Universidad Continental

PRECÁLCULO II

Guía de Trabajo

Visión

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

Misión

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental
Material publicado con fines de estudio
Código: ASUC 00673

Presentación

Al presentar este trabajo "Guías de Aprendizaje", se hace con el sano propósito de contribuir decididamente en el proceso del aprendizaje de la asignatura de Precálculo II.

Esta recopilación de ejercicios está destinada para los alumnos del segundo periodo de la Universidad Continental, cada ejercicio está seleccionado, permitiendo preparar y capacitar debidamente al estudiante para seguir sus estudios superiores.

La formación básica de los estudios impartidos en la universidad, en el área de Ciencias y Formación General, son muy importantes y la asignatura de Pre Cálculo II juega un rol fundamental, debido a los avances de los temas que comprende esta materia y que están relacionados a las especialidades que brinda la Universidad.

Es así como estas guías de aprendizaje se han dividido en cuatro unidades y que son:
Unidad I: Vectores
Unidad II: Geometría analítica
Unidad III: Coordenadas polares y matrices
Unidad IV: Determinantes, sistema de ecuaciones lineales, sucesiones y series.

Por último, quisiéramos agradecer a los colegas que han hecho posible esta recopilación de ejercicios.

Los autores

ÍNDICE

Pág.

VISIÓN 2
MISIÓN 2
PRESENTACIÓN 3
ÍNDICE 4

UNIDAD I: VECTORES

SEMANA 01

Evaluación diagnóstica. Presentación de la asignatura……………………………………………..8

Vectores en plano: definición, elementos, notación y clasificación………………………….8

Operaciones con vectores: adición y multiplicación por un escalar……………….……..11

SEMANA 02

Operaciones con vectores: vector unitario. Producto escalar y ángulo entre vectores…………………………………………………………………………………………….......16

Aplicaciones de vectores en el plano………………………………………………………………18

Práctica Calificada N° 01

SEMANA 03

Vectores en el espacio. Definición, elementos, notación y clasificación…………….……..23

Producto vectorial y triple producto escalar…………………………………….……….…..26

SEMANA 04

Aplicaciones de vectores en el espacio………………..……………………………………..……29

Repaso de vectores…………………………………………………..……………………………...33

PRUEBA DE DESARROLLO N° 01

UNIDAD II: GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEMANA 05

Geometría analítica: punto – operaciones básicas……………………………….………..…..….39

La recta: inclinación de una recta, pendiente, ecuaciones, rectas paralelas y perpendiculares……………………………………………………………………….…………….40

Ángulo entre dos rectas, distancia de un punto a la recta, mediatriz, Intersección entre dos rectas………………………………………………………………………………………..……..…..…42

SEMANA 06

La Circunferencia: definición, elementos y ecuaciones (ordinaria y general)……..…..…..44

Posición relativa de circunferencias y rectas…..…………………………………………..…..45

Recta y circunferencia – **Práctica Calificada N° 02**………………………………..………..……46

SEMANA 07

La parábola: definición, elementos y ecuaciones (ordinaria y general)……………….………48

Aplicaciones: puente, arcos, parabólicas y otros. ……………………………………………..50

Repaso: vectores, rectas, circunferencia y parábola……………………………….…………55

SEMANA 08

PRUEBA DE DESARROLLO N° 02.

La Elipse: definición, elementos y ecuaciones (ordinaria y general)…………..…………….…58

Aplicaciones de la elipse. Repaso para el examen parcial……………………………….…..60

SEMANA 09

EVALUACIÓN PARCIAL

RESOLUCIÓN DE LA EVALUACIÓN PARCIAL. La hipérbola: definición, elementos y ecuaciones (ordinaria y general)…………………………………………………………………………...….…65

Ejercicios de la hipérbola……………………………………………………………………………..68

UNIDAD III: MATRICES

SEMANA 10

Coordenadas polares: ubicación de puntos. Conversión de puntos…………………………70

Conversión de ecuaciones polares…………………………………………………………......73

Gráficas polares especiales……………………………………………………………..……77

SEMANA 11

Ecuación polar de las cónicas…………………………………………………………..…….78

Cálculo de la ecuación polar de las cónicas conociendo sus elementos………………..….78

Repaso de coordenadas polares – **Práctica Calificada N° 03**…………………………………..79

SEMANA 12

Matrices: definición, elementos, orden y clasificación. operaciones de matrices…………81

Aplicación de matrices: problemas. ……………………………………………………….……...83

Matriz Inversa. operaciones elementales en filas y Gauss-Jordan (3x3)……………..............…88

SEMANA 13

Matriz inversa. método de la adjunta (2x2 y 3x3)…………………………………………..……..…90

Repaso: hipérbola, coordenadas polares y matrices………………………..………………….....92

PRUEBA DE DESARROLLO N° 03.

UNIDAD IV: DETERMINANTES, SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES, SUCESIONES Y SERIES

SEMANA 14

Determinantes: definición, propiedades. ejercicios…………………………………………….…….. 97

Determinantes: métodos de cálculo. cofactores y Gauss Jordan (4x4)……………………..… 98

Sistema de ecuaciones lineales de 3 variables por el método de Cramer……………..……..100

SEMANA 15

Sistema de ecuaciones lineales de "n" variables por el método de Gauss Jordan……..…..102

Aplicación de sistema de ecuaciones lineales: problemas…………………..…………………...104

Determinantes y sistema de ecuaciones lineales – **Práctica Calificada N° 04**……………......107

SEMANA 16

PRUEBA DE DESARROLLO N° 04.

Sucesiones………………………………………………………………………………………..…..110

Series…………………………………………………………..…………………………..………114

SEMANA 17

Repaso para el examen final.

EVALUACIÓN FINAL.

BIBLIOGRAFÍA FINAL………………..……………………………………………………………...119

Unidad I

VECTORES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas utilizando las propiedades de los vectores en el plano y en el espacio referidos a diferentes situaciones.

SEMANA N° 01

VECTORES EN R^2

SESIÓN N° 01

TEMA: PRESENTACIÓN DE ASIGNATURA Y EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA.

SESIÓN N° 02

TEMA: VECTORES EN R^2. DEFINICIÓN, ELEMENTOS, NOTACIÓN, VECTOR UNITARIO Y CLASIFICACIÓN.

1. Grafica el vector $\vec{V}$ que tiene por coordenadas al punto inicial (3; -7) y al punto final (-2; 5). Determina el vector V, su magnitud y dirección.
2. Grafica el vector $\vec{V}$ que tiene por coordenadas al punto inicial (-3; 7) y al punto final (2; -5). Determina el vector V, su magnitud y dirección.
3. Grafica el vector $\vec{V}$ que tiene por coordenadas al punto inicial (0; -5) y al punto final (1; 3). Determina el vector V, su magnitud y dirección.
4. Grafica el vector $\vec{V}$ que tiene por coordenadas al punto inicial (-8; 3) y al punto final (-9; 2). Determina el vector V, su magnitud y dirección.
5. Grafica el vector $\vec{V}$ que tiene por coordenadas al punto inicial (5; 3) y al punto final (7; 1). Determina el vector V, su magnitud y dirección.
6. Halla las coordenadas del punto final, Si se tiene el vector $\vec{V} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$ y el punto inicial (4; 2).
7. Halla las coordenadas del punto inicial. Si se tiene el vector $\vec{V} = -4\hat{i} + 9\hat{j}$ y coordenadas del punto inicial (3; 5).
8. Halla las coordenadas del extremo del vector $\overrightarrow{AB} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$ sabiendo que esta aplicado en el punto A (3; -4).
9. Halla las coordenadas del punto de aplicación del vector $\overrightarrow{AB} = -2\hat{i} + 4\hat{j}$ sabiendo que tiene su extremo en el punto B (-5; 2).
10. Sabiendo que el vector fijo $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} - 5\hat{j}$ está aplicado en el punto A (3; 6), determina analítica y gráficamente las coordenadas del punto B.
11. Dados los puntos A(-3; 2) y B(2; 5) del plano, se pide:
    A. Determina el vector $\overrightarrow{AB}$.
    B. Representa gráficamente el vector $\overrightarrow{AB}$.
    C. Determina el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.
    D. Determina la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$.

E. Determina el vector unitario del vector $\overrightarrow{AB}$.

12. Halla el vector unitario de $\vec{V} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$ y verifique que tiene longitud 1.

13. Halla el vector $\vec{v}$ de la magnitud dada y en la misma dirección de $\vec{p}$.

Magnitud		Dirección
$\lvert\vec{v}\rvert = 5$	;	$\vec{p} = -2\hat{i} + 1\hat{j}$

14. Halla el vector $\vec{v}$ de la magnitud dada y en la misma dirección de $\vec{p}$.

Magnitud		Dirección
$\lvert\vec{v}\rvert = 2$	;	$\vec{p} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j}$

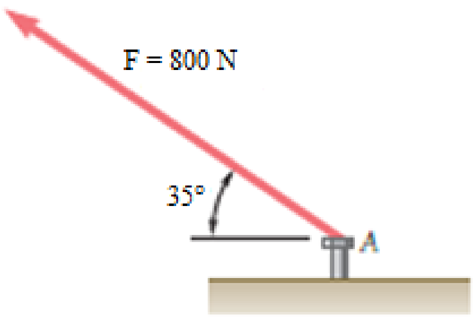
15. Expresa vectorialmente al vector $\vec{V}$, que tiene una magnitud de 12 y tiene una dirección de $\frac{\pi}{6}$.

16. Expresa vectorialmente al vector $\vec{V}$, que tiene una magnitud de 10 y tiene una dirección de $2\pi/3$.

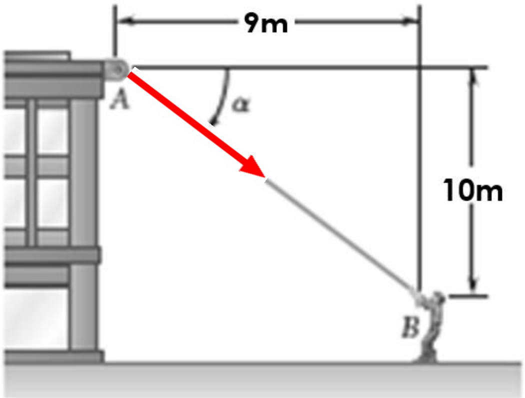
17. Expresa vectorialmente al vector $\vec{V}$, que tiene una magnitud de 25 y tiene una dirección de $4\pi/3$

18. Expresa vectorialmente al vector $\vec{V}$, que tiene una magnitud de 8 y tiene una dirección de $\frac{3\pi}{4}$.

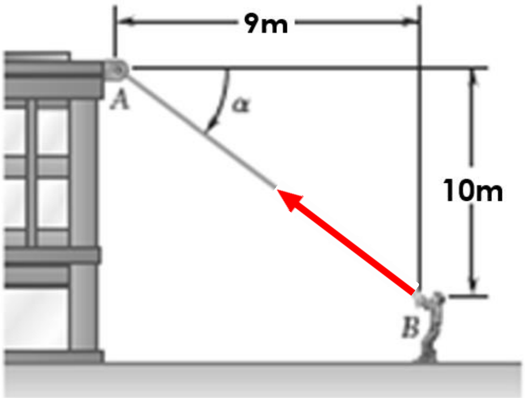
19. Una fuerza "F" de 800 N se ejerce sobre un perno *A* como se muestra en la figura. Expresa vectorialmente la fuerza F.



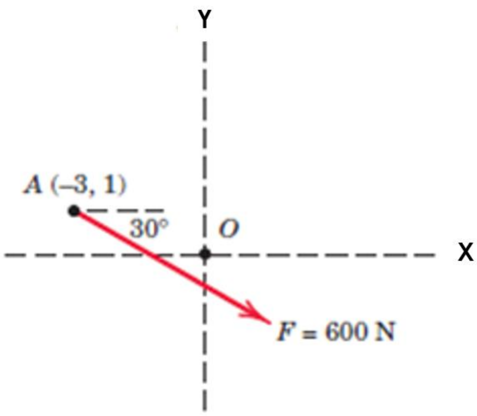
20. Un hombre jala una cuerda atada a un edificio con una fuerza de 300 N, como se muestra en la figura. ¿Determina vectorialmente la fuerza ejercida por la cuerda en el punto *A*?



