiento

Previamente haremos algunas definiciones.

#### 1.1. Cantidad de movimiento

Magnitud asociada a los cuerpos en movimiento de traslación.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

- $m$ = masa [kg]
- $v$ = velocidad [m/s]
- $P$ = cantidad de movimiento [kgm/s]

Pues, según Bedford y Fowler (2008), "La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial resultado del producto de un escalar(masa) por un vector (velocidad); este vector tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad" (2008, p. 175).



Figura 44: La cantidad de movimiento se asocia a la masa y la velocidad de los cuerpos. Elaboración propia.

#### 1.2. Impulso

Es la magnitud física dada por el efecto de una fuerza que actúa sobre un cuerpo durante un breve intervalo de tiempo  $\Delta t$ ; dado por la expresión:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

- F= Fuerza [N]
- $\Delta t$ = intervalo de tiempo [s]
- I= Magnitud del impulso [Ns]

Magnitud vectorial cuya dirección y sentido es el mismo de la fuerza aplicada.

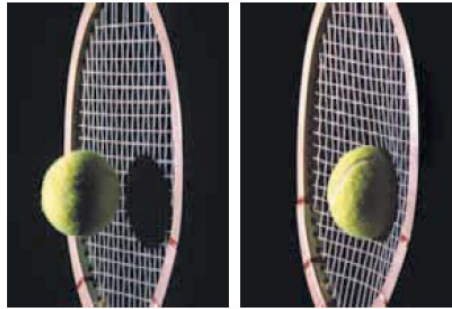


Figura 45: La pelota recibe un impulso debido a la fuerza aplicada durante un pequeño intervalo de tiempo. Fuente: Tippens, 2010, p. 347.

### 1.3. Relación entre el impulso y cantidad de movimiento

- Según la segunda ley de Newton:

$$F = ma \quad (1)$$

- Sabiendo que la aceleración es

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{\Delta t} \quad (2)$$

- Reemplazamos (2) en (1):

$$F = m \left( \frac{v - v_o}{\Delta t} \right)$$

- Ordenamos

$$\underbrace{F \Delta t}_{\text{Impulso}} = \underbrace{mv - mv_o}_{\text{Variación de la cantidad de movimiento}}$$

- Según la relación anterior

$$\vec{I} = \Delta \vec{P}$$

- El área bajo la curva en el gráfico F(t) proporciona la magnitud del impulso:

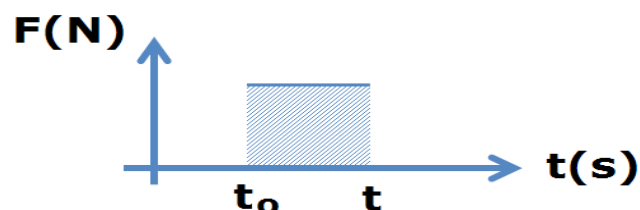


Figura 46: Gráfica Impulso en función de la fuerza y el tiempo. Fuente: Tippens, 2010, p. 355.



### 1.4. Conservación de la cantidad de movimiento

“**SISTEMA:** Cuerpo o grupo de cuerpos sobre el cual fijamos nuestra atención con el fin de estudiarlo” (Bedford & Fowler, 2008, p. 177).

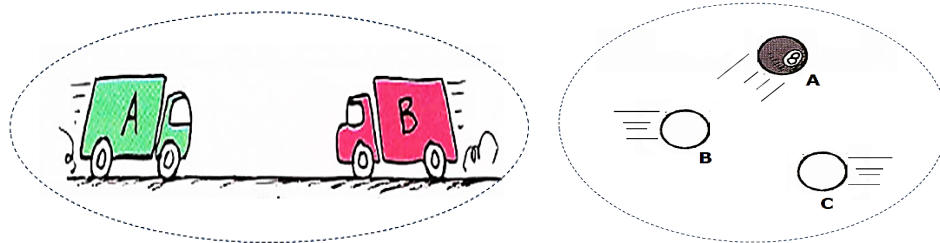


Figura 47: Sistemas de cuerpos. Fuente: Tippens, 2010, p. 356.

**Cantidad de movimiento total:** Suma vectorial de las cantidades de movimiento de cada cuerpo de un sistema (Bedford & Fowler, 2008, p. 177).

**Tipos de fuerza:**

FUERZA INTERNA	FUERZA EXTERNA
Si una partícula de un sistema ejerce una fuerza sobre otra partícula que también pertenezca al mismo sistema	Si la fuerza que actúa sobre una partícula de un sistema la ejerce un agente externo (que no pertenece al sistema)

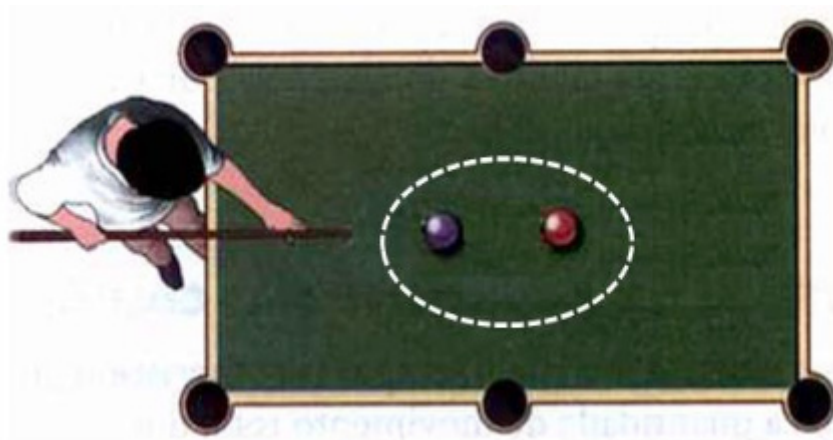


Figura 48: Fuerza externa aplicada al sistema de bolas. Fuente: Tippens, 2010, p. 365.

Las fuerzas internas no provocan variaciones en la cantidad de movimiento de un sistema. En la figura, la fuerza del taco es una fuerza externa, solo así varía la cantidad de movimiento del sistema de bolas.

Por lo tanto, cualquier variación de la cantidad de movimiento de un sistema debe ser originada por fuerzas externas. De modo que si no actúan fuerzas externas, o si la sumatoria de las fuerzas externas es nula, no podría haber variaciones de la cantidad de movimiento.

- **Si la sumatoria de las fuerzas externas sobre un sistema es cero; la cantidad de movimiento total del sistema se conservará.**

La cantidad de movimiento total DESPUÉS del choque es igual a la cantidad de movimiento total ANTES del choque.

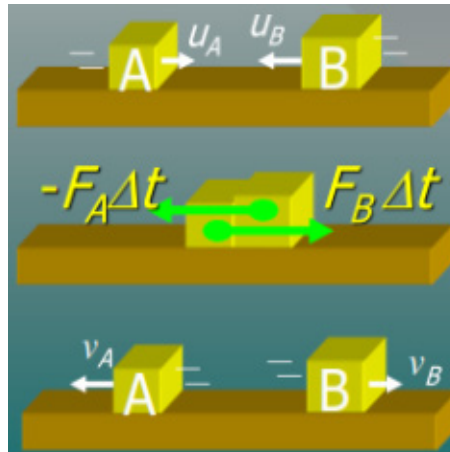


Figura 49: Conservación de la cantidad de movimiento. Fuente: Tippens, 2010, p. 366.

## 2. Impactos o colisiones

### 2.1. Choque

Interacción entre mínimo dos objetos en un tiempo relativamente corto.

CHOQUE ELÁSTICO	CHOQUE INELÁSTICO
• No hay deformación	• Los cuerpos se deforman
• No se produce calor	• Se produce calor
• Se conserva la energía cinética	• No se conserva la energía cinética
• Se conserva la cantidad de movimiento	• Se conserva la cantidad de movimiento

### 2.2. Choques elásticos

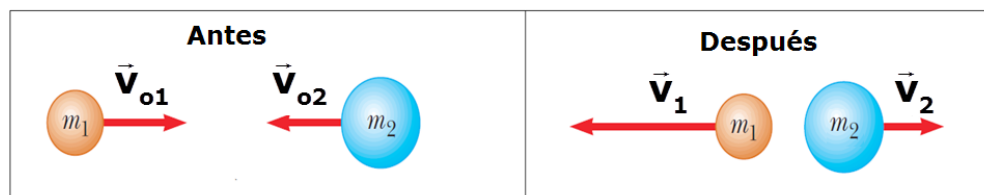


Figura 50: Choques elásticos. Fuente: Tippens, 2010, p. 367.

- Se conserva la cantidad de movimiento total del sistema y la energía cinética del sistema.
- Un cuerpo gana una determinada cantidad de movimiento igual a la cantidad de movimiento perdida por el otro cuerpo; ocurre lo mismo con la energía cinética.

Conservación de la cantidad de movimiento (1)

$$\begin{aligned}\vec{P}_{\text{total antes}} &= \vec{P}_{\text{total después}} \\ \vec{P}_{o1} + \vec{P}_{o2} &= \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \\ m_1 \vec{v}_{o1} + m_2 \vec{v}_{o2} &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2\end{aligned}$$

Conservación de la energía (2)



$$K_{\text{total inicial}} = K_{\text{total final}}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{OA}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{OB}^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

Ecuación para choques elásticos, derivada de la ecuación (2) de conservación de la energía:

$$\mathbf{V}_{OA} - \mathbf{V}_{OB} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A$$

Velocidades relativas de acercamiento (antes del choque)
Velocidades relativas de alejamiento (después del choque)

### 2.3. Choque inelástico

- Los objetos se deforman
- No se conserva la energía cinética del sistema; por ejemplo, el choque de una pelota de tenis con el suelo rígido
- Se conserva la cantidad de movimiento.
- Si dos cuerpos chocan, y permanecen unidos después del choque con una velocidad común, el choque se denomina perfectamente inelástico.

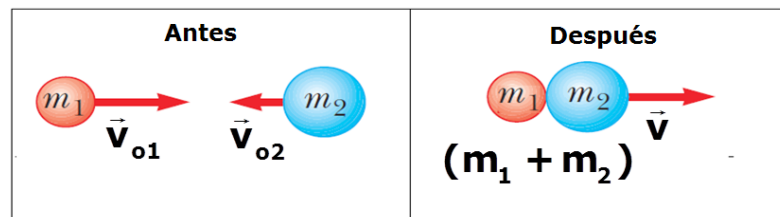


Figura 51: Choques inelásticos. Fuente: Tippens, 2010, p. 367.

### 2.4. Conservación de la cantidad de movimiento en el choque perfectamente inelástico.

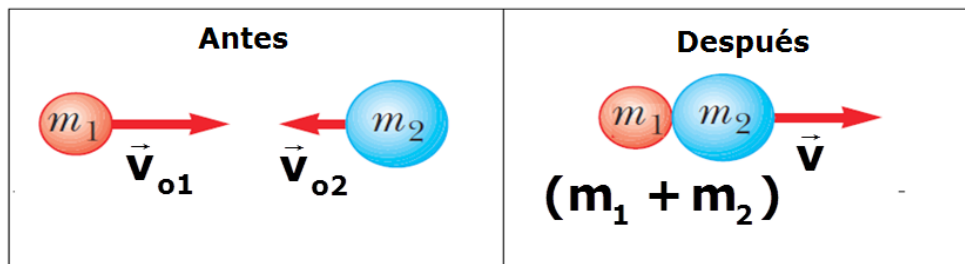


Figura 52: Choques perfectamente inelásticos. Fuente: Tippens, 2010, p. 368.

$$\vec{P}_{\text{total antes}} = \vec{P}_{\text{total después}}$$

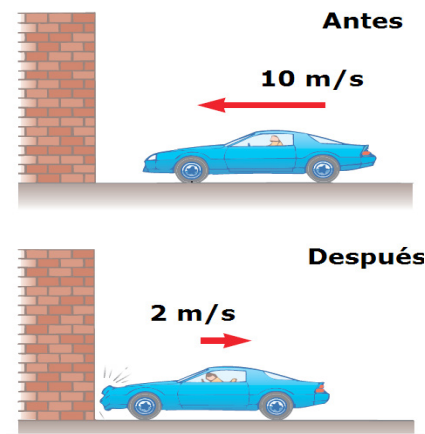
$$\vec{P}_{o1} + \vec{P}_{o2} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$m_1 \vec{v}_{o1} + m_2 \vec{v}_{o2} = \vec{v} (m_1 + m_2)$$

## Actividad n.º 7

Compare el análisis que hace la segunda ley de Newton con el que realiza la relación entre el impulso y la cantidad de movimiento. Además, resuelva los ejercicios propuestos.

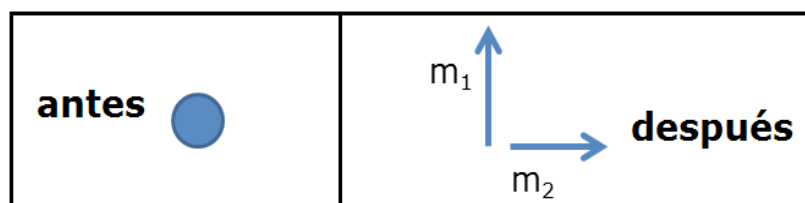
- Un automóvil de 1500 kg tiene una rapidez de 10 m/s hacia la izquierda, choca contra un muro y retrocede con una rapidez de 2 m/s hacia la derecha. Si la colisión duró 0,02 s. Determine:
  - El impulso que recibe el auto.
  - La fuerza aplicada sobre el auto.



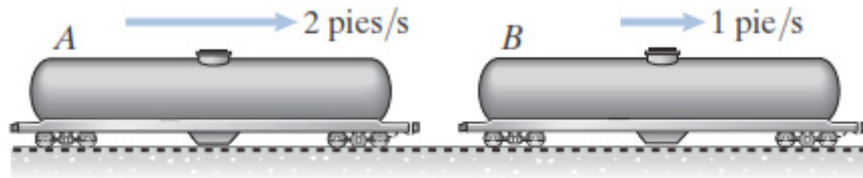
- Un arquero de 60 kg está de pie en reposo sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0,5 kg horizontalmente a 50 m/s. ¿Con qué velocidad el arquero se mueve sobre el hielo después de disparar la flecha?



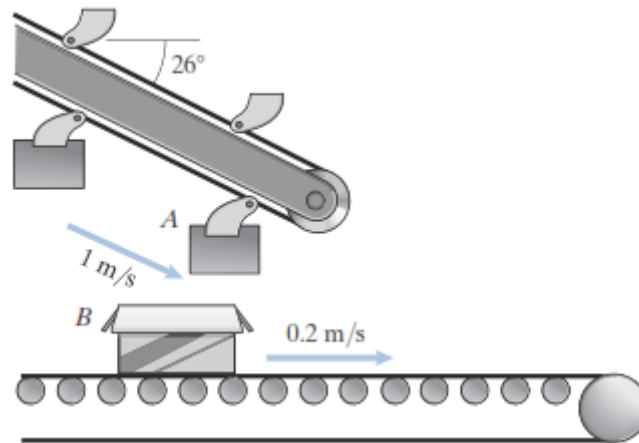
- Una granada en reposo explota en tres pedazos; uno de los fragmentos de masa  $m_1 = 1$  kg adquiere una velocidad de 12 m/s, en dirección perpendicular a  $m_2 = 2$  kg, que adquiere una velocidad de 8 m/s sobre la horizontal.
  - Realice un diagrama vectorial indicando la velocidad del tercer fragmento.
  - Si la  $m_3 = 0,5$  kg, ¿qué velocidad (magnitud) adquiere?



4. Los vagones de ferrocarril mostrados, con pesos  $W_A = 120,000 \text{ lb}$  y  $W_B = 70,000 \text{ lb}$ , chocan y quedan acoplados. El carro A está lleno y el B lleno hasta la mitad de ácido carbónico. Cuando los vagones chocan, el ácido en B se agita con violencia.
- Inmediatamente después del impacto, ¿cuál es la velocidad del centro de masa común de los dos vagones?
  - Cuando ha terminado la agitación en B, ¿cuál es la velocidad de los dos vagones?



5. La banda transportadora que se muestra en la figura deja caer el paquete A de 12 kg en la caja B de 1.6 kg. El paquete es pegajoso y se adhiere al fondo de la caja. Si el coeficiente de fricción entre la caja y la banda horizontal es  $\mu_k = 0.2$ , ¿qué distancia se desliza la caja después del impacto?



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Sistemas de partículas

### Tema n.º 4



Figura 53: El empuje para este prototipo de motorXR-5M15 se produce por medio de partículas de gas expulsadas a gran velocidad. La determinación de las fuerzas en el puesto de pruebas se basa en el análisis del movimiento de un sistema de partículas variable; es decir, se considera el movimiento conjunto de un gran número de partículas de aire en vez de hacerlo por separado. Fuente: Beer, 2010, p. 858.

En este tema trataremos la cinemática de un *sistema de partículas*; es decir, el movimiento de un número muy grande de partículas consideradas en su conjunto, como un todo. Al principio se analizarán sistemas compuestos en partículas bien definidas; posteriormente se contempla el movimiento de sistemas variables; es decir, sistemas en los cuales se ganan o pierden partículas de manera permanente, además de estudiar sistemas en los que ocurren ambas situaciones de manera simultánea.

### 1. Aplicación de las leyes del movimiento a un sistema de partículas

“Para deducir las ecuaciones de movimiento de un sistema de  $n$  partículas se inicia escribiendo la segunda ley de Newton para cada partícula individual del sistema. Considere la partícula  $P_i$ , donde  $1 \leq i \leq n$ . Sea  $m_i$  la masa de  $P_i$  y  $\mathbf{a}_i$  su aceleración con respecto al sistema de referencia newtoniano  $O_{xyz}$ ” (Beer, 2010, p. 860). La fuerza ejercida sobre  $P_i$  por otra partícula  $P_j$  del sistema (figura 54), denominada *fuerza interna*, se denotará por  $\mathbf{f}_{ij}$ .

La fuerza total de las fuerzas internas ejercidas sobre  $P_i$  por todas las demás partículas del sistema es entonces:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij}$$

(donde  $\mathbf{f}_{ij}$  no tiene significado y se supone que será igual a cero) (Beer, 2010, p. 860).

Al denotar, por otro lado, mediante  $\mathbf{F}_i$  la resultante de todas las *fuerzas externas* que actúan sobre  $P_i$ , se escribe la segunda ley de Newton para la partícula  $P_i$  en la forma siguiente:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i \quad (1)$$

Al denotar por  $\mathbf{r}_i$  el vector de posición de  $P_i$  y evaluar los momentos alrededor de  $O$  de los diversos términos en la ecuación (1), también se escribe:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i \quad (2)$$

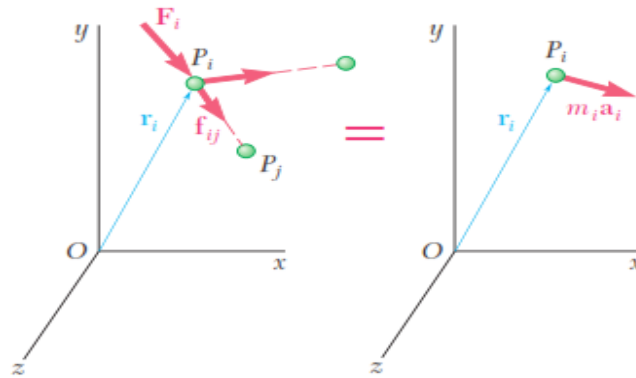


Figura 54: Sistema de partículas. Fuente: Beer, 2010, p. 861.

Si se repite este procedimiento para cada partícula  $P_i$  del sistema, se obtienen  $n$  ecuaciones del tipo (1) y  $n$  ecuaciones del tipo (2), donde  $i$  toma sucesivamente los valores  $1, 2, \dots, n$ . Los vectores  $m_i \mathbf{a}_i$  se denominan las *fuerzas efectivas* de las partículas. En consecuencia, las ecuaciones que se obtienen expresan el hecho de que las fuerzas externas  $\mathbf{F}_i$  y las fuerzas internas  $\mathbf{f}_{ij}$  que actúan sobre las diversas partículas forman un sistema equivalente al sistema de las fuerzas efectivas  $m_i \mathbf{a}_i$  (esto es, un sistema puede sustituirse por el otro). Ver figura 55 (Beer et al., 2010, p. 861).

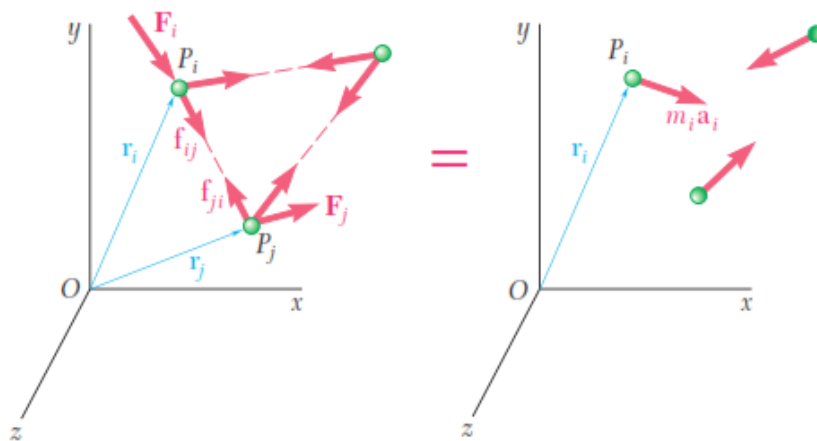


Figura 55: Sistema equivalente a un sistema de partículas. Fuente: Beer, 2010, p. 861.

Antes de continuar con la deducción, hay que examinar las fuerzas internas  $\mathbf{f}_{ij}$ . Advierta que estas fuerzas ocurren en pares  $\mathbf{f}_{ij}, \mathbf{f}_{ji}$ , donde  $\mathbf{f}_{ij}$  representa la fuerza ejercida por la partícula  $P_j$  sobre la partícula  $P_i$  y  $\mathbf{f}_{ji}$  representa la fuerza ejercida por  $P_i$  sobre  $P_j$  (figura 55). Ahora bien, de acuerdo con la tercera ley de Newton, ampliada por la ley de la gravitación de Newton a partículas que actúan a distancia, las fuerzas  $\mathbf{f}_{ij}$  y  $\mathbf{f}_{ji}$  son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción (Beer et al., 2010, p. 861). Por lo tanto, su suma es:

$$\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{0}$$

siendo la suma de sus momentos alrededor de  $O$ :

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}) + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{0}$$

También se cumple que al adicionar todas las fuerzas internas del sistema y sumar sus momentos alrededor de  $O$ , se deducen las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = 0 \quad (3)$$

Lo anterior demuestra que tanto la resultante y el momento resultante de las fuerzas internas del sistema son cero.

Si nuevamente analizamos las  $n$  ecuaciones (1), donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , se suman sus miembros del lado izquierdo y los del lado derecho. Tomando en cuenta la primera de las ecuaciones (3), se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (4)$$

Análogamente, analizamos las ecuaciones (2) y sin olvidar la segunda de las ecuaciones (3), se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \quad (5)$$

Se verifica que las ecuaciones (4) y (5) expresan el hecho de que el sistema de las fuerzas externas  $\mathbf{F}_i$  y el sistema de las fuerzas efectivas  $m_i \mathbf{a}_i$  tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Al recordar la definición dada para dos sistemas equipolentes de vectores, se puede consecuentemente enunciar que el sistema de fuerzas externas que actúan sobre las partículas y el sistema de las fuerzas efectivas de las partículas son equipolentes† (figura 56). (Beer et al., 2010, p. 862).

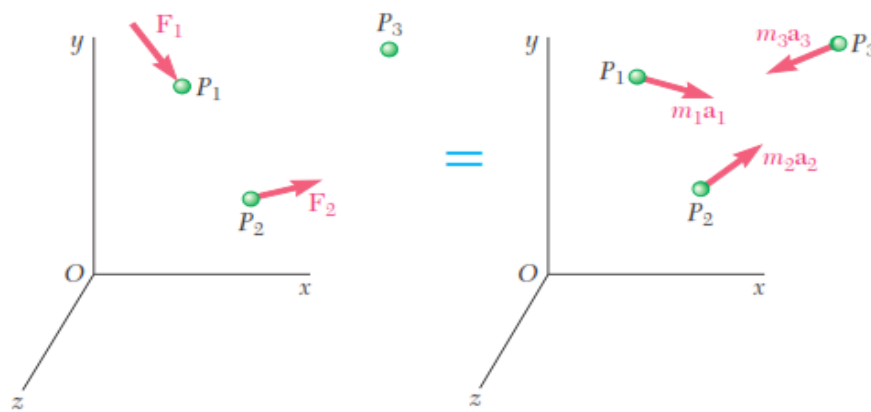


Figura 56: Dos sistemas equipolentes. Fuente: Beer et al., 2010, p. 862.

## 2. Momento lineal y momento angular de un sistema de partículas

Las ecuaciones (4) y (5), que se obtuvieron en la sección anterior para el movimiento de un sistema de partículas, pueden expresarse en una forma más condensada si se introduce la cantidad de movimiento lineal y angular del sistema de partículas. Al definir la cantidad de movimiento lineal  $\mathbf{L}$  del sistema de partículas como la suma de las cantidades de movimiento lineal de las diversas partículas del sistema, se escribe (Beer et al., 2010, p. 863):

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (6)$$

Ahora bien, si definimos la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_o$  alrededor de O del sistema de partículas de forma semejante, se obtiene:

$$\mathbf{H}_o = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (7)$$

Requerimos ahora diferenciar ambos miembros de las ecuaciones (6) y (7) con respecto a  $t$ , con lo cual se obtiene:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (8)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_o &= \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \end{aligned}$$

que se reduce a

$$\dot{\mathbf{H}}_o = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \quad (9)$$

ya que los vectores  $\mathbf{v}_i$  y  $m_i \mathbf{v}_i$  son colineales.

Se observa "... que los miembros del lado derecho de las ecuaciones (8) y (9) son respectivamente idénticos a los miembros del lado derecho de las ecuaciones (4) y (5). Se concluye que los miembros del lado izquierdo de estas ecuaciones son respectivamente iguales" (Beer *et al.*, p. 864). Si recordamos que el miembro del lado izquierdo de la ecuación (5) representa la suma de los momentos  $\mathbf{M}_o$  alrededor de O de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema, y si omitimos el subíndice  $i$  de las sumatorias, se escribe:

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (10)$$

$$\sum \mathbf{M}_o = \dot{\mathbf{H}}_o \quad (11)$$

"Estas ecuaciones expresan que la resultante y el momento resultante alrededor del punto fijo O de las fuerzas externas son, respectivamente, iguales a las razones de cambio de la cantidad de movimiento lineal y de la cantidad de movimiento angular alrededor de O del sistema de partículas" (Beer, 2010, p. 864).

### 3. Centro de masa

Para analizar el centro de masa, la ecuación (10) "puede escribirse en una forma alternativa si se considera el centro de masa del sistema de partículas" (Beer, 2010, p. 864). El centro de masa del sistema es el punto G definido por el vector de posición  $\bar{\mathbf{r}}$ , el cual satisface la relación:

$$m \bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (12)$$

Aquí  $m$  representa la masa total

$$\sum_{i=1}^n m_i$$

de las partículas. Al descomponer los vectores de posición  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_i$  en componentes rectangulares, se obtienen las siguientes tres ecuaciones escalares, las cuales se utilizan para determinar las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del centro de masa:

$$m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad m\bar{y} = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad m\bar{z} = \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (12^*)$$

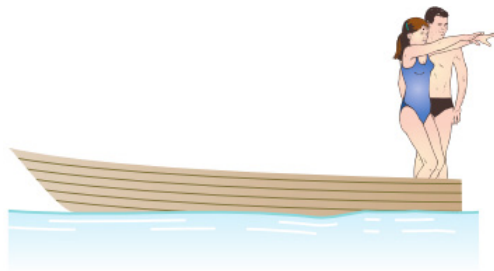
Puesto que  $m_i g$  representa el peso de la partícula  $P_i$  y  $mg$  el peso total de las partículas,  $G$  es también el centro de gravedad del sistema de partículas. Sin embargo, para evitar cualquier confusión, a  $G$  se le referirá como el *centro de masa* del sistema de partículas cuando se estudien propiedades asociadas con la *masa* de las partículas, y como el *centro de gravedad* del sistema cuando se consideren propiedades asociadas con el *peso* de las partículas. Las partículas localizadas fuera del campo gravitacional de la Tierra, por ejemplo, tienen masa pero no peso. En ese caso es posible referirse de manera apropiada a su centro de masa, pero, evidentemente, no a su centro de gravedad (Beer, p. 865).



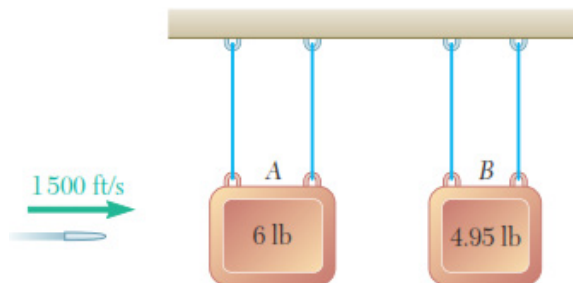
### Actividad n.º 8

Resolver los problemas relativos a sistemas de partículas.

1. El empleado de una línea aérea lanza dos maletas con una velocidad horizontal de 2.4 m/s, sobre un carrito para equipaje de 25 kg que inicialmente estaba en reposo. a) Si se sabe que la velocidad final del carrito es de 1.2 m/s y que la primera maleta que el empleado lanza tiene una masa de 15 kg, determine la masa de la otra maleta, b) ¿Cuál sería la velocidad final del carrito si el empleado invirtiera el orden en el cual lanza las maletas?
2. Un hombre de 180 lb y una mujer de 120 lb están de pie uno al lado del otro en el mismo extremo de un bote de 300 lb, listos para lanzarse al agua, cada uno con una velocidad de 16 ft/s en relación con el bote. Determine la velocidad del bote después de que se hayan lanzado ambos al agua, si a) la mujer se lanza primero y b) el hombre se lanza primero.



3. Se dispara una bala con una velocidad horizontal de 1500 ft/s hacia un bloque A de 6 lb; la bala atraviesa el bloque y queda incrustada en otro bloque B de 4.95 lb. Si se sabe que los bloques A y B se empiezan a mover con velocidades respectivas de 5 ft/s y 9 ft/s, determine a) el peso de la bala, b) su velocidad cuando viaja del bloque A al bloque B.



4. En un parque de diversiones están los "carritos chocones" de 200 kg A, B y C, los cuales tienen conductores con masas de 40, 60 y 35 kg, respectivamente. El carrito A se mueve a la derecha con una velocidad  $\mathbf{v}_A = 2 \text{ m/s}$  cuando golpea al carrito B que está inicialmente en reposo. El coeficiente de restitución entre cada carrito es de 0.8. Determine la velocidad del carrito C de modo que después de que el carrito B choque con el C, la velocidad de B sea cero.
5. Un vehículo espacial de 900 lb viaja con una velocidad  $\mathbf{v}_0 = (1200 \text{ ft/s}) \mathbf{i}$  que pasa por el origen O en  $t=0$ . Debido a cargas explosivas, el vehículo se fragmenta en tres partes A, B y C que pesan 450, 300 y 150 lb, respectivamente. Si se sabe que en  $t = 4 \text{ s}$ , las posiciones observadas de las partes son A (3840 ft, -960 ft, -1920 ft) y B (6480 ft, 1200 ft, 2640 ft), determine la posición correspondiente de la parte C. No tome en cuenta el efecto de la gravedad.

Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.  
 Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.  
 Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Lectura seleccionada n.º 2

*Evolución técnica de la máquina-herramienta. Reseña histórica.*

Aldabaldetrecu, P. (1 de febrero de 2002). Evolución técnica de la máquina-herramienta. Reseña histórica. *Interempresas Industria Metalmeccánica*. Disponible en <http://bit.ly/2aeLcHX>



## Glosario de la Unidad II

---

### C

**Cantidad de movimiento**

Magnitud que relaciona la masa y la velocidad de un cuerpo.

### E

**Energía mecánica**

Capacidad de un cuerpo para poder realizar trabajo mecánico.

**Eficiencia mecánica**

Relación entre la energía útil y la energía total consumida.

### I

**Impulso**

Magnitud que mide la acción de una fuerza aplicada a un cuerpo durante un pequeño intervalo de tiempo.

### P

**Potencia mecánica**

Relación que indica la rapidez con la que se realiza un trabajo mecánico.

### T

**Trabajo mecánico**

Transmisión de movimiento a un cuerpo ocasionado por una fuerza.

**Trabajo negativo**

Trabajo resistivo generado por una fuerza que actúa en sentido contrario al del desplazamiento.

**Trabajo neto**

Trabajo resultante o total, resultado de la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

**Trabajo positivo**

Trabajo motriz generado por una fuerza que actúa en la misma dirección y sentido del desplazamiento.



## **Bibliografía de la Unidad II**

---

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E. & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

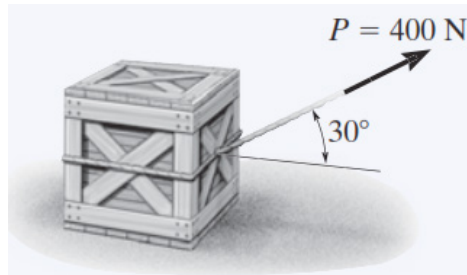
Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

Pytel, A. & Kiusalaas, P. (2013). *Ingeniería Mecánica, Dinámica* (3a ed.). Estados Unidos: Cengage Learning.

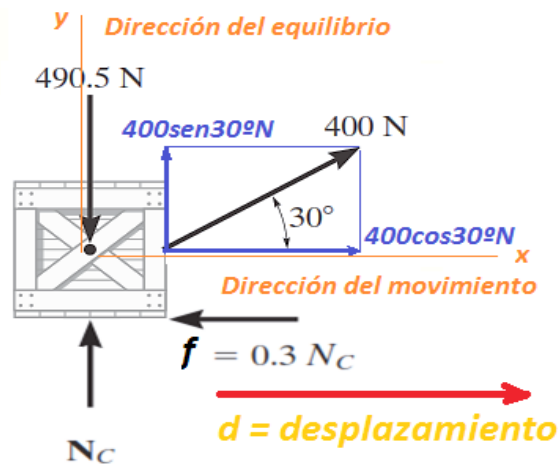
Tippens, P. (2010). *Física, Vol. I. Mecánica* (7a ed.). Perú: Mc Graw Hill e Interamericana Editores.

**Problemas resueltos**

1. Para el bloque de 50 kg, cuyo coeficiente de rozamiento cinético es 0,3. Determine, luego de 3 s partiendo desde el reposo:
  - a) El trabajo de la fuerza de 400 N.
  - b) El trabajo de la fuerza de rozamiento.



**DCL (EMBALAJE)**



**Verticalmente:**

$$+\uparrow \sum F_y = ma_y; \quad N_C - 490.5 + 400 \text{ sen } 30^\circ = 0$$

$$N_C = 290.5 \text{ N}$$

Recuerde: Fricción cinética ( $f_k$ ):

$$f = u_k N,$$

donde  $u_k$  es el coeficiente de fricción cinética y N la fuerza normal.

Luego:  $f = (0.3)(290.5)$   
 $f = 87.5 \text{ N}$

**Horizontalmente:**

$$\pm \sum F_x = ma_x$$

$$400 \cos 30^\circ - 0.3 N_C = 50a$$

$$a = 5.185 \text{ m/s}^2$$



Finalmente, calculamos la distancia recorrida luego de 3s partiendo del reposo:

$$d = v_o t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

$$d = (0)(3) + \frac{1}{2} (5,185)(3)^2 = 23.33 \text{ m}$$

Cálculo del trabajo de la fuerza de 400 N:

$$U_{400N} = U_{400\cos 30^\circ N} + U_{400\text{sen}30^\circ N}$$

$$U_{400N} = +F \cdot d$$

$$U_{400N} = (400 \cos 30^\circ)(23.33) = 8081.75 \text{ J}$$

Cálculo del trabajo de la fuerza de rozamiento:

$$U_f = -f \cdot d$$

$$U_f = -(87.5)(23.33)$$

$$U_f = -2041.38 \text{ J}$$

- 2 Calcule la potencia que debe poseer un motor para llenar de agua una piscina de  $100 \text{ m}^3$  de capacidad en 5 horas, sacando agua de un pozo a 6 metros por debajo de la entrada a la piscina, si el rendimiento es del 80%.

Resolución:

Para el cálculo de la potencia solicitada tenemos:

$$P_{efectiva} = \frac{U_{\text{útil}}}{t} = \frac{mgh}{t}$$

Previamente:

La masa:  $m = V \cdot \rho = 100 \text{ m}^3 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 = 10^5 \text{ kg}$

$U_{\text{útil}} = m \cdot g \cdot h = 10^5 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 6 \text{ m} = 5,88 \cdot 10^6 \text{ J}$

$$P_{ef} = \frac{U_{\text{útil}}}{t} = \frac{5,88 \cdot 10^6 \text{ J}}{5 \text{ h} \cdot 3600 \text{ s/h}} = 326,7 \text{ W}$$

Finalmente, la potencia requerida total es:

$$P = \frac{P_{efectiva}}{n} \times 100$$

$$P = \frac{P_{ef}}{\eta} \cdot 100 = \frac{326,7 \text{ W}}{80} \times 100 = 409 \text{ W}$$

$P = 409 \text{ W}$

## Autoevaluación n.º 2

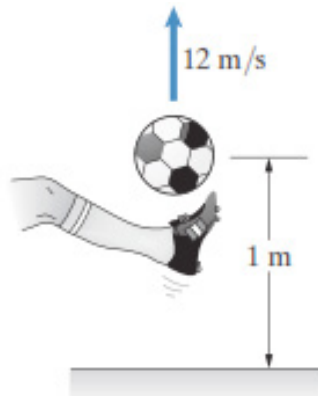
1. La caja de 20 lb se encuentra en reposo sobre la superficie horizontal cuando se aplica la fuerza constante  $F = 5$  lb. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es  $\mu_k = 0.2$ . Determine la velocidad a la que se está moviendo la caja cuando se ha desplazado 2 pies desde su posición inicial: a) aplicando la segunda ley de Newton; b) aplicando el principio del trabajo y la energía.



- a) 1.4 m/s
- b) 1.5 m/s
- c) 1.6 m/s
- d) 1.7 m/s
- e) 1.8 m/s

### Enunciado de las preguntas 2, 3 y 4

La pelota de fútbol de 0.45 kg que se muestra en la figura está a 1 m sobre el suelo cuando es pateada directamente hacia arriba a 10 m/s. Usando el principio del trabajo y la energía, determine:



2. La altura a la que llega la pelota.
- a) 6.0 m
  - b) 6.1 m
  - c) 6.2 m
  - d) 6.3 m
  - e) 6.4 m
3. La magnitud de la velocidad de la pelota cuando cae de nuevo a una altura de 1 m sobre el suelo.
- a) 6.0 m/s
  - b) 8.1 m/s
  - c) 10.0 m/s
  - d) 6.3 m/s
  - e) 6.4 m/s

4. La magnitud de la velocidad de la pelota inmediatamente antes de golpear el suelo.
- 6.0 m/s
  - 8.1 m/s
  - 10.0 m/s
  - 10.9 m/s
  - 6.4 m/s

**Enunciado de las preguntas 5 y 6**

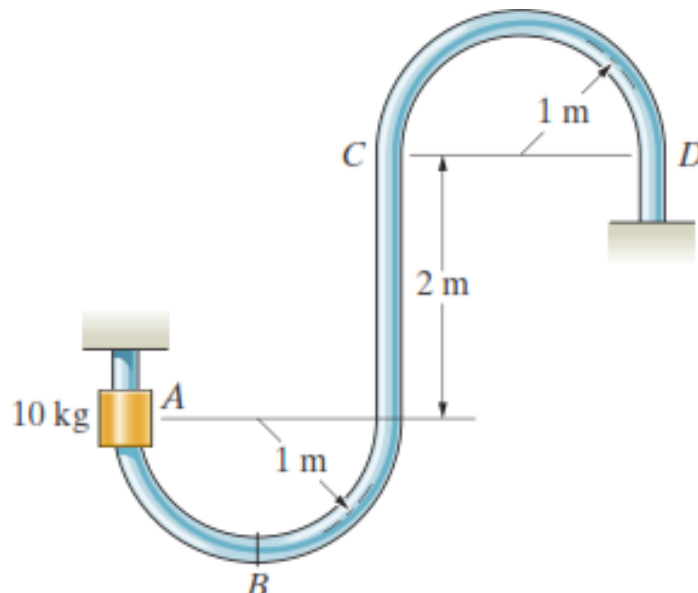
El vehículo de carreras de 2000 lb que se muestra en la figura parte desde el reposo y recorre una pista de un cuarto de milla. Completa el recorrido en 4524 segundos y cruza la línea de meta a 325.77 mi/h.



5. ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el vehículo mientras este recorre la pista? Expresado por  $10^5$  J.
- 8.01
  - 9.45
  - 8.07
  - 9.67
  - 8.35
6. Suponga que la fuerza horizontal ejercida sobre el vehículo es constante y utilice el principio del trabajo y la energía para determinarlo.
- 3339 N
  - 234 N
  - 2345 N
  - 234 N
  - 2346 N

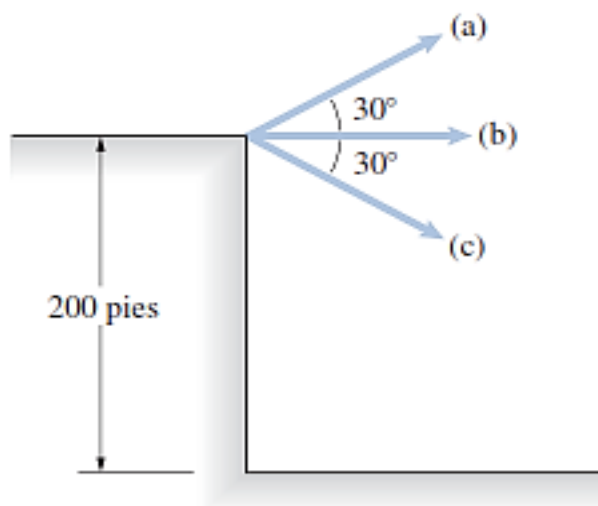
**Enunciado de las preguntas 7 y 8**

La barra de la figura es lisa. Al deslizador de 10 kg en A se le da una velocidad hacia abajo de 6.5 m/s.

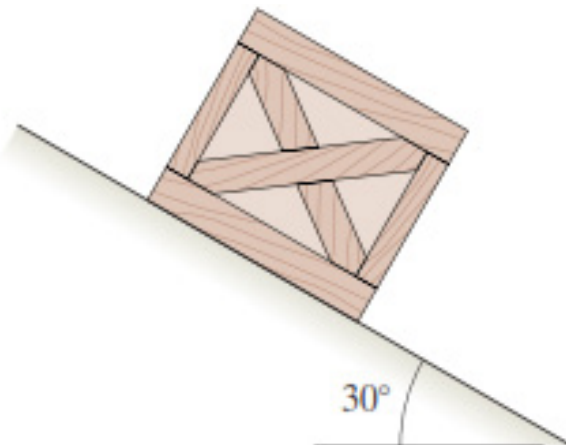




7. Use la conservación de la energía para determinar si el deslizador llegará al punto C. Si lo hace, ¿cuál es la magnitud de su velocidad en el punto C?
- a) 6.0 m/s
  - b) 1.73 m/s
  - c) 10.0 m/s
  - d) 10.9 m/s
  - e) 6.4 m/s
8. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza normal que ejerce la barra sobre el deslizador cuando este pasa por el punto B?
- a) 3339 N
  - b) 234 N
  - c) 717 N
  - d) 234 N
  - e) 2346 N
9. Suponga que alguien está de pie en el borde de un precipicio de 200 pies y lanza rocas a 30 pies/s en las tres direcciones mostradas. Ignorando la resistencia aerodinámica, use el principio del trabajo y la energía en cada caso para determinar la magnitud de la velocidad de la roca justo antes de golpear el suelo.



- a) 6.0 m/s
  - b) 1.73 m/s
  - c) 10.0 m/s
  - d) 35.7 m/s
  - e) 6.4 m/s
10. La caja, de 100 N de peso, mostrada se suelta desde el reposo sobre la superficie inclinada en el tiempo  $t = 0$ . El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es  $\mu_k = 0.18$ . Use el principio del impulso y la cantidad de movimiento para determinar la velocidad a la que se mueve la caja en  $t = 2$  s.



- a) 6.0 m/s
- b) 1.73 m/s
- c) 10.0 m/s
- d) 35.7 m/s
- e) 6.75 m/s

Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

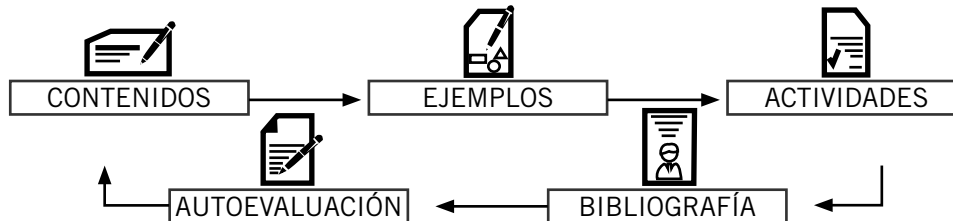
Beer, F., Johnston, E. & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## UNIDAD III

# CINEMÁTICA-CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO

### DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD III



### ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

**RESULTADO DE APRENDIZAJE:** Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de aplicar las expresiones matemáticas de la cinemática y cinética del cuerpo rígido, de los teoremas de trabajo y energía, en la solución de problemas relacionados con la dinámica de una partícula y de un sistema de partículas.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
<p><b>Tema N.º 1: Cinemática plana del cuerpo rígido</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Traslación. Ecuaciones.</li> <li>Rotación alrededor de un eje fijo. Ecuaciones.</li> <li>Movimiento plano general.</li> <li>Velocidad absoluta y relativa.</li> <li>Aceleración absoluta y relativa.</li> </ol> <p><b>Tema N.º 2: Movimiento plano de cuerpos rígidos. Fuerza y aceleración</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido.</li> <li>Momento angular. Principio de D'Alembert. Sistemas de cuerpos rígidos.</li> </ol> <p><b>Tema N.º 3: Cinética plana de un cuerpo rígido: Trabajo y energía</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Energía cinética.</li> <li>Trabajo de una fuerza.</li> <li>Principio del trabajo y la energía.</li> <li>Conservación de la energía.</li> </ol> <p><b>Tema N.º 4: Cinética plana de un cuerpo rígido: Impulso y cantidad de movimiento</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Cantidad de movimiento lineal y angular.</li> <li>Principio de impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido.</li> <li>Sistemas de cuerpos rígidos.</li> <li>Conservación de la cantidad de movimiento angular.</li> </ol> <p><b>Lectura seleccionada N.º 3</b></p> <p><b>Autoevaluación N.º 3</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Analiza la posición, la velocidad y la aceleración de un cuerpo rígido, estableciendo las ecuaciones de su movimiento.</li> </ol> <p><b>Actividad N.º 9</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Identifica y relaciona las magnitudes básicas de la cinemática: posición, velocidad y aceleración.</li> <li>Resuelve ejercicios y problemas de cinemática de cuerpos rígidos.</li> <li>Aplica la segunda ley de Newton en el análisis del movimiento de un cuerpo rígido.</li> </ol> <p><b>Actividad N.º 10</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas sobre la aplicación de la segunda ley de Newton en movimiento rectilíneo.</li> <li>Aplica el principio de trabajo y energía para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.</li> </ol> <p><b>Actividad N.º 11</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas sobre trabajo y energía.</li> <li>Analiza los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido que implican fuerza, velocidad y tiempo.</li> </ol> <p><b>Actividad N.º 12</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas sobre impulso y cantidad de movimiento.</li> </ol>	<p>✓ Valora la importancia que tiene el uso de los principios de la cinemática del cuerpo rígido de gran aplicación en la industria, técnica, construcción y máquinas, entre otros usos en nuestra sociedad.</p>

## Cinemática plana del cuerpo rígido

### Tema n.º 1



Figura 56: Al diseñar un motor de reacción, los ingenieros deben analizar el movimiento rotacional de su ventilador, compresor y turbina. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 278.

Es importante, para empezar, considerar que el conocimiento de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo permite la aplicación de la segunda ley del movimiento de Newton, para determinar el movimiento de su centro de masa despreciando el movimiento angular del objeto respecto a su centro de masa. Pero, en muchas otras situaciones, también debe considerarse el movimiento angular. Es muy conocido que los movimientos rotacionales de algunos objetos son fundamentales para su funcionamiento, como en el caso de rotores, engranes, ruedas, generadores y turbinas. Por tanto, analizaremos en este tema los movimientos de los objetos considerando sus movimientos rotacionales.

### 1. Traslación. Ecuaciones

Describir el movimiento de un cuerpo rígido requiere un marco de referencia (sistema coordenado) respecto al cual se midan los movimientos de los puntos del cuerpo rígido y su movimiento angular. En muchas situaciones, resulta conveniente usar un marco de referencia que esté fijo respecto a la Tierra. Por ejemplo, se podría usar un marco de referencia *fijo a la tierra* de este tipo para describir el movimiento del centro de masa y el movimiento angular del ladrillo de la figura 57. En las siguientes líneas, se analizan algunos tipos de movimientos de cuerpos rígidos respecto a un marco de referencia dado que se presentan con frecuencia en las aplicaciones (Bedford & Fowler, 2008, p. 281).

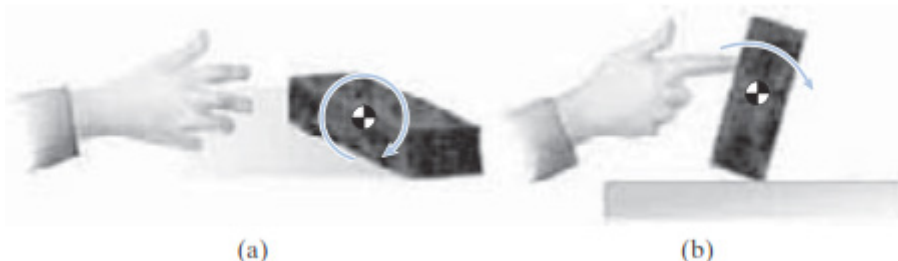


Figura 57: a) Lanzamiento de un ladrillo: Su rotación no afecta el movimiento de su centro de masa. b) Volcamiento de un ladrillo: Su rotación y el movimiento de su centro de masa están relacionados. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 280.

Cuando un cuerpo rígido en movimiento respecto a un marco de referencia dado no gira, se dice que está en *traslación* (figura 58a). Por ejemplo, el columpio de la niña de la figura 58b está diseñado para que la barra horizontal a la que está unido el asiento esté en traslación. Aunque cada punto de

la barra horizontal se mueve en una trayectoria circular, la barra no gira, sino que permanece horizontal, lo que hace más fácil que la niña se monte con seguridad (Bedford & Fowler, 2008, p. 281).

Asimismo, según Bedford & Fowler (2008), "Cada punto de un cuerpo rígido en traslación tiene la misma velocidad y aceleración, por lo que el movimiento del cuerpo rígido se puede describir completamente describiendo el movimiento de un solo punto" (p. 281).



Figura 58: a) Un objeto en traslación no gira. b) La parte en traslación del columpio, sobre la que está sentada la niña, permanece en su nivel. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 281.

## 2. Rotación alrededor de un eje fijo. Ecuaciones

Luego de la traslación, el tipo más básico de movimiento de cuerpo rígido es la rotación alrededor de un eje que está fijo respecto a un marco de referencia especificado (figura 59a). Cada punto del cuerpo rígido sobre el eje está en reposo y cada punto que no esté sobre el eje se mueve en una trayectoria circular alrededor de este mientras el cuerpo rígido gira. El rotor de un motor eléctrico (figura 59b) es un ejemplo de un objeto que gira alrededor de un eje fijo. El movimiento de la hélice de un barco relativo a la nave también es una rotación respecto a un eje fijo. En la siguiente sección se analizará con más detalle este tipo de movimiento (Bedford & Fowler, 2008, p. 281).

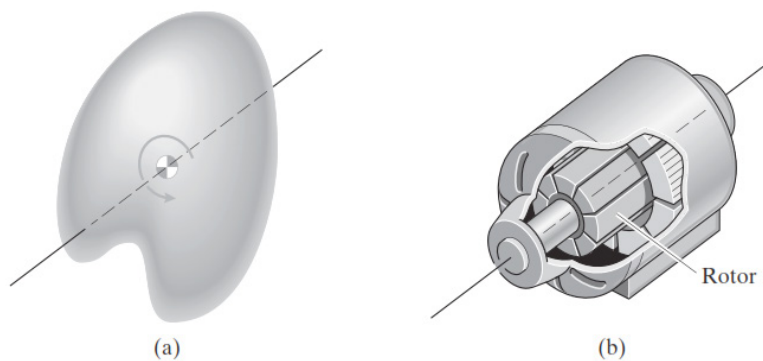


Figura 59: a) Cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo. b) Con respecto al bastidor de un motor eléctrico, su rotor gira alrededor de un eje fijo. Fuente: Bedford & Fowler, 2010, p. 281.

## 3. Movimiento plano general

Al considerar un plano que está fijo respecto a un marco de referencia dado y un cuerpo rígido intersecado por el plano (figura 60a), si el cuerpo rígido experimenta un movimiento en el que los puntos intersecados por el plano permanecen en el plano, se dice que es un movimiento *bidimensional* o *plano*. El plano fijo se denomina plano de movimiento. La rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje fijo es un caso especial del movimiento plano. Como otro ejemplo, cuando un auto sigue una trayectoria recta, sus ruedas están en movimiento bidimensional (figura 60b). Los componentes de un motor de combustión interna ilustran estos tipos de movimiento (figura 61). Respecto a un marco de

referencia que se encuentra fijo con respecto al motor, los pistones se trasladan dentro de los cilindros. Las bielas están en movimiento plano general, y el cigüeñal gira alrededor de un eje fijo (Bedford & Fowler, 2008, p. 282).

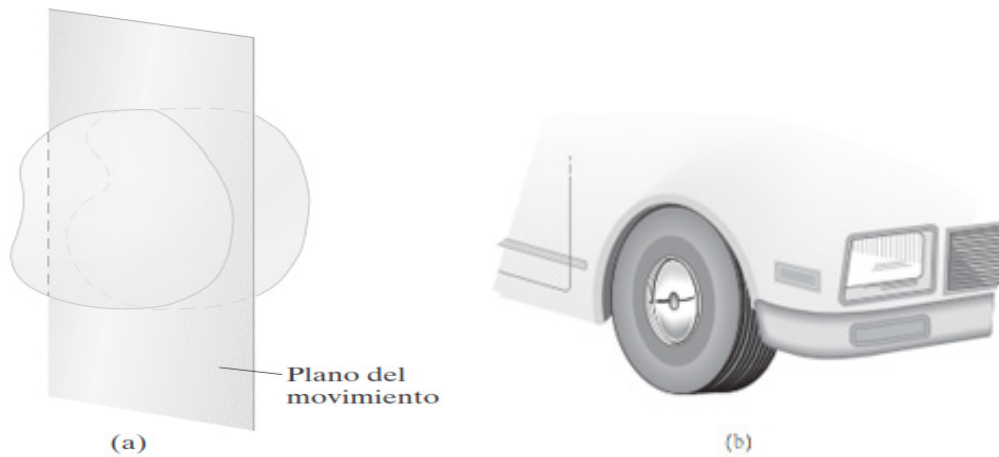


Figura 60: a) Cuerpo rígido intersectado por un plano fijo. b) Rueda en movimiento plano. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 282.

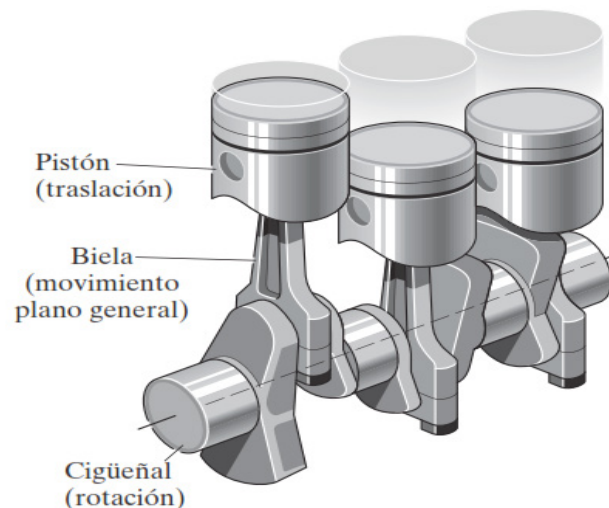


Figura 61: Traslación, rotación respecto a un eje fijo, y el movimiento plano en un motor de automóvil. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 282.

### 3.1. Cuerpo rígido

Bedford & Fowler (2008) consideran que el cuerpo rígido "es un modelo idealizado de un objeto que no se deforma. La distancia entre cada par de puntos de un cuerpo rígido permanece constante" (p. 282).

### 3.2. Traslación

Respecto a la traslación, Bedford & Fowler (2008) escriben: "es el movimiento de un cuerpo rígido en el que éste no gira. Cada punto de un cuerpo rígido en traslación tiene la misma velocidad y aceleración, por lo que el movimiento del objeto está completamente descrito por el desplazamiento de un solo punto" (p. 282).

### 3.3. Rotación respecto a un eje fijo

También, al referirse a la rotación respecto a un eje fijo, se afirma que “es el movimiento de un cuerpo rígido en el que los puntos sobre un eje fijo están en reposo. Cada punto que no se encuentra sobre el eje se mueve en una trayectoria circular alrededor del eje mientras el cuerpo rígido gira” (Bedford & Fowler, 2008, p. 283).

### 3.4. Movimiento plano

“Movimiento de un cuerpo rígido en el que los puntos intersecados por un plano fijo permanecen en el plano. La rotación alrededor de un eje fijo es un caso especial del movimiento plano” (Bedford & Fowler, 2008, p. 283).

### 3.5. Movimientos generales: velocidades

Cada punto de un cuerpo rígido en traslación experimenta el mismo movimiento. Cada punto de un cuerpo rígido que gira respecto a un eje fijo experimenta un movimiento circular alrededor de este. Para analizar movimientos más complejos que combinan traslación y rotación, es necesario desarrollar ecuaciones que relacionen los movimientos relativos de los puntos de un cuerpo rígido con su movimiento angular (Bedford & Fowler, 2008, p. 290).