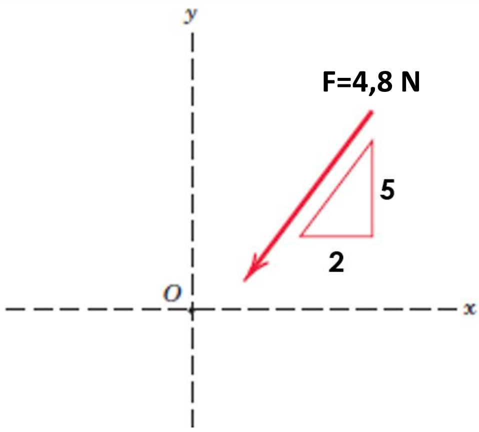
21. Un hombre jala una cuerda atada a un edificio con una fuerza de 300 N, como se muestra en la figura. ¿Determina vectorialmente la fuerza ejercida por la cuerda en el punto *B*?



22. La magnitud de la fuerza "F" es 600 N, exprese el vector "F" en su forma vectorial.



23. La pendiente de la fuerza “F” de 4,8 N, se especifica como se muestra en la figura. Expresar “F” como un vector.

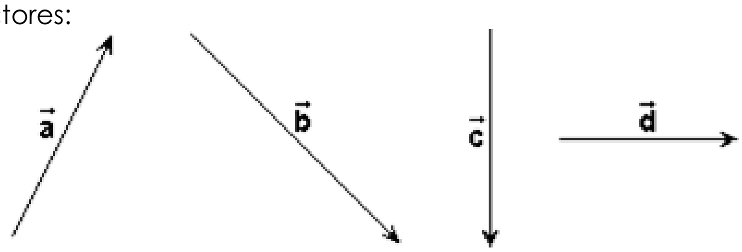


SESIÓN N° 03

TEMA: OPERACIONES CON VECTORES EN R²

ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR.

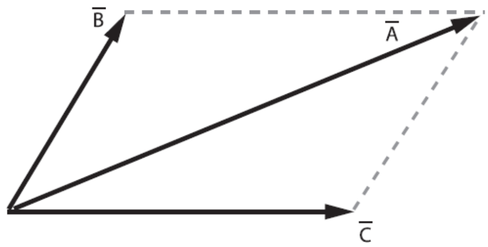
1. Se tienen los vectores:



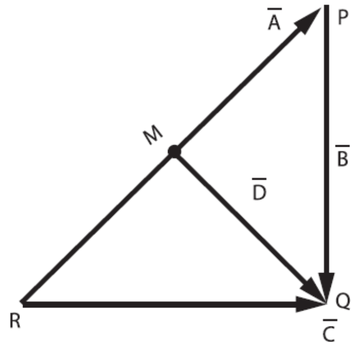
Efectúa gráficamente las siguientes sumas de vectores en:

A. $\vec{a}+\vec{b}$ B. $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ C. $\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$ D. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

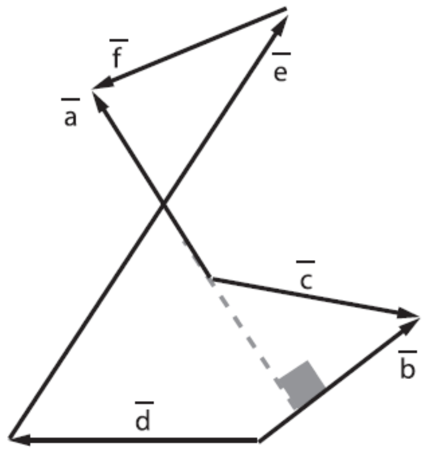
2. En el sistema mostrado, determina el vector resultante en términos del vector $\vec{A}$.



3. En la figura, "M" es punto medio del vector $\vec{A}$, expresa el vector $\vec{D}$ en función de los vectores $\vec{B}$ y $\vec{C}$.



4. Halla el módulo del vector resultante, si: $|\vec{a}| = 6$ y $|\vec{b}| = 8$.

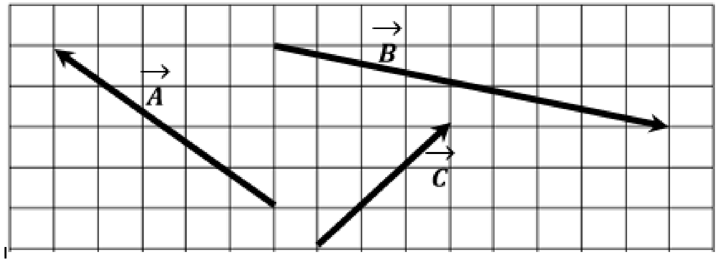


5. El módulo de la resultante de dos vectores perpendiculares es 10 y cuando forman 120° es $2\sqrt{13}$. Halla el módulo del mayor de ellos.

6. La magnitud de la resultante de dos fuerzas varía desde un valor mínimo de 3 hasta un máximo de 12, a medida que varía el ángulo comprendido entre las fuerzas. Determina el valor de la mayor de las fuerzas.

7. El módulo de la resultante máxima de dos vectores de fuerza es 16 N, mientras que el módulo de su resultante mínima es de 4 N. Determina su resultante cuando forman 60° entre ellos.

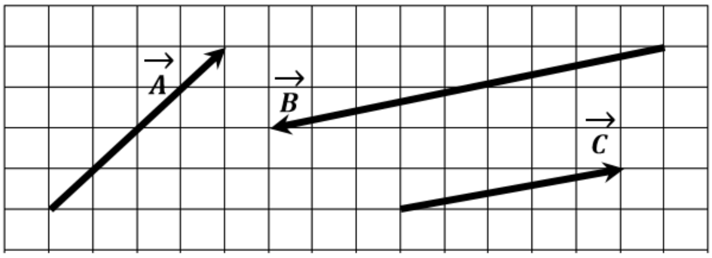
8. Multiplicación de un escalar por un vector:



A. Represente vectorialmente los vectores $\vec{A}$; $\vec{B}$ y $\vec{C}$.
B. Determine los siguientes vectores compuestos.

$\vec{V}=5\vec{A}+2,5\vec{B}+1,5\vec{C}$	$\vec{M}=4\vec{A}-3\vec{B}+2\vec{C}$
$\vec{P}=\vec{A}-4\vec{B}+2,5\vec{C}$	$\vec{Q}=2\vec{A}+4\vec{B}-7\vec{C}$

9. Multiplicación de un escalar por un vector:



A. Represente vectorialmente los vectores $\vec{A}$; $\vec{B}$ y $\vec{C}$.
B. Determine los siguientes vectores compuestos.

$\vec{V}=1,5\vec{A}+2\vec{B}+1,75\vec{C}$	$\vec{M}=5\vec{A}-2\vec{B}+3\vec{C}$
$\vec{P}=-\vec{A}+4\vec{B}-2,5\vec{C}$	$\vec{Q}=-1,5\vec{A}-4\vec{B}+7,5\vec{C}$

10. Dados los vectores $\vec{p}=3\hat{i}-2\hat{j}$ y $\vec{v}=-5\hat{i}+8\hat{j}$, calcula analíticamente las expresiones siguientes:

$\vec{M}=-\vec{p}+4\vec{v}$	$\vec{Q}=5\vec{p}+\frac{3}{2}\vec{v}$
$\vec{R}=-\frac{5}{2}\vec{p}-\frac{9}{4}\vec{v}$	$\vec{S}=0,25\vec{p}+0,75\vec{v}$

11. Dados los siguientes vectores: $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j}$; $\vec{B} = -8\hat{i} + 2\hat{j}$ y $\vec{C} = -5\hat{i} + \hat{j}$. Efectúa las siguientes operaciones vectoriales:

A. $5\vec{A} - 2\vec{B}$

B. $\frac{3}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$

C. $2\vec{A} + \vec{B}$

D. E. $5\vec{A} + 7\vec{C}$

E. $\frac{1}{4}\vec{A} - \frac{3}{4}\vec{B}$

F. F. $2\vec{A} - 4\vec{B} + 6\vec{C}$

12. Dados los siguientes vectores: $\vec{A} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$; $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{C} = -4\hat{i} + \hat{j}$. Determina el módulo del vector $\vec{X}$. $\vec{X} = 2\vec{A} + \vec{B}$

A. $\vec{X} = \frac{3}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{C}$

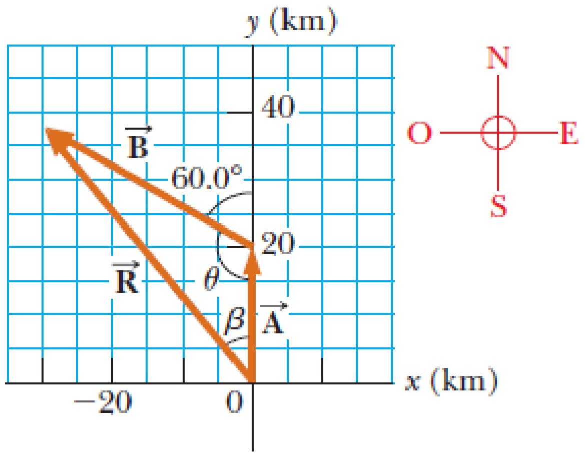
B. $\vec{X} = 5\vec{A} + 2\vec{C}$

C. $\vec{X} = 5\vec{A} + 7\vec{B} - \vec{C}$

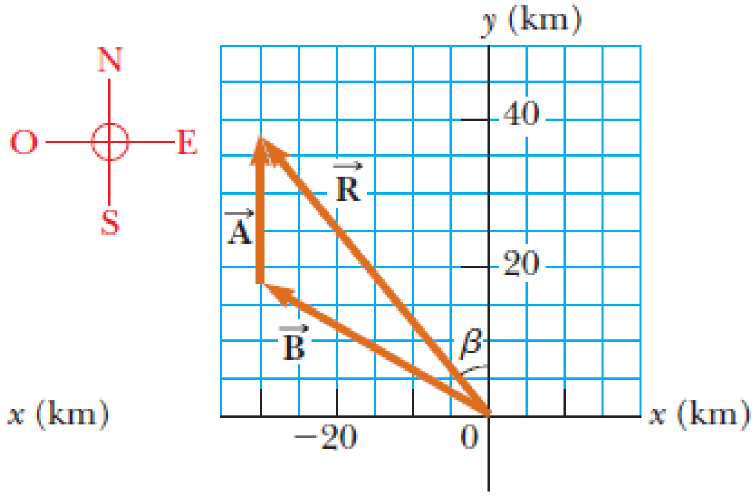
D. $\vec{X} = \frac{1}{4}\vec{A} - \frac{3}{4}\vec{C}$

E. $\vec{X} = 2\vec{A} - 5\vec{B} + 6\vec{C}$

13. Un automóvil hace un recorrido como muestran los vectores $\vec{A} + \vec{B}$ en la figura. Determine la magnitud y dirección del desplazamiento resultante $\vec{R}$ que desarrolla el automóvil. Si: $|\vec{A}| = 20km$ y $|\vec{B}| = 35\,km$.



14. Del problema anterior considere que el viaje se realiza con los dos vectores en orden inverso $\vec{B}+\vec{A}$; Ver la figura ¿Cómo cambiaría la magnitud y dirección del vector resultante? Si: $|\vec{A}| = 20km$ y $|\vec{B}| = 35km$.



15. Una excursionista comienza un viaje al caminar primero 25 km con dirección 315° desde su vehículo. Se detiene y levanta su tienda para pasar la noche. En el segundo día, camina 40 km en una dirección 30°, punto en el que descubre una torre de guardabosque. Determina:

   A. Los componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.
   B. Los componentes del desplazamiento resultante $\vec{R}$ de la excursionista, para dicho viaje.
   C. La expresión vectorial para $\vec{R}$.