## 4. Velocidades absoluta y relativa

En la figura 62a “se observa un cuerpo rígido perpendicular al plano de su movimiento. A y B son puntos del cuerpo rígido contenidos en el plano, y O es el origen de un marco de referencia dado” (Bedford, 2008, p. 290). La posición de A respecto a B se relaciona con las posiciones de A y B en relación con O mediante:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \quad (1)$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo se obtiene:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad (2)$$

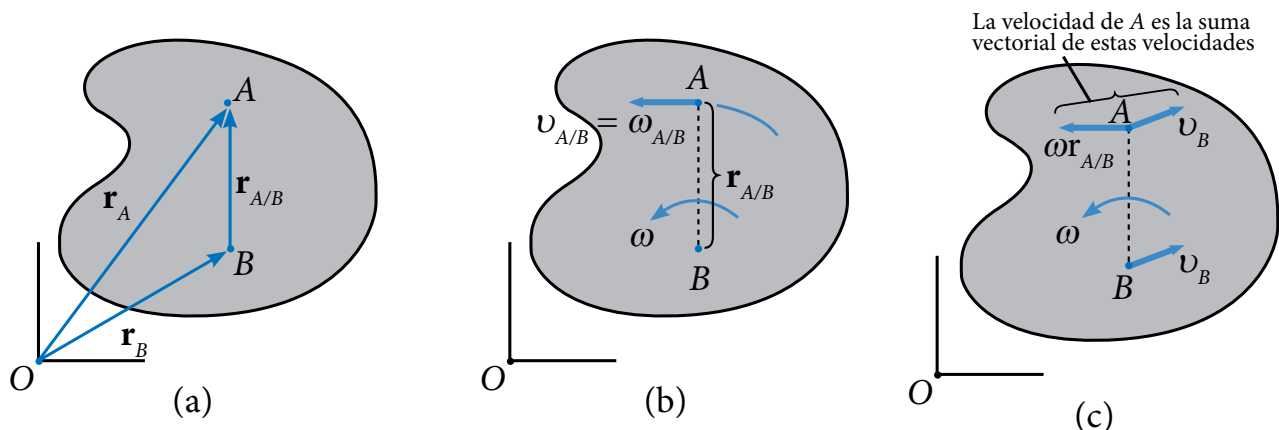


Figura 62: a) Cuerpo rígido en movimiento plano. b) Velocidad de A respecto a B. c) La velocidad de A es la suma de su velocidad respecto a B y la velocidad de B. Fuente: Bedford, 2008, p. 290.

“... donde  $\mathbf{v}_A$  y  $\mathbf{v}_B$  son las velocidades de A y B respecto al marco de referencia dado y es la velocidad de A respecto a B” (Bedford & Fowler, 2008, p. 291). (Cuando se mencione simplemente la velocidad de un punto, se estará hablando de su velocidad respecto al marco de referencia dado).

Se puede demostrar que  $\mathbf{v}_{A/B}$  se relaciona de manera simple con la velocidad angular del cuerpo rígido. Como A y B son puntos del cuerpo rígido, la distancia entre ellos,  $r_{A/B} = |\mathbf{r}_{A/B}|$ , es constante. Lo que significa que A se mueve respecto a B en una trayectoria circular mientras el cuerpo rígido gira. Por lo tanto, la velocidad de A respecto a B es tangente a la trayectoria circular e igual al producto de  $r_{A/B}$  y la velocidad angular  $\omega$  del cuerpo rígido (figura 62b). A partir de la ecuación (2), la velocidad de A es la suma de la velocidad de B y la velocidad de A respecto a B (figura 62c). Este resultado se puede usar para relacionar velocidades de puntos de un cuerpo rígido en movimiento plano cuando se conoce su velocidad angular (Bedford & Fowler, 2008, p. 291).

## 5. Aceleración absoluta y relativa

La aceleración absoluta de un punto que se mueve dentro de un sistema de referencia que además de trasladarse, rota, puede estudiarse como la suma de tres aceleraciones.

Una aceleración de arrastre: es la aceleración del punto considerándolo parte de un sólido soldado al sistema de referencia móvil cuyo movimiento general está definido por las magnitudes cinemáticas:

$$\vec{v}_A, \vec{a}_A, \vec{\omega} \text{ y } \vec{\alpha}.$$

Una aceleración relativa: es la aceleración que tiene el punto P para un observador situado en el sistema móvil.

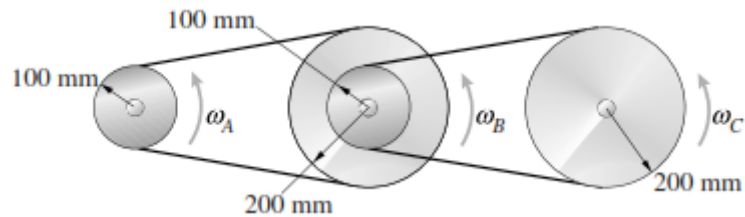
Una aceleración de Coriolis: es un término que aparece en las magnitudes vectoriales aplicando la ley de Bourne.



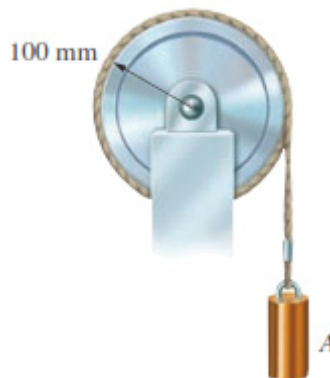
### Actividad n° 9

Resuelva ejercicios y problemas de fuerzas en el plano.

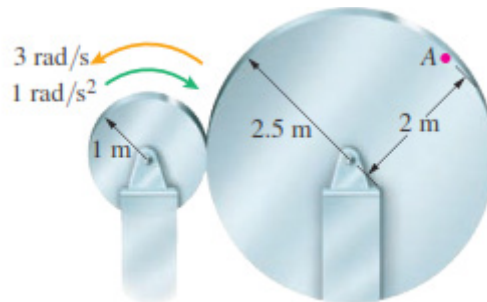
- La velocidad angular del disco izquierdo que se muestra en la figura se da en función del tiempo por  $\omega_A = 4 + 0.2t$  rad/s.
  - ¿Cuáles son las velocidades angulares  $\omega_B$  y  $\omega_C$  en  $t = 5$  s?
  - ¿Qué ángulo gira el disco derecho desde  $t = 0$  hasta  $t = 5$  s?



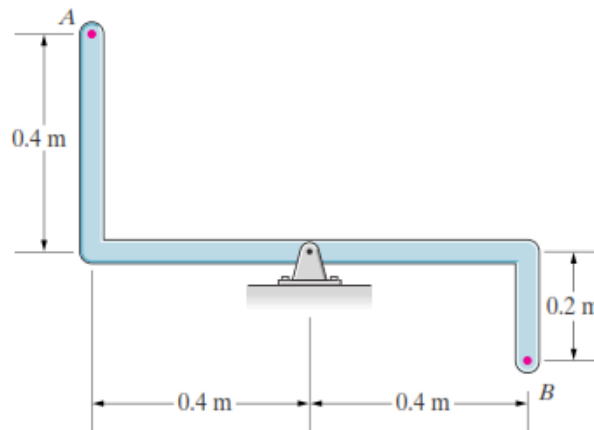
- La masa A parte desde el reposo en  $t = 0$  y cae con una aceleración constante de  $8 \text{ m/s}^2$ . Cuando la masa ha caído un metro, determine las magnitudes de a) la velocidad angular de la polea y b) las componentes tangencial y normal de la aceleración de un punto en el borde exterior de la polea.



- En el instante mostrado, el disco izquierdo tiene una velocidad angular de  $3 \text{ rad/s}$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj y una aceleración angular de  $1 \text{ rad/s}^2$  en la dirección de las manecillas del reloj.
  - ¿Qué valores tienen la velocidad angular y la aceleración angular del disco derecho? (Suponga que no existe movimiento relativo entre los discos en su punto de contacto).
  - ¿Cuáles son las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto A?



- Si la barra mostrada tiene una velocidad angular en sentido contrario al de las manecillas del reloj de  $8 \text{ rad/s}$  y una aceleración angular en el sentido de las manecillas del reloj de  $40 \text{ rad/s}^2$ , ¿cuáles son las magnitudes de las aceleraciones de los puntos A y B?



5. El radio de las llantas del Corvette es de 14 pulg. Viaja a 80 mi/h cuando el conductor aplica los frenos, sometiéndolo a una desaceleración de 25 pies/s<sup>2</sup>. Suponga que las llantas continúan girando, no derrapan, sobre la superficie del camino. En ese instante, ¿cuáles son las magnitudes de las componentes tangencial y normal de la aceleración (en pies/s<sup>2</sup>) de un punto en el borde exterior de una llanta respecto a un sistema coordenado no giratorio con su origen en el centro de la llanta?



*Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:*

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Movimiento plano de cuerpos rígidos. Fuerza y aceleración

### Tema n.º 2



Figura 63: Montacargas y su carga en movimiento pueden analizarse como un sistema de dos cuerpos rígidos conectados en movimiento plano. Fuente: Beer, 2010, p. 1036.

Para iniciar el presente tema, recordemos que en la unidad I se han tratado temas similares, pero con el supuesto de que en ese entonces el cuerpo se consideró como partícula; esto es, que su masa podría concentrarse en un punto y que todas las fuerzas actúan en él; es decir, en dicho punto. Ahora, para el caso de cuerpos rígidos, se estudiará no solo el movimiento del cuerpo como un todo, sino también el movimiento del cuerpo en torno a su centro de masa, lo que resulta importante para su adecuada comprensión.

### 1. Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido

Para un análisis correcto, consideraremos “un cuerpo rígido sobre el cual actúan varias fuerzas externas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$  (figura 63). Asumiendo que el cuerpo está integrado de un gran número  $n$  de partículas de masa  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y aplicar los resultados obtenidos para un sistema de partículas” (figura 64) (Beer, 2010, p. 1031). Para el análisis, consideramos primero el movimiento del centro de masa  $G$  del cuerpo con respecto al sistema de referencia newtoniano  $Oxyz$ , se retoma la ecuación del movimiento y se escribe:

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (1)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $\bar{\mathbf{a}}$  es la aceleración del centro de masa  $G$ . Volviendo ahora al movimiento del cuerpo relativo al sistema de referencia centroidal  $Gx'y'z'$ , se retoma la ecuación anterior y se escribe:

$$\sum M_G = \dot{H}_G \quad (2)$$

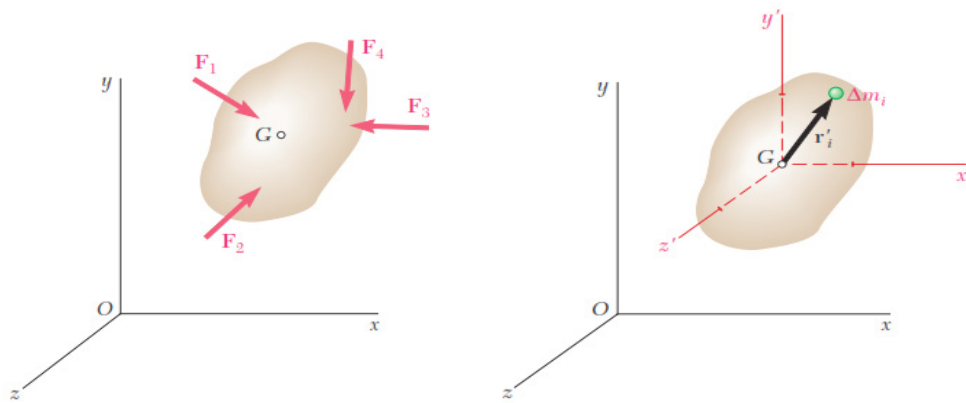


Figura 63: Cuerpo rígido con varias fuerzas actuantes. Fuente: Beer, 2010, p. 1031.

donde  $\dot{\mathbf{H}}_G$  "representa la razón de cambio de  $\mathbf{H}_G$ , la cantidad de movimiento angular alrededor de  $G$  del sistema de partículas que forma el cuerpo rígido. De aquí en adelante,  $\mathbf{H}_G$  hará referencia simplemente a la *cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido en torno a su centro de masa  $G$* . Junto con las ecuaciones (1) y (2) expresa que el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema consistente en el vector  $m\bar{\mathbf{a}}$  fijo en  $G$  y al par de momento  $\mathbf{H}_G$ " (figura 64) (Beer, 2010, p. 1031).

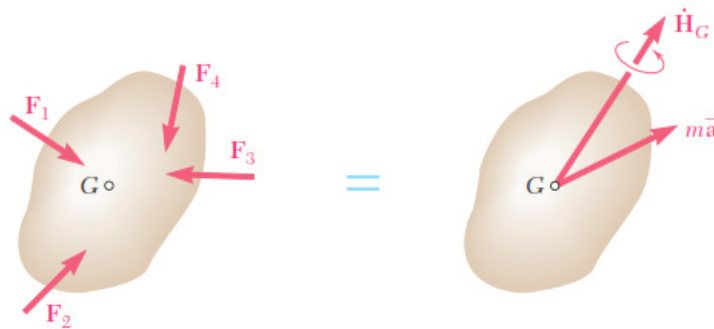


Figura 64: Cuerpo rígido con sistema equivalente. Fuente: Beer et al., 2010, p. 1031.

Se concluye que gracias a las ecuaciones (1) y (2) se puede aplicar al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. No obstante ello es cierto, en el resto de este tema el análisis se limitará al *movimiento plano* de cuerpos rígidos, esto es, a un movimiento en el que cada partícula permanece a una distancia constante de un plano de referencia fijo, y se supondrá que los cuerpos rígidos estarán compuestos sólo por las placas planas y los cuerpos que son simétricos con respecto al plano de referencia. (Beer, 2010, p. 1031).

Un estudio adicional del movimiento plano de cuerpos tridimensionales no simétricos y del movimiento de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional se pospondrá hasta el tema 1 de la Unidad IV de este manual.

## 2. Momento angular. Principio de D'Alembert. Sistemas de cuerpos rígidos

Para fundamentar este concepto se considerará una placa rígida en movimiento plano. Asumiendo que la placa está integrada por un gran número  $n$  de partículas  $P_i$  de masa  $m_i$  y retomando la ecuación de movimiento, se puede notar "que la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_G$  de la placa alrededor de su centro de masa  $G$  puede calcularse considerando los momentos alrededor de  $G$  de las cantidades de movimiento de las partículas de la placa en su movimiento con respecto al sistema de referencia  $O_{xy}$  o  $G_{xy}$ " (figura 65) (Beer, 2010, p. 1032). Elegimos este último, con lo cual se escribe:

$$H_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \Delta m_i) \quad (3)$$

donde  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{v}_i m_i$  denotan, respectivamente, el vector de posición y la cantidad de movimiento lineal de la partícula  $P_i$  relativa al sistema de referencia centroidal  $G_{xy}$ .

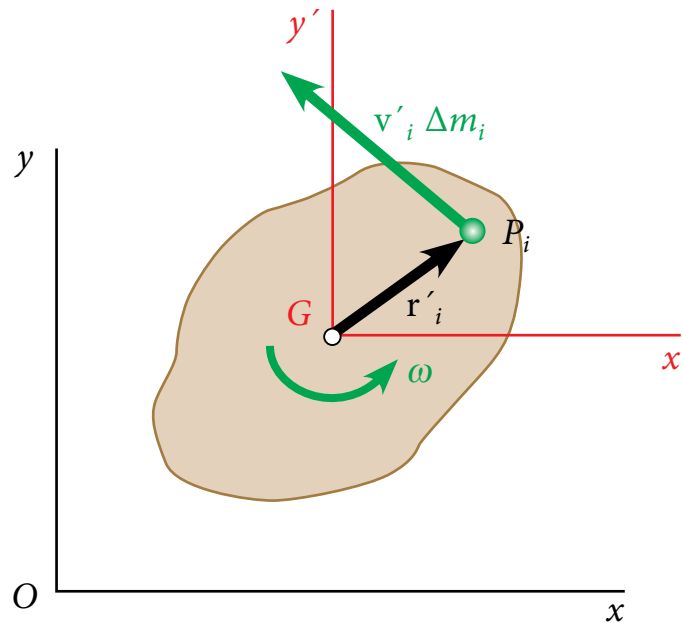


Figura 65: Cuerpo rígido con movimiento angular. Fuente: Beer et al., 2010, p. 1032.

“Sin embargo, en vista de que la partícula pertenece a la placa, se tiene que” (Beer, 2010, p. 1032):

$$\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular de la placa en el instante considerado. Se escribe:

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n \left[ \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \Delta m_i \right]$$

Con referencia a la figura 65, se verifica con facilidad que la expresión que se obtuvo representa un vector de la misma dirección que  $\boldsymbol{\omega}$  (esto es, perpendicular a la placa) y de magnitud igual:

$$\boldsymbol{\omega} \sum \mathbf{r}'_i{}^2 \Delta m_i.$$

Recordando que la suma:

$$\sum \mathbf{r}'_i{}^2 \Delta m_i$$

representa el momento de inercia  $I$  de la placa alrededor del eje centroidal perpendicular a la misma, se concluye que la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_G$  de la placa en torno a su centro de masa es (Beer, 2010, p. 1032):

$$H_G = \bar{I} \boldsymbol{\omega} \quad (4)$$

Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (4) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I} \boldsymbol{\alpha} \quad (5)$$

En consecuencia, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular de la placa se represen-

ta mediante un vector de la misma dirección que  $\mathbf{H}_G$  (esto es, perpendicular a la placa) y de magnitud  $I$ .

El Principio de D'Alembert requiere considerar una placa rígida de masa  $m$  que se mueve bajo la acción de varias fuerzas externas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ , contenidas en el plano de la placa (figura 66) (Beer, 2010, p. 1033). Al sustituir  $\mathbf{H}_G$  de la ecuación (5) en la ecuación (2) y escribir las ecuaciones de movimiento fundamentales (1) y (2) en forma escalar, se tiene:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad \sum F_y = m\bar{a}_y \quad \sum M_G = \bar{I}\alpha \quad (6)$$

Las ecuaciones (6) muestran que la aceleración del centro de masa  $G$  de la placa y su aceleración angular, se obtienen fácilmente una vez que se ha determinado la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la placa y su momento resultante alrededor de  $G$ . Al dar condiciones iniciales apropiadas, es posible obtener por integración en cualquier instante  $t$  las coordenadas  $x$  e  $y$  del centro de masa y la coordenada angular  $\theta$ . De tal modo, *el movimiento de la placa está completamente definido por la resultante y el momento resultante alrededor de  $G$  de las fuerzas externas que actúan sobre ella* (Beer et al., 2010, p. 1033).

Esta propiedad, que se ampliará al caso de movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, es característica del movimiento de un cuerpo rígido. De hecho, como se vio anteriormente, el movimiento de un sistema de partículas que no están rígidamente conectadas dependerá en general de las fuerzas externas específicas que actúan sobre diferentes partículas, así como de las fuerzas internas (Beer et al., 2010, p. 1033).

Se verifica que el movimiento de un cuerpo rígido está en función solo de la resultante de fuerzas y del momento resultante de las fuerzas externas que actúan sobre él; luego, se comprueba que dos *sistemas de fuerzas que son equipolentes*, esto significa que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante, *también son equivalentes*; por tanto, tienen exactamente el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado. Para comprender mejor, considere en particular el sistema de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (figura 66a) y el sistema de fuerzas efectivas asociadas con las partículas que forman dicho cuerpo (figura 66b) (Beer et al., 2010, p. 1033).

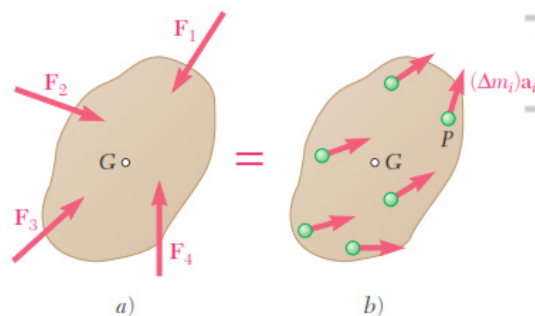


Figura 66: Cuerpo rígido con un sistema de fuerzas efectivas. Fuente: Beer, 2010, p. 1033.

Anteriormente se mostró que dos sistemas definidos de tal modo son equipolentes. Sin embargo, puesto que las partículas consideradas ahora constituyen un cuerpo rígido, se concluye de la discusión anterior que los dos sistemas son también equivalentes. En consecuencia, es posible establecer que *las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes a las fuerzas efectivas de las diferentes partículas que lo constituyen* (Beer, 2010, p. 1033).

Este enunciado se conoce como *Principio de D'Alembert*, en honor al matemático Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), aunque, es conveniente decir, que el enunciado original de D'Alembert se escribió un tanto diferente.

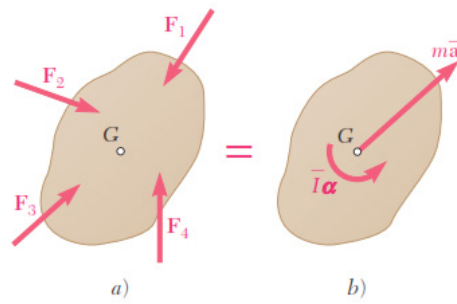
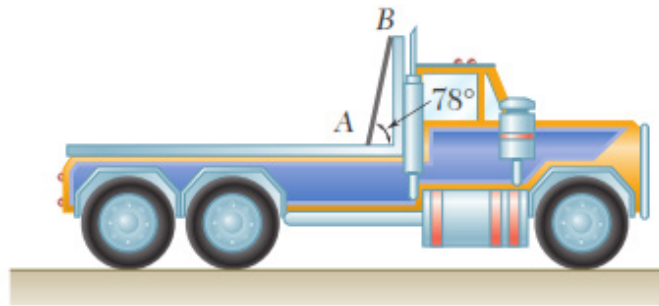


Figura 67: Cuerpo rígido con sistema de fuerzas equivalentes. Fuente: Beer, 2010, p. 1033.

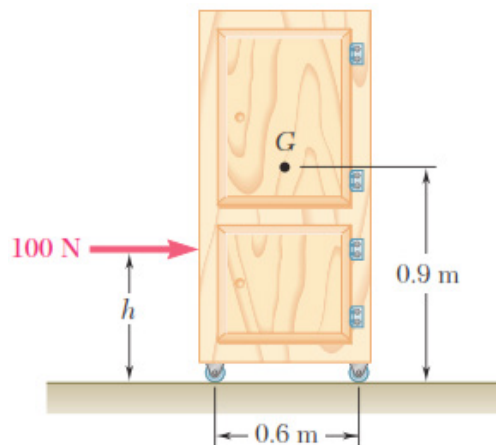
### Actividad n.º 10

Resuelve ejercicios y problemas sobre movimiento plano de cuerpos rígidos.

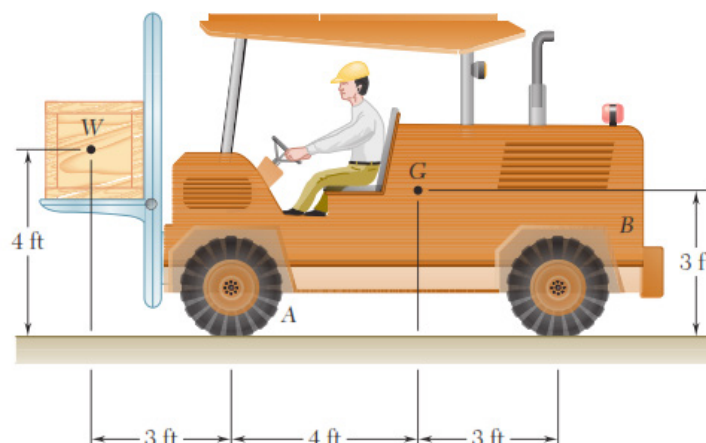
1. Un tablero de 6 pies se coloca en un camión con un extremo recargado contra un bloque asegurado al piso y el otro extremo descansa sobre una partición vertical. Si el tablero debe permanecer en la posición mostrada, determine la máxima aceleración permisible del camión.



2. Un gabinete de 20 kg está montado sobre ruedas que le permiten moverse con libertad ( $\neq 0$ ) sobre el piso. Si se aplica una fuerza de 100 N en la forma indicada, determine:
  - a) la aceleración del gabinete y,
  - b) el intervalo de valores de  $h$  para el cual no se volcará el gabinete.

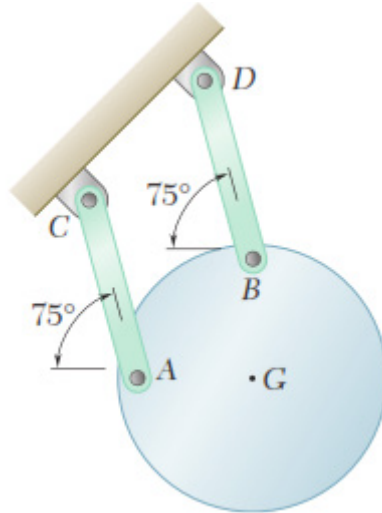


3. El camión montacargas que se muestra en la figura pesa 2250 lb y se usa para levantar una caja de peso  $W = 2500$  lb. Si se sabe que el camión está en reposo, determine: a) la aceleración de la caja hacia arriba para la cual las reacciones en las ruedas traseras B son cero, b) la reacción correspondiente en cada una de las ruedas delanteras A.

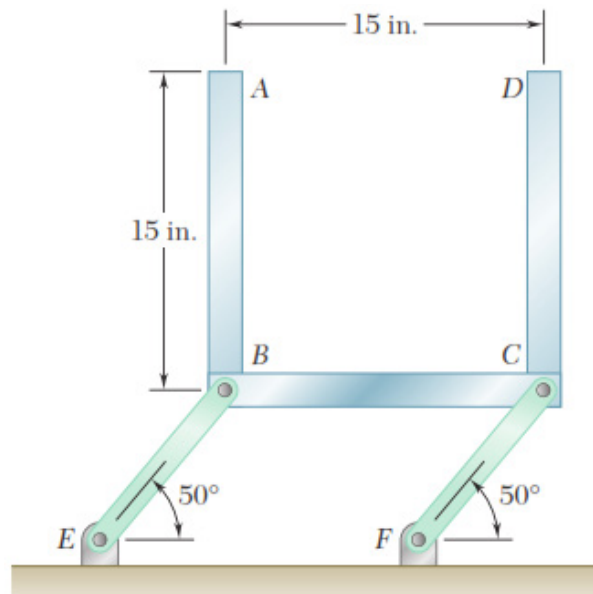




4. Una placa circular uniforme de 3 kg de masa se une a dos eslabones AC y BD de la misma longitud. Si la placa se suelta desde el reposo en la posición indicada, determine: a) la aceleración de la placa, b) la tensión en cada eslabón.



5. Tres barras, cada una con un peso de 8 lb, están soldadas entre sí y se encuentran conectadas mediante pasadores a los dos eslabones BE y CF. Si se desprecia el peso de los eslabones, determine la fuerza en cada eslabón inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo.



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Cinética plana de un cuerpo rígido. Trabajo y energía

### Tema n.º 3



Figura 68: El viento realiza trabajo sobre el rotor de la turbina de viento (aeroturbina), lo que ocasiona que esta gire y active un generador eléctrico. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 412.

En este tema ampliaremos el uso de los métodos de la energía y de la cantidad de movimiento, puesto que han mostrado ser muy útiles para resolver ciertos tipos de problemas en dinámica. Se sabe que si las fuerzas sobre un objeto se conocen como funciones de la posición, se puede usar el principio del trabajo y la energía para relacionar el cambio en la magnitud de la velocidad del objeto con su movimiento entre dos posiciones. Ahora, también se extienden estos métodos a situaciones diversas en las que se deben considerar tanto los movimientos de traslación como los de rotación.

### 1. Energía cinética

“Es la energía de un cuerpo rígido que puede expresarse en términos de la velocidad, del centro de masa del cuerpo y de su velocidad angular. Primero consideraremos un movimiento plano general y después la rotación alrededor de un eje fijo” (Bedford & Fowler, 2008, p. 415).

**Para un movimiento plano general:**

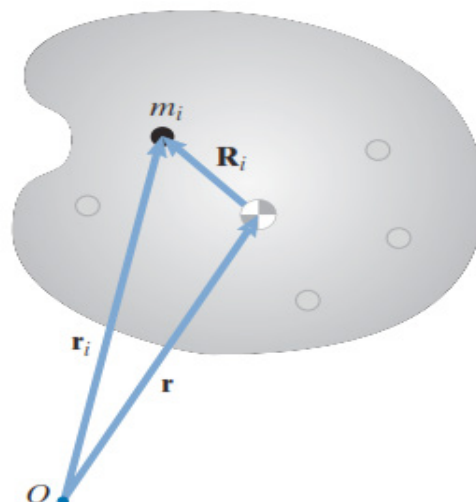


Figura 69: Representación de un cuerpo rígido como un sistema de partículas. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 415.