Referencias bibliográficas

Básica
- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria
- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados
- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

SEMANA N° 02
VECTORES EN R^2

SESIÓN N° 01
TEMA: OPERACIONES CON VECTORES EN R^2
PRODUCTO ESCALAR Y ÁNGULO ENTRE VECTORES.

1. Realiza los siguientes productos escalares:

1. $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 2. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}$ 3. $(\vec{B}\cdot\vec{A})\cdot\vec{C}$

A. $\vec{A}=2\hat{i}-7\hat{j}$, $\vec{B}=3\hat{i}+12\hat{j}$, $\vec{C}=-5\hat{i}+9\hat{j}$	B. $\vec{A}=\sqrt{2}\hat{i}-\sqrt{5}\hat{j}$, $\vec{B}=\sqrt{11}\hat{i}+\sqrt{7}\hat{j}$, $\vec{C}=-\sqrt{6}\hat{i}+\sqrt{11}\hat{j}$	C. $\vec{A}=3\hat{i}-5\hat{j}$, $\vec{B}=11\hat{i}-3\hat{j}$, $\vec{C}=-\hat{j}$
D. $\vec{A}=3\hat{i}$, $\vec{B}=9\hat{i}-15\hat{j}$, $\vec{C}=-\hat{i}+12\hat{j}$	E. $\vec{A}=-2\hat{j}$, $\vec{B}=3\hat{i}+4\hat{j}$, $\vec{C}=2\hat{i}-4\hat{j}$	F. $\vec{A}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{i}+\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right)\hat{j}$, $\vec{B}=\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\hat{i}+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{j}$, $\vec{C}=\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\hat{i}-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\hat{j}$

2. Determina el ángulo agudo formado por los siguientes vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

A. $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}$, $\vec{B}=-\hat{i}+\hat{j}$	B. $\vec{A}=-3\hat{i}+4\hat{j}$, $\vec{B}=3\hat{i}-\sqrt{2}\hat{j}$
C. $\vec{A}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{i}-\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\hat{j}$, $\vec{B}=\text{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)\hat{i}+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{j}$	D. $\vec{A}=\cos\left(\frac{11\pi}{2}\right)\hat{i}-\text{sen}\left(\frac{5\pi}{7}\right)\hat{j}$, $\vec{B}=\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\hat{i}+\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\hat{j}$

3. Determina si los siguientes vectores son paralelos, ortogonales u oblicuos:

A. $\vec{A}=4\hat{i}+3\hat{j}$, $\vec{B}=\frac{1}{2}\hat{i}-\frac{2}{3}\hat{j}$

B. $\vec{A}=3\hat{i}-2\hat{j}$, $\vec{B}=5\hat{i}-2\hat{j}$

C. $\vec{A}=7\hat{i}+8\hat{j}$, $\vec{B}=11\hat{i}-12\hat{j}$

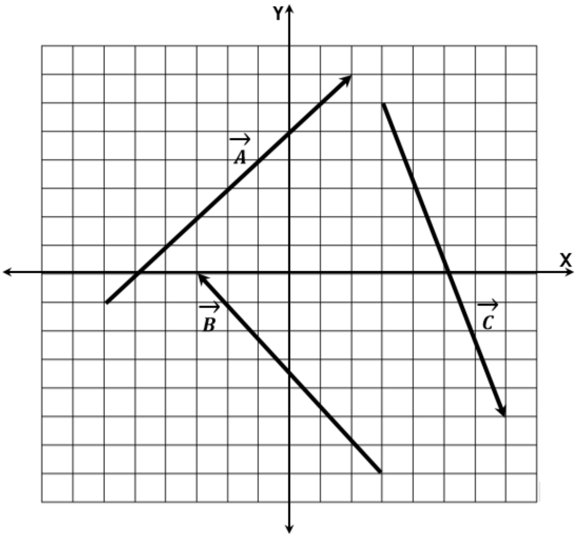
D. $\vec{A}=-2\hat{i}+3\hat{j}$, $\vec{B}=2\hat{i}+\hat{j}$

E. $\vec{A}=\hat{i}$, $\vec{B}=\hat{j}$

F. $\vec{A}=\sqrt{2}\hat{i}-\sqrt{3}\hat{j}$, $\vec{B}=-\sqrt{2}\hat{i}+\sqrt{3}\hat{j}$

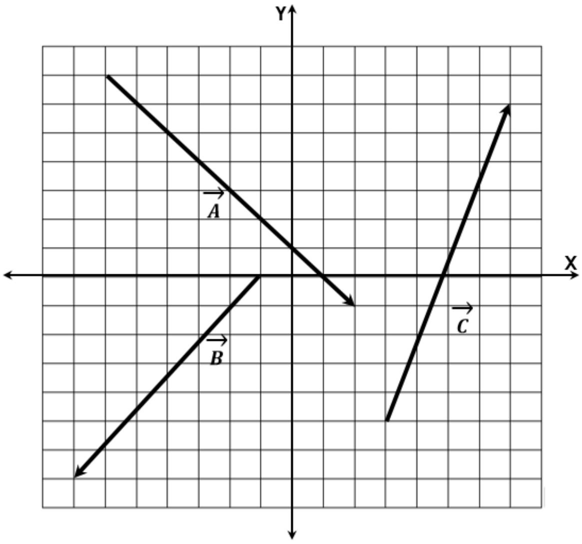
4. Determina el producto escalar de los siguientes vectores:

A. $2\vec{A}\cdot 3\vec{B}$
B. $4\vec{B}\cdot\vec{C}$
C. $4\vec{A}\cdot 3\vec{C}$
D. $(2\vec{A}+\vec{B})\cdot 2\vec{C}$



5. Determina el producto escalar de los siguientes vectores:

A. $2\vec{A}\cdot 3\vec{B}$
B. $4\vec{B}\cdot\vec{C}$
C. $4\vec{A}\cdot 3\vec{C}$
D. $(2\vec{A}+\vec{B})\cdot 2\vec{C}$



6. En los siguientes ejercicios use los vectores $\vec{p}=3\hat{i}-2\hat{j}$; $\vec{v}=4\hat{i}+2\hat{j}$ y $\vec{w}=-\hat{i}-3\hat{j}$. Determina si el resultado es un vector o un escalar.

A. $\vec{p}\cdot\vec{p}$
B. $3\vec{p}\cdot\vec{v}$
C. $(\vec{p}\cdot\vec{v})\vec{v}$
D. $(\vec{p}\cdot 2\vec{v})\vec{w}$
E. $(\vec{p}\cdot\vec{v})-(\vec{p}\cdot\vec{w})$
F. $2-|\vec{w}|$
G. $|\vec{w}-\vec{v}+\vec{p}|$
H. $|3\vec{w}+5\vec{v}-2\vec{p}|$

7. Usa vectores para determinar los ángulos internos de un triángulo con los vértices dados:

A. (1, 2); (3, 4); (2, 5).
B. (-3, -4); (1, 7); (8, 2).
C. (-3, 0); (2, 2); (0, 6).
D. (-3, 5); (-1, 9); (7, 9).

8. Determina $\vec{p}\cdot\vec{v}$, donde "θ" es el ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{v}$.

   A. $|\vec{p}|=4;\ |\vec{v}|=10;\ \theta=\dfrac{2\pi}{3}$

   B. $|\vec{p}|=100;\ |\vec{v}|=250;\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$

   C. $|\vec{p}|=9;\ |\vec{v}|=36;\ \theta=\dfrac{3\pi}{4}$

   D. $|\vec{p}|=4;\ |\vec{v}|=12;\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$

9. Dado el vector $\vec{a}=-3\hat{i}+4\hat{j}$, determina otro vector $\vec{b}$, tal que sea perpendicular al vector $\vec{a}$ y que su módulo sea 10.

10. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman entre sí un ángulo de 60°, se sabe qué $|\vec{A}|=5$ y $|\vec{B}|=8$. Determina $|\vec{A}+\vec{B}|$ y $|\vec{A}-\vec{B}|$.

11. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman entre sí un ángulo de 45° y el módulo de $\vec{A}$ es 3. Determina el módulo de $\vec{B}$, de modo que $(\vec{A}-\vec{B})$ sea perpendicular a $\vec{A}$.

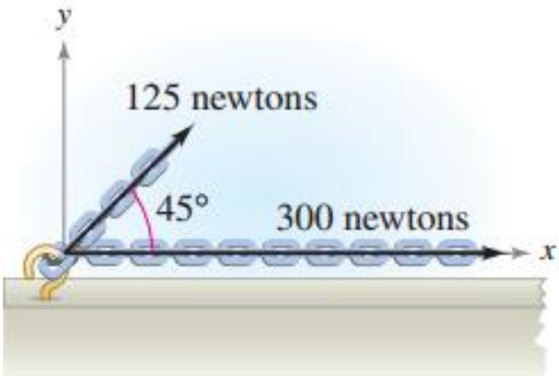
12. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman entre sí un ángulo de 45° y el módulo de $\vec{A}$ es 3. Determina el módulo de $\vec{B}$, de modo que $(\vec{A}+\vec{B})$ forme con $\vec{A}$ un ángulo de 30°.

SESIÓN N° 02

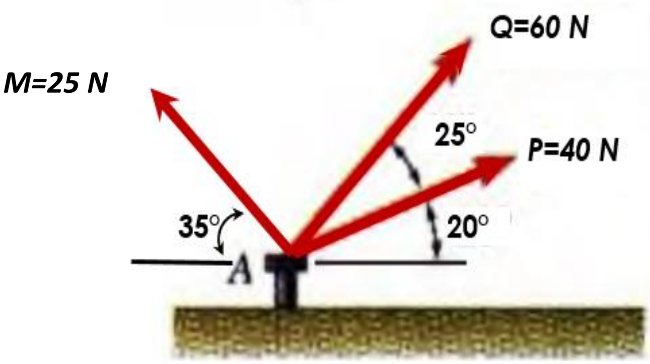
TEMA: APLICACIONES DE VECTORES EN R^2.

1. Dos fuerzas con magnitudes de 125 N y 300 N actúan sobre un gancho (ver figura). El ángulo entre las dos fuerzas es 45°.

   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.

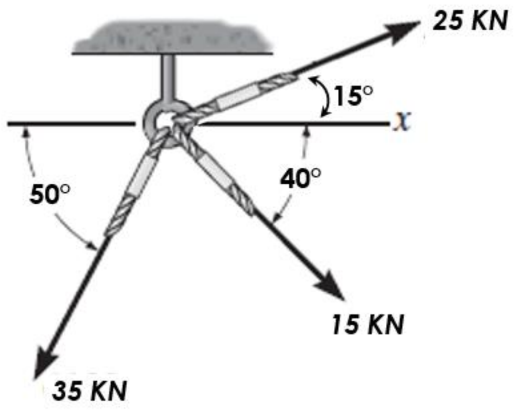


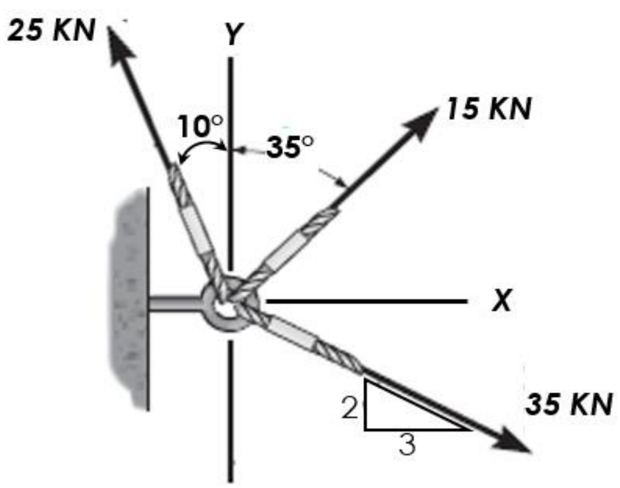
2. Un perno está sometido a tres fuerzas concurrentes.
   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.



3. La armella roscada está anclando tres cables, los cuales están sometidas a tensiones (vea el gráfico).

   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.



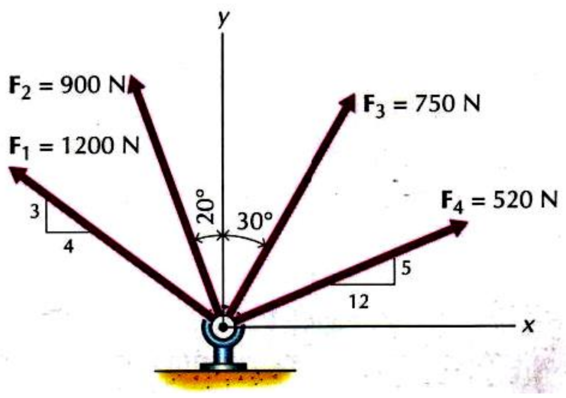


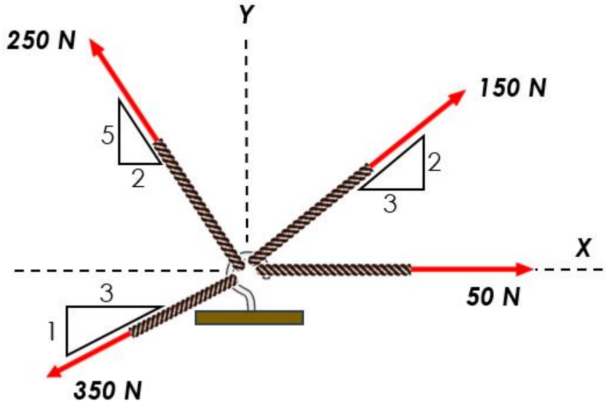
4. La armella roscada está anclando tres cables, los cuales están sometidas a tensiones (vea el gráfico). Empleando componentes y vectores unitarios, responda lo que se pide.

   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.

5. Determina la magnitud de la fuerza resultante y su dirección respecto con el semieje x positivo.

   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.



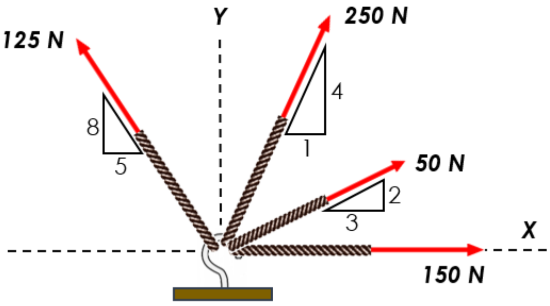


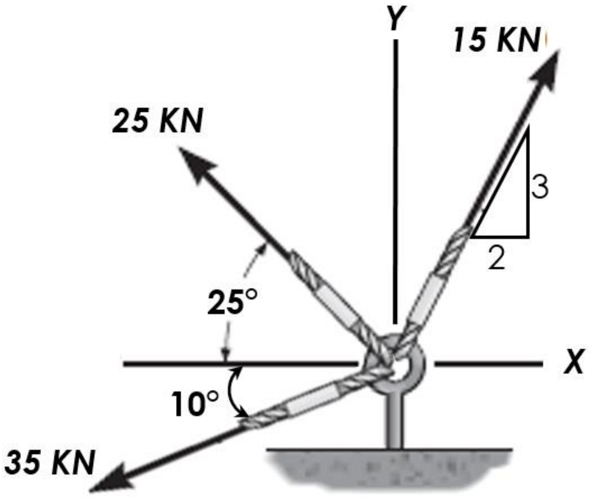
6. En la armella abierta actúan fuerzas tensoras sobre los cables. Utilizando vectores unitarios:

   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.

7. En la armella abierta actúan fuerzas tensoras sobre los cables. Utilizando vectores unitarios:

   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.



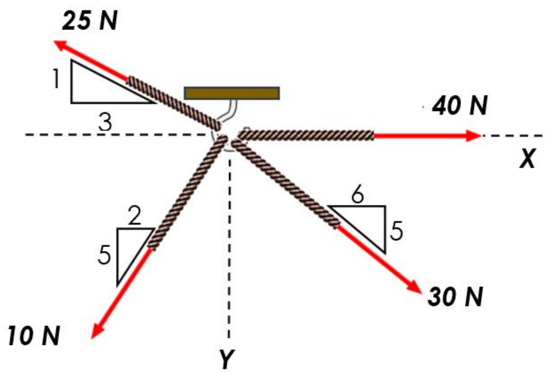


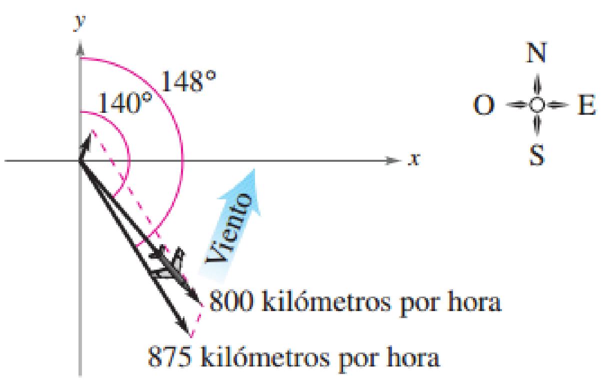
8. En la armella cerrada actúan fuerzas tensoras sobre los cables. Utilizando componentes y vectores unitarios:

   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.

9. En la armella abierta actúan fuerzas tensoras sobre los cables. Utilizando vectores unitarios:

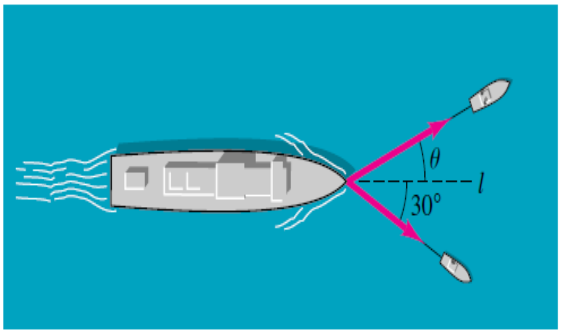
   A. Determine el vector fuerza resultante.
   B. Determine el módulo del vector fuerza resultante.
   C. Determine la dirección del vector fuerza resultante.

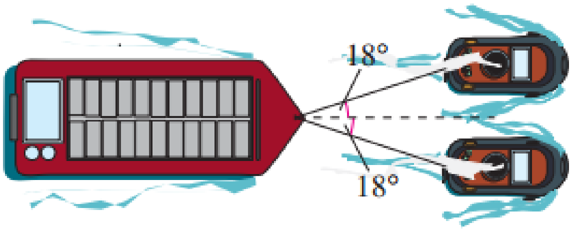




10. Un avión vuela en la dirección de 148° con una rapidez relativa de 875 kilómetros por hora respecto a tierra. Debido al viento, su velocidad absoluta y dirección son 800 kilómetros por hora y 140° respectivamente (vea figura). Determina la dirección y rapidez del viento.

11. Fuerza de un remolcador: Dos remolcadores están tirando de un gran barco hacia el puerto, como se muestra en la figura. El mayor de ellos ejerce una fuerza de 4000 libras fuerza en su cable y el remolcador más pequeño ejerce una fuerza de 3200 libras fuerzas en su cable. Si el barco ha de moverse en la línea recta “l”, calcula el ángulo “θ” que el remolcador más grande debe formar con “l”.

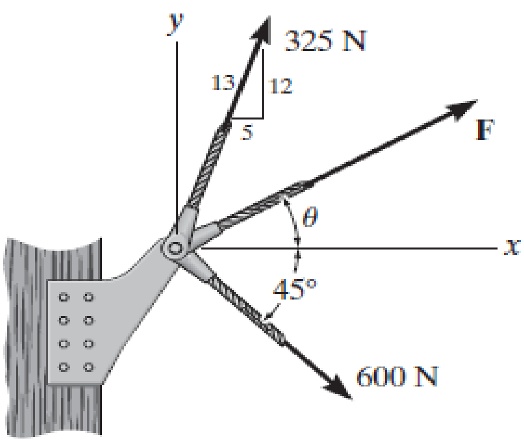


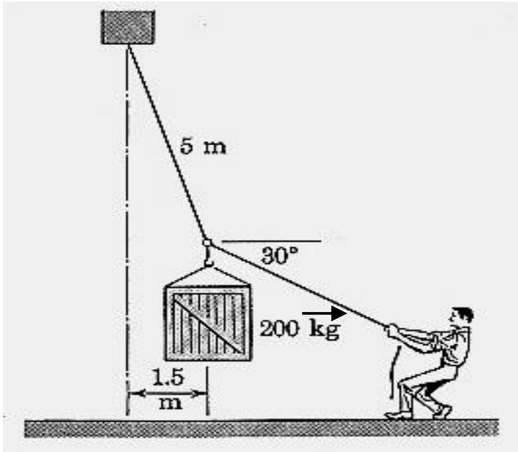


12. Una barcaza cargada está siendo jalada por dos remolcadores, y la magnitud de la resultante es 6000 libras fuerza dirigida a lo largo del eje de la barcaza (ver figura). Determina la tensión en las dos líneas si cada una de ellas forma un ángulo de 18° con el eje de la barcaza.

13. Si la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula debe ser de 750 N y estar dirigida a lo largo del eje x positivo.

A. Determine el vector “F”
B. Determine la magnitud de la fuerza “F”.
C. Determine la dirección “θ” de la fuerza “F”.

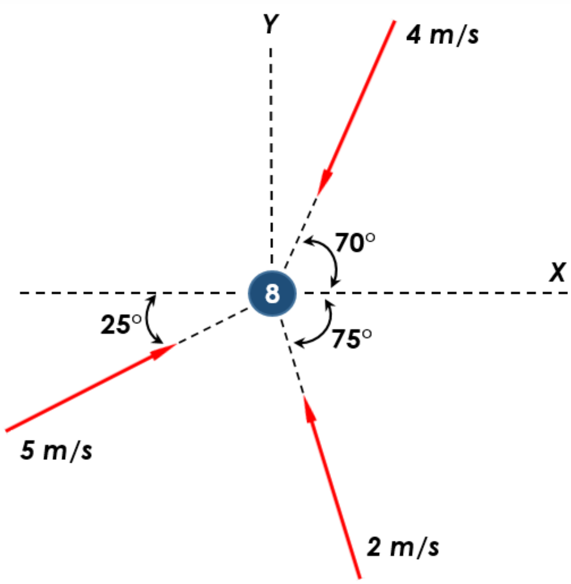




14. Determina la fuerza ejercida por el hombre para sostener la carga en la posición mostrada (equilibrio). Además determina la tensión en el cable superior.

15. **Bola Ocho:** La bola de billar (8) en estado de reposo es impactada instantáneamente por otras tres bolas, con sus respectivas velocidades (vea la figura).

    A. Determine la velocidad final de movimiento de la bola (8).
    B. Determine la rapidez final de la bola (8).
    C. Determine la dirección final de movimiento de la bola (8).



SESIÓN N° 03

TEMA: PRÁCTICA CALIFICADA N°1

Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria

- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados

- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

SEMANA N° 03

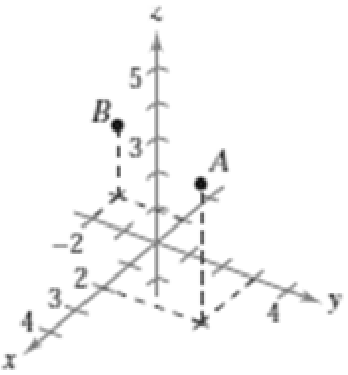
VECTORES EN EL ESPACIO: DEFINICIÓN, ELEMENTOS, NOTACIÓN Y CLASIFICACIÓN, PRODUCTO VECTORIAL Y TRIPLE, PRODUCTO ESCALAR.