“Ahora se modelará un cuerpo rígido como un sistema de partículas. Sea  $\mathbf{R}_i$  el vector de posición de la  $i$ -ésima partícula respecto al centro de masa del cuerpo (figura 69). La posición del centro de masa es” (Bedford & Fowler, 2008, p. 415):

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo rígido. La posición de la  $i$ -ésima partícula respecto a  $O$  está relacionada con su posición respecto al centro de masa por:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{R}_i, \quad (1)$$

y los vectores  $\mathbf{R}_i$  satisfacen la relación

$$\sum_i m_i \mathbf{R}_i = \mathbf{0}. \quad (2)$$

La energía cinética del cuerpo rígido es la suma de las energías cinéticas de sus partículas, dada por la ecuación (Bedford & Fowler, 2008, p. 415):

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (3)$$

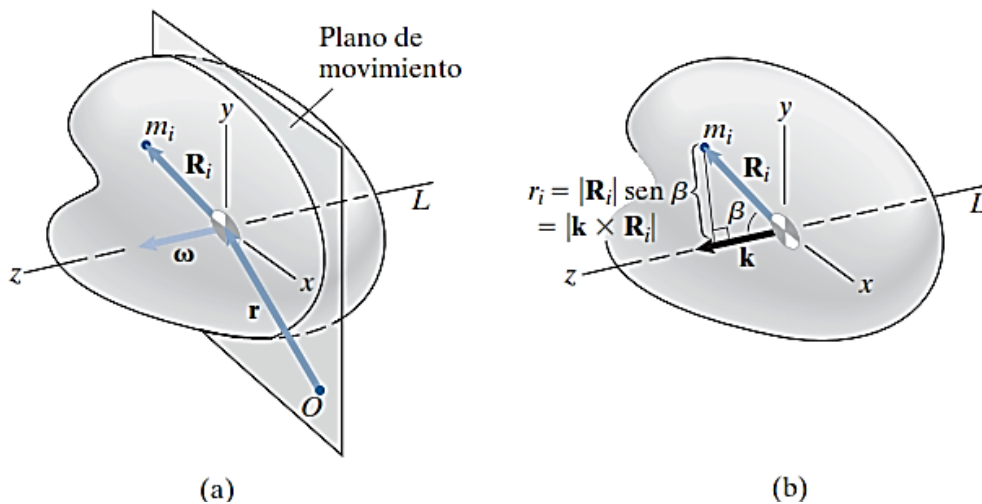


Figura 70: a) Sistema coordenado con el eje  $z$  alineado con  $L$ . b) La magnitud de  $\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i$  es la distancia perpendicular de  $L$  a  $m_i$ . Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 416.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (1) se obtiene

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{R}_i}{dt},$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del centro de masa. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3) y usando la ecuación (2) (Bedford & Fowler, 2008, p. 416) se obtiene la energía cinética del cuerpo rígido en la forma:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}_i}{dt}, \quad (4)$$

donde  $v$  es la magnitud de la velocidad del centro de masa.

Sea  $L$  el eje que pasa por el centro de masa y que es perpendicular al plano de movimiento (figura 70a). En términos del sistema coordenado mostrado, se puede expresar el vector de velocidad angular como  $\mathbf{w} = \omega \mathbf{k}$  (Bedford, 2008, p. 416). La velocidad de la  $i$ -ésima partícula respecto al centro de masa es  $d\mathbf{R}_i/dt = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{R}_i$ , por lo que se puede escribir la ecuación (4) como:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \left[ \sum_i \frac{1}{2}m_i (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i) \right] \omega^2. \quad (5)$$

La magnitud del vector  $\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i$  es la distancia perpendicular  $r_i$  desde  $L$  hasta la  $i$ -ésima partícula (figura 70b), por lo que el término entre corchetes en la ecuación (5) es el momento de inercia del cuerpo respecto a  $L$ :

$$\sum_i m_i (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i) = \sum_i m_i |\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i|^2 = \sum_i m_i r_i^2 = I.$$

Así, se obtiene la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano general con la forma:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (6)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo rígido,  $v$  es la magnitud de la velocidad del centro de masa,  $I$  es el momento de inercia respecto al eje  $L$  que pasa por el centro de masa y  $\omega$  es la velocidad angular (Bedford & Fowler, 2008, p. 416). Se observa que la energía cinética consiste en dos términos: la *energía cinética traslacional*, debida a la velocidad del centro de masa, y la *energía cinética rotatoria* debida a la velocidad angular (figura 71).

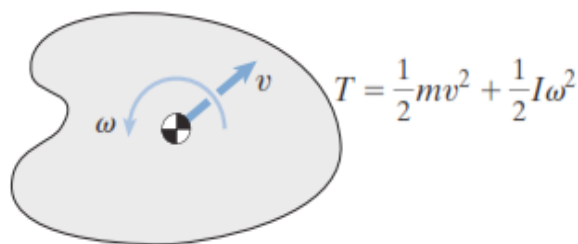
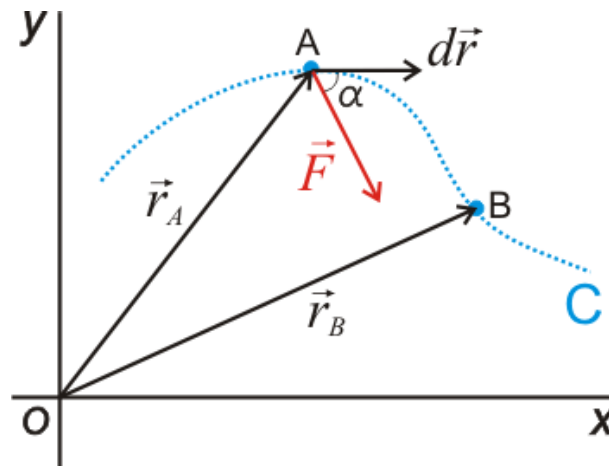


Figura 71: Energía cinética en movimiento plano general. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 416.

## 2. Trabajo de una fuerza

El trabajo  $W$  es una magnitud escalar que, como veremos, da la cantidad de energía cinética transferida por una fuerza.

En la siguiente figura se ha representado una partícula que se desplaza por una trayectoria  $C$  entre los puntos  $A$  y  $B$ . Sobre ella actúa una fuerza  $F$ . Su vector de desplazamiento, tangente a la trayectoria en cada punto, es  $d\mathbf{r}$ .



El trabajo de dicha fuerza se define:

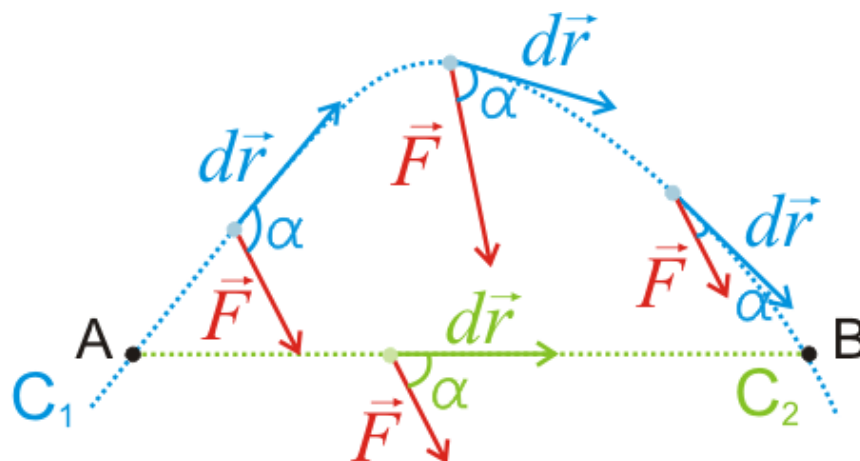
$$W_{AB}^{(C)} = \int_{A(C)}^B \vec{F} d\vec{r}$$

**Trabajo de una fuerza**

Las unidades de trabajo en el Sistema Internacional son los julios (J). Un julio es el trabajo realizado por una fuerza de 1 N en un desplazamiento de 1 m, y su nombre fue elegido en honor del físico inglés James Prescott Joule (1818-1889), que estudió la naturaleza del calor y descubrió su relación con el trabajo.

La integral que aparece en la definición anterior se denomina integral de línea y se calcula a lo largo de la trayectoria especificada (C). La razón de especificar la trayectoria a lo largo de la cual se calcula el trabajo es que, en general, el trabajo de una fuerza es distinto dependiendo de la trayectoria que describe la partícula cuando se desplaza desde su posición inicial A hasta la posición final B.

Como en la definición de trabajo aparece un producto escalar (que depende del ángulo formado por los vectores F y dr), este producto escalar dependerá en general de la trayectoria descrita por la partícula.



Si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas, el trabajo total es la suma del trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$W_{AB}^{(C)} = \sum_{i=1}^N \int_{A(C)}^B \vec{F}_i d\vec{r}$$

**Trabajo de N fuerzas** actuando sobre una partícula.

De la definición de trabajo se deduce lo siguiente:

- ✓ El trabajo de una fuerza perpendicular a la trayectoria de una partícula es nulo, ya que  $F$  y  $dr$  son perpendiculares y su producto escalar es nulo.
- ✓ Cuando el ángulo que forman los vectores  $F$  y  $dr$  es mayor que  $90^\circ$ , el trabajo es negativo. En particular, el trabajo de la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es negativo.

### 3. Principio del trabajo y la energía

Es importante demostrar que el trabajo realizado sobre un cuerpo rígido, por fuerzas y pares externos mientras este se mueve entre dos posiciones, es igual al cambio en su energía cinética. Es necesario adoptar el método donde se obtienen las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido para llegar a este resultado. Se puede demostrar también el principio del trabajo y la energía para un sistema de partículas y se utilizará en la obtención del principio para un cuerpo rígido. Sea  $m_i$  la masa de la  $i$ -ésima partícula de un sistema de  $N$  partículas, y sea  $\mathbf{r}_i$  la posición de la  $i$ -ésima partícula respecto a un punto  $O$  que está fijo en relación con un marco de referencia inercial (figura 72) (Bedford & Fowler, 2008, p. 414). La suma de las energías cinéticas de las partículas se denota con:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad (7)$$

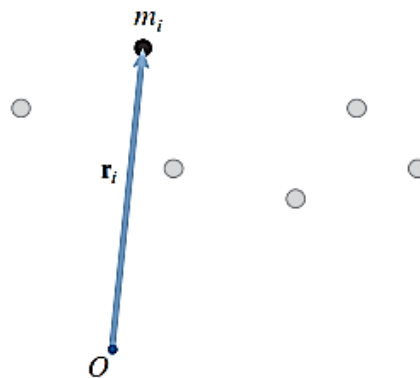


Figura 72: Sistema de partículas. El vector  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición de la  $i$ -ésima partícula. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 414.

donde  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$  es la velocidad de la  $i$ -ésima partícula. El objetivo aquí es relacionar el trabajo realizado sobre el sistema con el cambio en  $T$ . Se inicia con la segunda ley de Newton para la  $i$ -ésima partícula,

$$\sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^E = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i),$$

donde  $\mathbf{f}_{ij}$  es la fuerza ejercida sobre la  $i$ -ésima partícula por la  $j$ -ésima partícula y  $\mathbf{f}_i^E$  es la fuerza externa sobre la  $i$ -ésima partícula. Se toma el producto punto de esta ecuación por  $\mathbf{v}_i$  y se suma desde  $i = 1$  hasta  $N$ :

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{f}_i^E \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \quad (8)$$

El término del lado derecho de esta ecuación puede expresarse como la razón de cambio de la energía cinética total:

$$\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{dT}{dt}$$

Multiplicando la ecuación (8) por  $dt$  se obtiene:

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i^E \cdot d\mathbf{r}_i = dT$$

Al integrar esta ecuación resulta:

$$\sum_i \sum_j \int_{(\mathbf{r}_i)_1}^{(\mathbf{r}_i)_2} \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_j \int_{(\mathbf{r}_i)_1}^{(\mathbf{r}_i)_2} \mathbf{f}_i^E \cdot d\mathbf{r}_i = T_2 - T_1 \quad (9)$$

“Los términos del lado izquierdo son el trabajo realizado sobre el sistema por las fuerzas internas y externas cuando las partículas se mueven de las posiciones  $(\mathbf{r}_i)_1$  a  $(\mathbf{r}_i)_2$ ” (Bedford & Fowler, 2008, p. 414). Se observa que el trabajo realizado por fuerzas internas y externas cuando un sistema de partículas se mueve entre dos posiciones es igual al cambio en la energía cinética total del sistema.

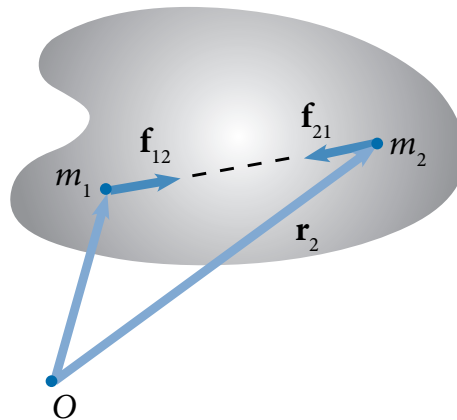


Figura 73: Partículas 1 y 2 y las fuerzas que ejercen entre sí. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 414.

Si las partículas representan un cuerpo rígido, se supone que las fuerzas internas entre cada par de partículas están dirigidas a lo largo de la recta que las une, el trabajo que realizan las fuerzas internas es igual a cero. Para demostrar que esto es cierto se consideran dos partículas de un cuerpo rígido llamadas 1 y 2 (figura 73) (Bedford & Fowler, 2008, p. 415).

La suma de las fuerzas que las dos partículas ejercen entre sí es cero ( $\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} = 0$ ), por lo que la razón a la que las fuerzas realizan trabajo (la potencia) es:

$$\mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_{21} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

Se puede demostrar que  $\mathbf{f}_{21}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  y, consecuentemente, que la razón a la que las fuerzas internas realizan trabajo entre estas dos partículas es cero (Bedford, 2008, p. 415). Como estas son puntos de un cuerpo rígido, su velocidad relativa puede expresarse en términos de la velocidad angular del cuerpo rígido como:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (10)$$

Esta ecuación demuestra que la velocidad relativa  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  es perpendicular a  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , que es el vector de posición de la partícula 1 a la partícula 2. Como la fuerza  $\mathbf{f}_{21}$  es paralela a  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , es perpendicular a  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ . Este argumento puede repetirse para cada par de partículas del cuerpo rígido y ver que la razón total a la que las fuerzas internas realizan trabajo es cero (Bedford & Fowler, 2008, p. 415).

De lo anterior se concreta que el trabajo que realizan cuando un cuerpo rígido se mueve entre dos posiciones es cero. Observe que, si un objeto no es rígido, las fuerzas internas pueden realizar trabajo (Bedford & Fowler, 2008, p. 415).

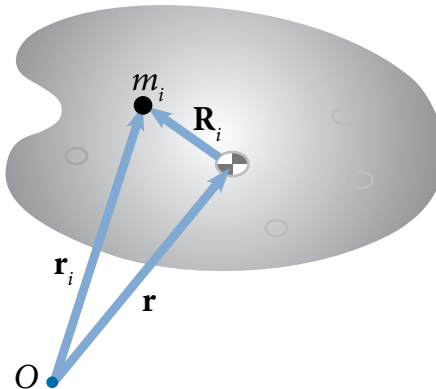


Figura 74: Representación de un cuerpo rígido como un sistema de partículas. Fuente: Bedford & Fowler, 2008, p. 415.

Por consiguiente, en el caso de un cuerpo rígido, el trabajo realizado por las fuerzas internas en la ecuación (9) se anula. Si se denota con  $U_{12}$  el trabajo efectuado por las fuerzas externas, se obtiene el principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido: "El trabajo realizado por fuerzas y pares externos cuando un cuerpo rígido se mueve entre dos posiciones es igual al cambio en la energía cinética total del cuerpo" (Bedford & Fowler, 2008, p. 415). De la siguiente forma:

$$U_{12} = T_2 - T_1. \quad (11)$$

Asimismo, se puede establecer este principio para un sistema de cuerpos rígidos: El trabajo realizado por fuerzas y pares externos e internos cuando un sistema de cuerpos rígidos se mueve entre dos posiciones es igual al cambio en la energía cinética total del sistema (Bedford & Fowler, 2008, p. 415).

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (12)$$

#### 4. Conservación de la energía

"Si todas las fuerzas que realizan trabajo sobre un sistema de cuerpos rígidos son conservativas, la suma de la energía cinética total y la energía potencial total es la misma en cualesquiera dos posiciones" (Bedford & Fowler, 2008, p. 421).

Av

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2. \quad (13)$$

Cuando sobre un sistema de cuerpos rígidos realizan trabajo tanto fuerzas conservativas como no conservativas, el principio del trabajo y la energía puede expresarse en términos de la energía potencial  $V$  de las fuerzas conservativas y el trabajo  $U_{12}$  realizado por las fuerzas no conservativas (Bedford & Fowler, 2008, p. 421).

$$T_1 + V_1 + U_{12} = T_2 + V_2.$$

Para aplicar los métodos energéticos a un cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos se pueden considerar tres pasos (Bedford & Fowler, 2008, p. 421):

1. Identificar debidamente las fuerzas y los pares que realizan trabajo. Use diagramas de cuerpo libre para determinar qué fuerzas y pares externos realizan trabajo sobre el sistema.

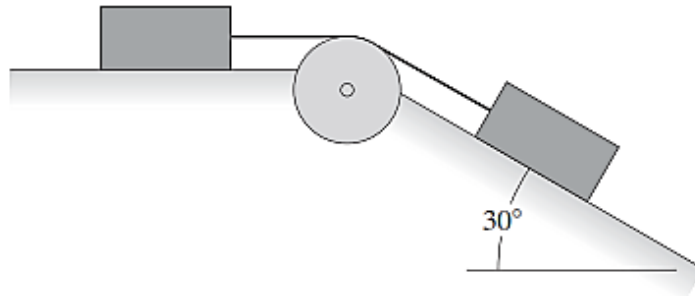


2. *Aplicar el principio del trabajo y la energía o de la conservación de la energía.* Iguale el trabajo total realizado durante un cambio de posición con el cambio en la energía cinética, o bien iguale la suma de las energías cinética y potencial en las dos posiciones.
3. *Determinar relaciones cinemáticas.* Para completar la solución, a menudo es necesario obtener relaciones entre las velocidades de los puntos de los cuerpos rígidos con sus velocidades angulares.

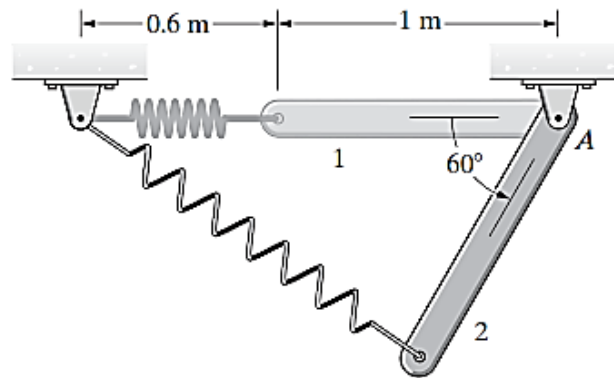
## Actividad N.º II

Resolver los problemas aplicando los criterios de conservación de la energía.

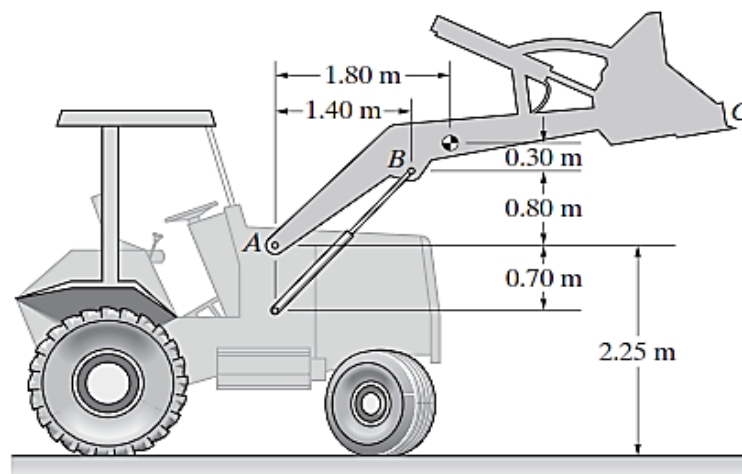
1. La masa de cada una de las cajas mostradas es de 4 kg. El radio de la polea es de 120 mm y su momento de inercia es de  $0.032 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . El coeficiente de fricción cinética entre las cajas y las superficies es  $\mu_k = 0.12$ . Si el sistema se suelta desde el reposo, ¿a qué velocidad se estarán moviendo las cajas cuando la caja izquierda se haya movido 0.5 m a la derecha?



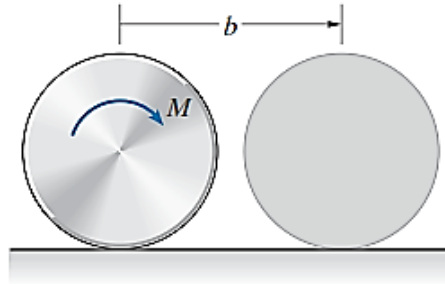
2. La barra de 4 kg que se muestra en la figura se suelta desde el reposo en la posición horizontal 1 y cae a la posición 2. La longitud sin estirar del resorte es de 0.4 m y la constante del resorte es  $k = 20 \text{ N/m}$ . ¿Cuál es la magnitud de la velocidad angular de la barra cuando está en la posición 2?



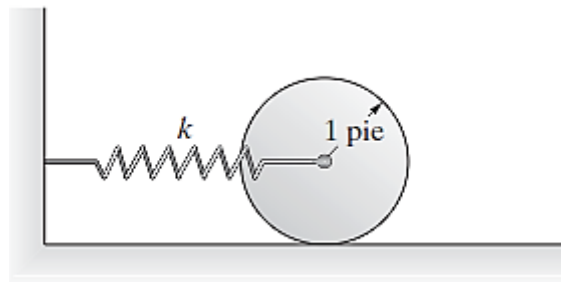
3. Modele el brazo ABC mostrado como un solo cuerpo rígido. Su masa es de 300 kg y el momento de inercia respecto a su centro de masa es  $I = 360 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Partiendo desde el reposo con su centro de masa 2 m arriba del suelo (posición 1), los cilindros hidráulicos empujan el brazo ABC hacia arriba. Cuando está en la posición mostrada (posición 2), su velocidad angular es de  $1.4 \text{ rad/s}$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿Cuánto trabajo realizan los cilindros hidráulicos sobre el brazo al moverlo de la posición 1 a la posición 2?



4. La masa del disco circular mostrado es de 5 kg y su radio es  $R = 0.2$  m. El disco está en reposo cuando se le aplica un par constante  $M = 10$  N-m en el sentido de las manecillas del reloj, con lo que el disco rueda hacia la derecha. Considere el instante cuando el centro del disco se ha movido una distancia  $b = 0.4$  m.
- a) ¿Cuánto trabajo ha realizado el par  $M$  sobre el disco?  
b) ¿Cuánto trabajo ha realizado la fuerza de fricción ejercida por la superficie sobre el disco?



5. Al disco cilíndrico homogéneo de 1 slug que se muestra en la figura se le da una velocidad angular de 2 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj con el resorte sin estirar. La constante del resorte es  $k = 3$  lb/pie. Si el disco rueda, ¿cuánto se moverá su centro hacia la derecha?



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Cinética plana de un cuerpo rígido. Impulso y cantidad de movimiento

### Tema n.º 4



Figura 74: Una prueba de impacto Charpy se usa para determinar la cantidad de energía absorbida por un material durante el impacto, al restar la energía potencial gravitatoria final del brazo a su energía potencial gravitatoria inicial. Fuente: Beer, 2010, p. 1107.

En este tema proseguiremos con el uso de los métodos de la energía y de la cantidad de movimiento para resolver ciertos tipos de problemas en dinámica. En esta ocasión se trata del principio de impulso y la cantidad de movimientos angulares para un cuerpo rígido. Estos principios se relacionan mediante métodos matemáticos respecto al tiempo, las fuerzas y pares sobre un cuerpo rígido, con los cambios en la velocidad de su centro de masa y su velocidad angular, para aplicaciones específicas.

### 1. Cantidad de movimiento lineal y momento angular

Se define el momento lineal como una magnitud vectorial. Para una partícula material de masa  $m$  que se mueve con una velocidad, se puede ver que el vector momento lineal tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad, ya que  $m$  es positivo. Para estudiar la variación del momento lineal con el tiempo tendremos que estudiar su derivada respecto al tiempo.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Si el momento lineal es constante su derivada será cero. Es decir, el momento lineal será constante cuando la fuerza que actúa sobre la partícula sea nula. Es otra forma de expresar el principio de la inercia. Cuando sobre un punto material no actúa ninguna fuerza o la suma de todas ellas es nula, el momento lineal permanece constante. Por la ecuación (a)

$$\vec{F}dt = d\vec{p}$$

Con lo que

$$\int \vec{F}dt = \int d\vec{p}$$

A la primera integral se le llama impulso mecánico. Su valor es igual a la variación del momento lineal.

$$\int \vec{F} dt = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta \vec{p}$$

Si la fuerza es constante:

$$\vec{F} - t = \Delta \vec{p}$$

## 2. Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido

En este capítulo el principio del impulso en la cantidad de movimiento se aplicará al análisis del movimiento plano de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos, gracias al método del impulso y la cantidad de movimiento que se adapta particularmente a la solución de problemas que incluyen el tiempo y las velocidades. Asimismo, el principio del impulso y la cantidad de movimiento proporciona el único método práctico para la solución de problemas en los que intervienen el movimiento o impacto (Beer, 2010, p. 1107).

Considerando nuevamente un cuerpo rígido conformado por un gran número de partículas  $P_i$ , hay que recordar que el sistema formado por las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo  $t_1$  y el sistema de los impulsos de las fuerzas externas aplicadas desde  $t_1$  hasta  $t_2$  son en conjunto equipolentes al sistema formado por las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo  $t_2$  (Beer, 2010, p. 1107).

Puesto que los vectores asociados con un cuerpo rígido pueden considerarse como vectores deslizantes, se concluye que el sistema de vectores que se muestra en la figura 75 no sólo son equipolentes, sino verdaderamente *equivalentes* en el sentido de que los vectores en el lado izquierdo del signo de igualdad pueden transformarse en los vectores del lado derecho mediante el uso de las operaciones fundamentales expuestas anteriormente (Beer et al., 2010, p. 1107).

Por lo tanto, se escribe:

$$\text{Sist. Cant. Mov.}_1 + \text{Sist. Imp. Ext.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Sist. Cant. Mov.}_2 \quad (14)$$

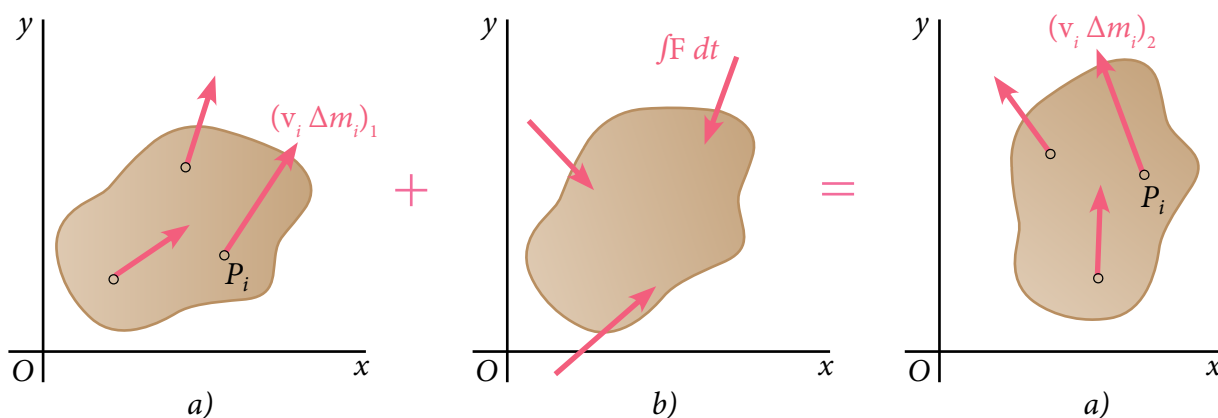


Figura 75: Sistemas equivalentes. Fuente: Beer et al., 2010, p. 1107.

Sin embargo, las cantidades de movimiento  $\mathbf{v}_i m_i$  de las partículas se reducen a un vector fijo en  $G$ , igual a su respectiva suma:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \Delta m_i$$

También se verifica que es un par de momento igual a la suma de sus momentos alrededor de  $G$ .

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i \Delta m_i$$

“Debemos recordar que  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{H}_G$  definen, respectivamente, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular alrededor de  $G$  del sistema de partículas que forman al cuerpo rígido” (Beer et al., 2010, p. 1107).

Se observa también de la ecuación (14) que  $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ . Por otro lado, restringiendo el presente análisis al movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, se recuerda que  $\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$ . Por lo tanto, concluimos que el sistema de las cantidades de movimiento  $\mathbf{v}_i = m_i \mathbf{v}$  es equivalente al vector de cantidad de movimiento lineal  $m\mathbf{v}$  fijo en  $G$  y al par de momento angular (figura 76) (Beer et al., 2010, p. 1108).

Es comprobable que el sistema de cantidades de movimiento se reduce al vector  $m\mathbf{v}$  en el caso particular de una traslación ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ) y al par en el caso particular de una rotación centrodial ( $\mathbf{v} = 0$ ), verificamos una vez más que el movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia puede descomponerse en una traslación o en el centro de masa  $G$  y una rotación alrededor de  $G$  (Beer et al., 2010, p. 1108).

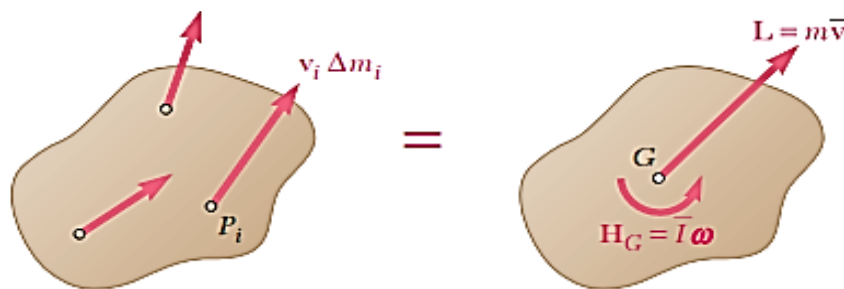


Figura 76: Análisis del movimiento plano de una placa rígida. Fuente: Beer et al., 2010, p. 1108.

Al sustituir el sistema de cantidades de movimiento en los incisos a) y c) de la figura 75 por el vector de cantidad de movimiento lineal y el par de cantidad de movimiento angular equivalentes, se obtienen los tres diagramas que se muestran en la figura 77 (Beer et al., 2010, p. 1108).