SESIÓN N° 01 – 02

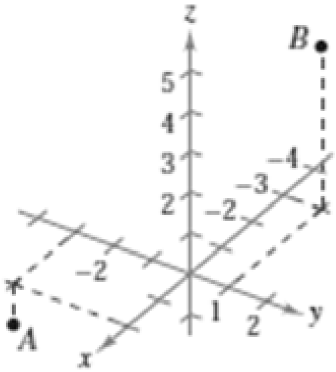
TEMA: VECTORES EN EL ESPACIO. DEFINICIÓN, ELEMENTOS, NOTACIÓN Y CLASIFICACIÓN.

1. En los ejercicios 1 y 2, determina las coordenadas de los puntos.

1.



2.



2. En los ejercicios, representa los puntos en el mismo sistema de coordenadas tridimensional.

   A. (5, -2, 2)
   B. (5, -2, -2)
   C. (0, 4, -5)
   D. (4, 0, 5)

3. En los ejercicios, halla la distancia entre los puntos.

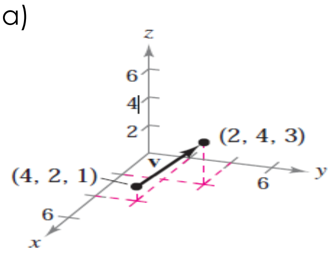
   A. (1, -2, 4), (6, -2, -2)
   B. (2, 2, 3), (4, -5, 6)

4. En los ejercicios siguientes, halla las longitudes de los lados del triángulo con los vértices que se indican y determina si el triángulo es un triángulo rectángulo o un triángulo isósceles.

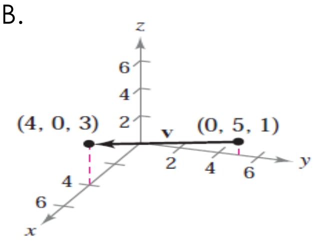
   A. (0, 0, 4), (2, 6, 7), (6, 4, -8)
   B. (3, 4, 1), (0, 6, 2), (3, 5, 6)
   C. (-1, 0, -2), (-1, 5, 2), (-3, -1, 1)
   D. (4, -1, -1), (2, 0, -4), (3, 5, -1)

5. En los ejercicios:
   A. Encuentra las componentes del vector $\vec{V}$.
   B. Escriba el vector utilizando la notación del vector unitario estándar.
   C. Dibuja el vector con su punto inicial en el origen.

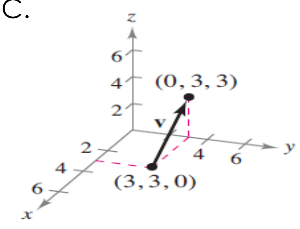
a)



B.



C.



6. En los ejercicios, dados sus puntos inicial y final. Determine el vector $\vec{V}$, su longitud y después halla un vector unitario en la dirección de $\vec{V}$.

	PUNTO INICIAL	**PUNTO FINAL**
A.	(3, 2, 0)	(4, 1, 6)
B.	(4, 5, 2)	(1, 7, 3)
C.	(-4, 4, -2)	(-1, 4, -3)
D.	(-1, 6, 3)	(0, -3, -3)
E.	(4, -2, 7)	(5, -7, 1)
F.	(0, -4, 5)	(-3, -2, -5)

7. En los ejercicios, encuentra el vector $\vec{z}$, dado que $\vec{p} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{v} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{w} = 4\hat{i} - 4\hat{k}$.

   A. $\vec{z} = 2\vec{p} - 4\vec{v} + \vec{w}$
   B. $2\vec{p} + \vec{v} - \vec{w} + 3\vec{z} = 0$

8. En los ejercicios, determina cuáles de los vectores son paralelos a $\vec{z}$.

   A. $\vec{z} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$
      i. $\vec{a} = -6\hat{i} - 4\hat{j} + 10\hat{k}$
      ii. $\vec{b} = 2\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} - \frac{10}{3}\hat{k}$
      iii. $\vec{c} = 6\hat{i} + 4\hat{j} + 10\hat{k}$
      iv. $\vec{d} = \hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

   B. $\vec{z} = \frac{1}{2}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{3}{4}\hat{k}$
      i. $\vec{a} = 6\hat{i} - 4\hat{j} + 9\hat{k}$
      ii. $\vec{b} = -\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}$
      iii. $\vec{c} = 12\hat{i} + 9\hat{k}$
      iv. $\vec{d} = \frac{3}{4}\hat{i} - \hat{j} + \frac{9}{8}\hat{k}$

9. Determina el ángulo "θ", entre los vectores:
   A. $\vec{p} = \hat{i} + \hat{j} + \vec{k}$; $\quad \vec{v} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \vec{k}$
   B. $\vec{p} = 3\hat{i} + \hat{j} + \vec{k}$; $\quad \vec{v} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\vec{k}$
   C. $\vec{p} = \cos(\frac{3\pi}{4})\hat{i} + sen(\frac{3\pi}{4})\hat{j} + \cos(\frac{3\pi}{4})\vec{k}$; $\quad \vec{v} = \cos(\frac{\pi}{6})\hat{i} + sen(\frac{\pi}{6})\hat{j} - sen\vec{k}$
   D. $\vec{p} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \vec{k}$; $\quad \vec{v} = 2\hat{i} - 2\vec{k}$

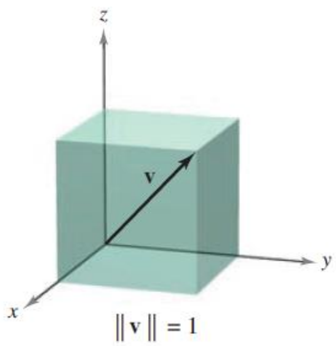
10. En los ejercicios siguientes, usa vectores para determinar si los puntos son colineales.
    A. (4, -2, 7), (-2, 0, 3), (7, -3, 9)
    B. (1, 2, 4), (2, 5, 0), (0, 1, 5)

11. En los ejercicios siguientes, usa vectores para demostrar que los puntos son vértices de un paralelogramo.
    A. (2, 9, 1), (3, 11, 4), (0, 10, 2), (1, 12, 5)
    B. (1, 1, 3), (9, -1, -2), (11, 2, -9), (3, 4, -4)

12. En los ejercicios siguientes, encuentra el vector $\vec{V}$ con la magnitud dada y en dirección de $\vec{p}$.

	MAGNITUD	**DIRECCIÓN**
1.	$\frac{3}{2}$	$\vec{p} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \vec{k}$
2.	7	$\vec{p} = -3\hat{i} + 6\hat{j} + 4\vec{k}$

13. Diagonal de un cubo. Determine el vector $\vec{V}$ en la dirección de la diagonal del cubo que se muestra en la figura.



SESIÓN N° 03

TEMA: PRODUCTO VECTORIAL Y TRIPLE PRODUCTO ESCALAR.

1. En los ejercicios, calcula el producto vectorial de los vectores unitarios y dibuja su resultado.

   A. $\hat{j}x\hat{i}$
   B. $\hat{i}x\hat{j}$
   C. $\hat{j}xk$
   D. $kx\hat{j}$
   E. $\hat{i}xk$
   F. $kx\hat{i}$

2. En los ejercicios, calcula y gráfica:

   A. $\vec{p}x\vec{v}$
   B. $\vec{v}x\vec{p}$
   C. $\vec{v}x\vec{v}$

   Sabiendo que:

   I. $\vec{p}=-2\hat{i}+4\hat{j} \quad \wedge \quad \vec{v}=3\hat{i}+2\hat{j}+5k$
   II. $\vec{p}=-3\hat{i}+5k \quad \wedge \quad \vec{v}=2\hat{i}+3\hat{j}-2k$
   III. $\vec{p}=5\hat{i}-5\hat{j}+6k \quad \wedge \quad \vec{v}=-\hat{i}+4\hat{j}-7k$

3. Siendo $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-k$; $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}-2k$ y $\vec{c}=2\hat{i}+3\hat{j}+4k$, determina:

   A. $\vec{a}x\vec{b}$
   B. $\vec{b}x\vec{c}$
   C. $\vec{c}x\vec{a}$
   D. $(\vec{a}+\vec{b})x(\vec{a}-\vec{b})$
   E. $\vec{a}\cdot(\vec{a}x\vec{b})$
   F. $\vec{a}\cdot(\vec{b}x\vec{c})$
   G. $\vec{a}x(\vec{b}x\vec{c})$
   H. $\vec{c}x(\vec{a}x\vec{b})$
   I. $\vec{c}x(\vec{a}-\vec{b})$

4. Determina si $\vec{p}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.

   A. $\vec{p}=4\hat{i}+3\hat{j} \quad \wedge \quad \vec{v}=\frac{1}{2}\hat{i}-\frac{2}{3}\hat{j}$
   B. $\vec{p}=-2\hat{i}+3\hat{j}-k \quad \wedge \quad \vec{v}=2\hat{i}+\hat{j}-k$
   C. $\vec{p}=2\hat{i}-3\hat{j}+k \quad \wedge \quad \vec{v}=-\hat{i}-\hat{j}-k$
   D. $\vec{p}=\cos\theta\hat{i}+sen\theta\hat{j}-k \quad \wedge \quad \vec{v}=sen\theta\hat{i}-\cos\theta\hat{j}$

5. En los ejercicios, calcula el producto vectorial $\vec{p}x\vec{v}$ de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{v}$, demuestra que $\vec{p}x\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{p}$ y $\vec{v}$.

   A. $\vec{p}=1\hat{i}+2\hat{j}+3k \quad \wedge \quad \vec{v}=3\hat{i}-\hat{j}$
   B. $\vec{p}=3\hat{i}+\hat{j}-2k \quad \wedge \quad \vec{v}=4\hat{i}-\hat{j}+3k$
   C. $\vec{p}=\hat{i}-\hat{j}+k \quad \wedge \quad \vec{v}=2\hat{i}+\hat{j}-2k$
   D. $\vec{p}=3\hat{i}+5\hat{j}-3k \quad \wedge \quad \vec{v}=-2\hat{i}+\hat{j}+7k$

6. Halla el vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3k \quad \wedge \quad \vec{b} = -\hat{i} - 2k$.

7. Calcula los siguientes productos vectoriales: $\vec{p}x\vec{v}$; $\vec{v}x\vec{p}$; $\vec{v}x\vec{v}$.

A. $\vec{p} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5k$

B. $\vec{p} = 3\hat{i} + 5k$, $\vec{v} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2k$

C. $\vec{p} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2k$, $\vec{v} = \hat{i} + 5\hat{j} + k$

D. $\vec{p} = 2\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{v} = -\hat{i} + 2\hat{j}$

8. Calcula: $\vec{p} \cdot (\vec{v}x\vec{w})$.

A. $\vec{p} = \hat{i} + \hat{j} + k$, $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j}$, $\vec{w} = k$

B. $\vec{p} = 2\hat{i} + k$, $\vec{v} = 3\hat{j}$, $\vec{w} = k$

C. $\vec{p} = 2\hat{i}$, $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + k$, $\vec{w} = 2\hat{j} + 2k$

9. **Área:** En los siguientes ejercicios, verifica que los puntos son los vértices de un paralelogramo y calcula su área:

A. $A(0,3,2); B(1,5,5); C(6,9,5); D(5,7,2)$

B. $A(2,-3,1); B(6,5,-1); C(7,2,2); D(3,-6,4)$

10. En los ejercicios, calcula el área del triángulo con los vértices dados.

A. A(0,0,0), B(1,0,3), C(-3,2,0)
B. A(2,-3,4), B(-1,2,-5), C(4,-7,4)
C. A(1,1,2), B(-1,0,5), C(-3,-2,4)
D. A(-5,10,1), B(0,0,-7), C(-3,12,1)

11.Calcula el área del paralelogramo que tiene los vectores como lados adyacentes.