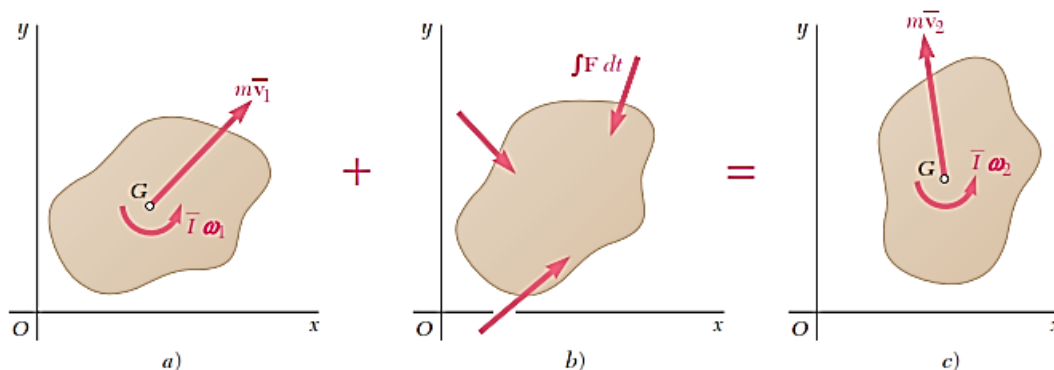


Figura 77: Ecuación de diagramas de cuerpo libre en el caso del movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia. Fuente: Beer, 2010, p. 1108.

La anterior figura expresa como una ecuación de diagramas de cuerpo libre en el caso del movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia. Es posible obtener tres ecuaciones de movimiento de la figura 77; dos se obtienen al sumar e igualar las componentes  $x$  e  $y$  de las cantidades de movimientos e impulsos, y la tercera al sumar e igualar los momentos de estos vectores alrededor de cualquier punto dado. El sistema de coordenadas puede elegirse como fijo en el espacio o permitir que se mueva con el centro de masa del cuerpo mientras mantienen una dirección fija (Beer et al., 2010, p. 1109).

Cualquiera sea el caso, el punto alrededor del cual se consideran los momentos debe mantener la misma posición relativa con los ejes coordenados durante el intervalo de tiempo considerado. Al derivar las tres ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido, es necesario tener cuidado de no sumar de manera indiscriminada cantidades de movimiento lineales y angulares. Es necesario evitar la confusión al tener presente que  $m\mathbf{v}_x$  y  $m\mathbf{v}_y$  representan las componentes de un vector, a saber, el vector de cantidad de movimiento lineal  $m\mathbf{v}$ , mientras que representa la magnitud de un par, esto es, el par de cantidad de movimiento angular. Así, la cantidad debe sumarse sólo al momento de la cantidad de movimiento lineal  $m\mathbf{v}$ , y nunca a este mismo vector ni a sus componentes. Se debe tener presente que las cantidades implicadas se expresarán entonces en las mismas unidades: N.m.s o lb.ft.s (Beer, 2010, p. 1109).

**Rotación no centroidal.** Este caso particular del movimiento plano requiere que la magnitud de la velocidad del centro de masa del cuerpo sea  $v = r\omega$ , donde  $r$  representa la distancia desde el centro de masa hasta el eje de rotación fijo, y  $\omega$  la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado; la magnitud del vector de cantidad de movimiento fijo en G es consecuentemente  $m\mathbf{v} = mr\omega$  (Beer et al., 2010, p. 1109).

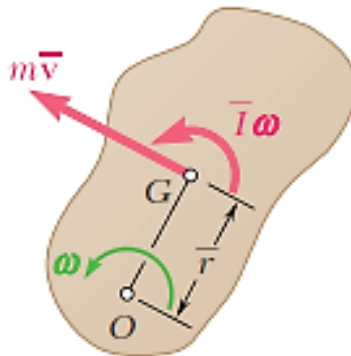


Figura 77: Rotación no centroidal. Fuente: Beer et al., 2010, p. 1109.

“Al sumar los momentos alrededor de O del vector de cantidad de movimiento y del par de cantidad de movimiento (figura 77) y al utilizar el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia, se encuentra que la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_O$  del cuerpo alrededor de O tiene la magnitud” (Beer et al., 2010, p. 1109):

$$\bar{I}\dot{\omega} + (mr\omega)r = (\bar{I} + mr^2)\omega = I_O\omega \quad (15)$$

Al determinar la suma de los momentos alrededor de O de las cantidades de movimiento e impulsos en la ecuación (14), se escribe:

$$I_O\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_o dt = I_O\omega_2 \quad (16)$$

En el caso general de movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, la ecuación (16) puede utilizarse con respecto al eje de rotación instantáneo bajo ciertas condiciones. Sin embargo, se recomienda que todos los problemas de movimiento plano se resuelvan mediante el método general que se describió antes en esta sección (Beer, 2010, p. 1109).

### 3. Sistemas de cuerpos rígidos

Para el caso de un sistema de partículas es posible analizar el movimiento de varios cuerpos rígidos aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada cuerpo por separado. No obstante, al resolver problemas que no incluyen más de tres incógnitas, muchas

veces es conveniente aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema considerado como un todo (Beer *et al.*, 2010, p. 1110).

Aquí son útiles los diagramas de cantidad de movimiento e impulso que se deben dibujar para el sistema completo de cuerpos. Para cada parte móvil del sistema, los diagramas de cantidades de movimiento deben incluir un vector de cantidad de movimiento o un par de cantidad de movimiento, o ambos (Beer, 2010, p. 1110).

En este análisis es posible no considerar los impulsos de las fuerzas internas al sistema del diagrama de impulso, ya que ocurre en pares de vectores iguales y opuestos. Al adicionar e igualar de manera sucesiva las componentes  $x$  y las  $y$ , así como los momentos de todos los vectores que intervienen, se obtienen tres relaciones que expresan que las cantidades de movimiento en el tiempo  $t_1$  y los impulsos de las fuerzas externas forman un sistema equipolente al sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo  $t_2$ . Nuevamente, es necesario ser cuidadosos y no sumar de manera indiscriminada cantidades de movimiento lineales y angulares; cada ecuación debe verificarse para asegurar que se han utilizado unidades consistentes (Beer, 2010, p. 1110).

#### 4. Conservación de la cantidad de movimiento angular

Para la conservación de la cantidad de movimiento angular tendremos en cuenta cuando no actúa fuerza externa sobre un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, los impulsos de las fuerzas externas son nulos y el sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo  $t_1$  es equipolente al sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo  $t_2$ . Sumando e igualando de manera sucesiva las componentes  $x$ , las componentes  $y$  y los momentos de las cantidades de movimiento en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , se concluye que la cantidad de movimiento lineal total del sistema se conserva en cualquier dirección, y que su cantidad de movimiento angular total se conserva alrededor de cualquier punto (Beer, 2010, p. 1110).

Pero, hay muchas aplicaciones de ingeniería en las que *no se conserva la cantidad de movimiento lineal* aunque se conserve la cantidad de movimiento angular  $H_O$  del sistema alrededor de un punto dado  $O$ , esto es, en el que se cumple:

$$(H_O)_1 = (H_O)_2 \quad (17)$$

“Tales casos ocurren cuando las líneas de acción de todas las fuerzas externas pasan por  $O$  o, de manera más general, cuando la suma de los impulsos angulares de las fuerzas externas alrededor de  $O$  es cero” (Beer *et al.*, 2010, p. 1110).

Los problemas que implican *conservación de la cantidad de movimiento angular* alrededor de un punto  $O$  pueden resolverse mediante el método general del impulso y la cantidad de movimiento, esto es, dibujando diagramas de cantidad de movimiento e impulso según se describe en los ítems 1 y 2 de este capítulo. La ecuación (17) se obtiene entonces al sumar e igualar los momentos alrededor de  $O$  (Beer *et al.*, 2010, p. 1110).

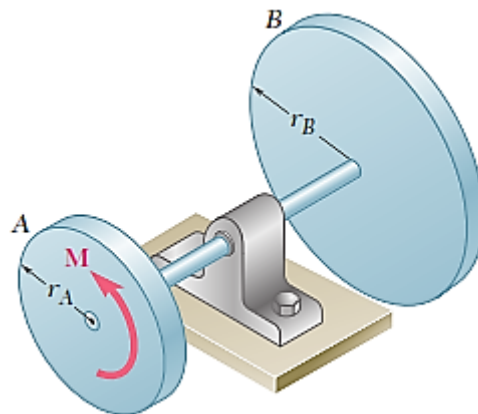
“Por último, también al sumar e igualar las componentes  $x$  e  $y$  es posible deducir dos ecuaciones adicionales que pueden utilizarse para determinar dos impulsos lineales desconocidos, como los impulsos de las componentes de reacción en un punto fijo” (Beer *et al.*, 2010, p. 1110).



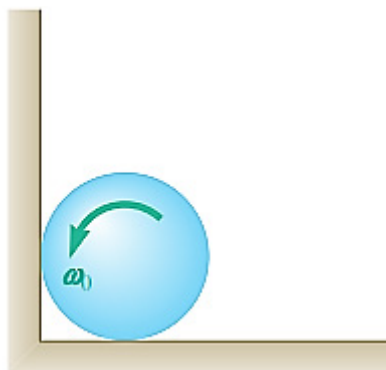
### Actividad n.º 12

Resolver los problemas aplicando la conservación de la cantidad de movimiento.

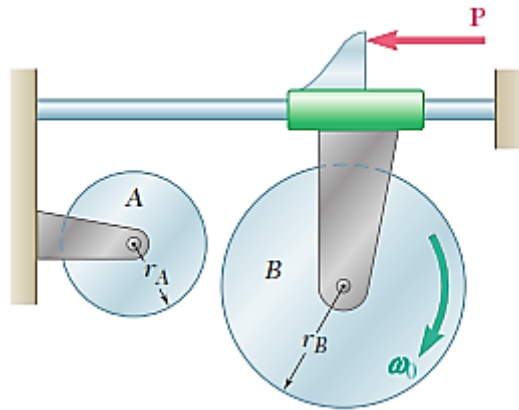
1. Un volante de 4000 lb con un radio de giro de 27 in. se deja girar hasta detenerse a partir de una velocidad angular de 450 rpm. Si la fricción cinética produce un par de magnitud igual a 125 lb-in., determine el tiempo requerido para que el volante gire hasta detenerse.
2. Dos discos del mismo grosor y el mismo material están unidos a una flecha, como se muestra en la figura. El disco A de 8 lb tiene un radio  $r_A = 3$  in., y el disco B tiene un radio  $r_B = 4.5$  in. Si se aplica un par  $M$  con magnitud de 20 lb-in. al disco A cuando el sistema está en reposo, determine el tiempo requerido para que la velocidad angular del sistema alcance 960 rpm.



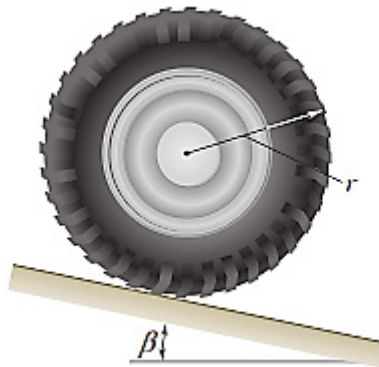
3. Un cilindro de radio  $r$  y peso  $W$  con una velocidad angular inicial  $\omega_0$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se coloca en la esquina formada por el piso y una pared vertical. Si se denota con  $u_k$  el coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y la pared y el piso, obtenga una expresión para el tiempo requerido para que el cilindro quede en reposo.



4. El disco B tiene una velocidad angular inicial  $\omega_0$  cuando se pone en contacto con el disco A, el cual se encuentra en reposo. Muestre que la velocidad angular final del disco B depende solo de  $\omega_0$  y de la razón de las masas  $m_A$  y  $m_B$  de los dos discos.



5. Un neumático de radio  $r$  y radio de giro centroidal se suelta desde el reposo sobre la rampa mostrada en el tiempo  $t = 0$ . Si se supone que el neumático rueda sin deslizarse, determine a) la velocidad de su centro en el tiempo  $t$ , b) el coeficiente de fricción estática que se requiere para evitar el deslizamiento.



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

### **Lectura seleccionada n.º 3**

“La monumental represa china”.

Vidaud, I. y E. (2013). La monumental represa china. *Construcción y tecnología en concreto*. Disponible en <http://bit.ly/1LQ5fq4> (primera parte, octubre, pp. 26-28) y <http://bit.ly/2vgFq5r> (segunda parte, noviembre, pp. 24-26).



## Glosario de la Unidad III

---

### C

#### **Conservación de la cantidad de movimiento**

La cantidad de movimiento lineal total del sistema se conserva en cualquier dirección, ya que su cantidad de movimiento angular total se conserva alrededor de cualquier punto (Beer *et al.*, 2010, p. 1107).

#### **Cuerpo rígido**

Es un modelo idealizado de un objeto que no se deforma. La distancia entre cada par de puntos de un cuerpo rígido permanece constante (Bedford & Fowler, 2008, p. 282).

### E

#### **Energía cinética de un cuerpo rígido**

Es la energía de un cuerpo rígido que puede expresarse en términos de la velocidad, del centro de masa del cuerpo y de su velocidad angular (Bedford & Fowler, 2008, p. 415).

### M

#### **Movimiento plano**

Movimiento de un cuerpo rígido en el que los puntos intersecados por un plano fijo permanecen en el plano (Bedford & Fowler, 2008, p. 283).

### P

#### **Principio de D'Alembert**

*Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes a las fuerzas efectivas de las diferentes partículas que lo constituyen (Beer et al., 2010, p. 1033).*

#### **Principio de conservación de la energía**

*Si todas las fuerzas que realizan trabajo sobre un sistema de cuerpos rígidos son conservativas, la suma de la energía cinética total y la energía potencial total es la misma en cualesquiera dos posiciones (Bedford & Fowler, 2008, p. 421).*

#### **Principio del trabajo y la energía**

*El trabajo realizado por fuerzas y pares externos cuando un cuerpo rígido se mueve entre dos posiciones es igual al cambio en la energía cinética total del cuerpo (Bedford & Fowler, 2008, p. 415).*

### R

#### **Rotación respecto a un eje fijo**

Es el movimiento de un cuerpo rígido en el que los puntos sobre un eje fijo están en reposo (Bedford & Fowler, 2008, p. 283).

### T

#### **Traslación**

Es el movimiento de un cuerpo rígido en el que este no gira (Bedford & Fowler, 2008, p. 282).



## **Bibliografía de la Unidad III**

---

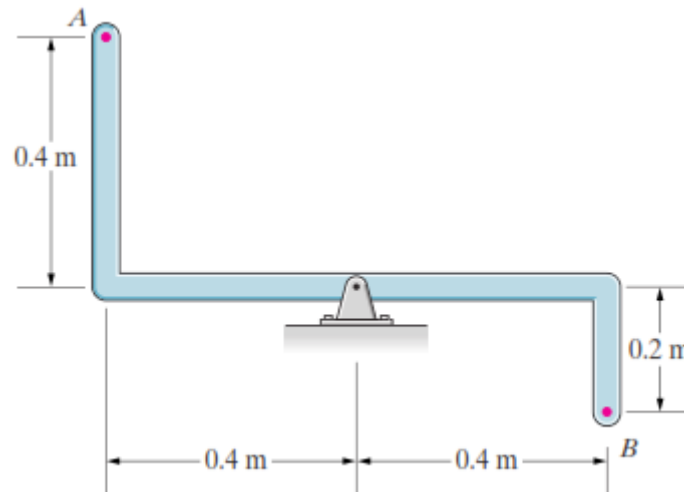
Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

### Problemas resueltos

1. Si la barra mostrada tiene una velocidad angular antihoraria de 8 rad/s y una aceleración angular de 40 rad/s<sup>2</sup>. ¿Cuáles son las magnitudes de las aceleraciones en los puntos A y B?



Resolución:

Cálculo de la aceleración de A:

$$\begin{aligned} a_A &= \alpha \times r_{A/O} - \omega^2 r_{A/O} \\ &= (-40 \text{ rad/s}^2 \mathbf{k}) \times (-0.4 \mathbf{i} + 0.4 \mathbf{j}) \text{ m} - (8 \text{ rad/s})^2 (-0.4 \mathbf{i} + 0.4 \mathbf{j}) \text{ m} \\ &= (41.6 \mathbf{i} - 9.6 \mathbf{j}) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Cálculo de la aceleración de B:

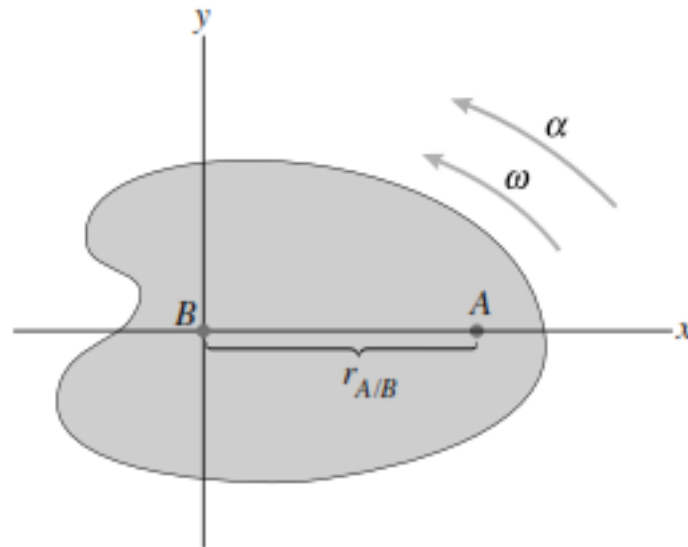
$$\begin{aligned} a_B &= \alpha \times r_{B/O} - \omega^2 r_{B/O} \\ &= (-40 \text{ rad/s}^2 \mathbf{k}) \times (-0.4 \mathbf{i} + 0.2 \mathbf{j}) \text{ m} - (8 \text{ rad/s})^2 (0.4 \mathbf{i} + 0.2 \mathbf{j}) \text{ m} \\ &= (-33.6 \mathbf{i} - 3.2 \mathbf{j}) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Cálculo de las magnitudes:

$$\begin{aligned} a_A &= \sqrt{(41.6)^2 + (-9.6)^2} \text{ m/s}^2 = 42.7 \text{ m/s}^2 \\ a_B &= \sqrt{(-33.6)^2 + (-3.2)^2} \text{ m/s}^2 = 33.8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

2. El cuerpo rígido de la figura gira alrededor del eje z con velocidad angular  $v = 4 \text{ rad/s}$  y aceleración angular  $a = 2 \text{ rad/s}^2$ , ambas con sentido contrario al de las manecillas del reloj. La distancia  $r_{A/B} = 0.6 \text{ m}$ .

- a) ¿Cuáles son los vectores de la velocidad angular y de la aceleración angular?  
b) Determine la aceleración del punto A respecto al punto B.



Resolución:

a) Por definición, para los ejes cartesianos indicados:

$$\omega = 4k, \quad \alpha = 6k$$

b) Cálculo de la aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{A/B} &= \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{A/B}) + \alpha \times \mathbf{r}_{A/B} \\ \mathbf{a}_{A/B} &= 4k \times (4k \times 0.6i) + 2k \times 0.6i \\ \mathbf{a}_{A/B} &= -9.6i + 1.2j \text{ (m/s}^2\text{)}. \end{aligned}$$

También se puede resolver así:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{A/B} &= \alpha \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B} \\ &= 2k \times 0.6i - 16(0.6)i \\ \mathbf{a}_{A/B} &= \underline{-9.6i + 1.2j \text{ (m/s}^2\text{)}}. \end{aligned}$$

Nota: Los ejercicios han sido tomado del texto siguiente:

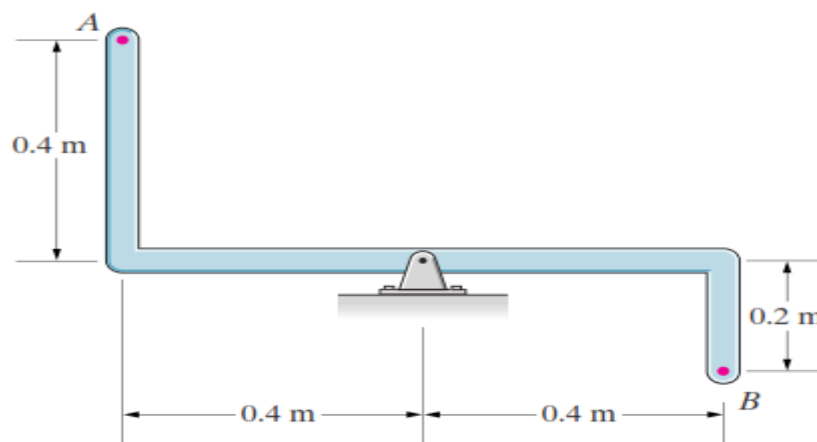
- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.



## Autoevaluación n.º 3

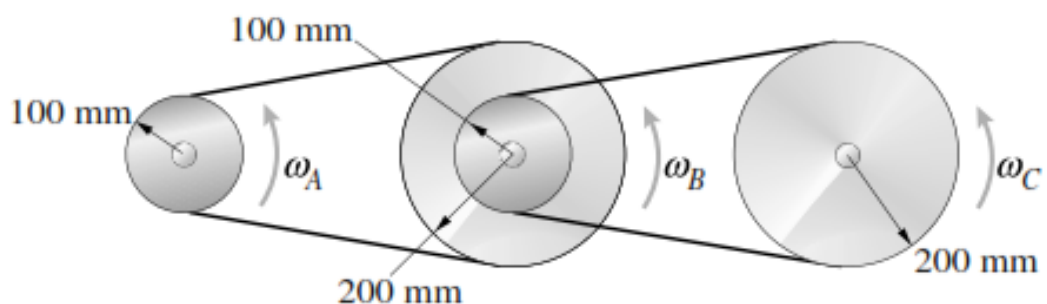
Resolver los problemas siguientes y verificar sus respuestas con el anexo al final del capítulo.

- Si la barra tiene una velocidad angular antihoraria de  $8 \text{ rad/s}$  y aceleración angular horaria de  $40 \text{ rad/s}^2$ , ¿cuáles son las magnitudes de las aceleraciones de los puntos A y B?
  - $42.7 \text{ m/s}^2$  y  $33.8 \text{ m/s}^2$
  - $41.7 \text{ m/s}^2$  y  $32.8 \text{ m/s}^2$
  - $42.7 \text{ m/s}^2$  y  $35.4 \text{ m/s}^2$
  - $41.7 \text{ m/s}^2$  y  $33.8 \text{ m/s}^2$
  - $45.7 \text{ m/s}^2$  y  $35.4 \text{ m/s}^2$



### Enunciado de los problemas 2 al 4:

La velocidad angular del disco izquierdo que se muestra en la figura se da en función del tiempo por  $\omega_A = 4 + 0.2t \text{ rad/s}$ .



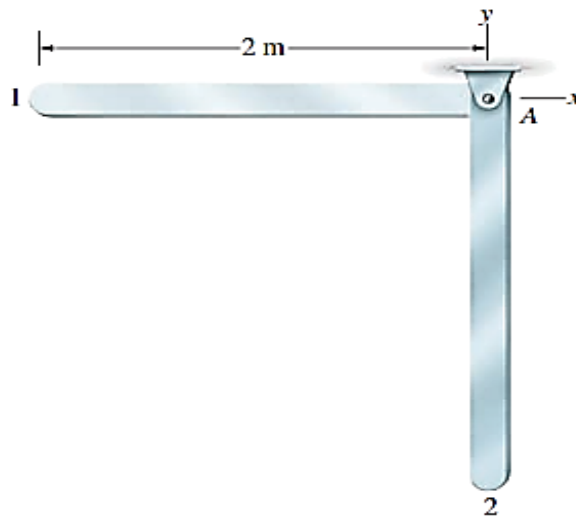
- ¿Cuál es la velocidad angular de  $\omega_B$  en  $t = 5 \text{ s}$ ?
  - $1.5 \text{ rad/s}$
  - $2.5 \text{ rad/s}$
  - $1.25 \text{ rad/s}$
  - $2.55 \text{ rad/s}$
  - $3.5 \text{ rad/s}$
- ¿Cuál es la velocidad angular de  $\omega_C$  en  $t = 5 \text{ s}$ ?
  - $1.5 \text{ rad/s}$
  - $2.5 \text{ rad/s}$
  - $1.25 \text{ rad/s}$
  - $2.55 \text{ rad/s}$
  - $3.5 \text{ rad/s}$



4. ¿Qué ángulo gira el disco derecho desde  $t = 0$  hasta  $t = 5$  s?
- a) 6.5 rad
  - b) 7.5 rad
  - c) 1.575 rad
  - d) 5.625 rad
  - e) 7.505 rad

**Enunciado de los problemas 5 al 7:**

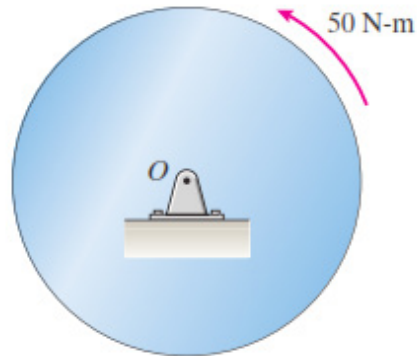
La barra delgada de 8 kg que se muestra en la figura se suelta desde el reposo en la posición horizontal 1 y cae a la posición 2.



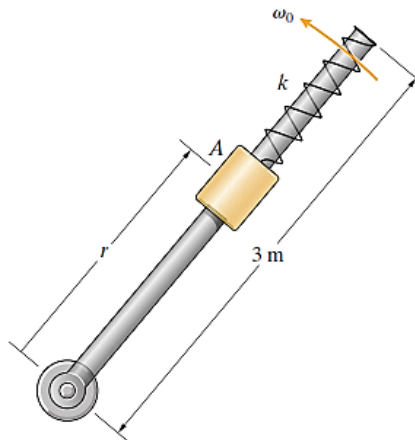
5. ¿Cuánto trabajo es realizado por el peso de la barra cuando esta cae de la posición 1 a la posición 2?
- a) 0 J
  - b) 10.5 J
  - c) 56.5 J
  - d) 45.7 J
  - e) 78.5 J
6. ¿Cuánto trabajo es realizado por la fuerza ejercida sobre la barra por el soporte de pasador cuando la barra cae de la posición 1 a la posición 2?
- a) 0 J
  - b) 10.5 J
  - c) 56.5 J
  - d) 45.7 J
  - e) 78.5 J
7. Use la conservación de la energía para determinar la velocidad angular de la barra cuando está en la posición 2.
- a) 6.68 rad/s
  - b) 3.84 rad/s
  - c) 1.57 rad/s
  - d) 3.59 rad/s
  - e) 1.50 rad/s

**Enunciado de los problemas 8 y 9**

El momento de inercia del disco mostrado respecto a O es de  $22 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . En  $t = 0$ , el disco en reposo se somete a un par de torsión constante de  $50 \text{ N}\cdot\text{m}$ .