A. $\vec{p} = \hat{j}$, $\vec{v} = \hat{j} + k$

B. $\vec{p} = \hat{i} + \hat{j} + k$, $\vec{v} = \hat{j} + k$

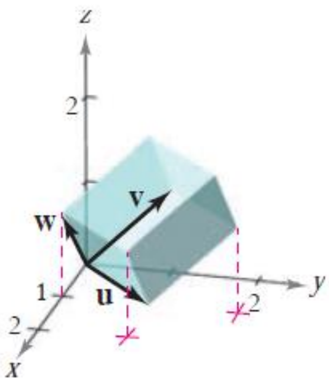
C. $\vec{p} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 5k$, $\vec{v} = -\hat{i} + 5\hat{j} - 6k$

12. **Volumen:** Usa el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene aristas adyacentes $\vec{p}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\vec{p} = \hat{i} + 3\hat{j} + k$$
$$\vec{v} = -\hat{i} + \hat{j} + k$$
$$\vec{w} = -4\hat{i} - 4k$$

13. **Volumen**: Usa el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene aristas adyacentes $\vec{p}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\vec{p} = \hat{i} + \hat{j}$$
$$\vec{v} = \hat{j} + k$$
$$\vec{w} = \hat{i} + k$$



14. **Volumen:** Usa el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene aristas adyacentes $\vec{p}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\vec{p} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 5k$$
$$\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j} - 6k$$
$$\vec{w} = -4\hat{i} - 4\hat{j}$$

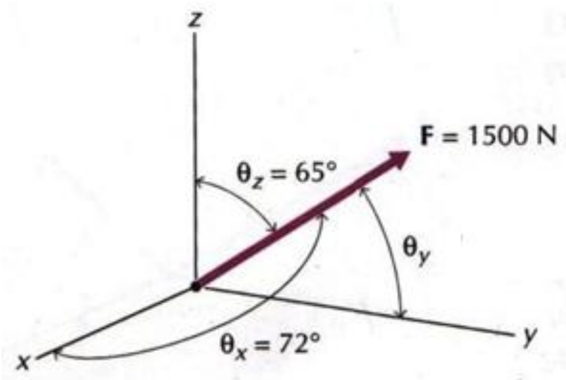
SEMANA N° 04

APLICACIÓN DE LOS VECTORES EN EL ESPACIO – REPASO DE VECTORES

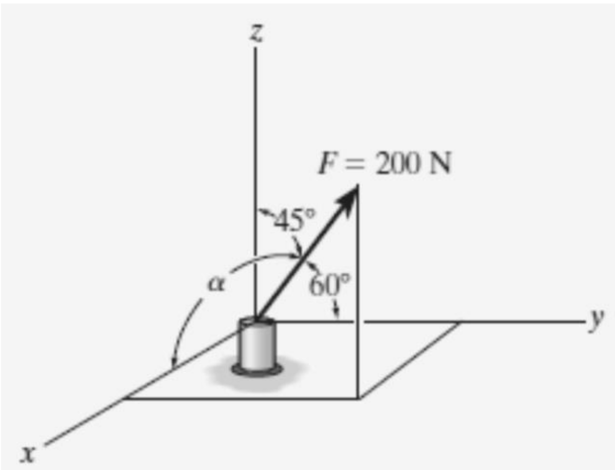
SESIÓN N° 01

TEMA: APLICACIÓN DE VECTORES EN EL ESPACIO

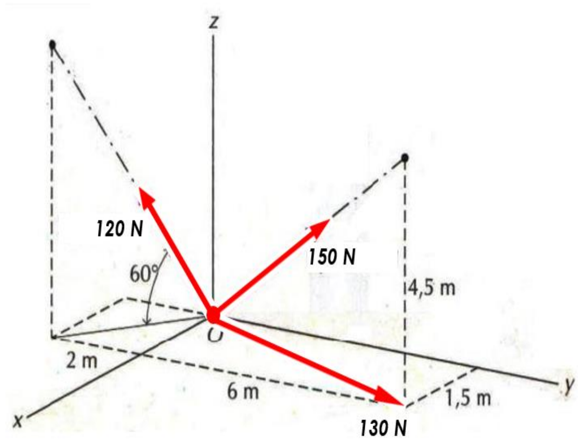
1. Se aplica una fuerza "F" a un punto de un cuerpo, tal como se indica en la figura.
   A. Calcula "θ_y".
   B. Determina la representación vectorial de la fuerza "F".



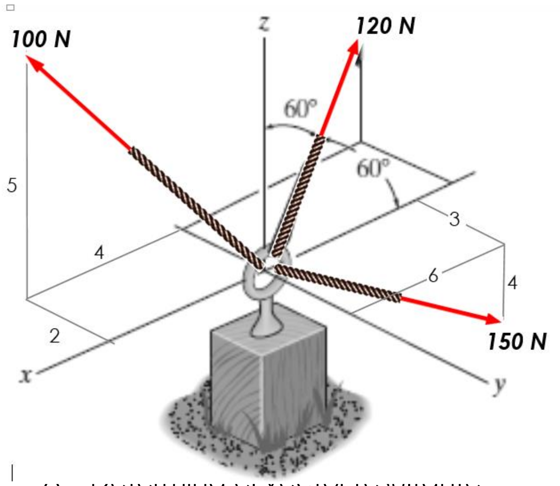
2. De la fuerza "F" mostrada en la figura.
   A. Calcula "α".
   B. Expresa vectorialmente la fuerza "F".

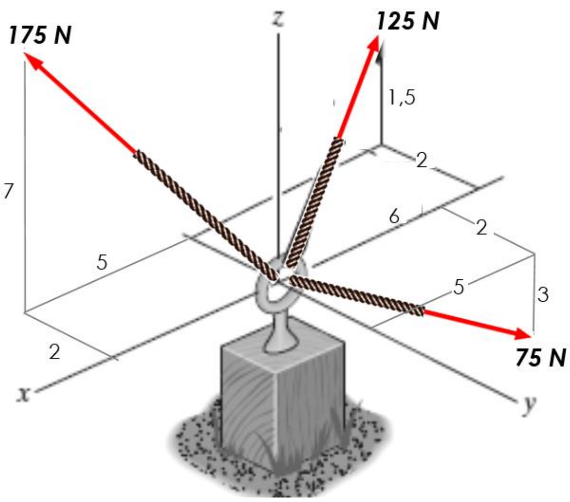


3. Del conjunto de vectores mostrados en la figura.
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula el módulo del vector resultante.
   C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.



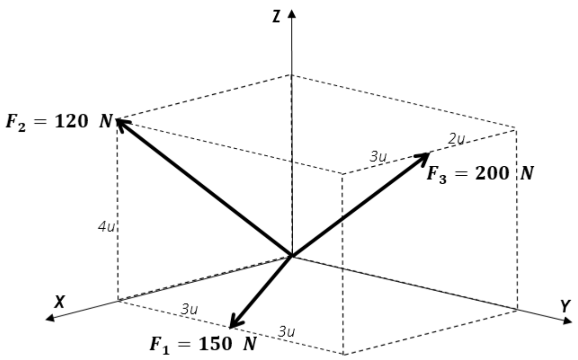
4. Los cables anclados en la armella cerrada, soportan tensiones.
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula el módulo del vector resultante.
   C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.

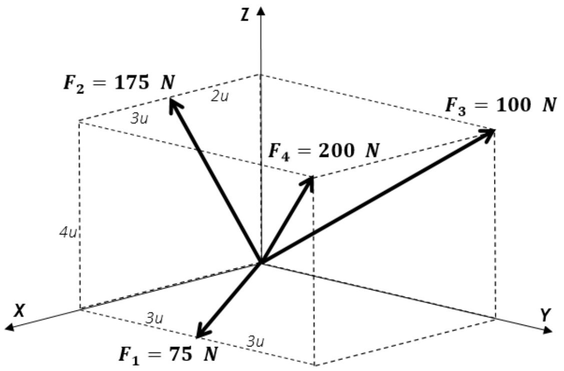




A. Determina el vector resultante.
B. Calcula el módulo del vector resultante.
C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.

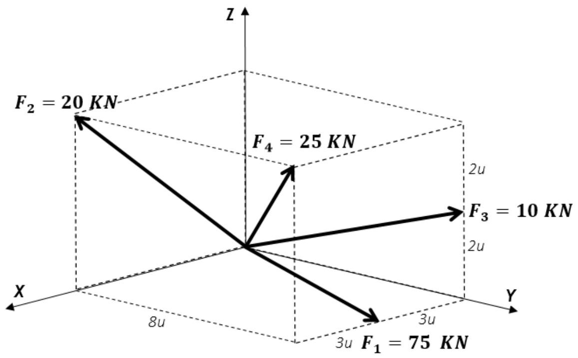
6. Del sistema de vectores mostrados.
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula el módulo del vector resultante.
   C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.

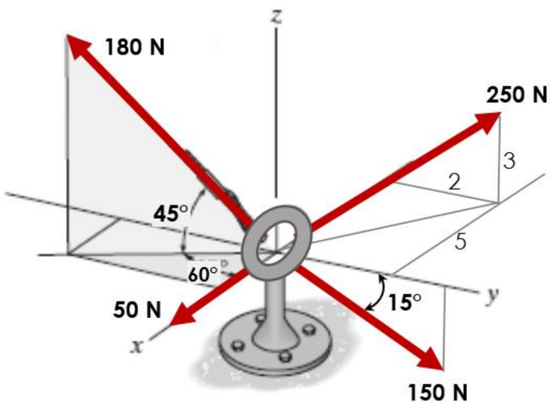




7. Del sistema de vectores mostrados.
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula el módulo del vector resultante.
   C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.

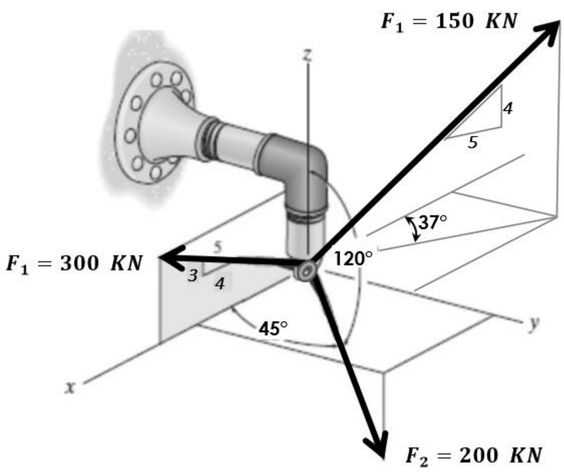
8. Del sistema de vectores mostrados.
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula el módulo del vector resultante.
   C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.

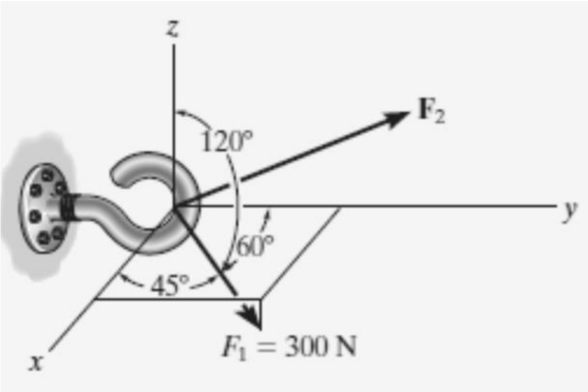




9. Los cables anclados en la armella cerrada, soportan tensiones.
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula el módulo del vector resultante.
   C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.

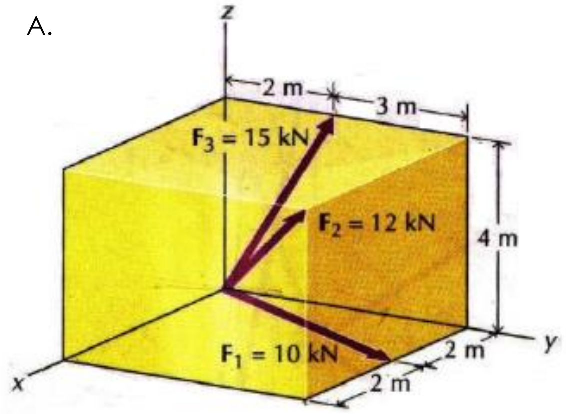
10. Los cables anclados en el spot light, soportan tensiones.
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula el módulo del vector resultante.
   C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.



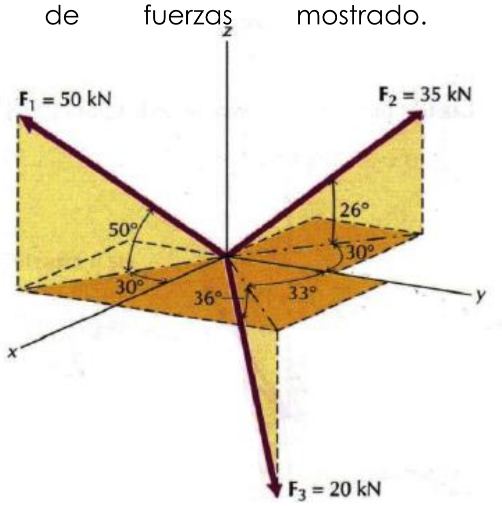


11. Dos fuerzas actúan sobre gancho que se muestra en la figura. Determina el módulo de "F_2" y sus ángulos directores de modo que la fuerza F_R actúa a lo largo del eje "y" positivo y tenga una magnitud de 800N.

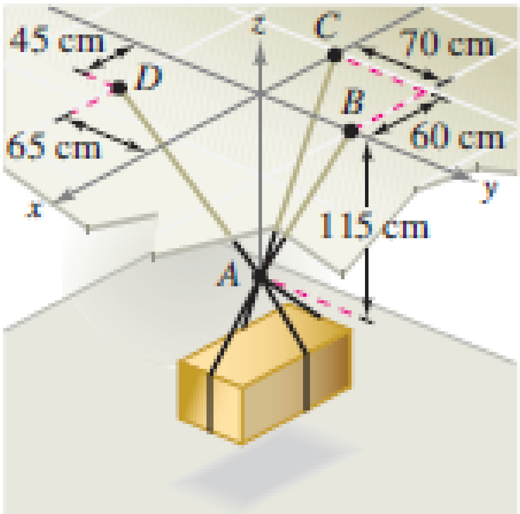
12. Determina la resultante del sistema de fuerzas mostrado.
A.



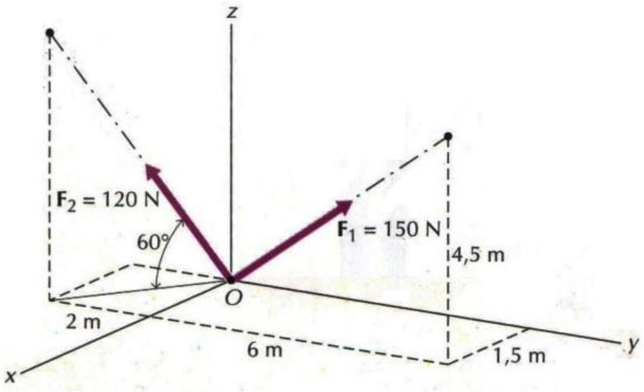
B.



13. **Soportes de Cargas.** Halla la tensión en cada uno de los cables de soportes mostrados en la figura si el peso de la caja es de 500 Newton.



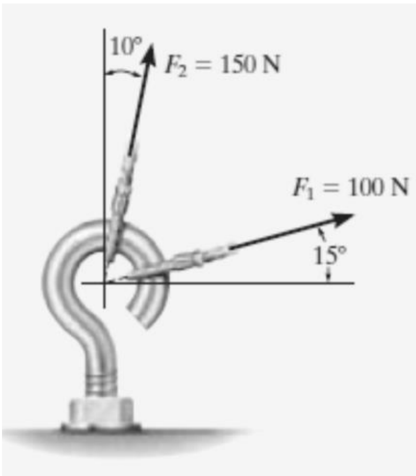
14. A un punto de un cuerpo se aplican dos fuerzas en la forma que se indica en la figura.
    A. Determina la expresión vectorial de la resultante.
    B. Calcula el módulo del vector resultante.
    C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.



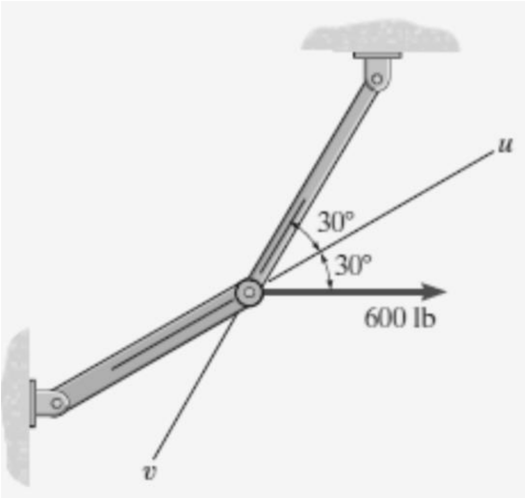
SESIÓN N° 02

REPASO DE VECTORES

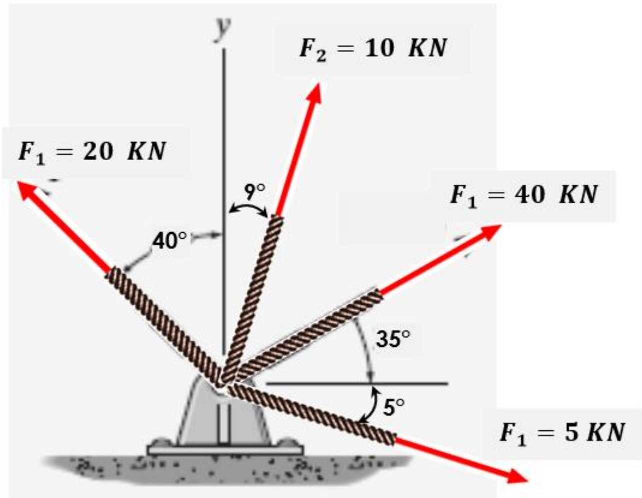
1. La armella roscada de la figura está sometida a dos fuerzas F_1 y F_2.
   A. Determina el vector resultante del sistema.
   B. Determina el módulo de la resultante.
   C. Calcula la dirección de la fuerza resultante.



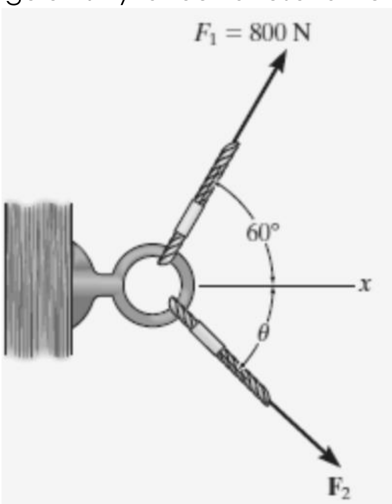
2. Descomponga la fuerza horizontal de 600 lb que se muestra en la figura en componentes que actúan a lo largo de los ejes “u” y “v”. Determina los módulos de estos componentes.



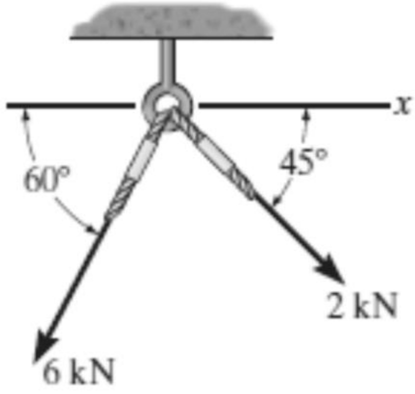
3. Del sistema de fuerzas mostrado:
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula la longitud del vector resultante.
   C. Calcula la dirección del vector resultante.



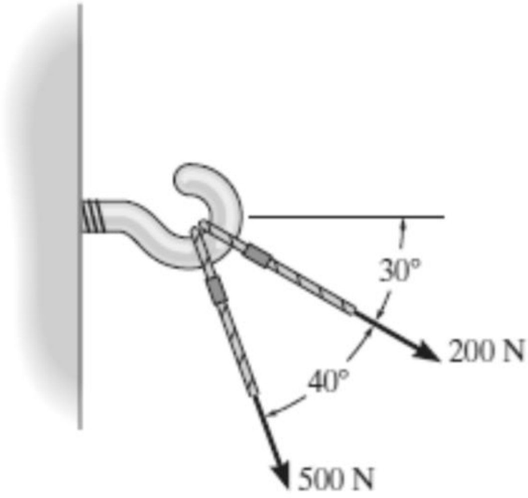
4. Se requiere que la fuerza resultante que actúa sobre la armella roscada de la figura esté dirigida a lo largo del eje positivo "X" y que "F_2" tenga un módulo mínimo. Determina este módulo, el ángulo "θ" y la fuerza resultante correspondiente.



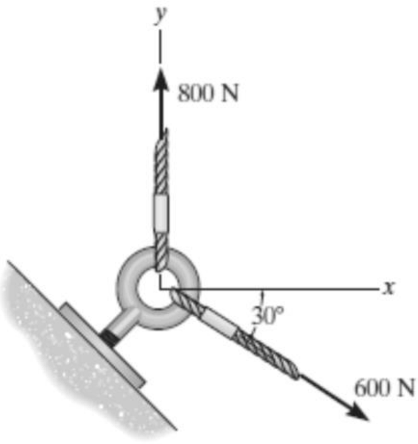
5. Determina el módulo de la fuerza resultante que actúa sobre la armella roscada y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje “X”.



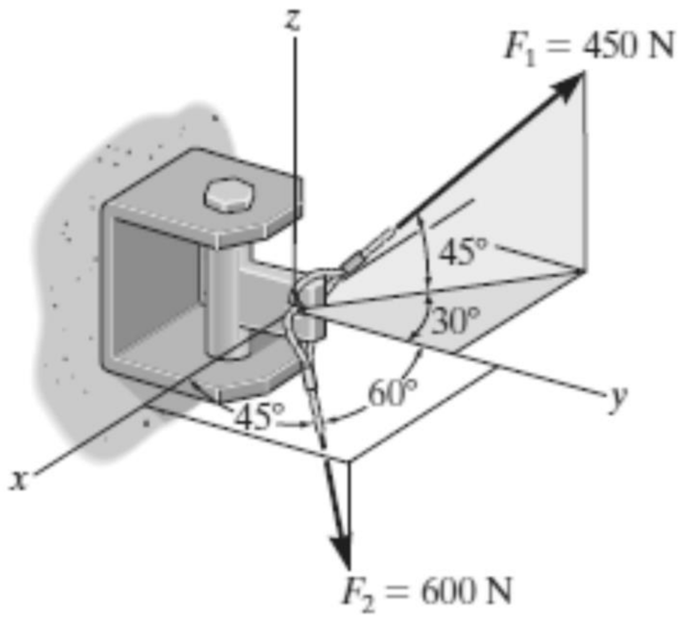
6. Dos fuerza actúan sobre el gancho. Determina la magnitud de la fuerza resultante.