8. Determine el impulso angular ejercido sobre el disco desde  $t = 0$  hasta  $t = 5$  s.
- 345 N-m-s
  - 125 N-m-s
  - 250 N-m-s
  - 375 N-m-s
  - 555 N-m-s
9. ¿Cuál es la velocidad angular del disco en  $t = 5$  s?
- 6.68 rad/s
  - 3.84 rad/s
  - 1.57 rad/s
  - 11.40 rad/s
  - 1.50 rad/s
10. La barra de 2 kg mostrada gira en un plano horizontal respecto al pasador liso. El collarín A de 6 kg se desliza sobre la barra lisa. Suponga que el momento de inercia del collarín A respecto a su centro de masa es despreciable; es decir, trate al collarín como una partícula. En el instante mostrado, la velocidad angular de la barra es  $\omega_0 = 60$  rpm y la distancia desde el centro del collarín es  $r = 1.8$  m. Determine la velocidad angular de la barra cuando  $r = 2.4$  m.
- 90.5 rpm
  - 57.5 rpm
  - 67.4 rpm
  - 87.5 rpm
  - 37.6 rpm



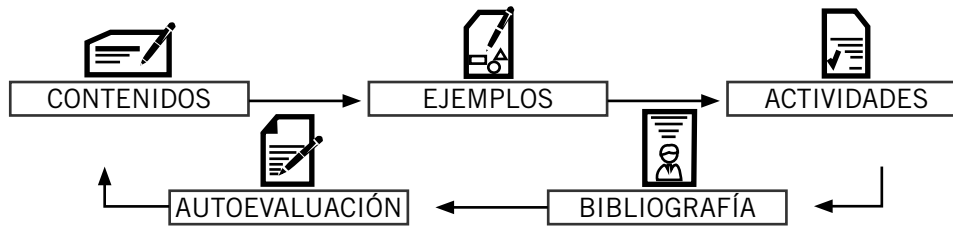
Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F., Johnston, E. & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## UNIDAD IV

# CINEMÁTICA-CINÉTICA TRIDIMENSIONAL DEL CUERPO RÍGIDO Y VIBRACIONES MECÁNICAS

### DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD IV



### ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

**RESULTADO DE APRENDIZAJE:** Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de aplicar las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido para resolver problemas relacionados con la dinámica del cuerpo rígido en tres dimensiones y los principios de vibraciones con un grado de libertad en problemas diversos.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES
<p><b>Tema N.º 1: Cinemática tridimensional del cuerpo rígido</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Rotación alrededor de un eje fijo.</li> <li>Velocidad angular y aceleración angular.</li> <li>Movimiento general.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Desarrolla y aplica las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones.</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Se motiva por la utilidad que tienen el trabajo y la energía en diversas aplicaciones tanto en el campo de la ingeniería como en la vida cotidiana.</li> <li>✓ Participa en lograr su aprendizaje de los métodos para analizar vibraciones mecánicas.</li> </ul>
<p><b>Tema N.º 2: Cinética tridimensional de cuerpos rígidos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Cantidad de movimiento angular.</li> <li>Energía cinética.</li> <li>Ecuaciones de movimiento.</li> </ol>	<p><b>Actividad N.º 13</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas de cinemática de cuerpos rígidos.</li> <li>Demuestra cómo se aplican los principios de trabajo y energía, y cantidad de movimiento angular y lineal a un cuerpo rígido que tiene movimiento tridimensional.</li> </ol>	
<p><b>Tema N.º 3: Vibraciones mecánicas: Vibración libre no amortiguada</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Vibración libre no amortiguada.</li> <li>Métodos de energía.</li> </ol>	<p><b>Actividad N.º 14</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas sobre la aplicación de la segunda ley de Newton a cuerpos rígidos.</li> <li>Analiza la vibración de un grado de libertad, vibración libre no amortiguada por medio de la ecuación de movimiento y métodos de energía.</li> </ol>	
<p><b>Tema N.º 4: Vibraciones mecánicas: Vibración forzada no amortiguada</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Vibración forzada no amortiguada.</li> <li>Vibración libre viscosa amortiguada.</li> <li>Vibración forzada viscosa amortiguada</li> </ol>	<p><b>Actividad N.º 15</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Resuelve ejercicios y problemas de trabajo y energía.</li> <li>Analiza la vibración forzada no amortiguada por medio de la ecuación de movimiento y métodos de energía.</li> </ol>	
<p><b>Autoevaluación N.º 4</b></p>	<p><b>Actividad N.º 16</b></p> <p>Resuelve ejercicios y problemas sobre impulso y cantidad de movimiento.</p>	

## Cinemática tridimensional del cuerpo rígido

### Tema n.º 1

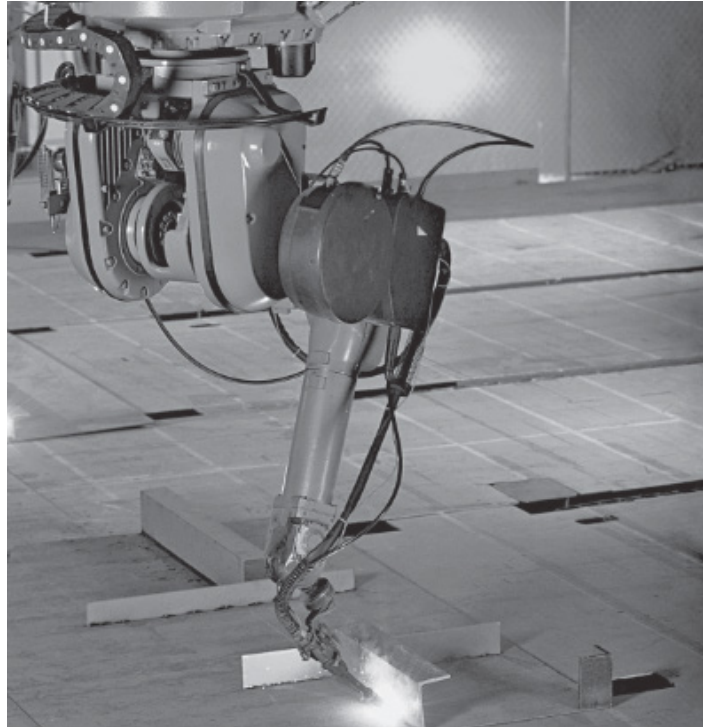


Figura 78: Al diseñar este robot industrial, debe especificarse correctamente su movimiento. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 548.

En muchas aplicaciones de la ingeniería, tales como el diseño naval, aeronáutico y de otros móviles, se tiene que considerar el movimiento tridimensional, por lo que se hace necesario explicar cómo se describe el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido; en seguida, se deducen las ecuaciones del movimiento y se utilizan para resolver movimientos simples, luego de mayor complejidad. Por tanto, analizaremos en este tema los movimientos tridimensionales de cuerpos rígidos.

### 1. Rotación alrededor de un eje fijo

Hibbeler (2010) afirma: Dado un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje o punto fijo, la distancia  $r$  del punto de una partícula localizada en el cuerpo es la *misma* para una posición cualquiera del cuerpo. Por tanto, la trayectoria del movimiento de la partícula queda en la *superficie de una esfera* de radio  $r$  con su centro en el punto fijo. Como el movimiento a lo largo de esta trayectoria ocurre solo con una serie de rotaciones realizadas durante un intervalo finito, primero nos familiarizaremos con algunas de las propiedades de los desplazamientos rotacionales (p. 549).

**Teorema de Euler.** Este establece que dos rotaciones "componentes" alrededor de ejes diferentes que pasan por un punto equivalen a una sola rotación resultante alrededor de un eje que pasa por el punto. Si se aplican más de dos rotaciones, pueden combinarse en pares y cada par puede reducirse y combinarse aún más en una rotación (Hibbeler, 2010, p. 550).

**Rotaciones finitas.** Si las rotaciones componentes utilizadas en el teorema de Euler son *finitas*, es importante mantener el orden en el que se aplican. Para demostrar esto, considere las dos rotaciones finitas aplicadas al bloque en la figura 79a. Cada rotación tiene una magnitud de  $90^\circ$  y una dirección definida por la regla de la mano derecha, como se indica con la flecha. La posición final del bloque se muestra a la derecha. Cuando estas dos rotaciones se aplican en el orden como se muestra en la figura 79b, la posición final del bloque *no* es la misma que la de la figura 79a (Hibbeler, 2010, p. 550).

“Debido a que las rotaciones finitas no cumplen la ley conmutativa de la adición ( $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$ ), no pueden definirse como vectores” (Hibbeler, 2010, p. 550).

Si se hubieran utilizado rotaciones más pequeñas, aunque finitas, para ilustrar este punto, por ejemplo  $12^\circ$  en lugar de  $90^\circ$ , la posición final del bloque después de cada combinación de rotaciones también sería diferente; pero, en este caso, la diferencia es solo una cantidad mínima.

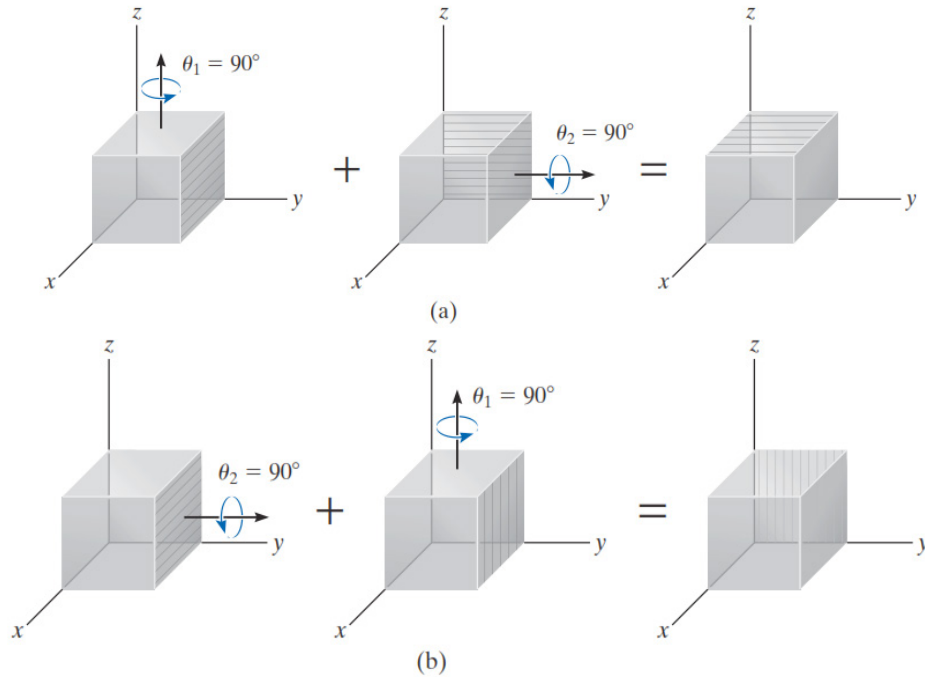


Figura 79: Rotaciones finitas alrededor de un eje fijo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 550.

**Rotaciones infinitesimales.** Cuando se definen los movimientos angulares de un cuerpo sometido a movimiento tridimensional, solo se considerarán las rotaciones que son *infinitesimalmente pequeñas*. Tales rotaciones pueden definirse como vectores, puesto que pueden sumarse de manera vectorial de cualquier modo (Hibbeler, 2010, p. 551).

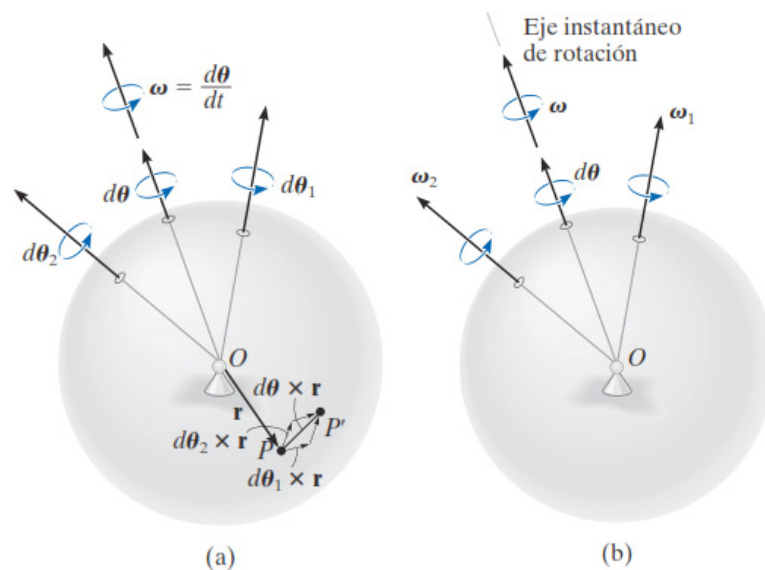


Figura 80: Rotaciones infinitesimales. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 551.

## 2. Velocidad angular y aceleración angular

**Velocidad angular.** Cuando el cuerpo se somete a una rotación angular  $d$  alrededor de un punto fijo, la velocidad angular del cuerpo se define por medio de la derivada con respecto al tiempo,

$$\omega = \dot{\theta} \quad (1)$$

La línea que especifica la dirección de  $\omega$ , la cual es colineal con  $\alpha$  se conoce como *eje de rotación instantáneo* (figura 80b). En general, este eje cambia de dirección durante cada instante (Hibbeler, 2010, p. 551).

Como  $\omega$  es una cantidad vectorial, también lo es, y se desprende de la adición vectorial que si el cuerpo se somete a dos componentes de movimientos angulares:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \quad \text{y} \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2$$

la velocidad angular resultante es:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

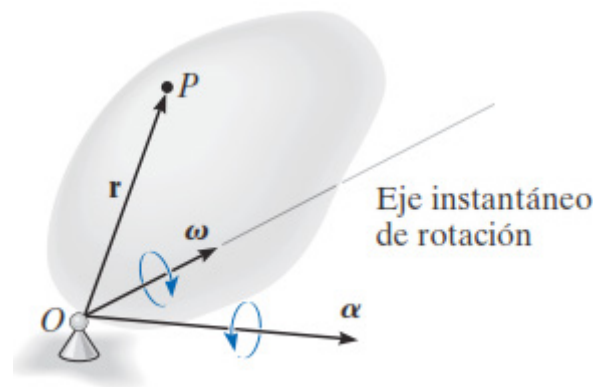


Figura 81: Rotación alrededor de un eje. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 551.

**Aceleración angular.** La aceleración angular del cuerpo se determina con la derivada con respecto al tiempo de su velocidad angular; es decir,

$$\alpha = \dot{\omega} \quad (2)$$

En el caso de un movimiento con respecto a un punto fijo, debe responder del cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de  $\omega$ ; así que, en general, la dirección de  $\alpha$  no es a lo largo del eje instantáneo de rotación (figura 81) (Hibbeler, 2010, p. 551).

Conforme cambia la dirección del eje instantáneo de rotación (o la línea de acción de  $\omega$ ), en el espacio, el lugar geométrico del eje genera un *cono espacial* fijo (figura 82).

“Para el caso que se cumple que el cambio de dirección de este eje se considera con respecto al cuerpo que gira, el lugar geométrico del eje genera un *cono corporal*” (Hibbeler, 2010, p. 551).

En un instante dado, estos conos se encuentran a lo largo del eje instantáneo de rotación, y cuando el cuerpo está en movimiento, el cono corporal parece que rueda sobre la superficie interna o sobre la superficie externa del cono espacial fijo. Dado que la cabeza del vector  $\omega$  describe las trayectorias

definidas por los extremos abiertos de los conos, entonces debe actuar tangente a estas trayectorias en cualquier instante dado, puesto que el cambio con respecto al tiempo de  $\omega$  es igual  $\alpha$  (figura 82).

**Velocidad.** Con la velocidad especificada, la velocidad de cualquier punto en un cuerpo que gira alrededor de un punto fijo se determina con los mismos métodos utilizados para un cuerpo que gira alrededor de un eje o punto fijo. Por consiguiente, de acuerdo con el producto vectorial (Hibbeler, 2010, p. 552)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3)$$

Donde  $\mathbf{r}$  define la posición del punto medida con respecto al punto fijo  $O$  (figura 81).

**Aceleración.** Para este caso, si en un instante dado  $\omega$  y  $\alpha$  son conocidas, la aceleración de un punto se obtiene con la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 3, la cual resulta (Hibbeler, 2010, p. 552):

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (4)$$

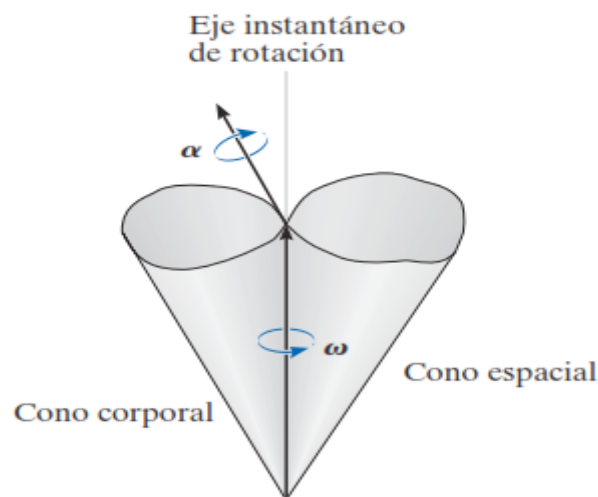


Figura 82: Eje instantáneo de rotación. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 552.

### 3. Movimiento general

En la figura 83 se muestra un cuerpo sometido a movimiento general en tres dimensiones con una velocidad angular  $\omega$  y una aceleración angular  $\alpha$ . Si se sabe que el punto  $A$  tiene un movimiento de  $\mathbf{v}_A$  y  $\mathbf{a}_A$ , el movimiento de cualquier otro punto  $B$  se determina por medio de un análisis de movimiento relativo. En esta sección se utilizará un sistema de coordenadas trasladante para definir el movimiento relativo, y en la siguiente sección se considerará una referencia que es tanto rotatoria como trasladante (Hibbeler, 2010, p. 557).

Si el origen del sistema de coordenadas trasladante  $x, y, z$  ( $\Omega = 0$ ) se encuentra en el "punto base"  $A$ , entonces, en el instante mostrado, el movimiento del cuerpo puede considerarse como la suma de una traslación instantánea del cuerpo que tiene un movimiento de  $\mathbf{v}_A$  y  $\mathbf{a}_A$ , y una rotación respecto de un eje instantáneo que pasa por tal punto  $A$ . (Hibbeler, 2010, p. 557).

Considerando que el cuerpo es rígido, el movimiento del punto B medido por un observador localizado en A es por consiguiente el mismo que *la rotación del cuerpo respecto de un punto fijo*. Tal movimiento relativo sucede con respecto al eje instantáneo de rotación y se define como  $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ , que llamaremos ecuación 1 y  $\mathbf{a}_{B/A} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ , denominada ecuación 2 (Hibbeler, 2010, p. 557).

Para ejes trasladantes, los movimientos relativos se relacionan con los movimientos absolutos por medio de  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$  y  $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$  ecuaciones de velocidad y aceleración, de modo que la velocidad y aceleración absolutas del punto B se determinan con las ecuaciones:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

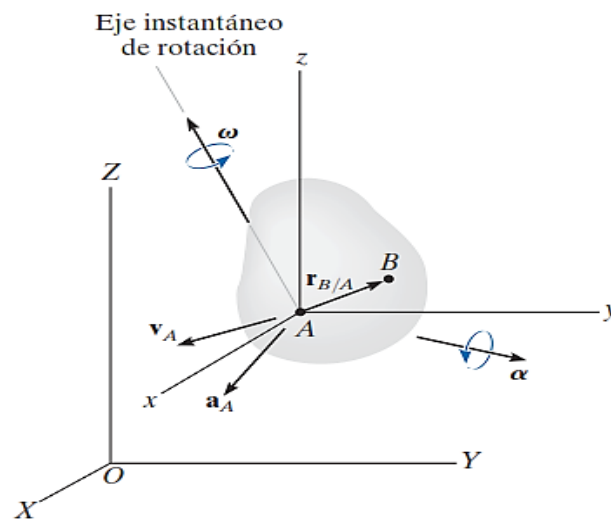


Figura 83: Movimiento de rotación. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 557.



**Actividad n.º 13**

Resuelva ejercicios y problemas de rotación alrededor de un eje.

1. La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si el collarín A tiene una velocidad  $v_A = 15$  pies/s en el instante que se muestra, determine la velocidad del collarín B. Suponga que la velocidad angular es perpendicular a la barra.
2. La barra AB está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica. Si el collarín A tiene una velocidad de  $\mathbf{v}_A = (15\mathbf{i})$  pies/s y una aceleración de  $\mathbf{a}_A = (2\mathbf{i})$  pies/s<sup>2</sup> en el instante que se muestra, determine la aceleración del collarín B. Suponga que la velocidad y aceleración angulares son perpendiculares a la barra.

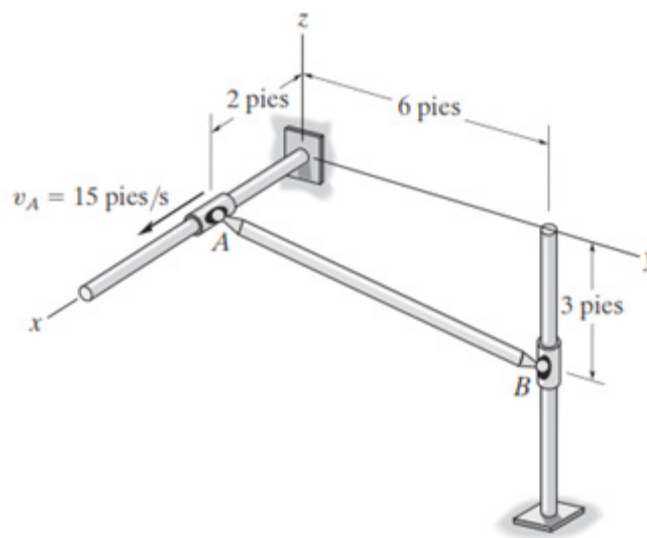
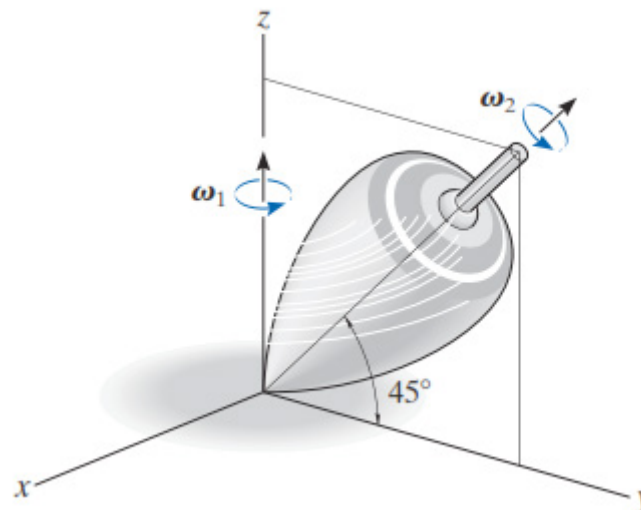
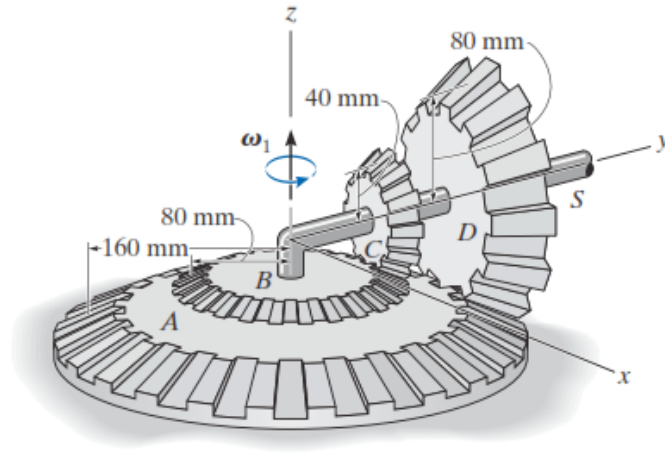


Figura para problemas 1 y 2.

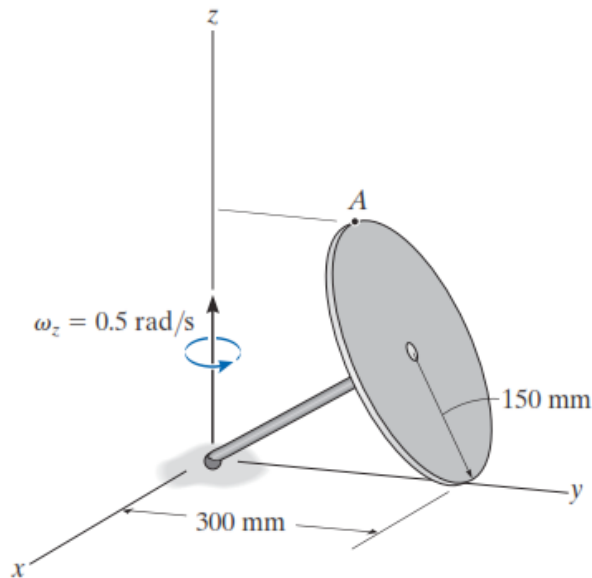
3. El movimiento del trompo es tal que en el instante que se muestra gira alrededor del eje z a  $\omega_1 = 0.6$  rad/s, mientras que gira alrededor de su propio eje a  $\omega_2 = 8$  rad/s. Determine la velocidad y aceleración angulares del trompo en este instante. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



4. Los engranes A y B están fijos mientras que los engranes C y D giran libremente alrededor del eje S. Si este gira alrededor del eje z a una velocidad constante de  $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$ , determine la velocidad y aceleración angulares del engrane C.



5. El disco gira respecto del eje z a  $\omega_z = 0.5 \text{ rad/s}$  sin deslizarse sobre el plano horizontal. Si en este mismo instante  $\omega_z$  se incrementa a  $\omega_z = 0.3 \text{ rad/s}^2$ , determine la velocidad y aceleración del punto A en el disco.
- 6.



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

**Cinética tridimensional de cuerpos rígidos**

**Tema n.º 2**



Figura 84: Para diseñar juegos mecánicos se requiere de un análisis de su movimiento tridimensional. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 578.

Para hacer el estudio del análisis cinético del movimiento tridimensional, en ciertas situaciones será necesario calcular seis cantidades inerciales. Estos factores o términos, llamados momentos y productos de inercia, describen en una forma particular la distribución de la masa de un cuerpo con respecto a un sistema de coordenadas proporcionado con su orientación y punto de origen, ambos especificados.

**1. Cantidad de movimiento angular**

Para analizar la cantidad de movimiento angular usaremos el cuerpo rígido que se muestra en la figura 85, el cual tiene una masa  $m$  y centro de gravedad ubicado en  $G$ . A ello se adjunta el sistema de coordenadas  $X, Y, Z$ , que representa un marco de referencia inercial, y, por tanto, sus ejes están fijos o se trasladan a una velocidad constante. De lo anterior, la cantidad de movimiento angular medida a partir de esta referencia se determinará con respecto al punto arbitrario  $A$ . Los vectores de posición  $\mathbf{r}_A$  y  $\rho_A$  se trazan del origen de las coordenadas al punto  $A$  y de este a la partícula  $i$ -ésima del cuerpo (Hibbeler, 2010, p. 589).

Si la masa de la partícula es  $m_i$ , la cantidad de movimiento angular con respecto al punto  $A$  es:

$$(\mathbf{H}_A)_i = \rho_A \times m_i \mathbf{v}_i$$

donde  $\mathbf{v}_i$  representa la velocidad de la partícula medida a partir del sistema de coordenadas  $X, Y, Z$  (Hibbeler, 2010, p. 589). Si la velocidad angular del cuerpo es  $\omega$  en el instante considerado,  $\mathbf{v}_i$  puede relacionarse con la velocidad de  $A$  aplicando la ecuación 1; es decir,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \omega \times \rho_A$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_A)_i &= \rho_A \times m_i(\mathbf{v}_A + \omega \times \rho_A) \\ &= (\rho_A m_i) \times \mathbf{v}_A + \rho_A \times (\omega \times \rho_A) m_i \end{aligned}$$

La suma de los momentos de todas las partículas del cuerpo requiere una integración (Hibbeler, 2010, p. 589). Puesto que  $m_i dm$ , tenemos:

$$\mathbf{H}_A = \left( \int_m \boldsymbol{\rho}_A dm \right) \times \mathbf{v}_A + \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm \quad (2)$$

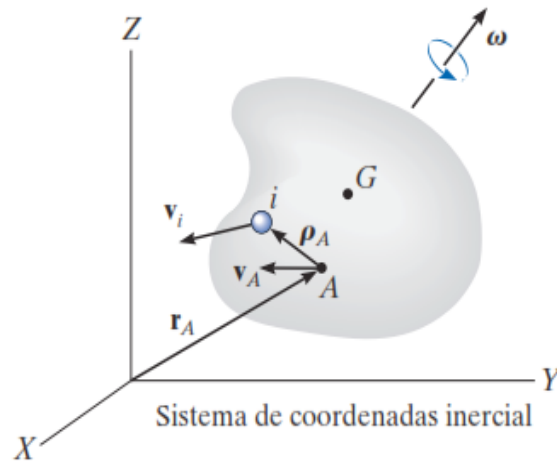


Figura 85: Movimiento angular. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 589.

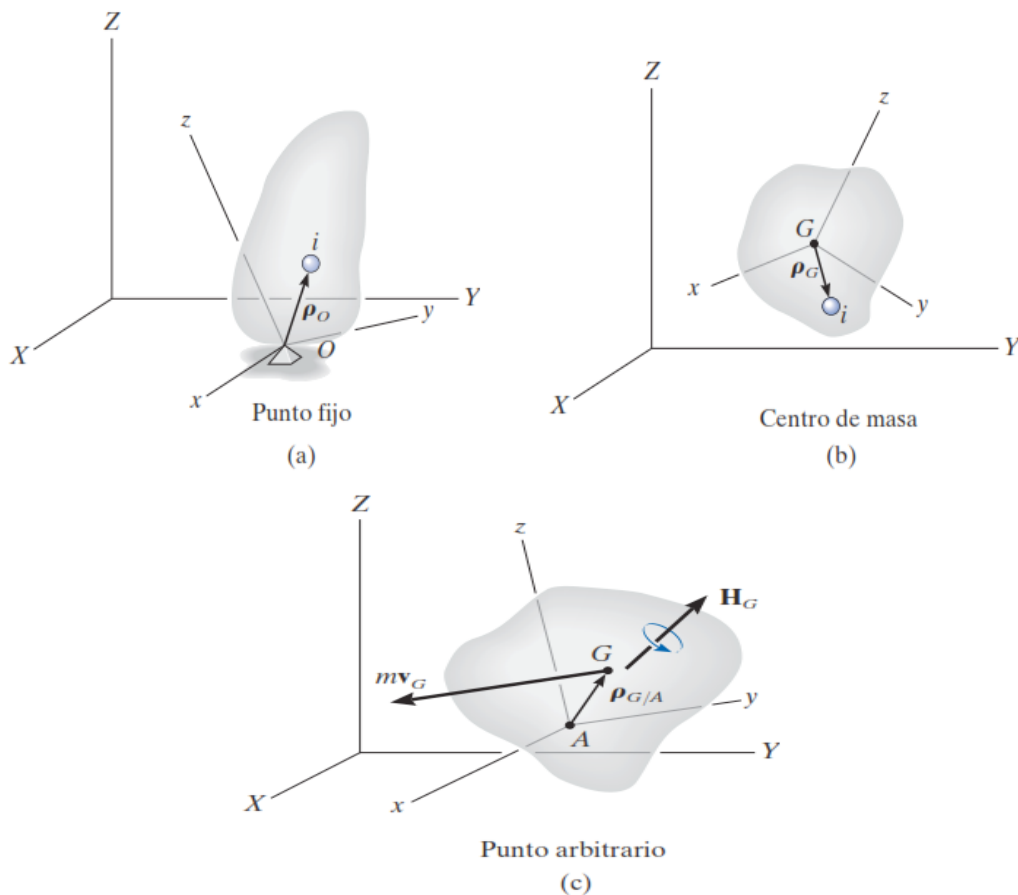


Figura 86: Movimiento angular respecto a un punto fijo. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 590.

Punto fijo O. Si A llega a ser un punto fijo O en el cuerpo (figura 86a), entonces  $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$  y la ecuación 2 se simplifica a:

$$\mathbf{H}_O = \int_m \boldsymbol{\rho}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_O) dm \quad (3)$$

Centro de masa G. Si A está en el centro de masa G del cuerpo (figura 86b), entonces:

$$\int_m \boldsymbol{\rho}_A dm = \mathbf{0} \text{ y}$$

y

$$\mathbf{H}_G = \int_m \boldsymbol{\rho}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_G) dm \quad (4)$$

Punto arbitrario A. En general, A puede ser un punto diferente de O o G (figura 86c), en cuyo caso, la ecuación 2 puede (Hibbeler, 2010, p. 590), sin embargo, simplificarse a la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G \quad (5)$$

Aquí la cantidad de movimiento angular se compone de dos partes, que son el momento de la cantidad de movimiento lineal  $m\mathbf{v}_G$  del cuerpo con respecto al punto A sumado (vectorialmente) a la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_G$ . También puede utilizarse la ecuación 5 para determinar la cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a un punto fijo O. Los resultados, desde luego, serán los mismos que se determinaron con la ecuación 3 más conveniente (Hibbeler, 2010, p. 590).

**Componentes rectangulares de H.** Para un uso práctico de las ecuaciones 3 a 5, la cantidad de movimiento angular debe expresarse en función de sus componentes escalares. Para este propósito, es conveniente seleccionar un segundo sistema de ejes x, y, z con una orientación arbitraria con respecto a los ejes X, Y, Z (figura 86), y para una formulación general, observe que las ecuaciones 3 y 4 son de la forma:

$$\mathbf{H} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm$$

Al igualar las componentes **i**, **j**, **k** respectivas y reconocer que las integrales representan los momentos y productos de inercia, obtenemos (Hibbeler, 2010, p. 591):

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (6)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse aún más si los ejes de coordenadas x, y, z están orientados de modo que lleguen a ser los ejes de inercia principales del cuerpo en el punto.

$$H_x = I_x\omega_x \quad H_y = I_y\omega_y \quad H_z = I_z\omega_z \quad (7)$$

## 2. Energía cinética

“Para aplicar el principio de trabajo y energía en la solución de problemas que implican el movimiento general de un cuerpo rígido, primero es necesario formular expresiones para la energía cinética del cuerpo” (Hibbeler, 2010, p. 592). Para esto, considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 87.

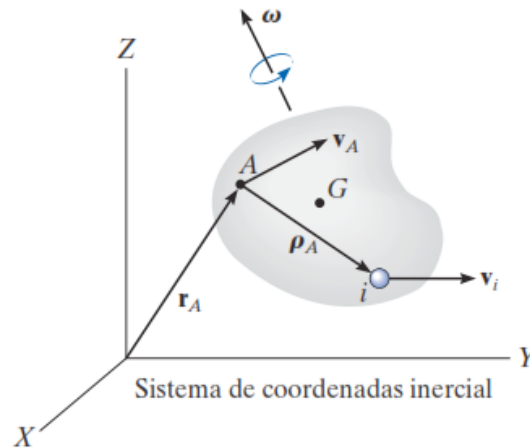


Figura 87: Movimiento general de un cuerpo rígido. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 592.

Este cuerpo rígido, mostrado en la figura anterior, tiene una masa  $m$  y centro de masa en  $G$ . La energía cinética de la partícula  $i$ -ésima del cuerpo tiene una masa  $m_i$  con velocidad  $\mathbf{v}_i$ , medidas con respecto al marco de referencia inercial  $X, Y, Z$ , lo cual se representa en la ecuación siguiente:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \quad (8)$$

Punto fijo  $O$ . Si  $A$  es un punto fijo  $O$  en el cuerpo (figura 86a), entonces  $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ , y con la ecuación 1 podemos expresar la ecuación 8 como

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O$$

Si los ejes  $x, y, z$  representan los ejes principales de inercia del cuerpo, entonces de lo anterior se deduce la siguiente ecuación válida para la velocidad (Hibbeler, 2010, p. 592):

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

Y

$$\mathbf{H}_O = I_x \omega_x \mathbf{i} + I_y \omega_y \mathbf{j} + I_z \omega_z \mathbf{k}$$

Al sustituir en la ecuación anterior y realizar las operaciones de producto vectorial se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \quad (9)$$

**“Principio de trabajo y energía.** Una vez formulada la energía cinética de un cuerpo, puede aplicarse el principio de trabajo y energía para resolver problemas cinéticos que implican fuerza, velocidad y desplazamiento” (Hibbeler, 2010, p. 593). En este caso, solo puede escribirse una ecuación escalar para cada cuerpo, a saber:

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2 \quad (10)$$

### 3. Ecuaciones de movimiento

Ahora que ya conocemos las técnicas utilizadas para describir tanto las propiedades inerciales como la cantidad de movimiento de un cuerpo, podemos escribir las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo en sus formas más útiles, como se aplicarán en los problemas (Hibbeler, 2010, p. 600).

**Ecuaciones de movimiento de traslación.** El movimiento de traslación de un cuerpo se define en función de la aceleración de su centro de masa, la cual se mide con respecto a una referencia  $X, Y, Z$  inercial (Hibbeler, 2010, p. 600). La ecuación de movimiento de traslación del cuerpo se escribe en forma vectorial como:

$$\Sigma \mathbf{F} = m \mathbf{a}_G \quad (11)$$

o por las tres ecuaciones escalares

$$\begin{cases} \Sigma F_x = m(a_G)_x \\ \Sigma F_y = m(a_G)_y \\ \Sigma F_z = m(a_G)_z \end{cases} \quad (12)$$

#### **Ecuaciones de movimiento de rotación**

Tal como se desarrolló anteriormente, la ecuación obtenida es:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (13)$$

la cual establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema de partículas (contenidas en un cuerpo rígido) con respecto a un punto fijo  $O$ , es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular total del cuerpo con respecto al punto  $O$  (Hibbeler, 2010, p. 600). Cuando los momentos de las fuerzas externas que actúan en las partículas se suman con respecto al *centro de masa*  $G$  del sistema, de nuevo obtenemos la misma forma simple de la ecuación 14, que relaciona la suma de momentos con la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_G$  (Hibbeler, 2010, p. 600). No obstante, la cantidad de movimiento angular de la partícula  $i$ -ésima con respecto a este marco es:

$$(\mathbf{H}_i)_G = \mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{v}_{i/G}$$

donde  $\mathbf{r}_{i/G}$  y  $\mathbf{v}_{i/G}$  representan la posición y velocidad de la partícula  $i$ -ésima con respecto a  $G$ . Al calcular la derivada con respecto al tiempo tenemos, según Hibbeler (2010, p. 600):

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = \dot{\mathbf{r}}_{i/G} \times m_i \mathbf{v}_{i/G} + \mathbf{r}_{i/G} \times m_i \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$$

Pueden escribirse expresiones similares para las demás partículas del cuerpo. Cuando sumamos los resultados, obtenemos:

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma (\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_{i/G})$$

Aquí, es el cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular del cuerpo calculado con respecto al punto  $G$ . La aceleración relativa de la partícula  $i$ -ésima se define por medio de la ecuación  $\mathbf{a}_{i/G} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_G$ , donde  $\mathbf{a}_i$  y  $\mathbf{a}_G$ , representan, respectivamente, las aceleraciones de la partícula  $i$ -ésima y el punto  $G$  medidas con respecto al *marco de referencia inercial* (Hibbeler, 2010, p. 601). Si sustituimos y expandimos, mediante la propiedad distributiva del producto vectorial, obtenemos:

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_i) - (\Sigma m_i \mathbf{r}_{i/G}) \times \mathbf{a}_G$$

Por definición del centro de masa, la suma  $(\Sigma m_i r_{i/G}) = (\Sigma m_i) \bar{r}$  es igual a cero, puesto que el vector de posición  $\mathbf{r}$  con respecto a  $G$  es cero. Por tanto, el último término de la ecuación anterior es cero. Con la ecuación de movimiento, el producto  $m_i \mathbf{a}_i$  puede ser reemplazado por la fuerza externa resultante  $\mathbf{F}_i$  que actúa en la partícula  $i$ -ésima. Al denotar  $\Sigma M_G = \Sigma(r_{i/G} \times F_i)$ , el resultado final se escribe como (Hibbeler, 2010, p. 601):

$$\Sigma M_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (14)$$



**Actividad n.º 14**

Resuelva ejercicios y problemas sobre cinética de partículas.

1. La barra AB de 4 lb está conectada al disco y collarín por medio de articulaciones de rótula. Si el disco tiene una velocidad constante de 2 rad/s, determine la energía cinética de la barra cuando está en la posición que se muestra. Suponga que la dirección de la velocidad angular de la barra es perpendicular a su eje.
2. Determine la cantidad de movimiento angular de la barra AB que se ilustra en el problema 1-2 con respecto a su centro de masa en el instante mostrado. Suponga que la dirección de su velocidad angular es perpendicular a su eje.

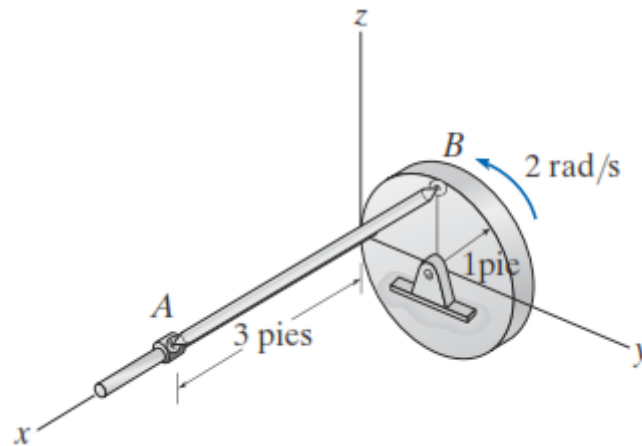
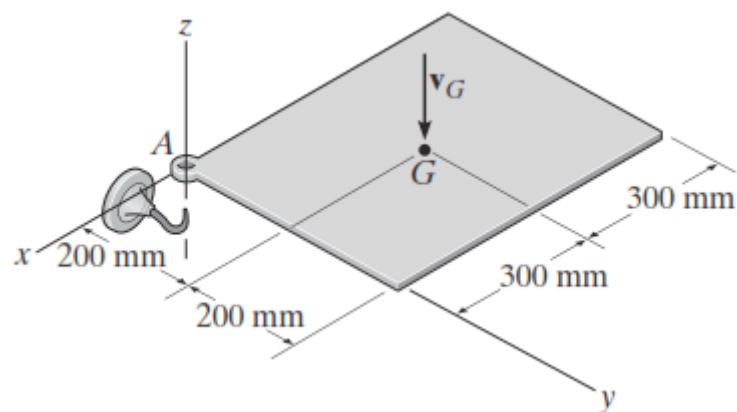


Figura de problemas 1 y 2

3. La placa uniforme delgada tiene una masa de 15 kg. Justo antes de que la esquina A choque con el gancho, está en descenso a una velocidad de  $\mathbf{v}_G = (-5\mathbf{k})$  m/s sin movimiento de rotación. Determine la velocidad angular inmediatamente después de que la esquina A choca con el gancho sin rebotar.



4. El disco de 5 kg está conectado a la barra delgada de 3 kg. Si el ensamble se conecta a una articulación de rótula esférica en A y se aplica el momento de par de 5 N.m, determine la velocidad angular de la barra con respecto al eje z después de que el ensamble ha realizado dos revoluciones alrededor del eje z a partir del reposo. El disco rueda sin deslizarse.
5. El disco de 5 kg está conectado a la barra delgada de 3 kg. Si el ensamble se conecta a una articulación de rótula esférica en A y el momento de par de 5 N.m le imparte una velocidad angular alrededor del eje z de  $w^z = 2$  rad/s, determine la magnitud de la cantidad de movimiento angular del ensamble con respecto a A.

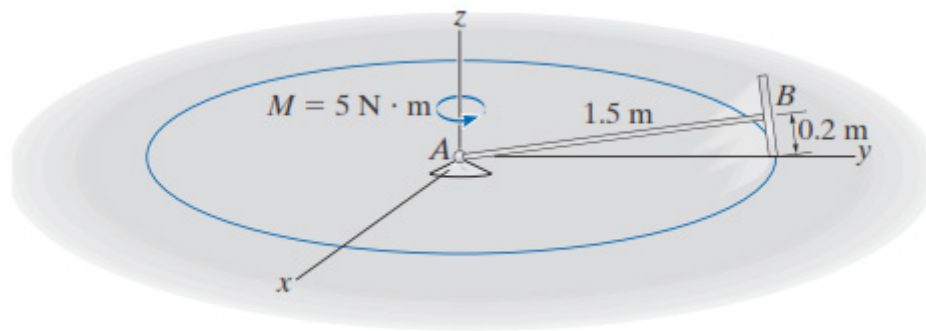


Fig. Problemas 4 y 5

Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Vibraciones mecánicas: Vibración libre no amortiguada

### Tema n.º 3



Figura 88: Las suspensiones de resorte inducen vibraciones en vehículos en movimiento, como en este carro de ferrocarril. Para predecir su comportamiento debemos analizar las vibraciones. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 630.

Para iniciar el presente tema, explicaremos el concepto de vibración y fundamentaremos los tipos de vibraciones según el tipo de fuerzas que producen la vibración. Las vibraciones se clasifican en libres y en forzadas y además si están o no amortiguadas. Para el análisis real de las vibraciones veremos la influencia de la fricción en el tipo de vibración que genera, además de otros factores que analizaremos en detalle.

### 1. Vibración libre no amortiguada

Se denomina *vibración* al movimiento periódico de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados desplazados de una posición de equilibrio. En general, existen dos tipos de vibración: libre y forzada (Hibbeler, 2010, p. 631).

La **vibración libre** ocurre cuando el movimiento se mantiene por fuerzas gravitacionales o elásticas, como el movimiento oscilatorio de un péndulo o la vibración de una barra elástica (Hibbeler, 2010, p. 631).

La **vibración forzada** es provocada por una fuerza externa periódica o intermitente aplicada al sistema (Hibbeler, 2010, p. 631).

Ambos tipos de vibración pueden ser amortiguados o no amortiguados. Las vibraciones *no amortiguadas* pueden continuar por tiempo indefinido porque los efectos de fricción se omiten en el análisis. Como en realidad tanto las fuerzas de fricción internas como las externas están presentes, el movimiento de todos los cuerpos vibratorios de hecho es *amortiguado* (Hibbeler, 2010, p. 631).

Se sabe que el tipo más simple de movimiento vibratorio es la vibración libre no amortiguada representada por el modelo de bloque y resorte que se ilustra en la figura 89a. El movimiento de vibración ocurre cuando el bloque se suelta desde una posición desplazada  $x$  de modo que el resorte tira del bloque. Este alcanzará una velocidad de modo que dejará su posición de equilibrio cuando  $x = 0$ , y siempre que la superficie de soporte esté lisa, el bloque oscilará de un lado a otro (Hibbeler, 2010, p. 632).

La trayectoria del movimiento dependiente del tiempo del bloque puede determinarse con la ecuación de movimiento al bloque cuando está en la posición desplazada  $x$ . El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 89b (Hibbeler, 2010, p. 632).

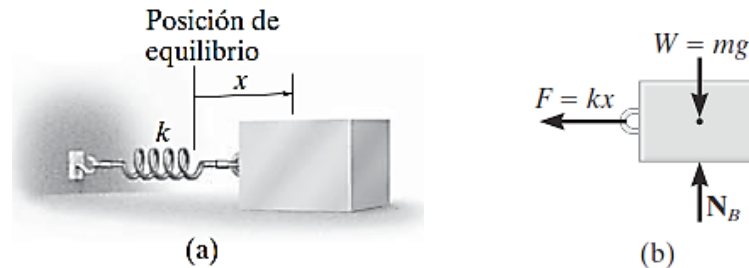


Figura 89: (a) Movimiento libre, (b) DCL del bloque. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 632.

La fuerza de restauración elástica  $F = kx$  siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio, mientras que se supone que la aceleración  $a$  actúa en la dirección del desplazamiento positivo.

$$\text{Como } a = d^2x/dt^2 = \ddot{x},$$

tenemos

$$\Rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad -kx = m\ddot{x}$$

Observe que la aceleración es proporcional al desplazamiento del bloque. El movimiento descrito de esta manera se llama *movimiento armónico simple*. Al reordenar los términos en una "forma estándar" obtenemos

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1)$$

La constante  $n$  se llama *frecuencia natural*, y en este caso:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

La ecuación 1 también puede obtenerse si consideramos que el bloque está colgado de modo que el desplazamiento  $y$  se mide a partir de la *posición de equilibrio* del bloque (figura 90a) (Hibbeler, 2010, p. 633). Cuando el bloque está en equilibrio, el resorte ejerce una fuerza dirigida hacia arriba de  $F = W = mg$  en el bloque.

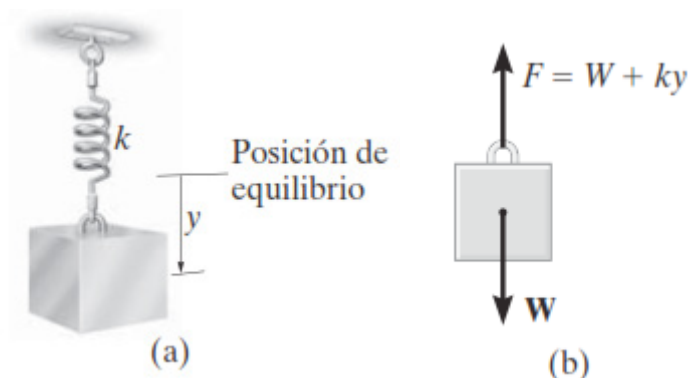


Figura 90: (a) Movimiento libre con posición de equilibrio, (b) DCL del bloque. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 632.

Por tanto, cuando el bloque es desplazado una distancia  $y$  hacia abajo de esta posición inicial, la magnitud de la fuerza del resorte es  $F = W = ky$  (figura 90b). Al aplicar la ecuación de movimiento, obtenemos a continuación:

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \quad -W - ky + W = m\ddot{y}$$

O bien

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

Ecuación que es de la misma forma que la ecuación 1, con  $n$  es definida por la ecuación 2. Se verifica que la ecuación 1 es una ecuación diferencial lineal de segundo grado homogénea con coeficientes constantes (Hibbeler, 2010, p. 633). Se puede demostrar, por medio de los métodos de ecuaciones diferenciales, que la solución general es:

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \operatorname{cos} \omega_n t \quad (3)$$

Aquí  $A$  y  $B$  representan dos constantes de integración. La velocidad y aceleración del bloque se determinan luego por el cálculo de derivadas con respecto al tiempo sucesivas, de lo cual resulta la expresión:

$$v = \dot{x} = A\omega_n \operatorname{cos} \omega_n t - B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t \quad (4)$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n^2 \operatorname{sen} \omega_n t - B\omega_n^2 \operatorname{cos} \omega_n t \quad (5)$$

Al reemplazar las ecuaciones 3 y 5 en la ecuación 1, la ecuación diferencial se satisface, lo que demuestra que la ecuación 3 sí es la solución de la ecuación 1. Las constantes de integración en la ecuación 3 por lo general se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, asumiendo que el bloque de la figura 90a se ha desplazado una distancia  $x_1$  a la derecha de su posición de equilibrio y que eso le imprime una velocidad inicial (positiva)  $v_1$  dirigida a la derecha (Hibbeler, 2010, p. 633). Al sustituir  $x = x_1$  cuando  $t = 0$  en la ecuación 3 se obtiene  $B = x_1$ . Y como  $v = v_1$  cuando  $t = 0$ , utilizando la ecuación 4 obtenemos  $A = v_1/\omega_n$ . Si estos valores se reemplazan en la ecuación 3, la ecuación que describe el movimiento se hace:

$$x = \frac{v_1}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + x_1 \operatorname{cos} \omega_n t \quad (6)$$

La ecuación 3 también puede expresarse en función de un movimiento senoidal simple. Para demostrar esto, sea

$$A = C \operatorname{cos} \phi \quad (7)$$

Y

$$B = C \operatorname{sen} \phi \quad (8)$$

donde  $C$  y  $\phi$  son constantes nuevas que se determinarán en lugar de  $A$  y  $B$ . Al sustituir en la ecuación 3 obtenemos

$$x = C \operatorname{cos} \phi \operatorname{sen} \omega_n t + C \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \omega_n t$$

Y como

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi + \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi,$$

entonces

$$x = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (9)$$

Si esta ecuación se traza sobre un eje  $x$  versus  $\omega_n t$ , se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 91. El desplazamiento máximo del bloque a partir de su posición de equilibrio se define como la *amplitud* de vibración. De acuerdo con la figura o la ecuación 9, la amplitud es  $C$  (Hibbeler, 2010, p. 634). El ángulo  $\phi$  se llama *ángulo de fase* puesto que representa la cantidad en la que la curva está desplazada del origen cuando  $t = 0$ . Podemos relacionar estas dos constantes con  $A$  y  $B$  por medio de las ecuaciones 7 y 8. Al elevar al cuadrado y sumar estas dos ecuaciones, la amplitud es

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (10)$$

Si la ecuación 8 se divide entre la ecuación 7, el ángulo de fase es  $\phi$ , por tanto

$$\phi = \tan^{-1} \frac{B}{A} \quad (11)$$

Observe que la curva seno, ecuación 9, completa un ciclo en el tiempo  $t = \tau$  (tau) cuando

$$\omega_n \tau = 2\pi$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (12)$$

Este intervalo de tiempo se llama *periodo* (figura 91). Con la ecuación 2, el periodo también puede representarse de la forma siguiente:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (13)$$

Por último, la *frecuencia*  $f$  se define como el número de ciclos completados por unidad de tiempo, lo cual es el recíproco del periodo; es decir:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (14)$$

O también:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15)$$

La frecuencia se expresa en ciclos/s (Hibbeler, 2010, p. 634). Esta relación de unidades se llama *hertz* (Hz), donde  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = 2\pi \text{ rad/s}$ .

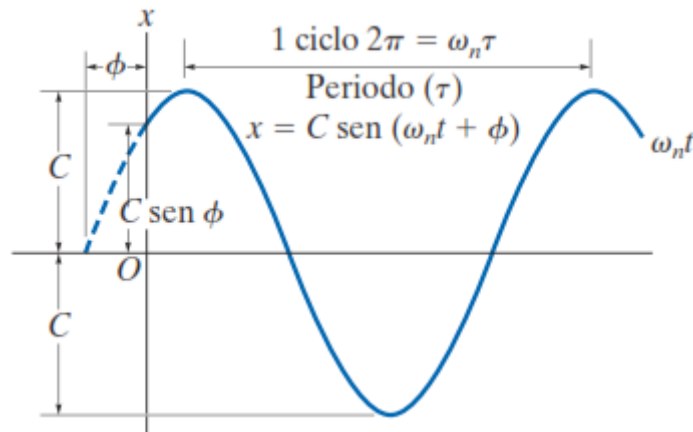


Figura 91: Gráfica del movimiento oscilatorio. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 634.

## 2. Métodos de energía

El movimiento armónico simple de un cuerpo, estudiado en la sección anterior, se debe sólo a fuerzas de restauración gravitacional y elásticas que actúan en el cuerpo. Como estas fuerzas son conservadoras, también es posible utilizar la ecuación de conservación de la energía para obtener la frecuencia natural de oscilación o periodo de vibración del cuerpo (Hibbeler, 2010, p. 645). Para demostrar cómo se hace esto, considere de nueva cuenta el modelo de bloque y resorte. Cuando el bloque se desplaza una distancia  $x$  de la posición de equilibrio, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

y la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

Como la energía se conserva, es necesario que

$$T + V = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \quad (17)$$

La ecuación diferencial que describe el movimiento acelerado del bloque se obtiene por diferenciación de esta ecuación con respecto al tiempo; es decir,

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

Como la velocidad no siempre es cero en un sistema sometido a vibración,

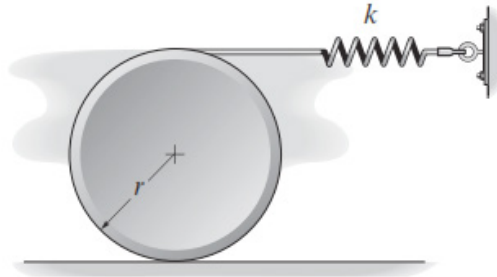
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

Finalmente, si la ecuación de conservación de la energía se escribe para un sistema de cuerpos conectados, la frecuencia natural o la ecuación de movimiento también se determina mediante diferenciación con respecto al tiempo. De esta forma no es necesario desmembrar el sistema para mostrar las fuerzas internas porque no realizan trabajo (Hibbeler, 2010, p. 645).

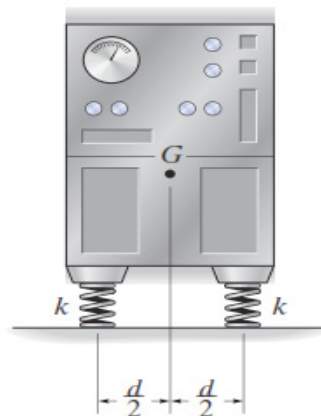
### Actividad n.º 15

Resolver los problemas de vibraciones mecánicas libres sin amortiguamiento.

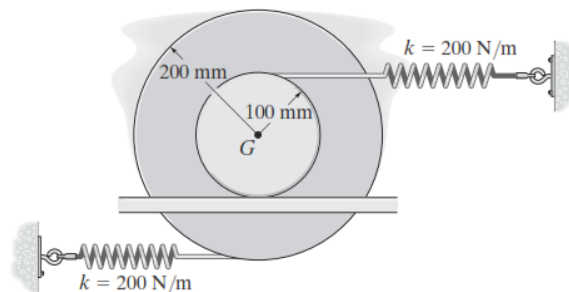
1. Determine el periodo natural de vibración del disco de masa  $m$  y radio  $r$ . Suponga que no se desliza sobre la superficie de contacto cuando oscila.



2. La máquina tiene una masa  $m$  y está sostenida de manera uniforme por cuatro resortes, cada uno con rigidez  $k$ . Determine el periodo natural de vibración vertical.

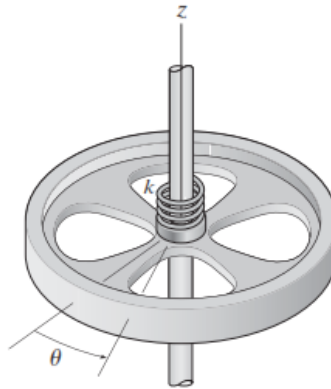


3. Determine la ecuación diferencial de movimiento del carrete de 15 kg. Suponga que no se desliza en la superficie de contacto cuando oscila. El radio de giro del carrete con respecto a su centro de masa es  $k_G = 125$  mm. Originalmente los resortes no están alargados.

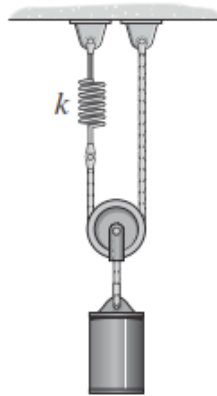


4. Un resorte torsional de rigidez  $k$  está conectado a una rueda de masa  $M$ . Si la rueda experimenta un pequeño desplazamiento angular de  $\theta$  respecto del eje  $z$ , determine el periodo natural de oscilación. El radio de giro de la rueda con respecto al eje  $z$  es  $k_z$ .





5. Determine la frecuencia de oscilación del cilindro de masa  $m$  cuando se tira de él hacia abajo y luego se deja libre. Ignore la masa de la polea.



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.
- Beer, F., Johnston, E. & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Vibraciones mecánicas: Vibraciones amortiguadas

### Tema n.º 4



Figura 92: El amortiguador de viento dentro del Taipei 101 da protección contra tifones y terremotos al reducir los efectos del viento y las vibraciones sobre el edificio. Fuente: Beer *et al.*, 2010, p. 1215.

Para iniciar el presente tema, debemos diferenciar vibraciones forzadas de vibraciones libres. Las vibraciones forzadas tienen una gran aplicación en el campo de la ingeniería, tanto en mecanismos como en máquinas. Fundamentalmente, las vibraciones forzadas no amortiguadas resultan importantes para el estudio de las vibraciones forzadas en general. A continuación, haremos un estudio de las vibraciones forzadas, tan presentes en aplicaciones importantes de la ingeniería.

### 1. Vibración forzada no amortiguada

Actualmente se verifica que la vibración forzada no amortiguada es uno de los tipos más importantes de movimiento vibratorio en el campo aplicativo de la ingeniería. Sus principios pueden utilizarse para describir el movimiento de muchos tipos de máquinas y estructuras móviles.

**Fuerza periódica.** Para fundamentar esta se tiene un bloque y resorte que se muestran en la figura 93a, los que representan un modelo conveniente para representar las características vibratorias de un sistema sometido a una fuerza periódica  $F = F_0 \text{sen } \omega_0 t$ . Esta fuerza tiene una amplitud de  $F_0$  y una frecuencia forzada  $\omega_0$ . El DCL del bloque desplazado una distancia  $x$  se muestra en la figura 93b (Hibbeler, 2010, p. 651). Luego, aplicamos la ecuación de movimiento y tenemos:

$$\pm \sum F_x = ma_x; \quad F_0 \text{sen } \omega_0 t - kx = m\ddot{x}$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\text{sen } \omega_0 t \quad (18)$$

Se comprueba que esta anterior es una ecuación diferencial de segundo grado no homogénea (Hibbeler, 2010, p. 651). La solución general consta de una solución complementaria,  $x_c$ , más una solución particular,  $x_p$ .

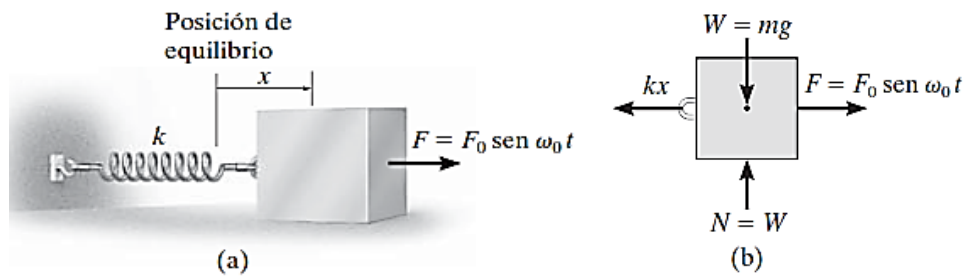


Figura 93: Gráfica del movimiento oscilatorio. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 651.

Es importante tener en cuenta que la *solución complementaria* se determina al establecer el término del lado derecho de la ecuación 18 igual a cero y resolver la ecuación homogénea que resulte de tal proceso (Hibbeler, 2010, p. 651). La ecuación 19 define la solución, es decir:

$$x_c = C \text{ sen}(\omega_n t + \phi) \quad (19)$$

siendo  $n$ , la frecuencia natural.

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

Como el movimiento es periódico, la *solución particular* de la ecuación 18 puede determinarse si se supone una solución de la forma:

$$x_p = X \text{ sen } \omega_0 t \quad (20)$$

donde  $X$  es una constante (Hibbeler, 2010, p. 651). Si calculamos la segunda derivada con respecto al tiempo y sustituimos en la ecuación 18 obtenemos

$$-X\omega_0^2 \text{ sen } \omega_0 t + \frac{k}{m}(X \text{ sen } \omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega_0 t$$

Al factorizar  $\text{sen } \omega_0 t$  y resolver para  $X$  obtenemos:

$$X = \frac{F_0/m}{(k/m) - \omega_0^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \quad (21)$$

Sustituimos en la ecuación 20, y obtenemos la solución particular:

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \text{ sen } \omega_0 t \quad (22)$$

También resulta muy importante la *solución general*, la cual es, por consiguiente, la suma de dos funciones seno de frecuencias diferentes (Hibbeler, 2010, p. 652).

$$x = x_c + x_p = C \text{ sen}(\omega_n t + \phi) + \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \text{ sen } \omega_0 t \quad (23)$$

## 2. Vibración libre viscosa amortiguada

Para una mejor comprensión, debemos aclarar que el análisis de vibración considerado hasta ahora no ha incluido los efectos del rozamiento o amortiguación en el sistema y, por tanto, las soluciones obtenidas no corresponden del todo al movimiento real. Sabiendo que todas las vibraciones se detienen con el tiempo, en el análisis deberán incluirse las fuerzas de amortiguación (Hibbeler, 2010, p. 655).

Usualmente, la amortiguación se debe a la resistencia creada por la sustancia, agua, aceite o aire, en la cual vibre el sistema en estudio. Siempre que el cuerpo se mueva lentamente a través de esta sustancia, la resistencia al movimiento es directamente proporcional a la rapidez del cuerpo (Hibbeler, 2010, p. 655). La clase de fuerza desarrollada en estas condiciones se llama *fuerza de amortiguación viscosa*. La magnitud de esta fuerza se expresa por medio de una ecuación de la forma:

$$F = c\dot{x}$$

siendo que la constante  $c$  se llama *coeficiente de amortiguación viscosa* y sus unidades son N.s/m o lb.s/pie.

Dado que el movimiento vibratorio de un cuerpo o sistema que tiene amortiguación viscosa se puede caracterizar por el bloque y el resorte que se ilustran en la figura 94a (Hibbeler, 2010, p. 655), el efecto de amortiguación lo proporciona el *amortiguador* conectado al bloque del lado derecho. La amortiguación ocurre cuando el pistón  $P$  se mueve a la derecha o izquierda dentro del cilindro cerrado. El cilindro contiene un fluido, y el movimiento del pistón se retarda puesto que el líquido debe fluir alrededor de, o a través de, un pequeño orificio en el pistón. Se supone que el amortiguador tiene un coeficiente de amortiguación viscosa  $c$  (Hibbeler, 2010, p. 655).

Si el bloque se desplaza una distancia  $x$  de su posición de equilibrio, el diagrama de cuerpo libre resultante se muestra en la figura 94b. Tanto la fuerza del resorte como la fuerza de amortiguación se oponen al movimiento de avance del bloque, de modo que al aplicar la ecuación de movimiento se obtiene

$$\pm \Sigma F_x = ma_x; \quad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

O, de la siguiente forma también es posible:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (27)$$

La solución de esta ecuación diferencial homogénea lineal de segundo grado tiene la forma

$$x = e^{\lambda t}$$

siendo  $e$  la base del logaritmo natural,  $(\lambda)$  una constante (Hibbeler, 2010, p. 655). El valor de  $\lambda$  se obtiene al sustituir esta solución y sus derivadas con respecto al tiempo en la ecuación 27, lo cual da

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$

Como  $x = e^{\lambda t}$  nunca puede ser cero, una solución es posible siempre que:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Por consiguiente, según la fórmula cuadrática, los dos valores de  $\lambda$  son

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (28)$$

Por tanto, la solución general de la ecuación 27 es una combinación de exponenciales que implica estas dos raíces. Existen tres posibles combinaciones de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , las cuales se deben considerar.

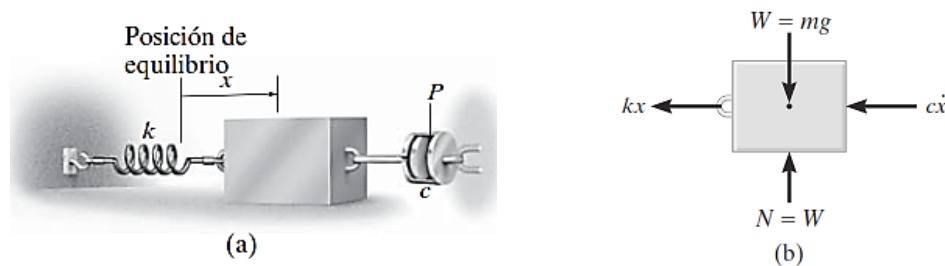


Figura 94: Gráfica de vibración libre viscosa amortiguada. Fuente: Hibbeler, 2010, p. 656.

Previamente al análisis de estas combinaciones, sin embargo, definiremos el coeficiente de amortiguación crítica  $c_c$  como el valor de  $c$  que hace que el radical presente en las ecuaciones 28 sea igual a cero; es decir,

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

o

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (29)$$

### 3. Vibración forzada viscosa amortiguada

Para esta última parte veremos el caso más general de movimiento vibratorio de un solo grado de libertad, movimiento que ocurre cuando el sistema incluye los efectos de movimiento forzado y amortiguación inducida. La comprensión de este tipo particular de vibración es de valor práctico cuando se aplica a sistemas con características de amortiguación significativas (Hibbeler, 2010, p. 658).

Al conectar un amortiguador al bloque y el resorte que se muestran en la figura 94a, la ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \text{sen } \omega_0 t \quad (30)$$

Para este sistema, de bloque y resorte que experimenten desplazamiento periódico de sus soportes, puede escribirse una ecuación similar (figura 94b), la cual incluya los efectos de amortiguación. En ese caso, sin embargo, a  $F_0$  la reemplaza  $k=0$ . Como la ecuación 30 es no homogénea, la solución general es la suma de una solución complementaria  $x_c$  y una solución particular  $x_p$ . La solución complementaria,  $x_c$ , se determina al igualar a cero el lado derecho de la ecuación 30 y resolver la ecuación homogénea, la cual es equivalente a la ecuación 27 (Hibbeler, 2010, p. 658). Se pueden deducir, por tanto, ecuaciones que dan la solución, según los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Como todos los sistemas se

someten a fricción, en ese caso esta solución se amortiguará con el tiempo. Solo permanecerá la solución particular que describe la *vibración de estado continuo* del sistema (Hibbeler, 2010, p. 658). Como la función forzadora es armónica, el movimiento de estado continuo también será armónico. Por consiguiente, la solución particular será de la forma:

$$X_P = X' \text{sen}(\omega_0 t - \phi') \quad (31)$$

Las constantes  $X'$  y  $\phi'$  se determinan al calcular la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo y sustituirlas en la ecuación 30, la cual después de simplificarla resulta

$$-X' m \omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t - \phi') + X' c \omega_0 \cos(\omega_0 t - \phi') + X' k \text{sen}(\omega_0 t - \phi') = F_0 \text{sen} \omega_0 t$$

Dado que esta ecuación es válida todo el tiempo, los coeficientes constantes se obtienen con:

$$\omega_0 t - \phi' = 0 \quad \text{y} \quad \omega_0 t - \hat{\phi}' = \pi/2$$

De lo cual la ecuación anterior se escribe como:

$$\begin{aligned} X' c \omega_0 &= F_0 \text{sen} \phi' \\ -X' m \omega_0^2 + X' k &= F_0 \cos \phi' \end{aligned}$$

La amplitud se obtiene al elevar al cuadrado estas ecuaciones, sumar los resultados y utilizar la identidad (Hibbeler, 2010, p. 658):

$$\text{sen}^2 \phi' + \cos^2 \phi' = 1$$

lo cual da

$$X' = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_0^2)^2 + c^2\omega_0^2}} \quad (37)$$

Si dividimos la primera ecuación entre la segunda, obtenemos:

$$\phi' = \tan^{-1} \left[ \frac{c\omega_0}{k - m\omega_0^2} \right] \quad (38)$$

Como

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad \text{y} \quad c_c = 2m\omega_n,$$

entonces las ecuaciones anteriores también pueden escribirse como

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}} \quad (39)$$

$$\phi' = \tan^{-1} \left[ \frac{2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \right]$$

El ángulo  $\phi'$  representa la diferencia de fase entre la fuerza aplicada y la vibración de estado continuo resultante del sistema amortiguado (Hibbeler, 2010, p. 659).

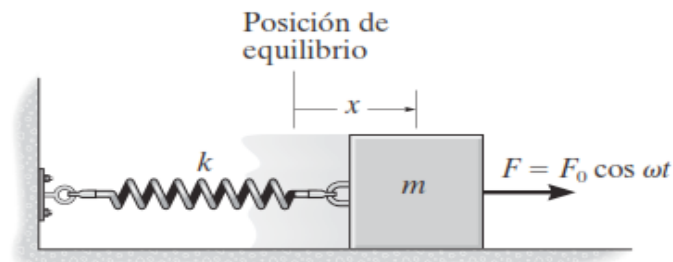
## Actividad n.º 16

Resolver los problemas de vibraciones mecánicas forzadas.

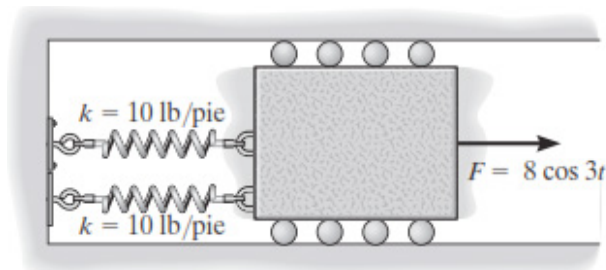
1. Si el modelo de bloque y resorte se somete a la fuerza periódica  $F = F_0 \cos \omega t$ , demuestre que la ecuación diferencial de movimiento es

$$\ddot{x} + (k/m)x = (F_0/m) \cos \omega t.$$

donde  $x$  se mide con respecto a la posición de equilibrio del bloque. ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?



2. Un bloque de 0.8 kg de masa se suspende de un resorte cuya rigidez es de 120 N/m. Si un amortiguador genera una fuerza de amortiguación de 2.5 N cuando la velocidad del bloque es de 0.2 m/s, determine el periodo de vibración libre. El bloque de 30 lb está unido a dos resortes con rigidez de 10 lb/pie. Una fuerza periódica  $F = (8 \cos 3t)$  lb, donde  $t$  está en segundos, se aplica al bloque. Determine la rapidez máxima del bloque después de que las fuerzas de fricción hagan que cesen las vibraciones libres.



3. El ventilador tiene una masa de 25 kg y está fijo en el extremo de una viga horizontal de masa insignificante. Las aspas del ventilador están montadas excéntricamente en la flecha de modo que equivalen a una masa desbalanceada de 3.5 kg localizada a 100 mm del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga es de 50 mm a consecuencia del peso del ventilador, determine la velocidad angular de sus aspas a la cual ocurrirá la resonancia.
4. ¿Cuál será la amplitud de la vibración de estado continuo del ventilador del problema anterior si la velocidad angular de sus aspas es de 18 rad/s?

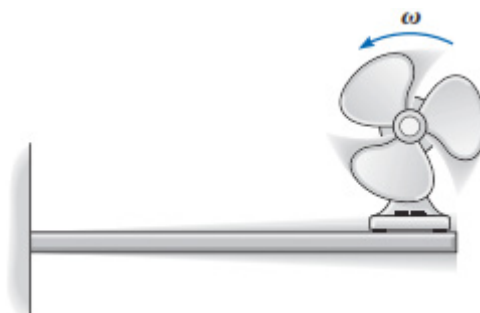


Figura para problemas 4 y 5.



Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

### **Lectura seleccionada n.º 4**

“Vibraciones mecánicas, qué son y cómo se evalúa el riesgo”.

Rikondo Iriondo, M. (2007). Vibraciones mecánicas, qué son y cómo se evalúa el riesgo. *DYNA*, 82(9), 499-506.



## Glosario de la Unidad IV

---

### A

#### **Aceleración angular**

La aceleración angular del cuerpo se determina con la derivada con respecto al tiempo de su velocidad angular (Hibbeler, 2010, p. 551).

### R

#### **Rotaciones infinitesimales**

Cuando se definen los movimientos angulares de un cuerpo sometido a movimiento tridimensional, solo se considerarán las rotaciones que son infinitesimalmente pequeñas. Tales rotaciones pueden definirse como vectores, puesto que pueden sumarse de manera vectorial de cualquier modo (Hibbeler, 2010, p. 551).

#### **Rotación respecto a un eje fijo**

Es el movimiento de un cuerpo rígido en el que los puntos sobre un eje fijo están en reposo (Hibbeler, 2010, p. 551).

### T

#### **Teorema de Euler**

Este establece que dos rotaciones "componentes" alrededor de ejes diferentes que pasan por un punto equivalen a una sola rotación resultante alrededor de un eje que pasa por el punto (Hibbeler, 2010, p. 550).

### V

#### **Velocidad angular**

Cuando el cuerpo se someta a una rotación angular  $d$  alrededor de un punto fijo, la velocidad angular del cuerpo se define por medio de la derivada con respecto al tiempo (Hibbeler, 2010, p. 551).

#### **Vibración**

Movimiento periódico de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados desplazados de una posición de equilibrio (Hibbeler, 2010, p. 631).

#### **Vibración forzada**

La vibración forzada es provocada por una fuerza externa periódica o intermitente aplicada al sistema (Hibbeler, 2010, p. 631).

#### **Vibración libre**

La vibración libre ocurre cuando el movimiento se mantiene por fuerzas gravitacionales o elásticas, como el movimiento oscilatorio de un péndulo o la vibración de una barra elástica (Hibbeler, 2010, p. 631).



## **Bibliografía de la Unidad IV**

---

Beer, F., Johnston, E, & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (10a ed.). México: McGraw-Hill.

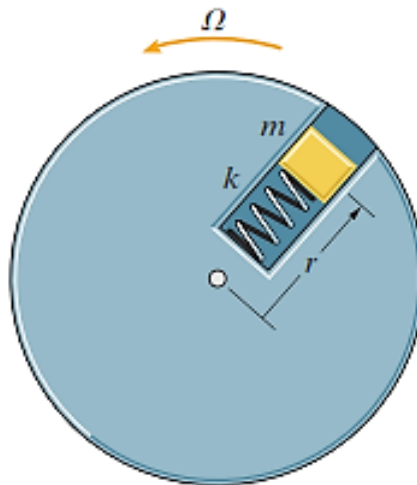
Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

Meriam, J.L., & Kraige, L.G. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (7a ed.). España: Editorial Reverté.

### Problemas resueltos

1. El disco mostrado gira en el plano horizontal con velocidad angular constante  $\omega = 12 \text{ rad/s}$ . La masa  $m = 2 \text{ kg}$  se desliza en una ranura lisa del disco y está unida a un resorte con constante  $k = 860 \text{ N/m}$ . La posición radial de la masa cuando el resorte no está estirado es  $r = 0.2 \text{ m}$ .
- Determine la posición de "equilibrio" de la masa; es decir, el valor de  $r$  en que la masa permanecerá en reposo respecto al centro del disco.
  - ¿Cuál es la frecuencia de vibración de la masa respecto a su posición de equilibrio?

*Estrategia:* Aplique la segunda ley de Newton a la masa en términos de coordenadas polares.



### Resolución:

Usando coordenadas polares

$$\Sigma F_r : -k(r - r_0) = m(\ddot{r} - r\Omega^2) \Rightarrow \ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)r = \frac{k}{m}r_0$$

- a) Para la posición de equilibrio

$$r_{eq} = \frac{\frac{k}{m}r_0}{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \frac{kr_0}{k - m\Omega^2} = \frac{(860 \text{ N/m})(0.2 \text{ m})}{(860 \text{ N/m}) - (2 \text{ kg})(12 \text{ rad/s})^2} = 0.301 \text{ m.}$$

$$\boxed{r_{eq} = 0.301 \text{ m.}}$$

- b) La frecuencia de vibración

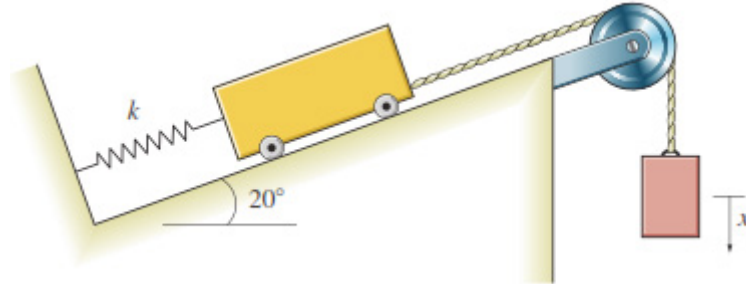
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \sqrt{\frac{860 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}} - (12 \text{ rad/s})^2} = 16.9 \text{ rad/s, } f = \frac{\omega}{2\pi} = 2.69 \text{ Hz.}$$

$$\boxed{f = 2.69 \text{ Hz.}}$$

2. La constante del resorte mostrado es  $k = 800 \text{ N/m}$ , y el resorte está sin estirar cuando  $x = 0$ . La masa de cada objeto es de  $30 \text{ kg}$ . La superficie inclinada es lisa. El radio de la polea es de  $120 \text{ mm}$  y su

momento de inercia  $I = 0.03 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . En  $t = 0$ ,  $x = 0$  y  $dx/dt = 1 \text{ m/s}$ .

- a) Determine la frecuencia y el periodo de la vibración resultante.  
b) ¿Cuál es el valor de  $x$  en  $t = 4 \text{ s}$ ?



**Resolución:**

$$T_1 - mg \sin \theta - kx = m\ddot{x}, \quad T_2 - mg = -m\ddot{x}, \quad (T_2 - T_1)r = I \frac{\ddot{x}}{r}.$$

Se deduce:

$$\left(2m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x} + kx = mg(1 - \sin \theta),$$

$$\ddot{x} + \frac{kr^2}{2mr^2 + I} x = \frac{mgr^2}{2mr^2 + I} (1 - \sin \theta), \quad \ddot{x} + (3.59 \text{ rad/s})^2 x = 3.12 \text{ m/s}^2.$$

a) La frecuencia natural:

$$\omega = 3.59 \text{ rad/s}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.571 \text{ Hz}, \quad \tau = \frac{1}{f} = 1.75 \text{ s}.$$

$f = 0.571 \text{ s},$ $\tau = 1.75 \text{ s}.$
--

b) La solución a la ecuación diferencial es:

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t + 0.242 \text{ m}, \quad v = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t.$$

Para las condiciones iniciales:

$$x(t = 0) = B + 0.242 \text{ m} = 0 \Rightarrow B = -0.242 \text{ m},$$

$$v(t = 0) = A\omega = (1 \text{ m/s}) \Rightarrow A = \frac{1 \text{ m/s}}{3.59 \text{ rad/s}} = 0.279 \text{ m}.$$

Finalmente:

$$x = (0.242 \text{ m})(1 - \cos[359 \text{ rad/st}]) + (0.279 \text{ m}) \sin [359 \text{ rad/s } t]$$

Para  $t = 4 \text{ s}$

$x = 0.567 \text{ m}.$
------------------------

Nota: Los ejercicios han sido tomados del texto siguiente:

- Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.



## Autoevaluación n.º 4

Resolver los problemas siguientes y verificar sus respuestas con el anexo al final del capítulo.

1. Se tiene la masa  $m = 4$  kg. El resorte está sin estirar cuando  $x = 0$ . Se mide el periodo de vibración de la masa y se determina que es de 0.5 s. La masa se desplaza hasta la posición  $x = 0.1$  m y se suelta desde el reposo en  $t = 0$ . Determine su posición en  $t = 0.4$  s.



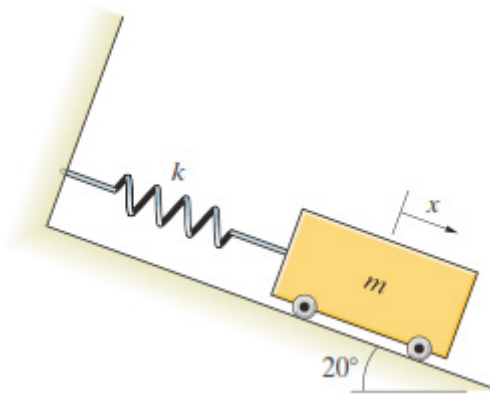
- a) 0.0309 m
  - b) 0.0301 m
  - c) 0.0509 m
  - d) 0.0675 m
  - e) 0.0213 m
2. Se tiene la masa  $m = 4$  kg. El resorte está sin estirar cuando  $x = 0$ . Se mide la frecuencia de vibración de la masa y se determina que es de 6 Hz. La masa se desplaza hasta la posición  $x = 0.1$  m y se le da una velocidad  $dx/dt = 5$  m/s en  $t = 0$ . Determine la amplitud de la vibración resultante.



- a) 0.030 m
- b) 0.166 m
- c) 0.050 m
- d) 0.067 m
- e) 0.021 m

### Enunciado de los problemas 3 y 4

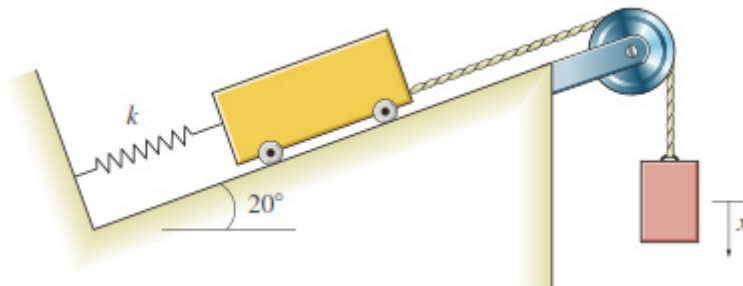
En la figura, la masa  $m = 4$  kg y la constante del resorte es  $k = 64$  N/m. Para la vibración del sistema oscilatorio masa-resorte respecto de su posición de equilibrio, determine a) la frecuencia en Hz y b) el periodo.



3. Determine la frecuencia en Hz.
  - a) 0.530 Hz
  - b) 0.538 Hz
  - c) 0.637 Hz
  - d) 0.667 Hz
  - e) 0.876 Hz
4. Determine el período.
  - a) 1.45 s
  - b) 1.34 s
  - c) 1.49 s
  - d) 1.57 s
  - e) 1.67 s

**Enunciado de los problemas 5 y 6**

La constante del resorte mostrado es  $k = 800 \text{ N/m}$  y el resorte está sin estirar cuando  $x = 0$ . La masa de cada objeto es de  $30 \text{ kg}$ . La superficie inclinada es lisa. Ignore la masa de la polea. El sistema se suelta desde el reposo con  $x = 0$ .



5. Determine la frecuencia de la vibración resultante.
  - a) 0.530 Hz
  - b) 0.538 Hz
  - c) 0.637 Hz
  - d) 0.667 Hz
  - e) 0.581 Hz
6. ¿Cuál es el valor de  $x$  en  $t = 4 \text{ s}$ ?
  - a) 0.351 m
  - b) 0.166 m
  - c) 0.050 m
  - d) 0.067 m

e) 0.021 m

**Enunciado de los problemas 7 y 8**

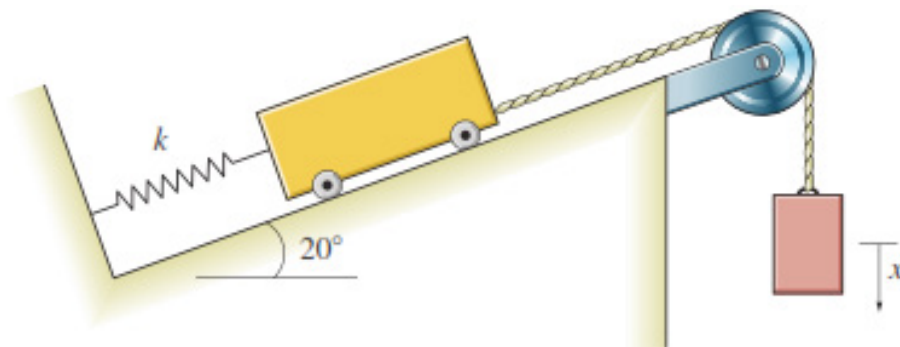
La constante del resorte mostrado es  $k = 800 \text{ N/m}$ , y el resorte está sin estirar cuando  $x = 0$ . La masa de cada objeto es de 30 kg. La superficie inclinada es lisa. El radio de la polea es de 120 mm y su momento de inercia  $I = 0.03 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . En  $t = 0$ ,  $x = 0$  y  $dx/dt = 1 \text{ m/s}$ .

7. Determine la frecuencia de la vibración resultante.

- a) 0.530 Hz
- b) 0.571 Hz
- c) 0.637 Hz
- d) 0.667 Hz
- e) 0.876 Hz

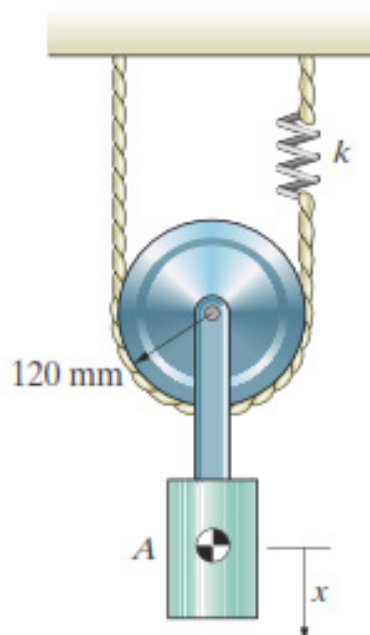
8. ¿Cuál es el valor de  $x$  en  $t = 4 \text{ s}$ ?

- a) 0.351 m
- b) 0.166 m
- c) 0.567 m
- d) 0.067 m
- e) 0.021 m



**Enunciado de los problemas 9 y 10**

La masa del objeto suspendido A es de 4 kg. La masa de la polea es de 2 kg y su momento de inercia es de  $0.018 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ . La constante del resorte es  $k = 150 \text{ N/m}$ . Para la vibración del sistema respecto a su posición de equilibrio,





9. Determine la frecuencia en Hz

- a) 0.530 Hz
- b) 0.571 Hz
- c) 0.637 Hz
- d) 1.450 Hz
- e) 1.876 Hz

10. Determine el periodo.

- a) 1.45 s
- b) 1.34 s
- c) 1.49 s
- d) 0.57 s
- e) 0.69 s

*Nota: Los ejercicios han sido tomados de los textos siguientes:*

Bedford, F., & Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería: Dinámica* (5a ed.). México: Pearson Educación.

Beer, F., Johnston, E., & Cornwell, P. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica* (9a ed.). México: McGraw-Hill.

Hibbeler, R. (2010). *Mecánica para Ingenieros. Dinámica* (12a ed.). México: Pearson Educación.

## Anexos

---

  
UNIDAD I

Número	Respuestas
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
6	a
7	b
8	c
9	d
10	e

  
UNIDAD II

Número	Respuestas
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
6	a
7	b
8	c
9	d
10	e

UNIDAD III

Número	Respuestas
1	a
2	b
3	d
4	c
5	e
6	a
7	b
8	c
9	d
10	e

UNIDAD IV

Número	Respuestas
1	a
2	b
3	d
4	c
5	e
6	a
7	b
8	c
9	d
10	e



**Huancayo**

Av. San Carlos 1980 - Huancayo

Teléfono: 064 - 481430

**Lima**

Jr. Junín 355 - Miraflores

Teléfono: 01 - 2132760

**Cusco**

Av. Collasuyo S/N Urb. Manuel Prado - Cusco

Teléfono: 084 - 480070

**Arequipa**

Calle Alfonso Ugarte 607 - Yanahuara

Oficina administrativa: Calle San José 308 2° piso - Cercado

Teléfono: 054 - 412030