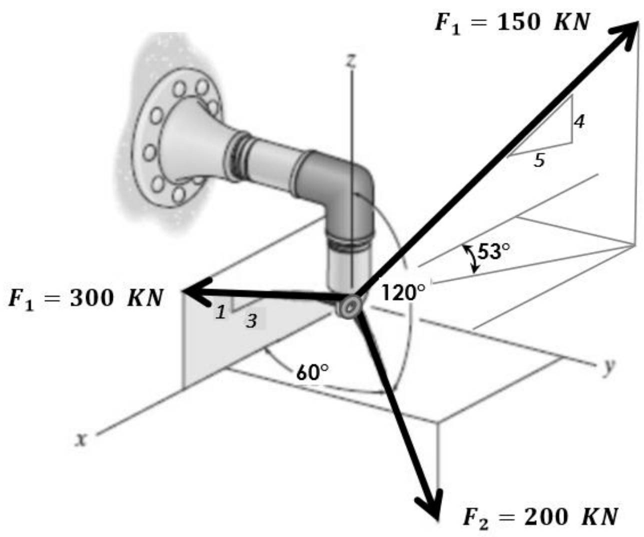
7. Determina la magnitud de la fuerza resultante y su dirección, medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje **X** positivo.



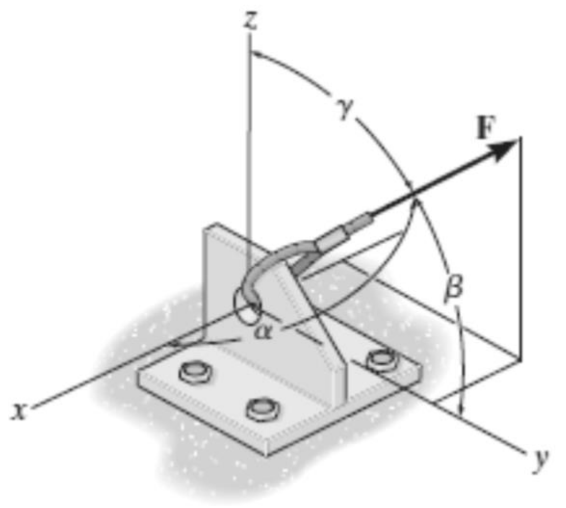
8. Determina el ángulo “γ” para F_2 y después expresa cada fuerza que actúa sobre la ménsula como un vector. También determina la magnitud y los ángulos directores de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula.



9. Los cables anclados en el spot light, soportan tensiones. Responda según se pide:
   A. Determina el vector resultante.
   B. Calcula el módulo del vector resultante.
   C. Calcula los ángulos directores del vector resultante.



10. La fuerza F actúa sobre la ménsula dentro del octante mostrado.
    Si F = 400N, β = 60° y γ = 45°, determina los componentes “x, y, z” de F. Además si las magnitudes de los componentes “x, y, z” de F son F_x = 300 N y F_z = 600 N, respectivamente y β = 60°, determina la magnitud de F y su componente “y”. Asimismo encuentra los ángulos directores α y γ.



SESIÓN N° 03

PRUEBA DE DESARROLLO Nº 01

Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria

- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.)*. México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados

- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

Unidad II

GEOMETRÍA ANALÍTICA

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de aplicar la geometría analítica en la resolución de ejercicios y problemas, utilizando el lenguaje algebraico para expresar en diferentes situaciones.

SEMANA N° 05

GEOMETRÍA ANALÍTICA – RECTAS
SESIÓN N° 01

TEMA: GEOMETRÍA ANALÍTICA: PUNTO – OPERACIONES BÁSICAS.

1. Calcula el perímetro del polígono cuyos vértices son:

A(2; –4), B(3; 6) y C(–1; –7)
A(3; –1), B(5; 6), C(–2; –8) y D(–4; 5)
A(5; 1), B(3; 6), C(1; –4) y D(–2; –3)

2. Determina el valor de "x"; si la distancia entre A(x; 2) y B(–1; –2) es 5.

3. La ordenada de un punto es 8 y la distancia al punto B(5; -2) es $2\sqrt{41}$. Determina la abscisa del punto.

4. Determina el valor de "a", si la distancia del punto A al punto B es 5u.
Si: A(m+3; 3a +1) y B(m – 1; 2a).

5. Si $\mathbf{P(a;a+1)}$ es un punto que equidista de $\mathbf{A(2;1)}$ y $\mathbf{B(-6;5)}$. Determina el valor de "a".

6. En el triángulo ABC, $\mathbf{A(0;0)}$; $\mathbf{B(4;6)}$; $\mathbf{C(8;0)}$. Determina la longitud de la mediana relativa al lado AC.

7. El triángulo ABC equilátero. Determina los valores de "k" y "p", si los vértices son: $\mathbf{A(2;2)}$; $\mathbf{B(4;k)}$; $\mathbf{C(8;p)}$ y la longitud de cada lado es $\sqrt{\mathbf{40}}\mathbf{u}$.

8. Sean los puntos A(2; 3), B (4; 1) y C (–1; 1). Calcula la longitud de la mediana correspondiente al vértice *C* del triángulo *ABC*.

9. Determina la coordenadas del punto que divide al segmento de recta A(4, –3) y B(1,4) en la razón de 2.

10. Una recta pasa por los puntos A(7; -3) y B(23; -6). Determina la coordenada del punto de intersección de la recta con eje de las abscisas.

11. El segmento limitado por los puntos A(1; -3) y B(4; 3), ha sido dividido en tres partes iguales, determina las coordenadas de los puntos de división.

12. Dado el triángulo de vértices **A(2; 5), B(3; 1) y C(2; -1)**. Calcula las coordenadas:
    A. Del baricentro G del triángulo.
    B. De los puntos medios M, N y P de los lados del triángulo ABC.
    C. Del baricentro G' del triángulo MNP.

13. Calcula el área del polígono cuyos vértices son:

A(2; –4), B(3; 6) y C(–1; –7)
A(3, –1), B(5, 6), C(–2, –8) y D(–4,5)
A(5,1), B(3,6), C(1, –4) y D(–2, –3)

14. Determina las coordenadas de los vértices del triángulo, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son M(-2; 1), N(5; 2) y P(2; -3).

15. En el triángulo de vértices $\mathbf{A(2;-5)}$; $\mathbf{B(1;-2)}$ y $\mathbf{C(4;7)}$. Calcula la longitud de la bisectriz interior del vértice "B".

16. Determina los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos A(–2; 5) y B(3; –6).

17. Determina las coordenadas del punto que divide al segmento de recta A(8; –5) y B(12; 4) en la razón de 6.

18. Sean los puntos *A*(5; 12), *B*(11; -6) y *C*(-14; -8). Calcula la longitud de la mediana correspondiente al vértice *C* del triángulo *ABC*.

19. Los vértices de un triángulo son: A(a; b), B(c; 9) y C(2; d). Si el punto medio de BC es $\mathbf{M}\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ y la coordenada del baricentro del triángulo es (-1; 1). Determina "$\mathbf{a+b}$".

20. Dado el triángulo de vértices A(15; 10), B(-2; -5) y C(8,-2). Determina la longitud de la altura respecto al vértice A.

SESIÓN N° 02

TEMA: LA RECTA, INCLINACIÓN DE UNA RECTA, PENDIENTE, ECUACIONES, RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.

1. Determina la distancia y la pendiente entre los puntos P_1 (2, –8) y P_2 (3, 5).
2. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta que por:

PUNTOS	PENDIENTE (m)	ÀNGULO DE INCLINACIÒN (θ)
A(3,–1) y B(6,2)		
P(0, –3) y Q(–3, 4)		
D(2, –3) y E(2, 4)		
A(4, 5) y B(-8, –6)		
C(–8, 5) y D(4, –3)		
E(5, 4) y F(-8,4)		
G(5, 6) y H(5, 20)		

3. Determina la ecuación de la recta en su forma general que pasa por los puntos C(2; –3) y D(4; 2).

4. Determina la ecuación general de la recta en cada caso:

A. Pasa por el punto A(-7; 6) y tiene una pendiente de $\mathbf{m}=\frac{3}{5}$.
B. Pasa por el punto B(-2; 7) y tiene una pendiente de $\mathbf{m}=-\frac{2}{3}$.
C. Pasa por el punto C(-4; -1) y tiene una pendiente de $\mathbf{m}=-\frac{4}{5}$.

5. Determina la ecuación general de la recta en cada caso:

A. Pasa por los puntos; $\mathbf{A}\left(\frac{2}{3};7\right)$ y $\mathbf{B}\left(\frac{7}{3};\frac{9}{2}\right)$.
B. Pasa por los puntos: A(3; 9) y B(-3; -9).
C. Pasa por los puntos: $\mathbf{C}\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{7}\right)$ y $\mathbf{D}\left(-\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$.

3. Determina la ecuación general de la recta, que pasa por A(1, 5), y es paralela a la recta $2x + y + 2 = 0$.

4. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto (2, −3) y es paralela a la recta que une los puntos (4, 1)) y (−2, 2).

5. Determina la ecuación general de la recta que pasa por (–2,3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

6. Determina la ecuación general de la recta perpendicular a $8x - y - 1 = 0$ y pasa por el punto P(−3, 2).

7. Determina la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A(2, 5) y B(4, −7).

8. Una recta de ecuación $x + 2y - 9 = 0$ es mediatriz de un segmento AB cuyo extremo A tiene por coordenadas (2, 1). Determina las coordenadas del otro extremo.

9. Dado el triángulo A(−1, −1), B(7, 5), C(2, 7); calcular las ecuaciones de las alturas y determinar el ortocentro del triángulo.

10. Determina el punto de intersección de las rectas de ecuaciones:
$2x - y - 1 = 0$ y $x - y + 1 = 0$.

11. Determina la ecuación de la recta en su forma general que pasa por los puntos C(2, –3) y D(4,2).
12. Calcula el área del triángulo que determinan la recta $x - 2y + 8 = 0$ y los ejes coordenados.
13. Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas r: $x + y - 1 = 0$ y s: $x - 2y - 5 = 0$. Uno de sus vértices es el punto A(1, –1). Halla los otros vértices.
14. Sea el triángulo de vértices A(4, 2), B(13, 5) y C(6, 6). Halla la ecuación de la altura que pasa por el vértice C.
15. Determina la ecuación general de la recta que pasa por (–2,3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.
16. Aplicando la condición de perpendicularidad, determina el vértice recto del triángulo es rectángulo A(3, 2), B(5, –4), C(1, –2).
17. Halla la ecuación general de la recta de pendiente m = 1/2, que forma con los ejes de coordenadas un triángulo de 16 unidades de área.

18. Dada la ecuación general de la recta, determina la pendiente, ordenada al origen, abscisa al origen y su gráfica.
    a) $\mathbf{5x - 7y + 12 = 0}$
    b) $\mathbf{3x + 5y - 13 = 0}$
19. Halla las ecuaciones de las rectas que:
    a) Pasa por los puntos A(2; 3) y B(-3; -2).
    b) Pasa por el punto A(1; 2) y es paralela a la bisectriz de primer cuadrante.
    c) Pasa por el punto P(5; 3) y lleva una dirección de 60º.
    d) Pasa por el punto de intersección de las rectas r: y = x y s: y = -3x + 2; lleva una dirección de 45º con el eje de abscisas.
20. Una recta es paralela a la que tiene por ecuación r ≡ 5x + 8y − 12 = 0, y dista 6 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación general?
21. Una recta es perpendicular a la que tiene por ecuación 5x − 7y + 12 = 0 y dista 4 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación general?

SESIÓN N° 03

TEMA: ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS, DISTANCIA DE UN PUNTO A LA RECTA, MEDIATRIZ, INTERSECCIÓN ENTRE DOS RECTAS.

1. Determina el ángulo agudo que forman los siguientes pares de rectas:
   a) r: 2x + 3y – 4 = 0, s: 3x + y + 5 = 0
   b) r: x – y – 3 = 0, s: x – 3y – 5 = 0
   c) $r: y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$, s: y = x + 2
2. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°, sabiendo que la recta final tiene una pendiente m = 3. Calcula la pendiente de la recta inicial.
3. Determina los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos. A(4, 2), B(6, –1), C(0, 1) .
4. En el triángulo de vértices A(2, –3), B(–1, 4) y C(0, 5) calcula:
   a) La altura correspondiente al vértice C.
   b) La ecuación de la mediatriz del lado AB.
   c) Su área.
5. Los puntos A(–2, –2) y B(1, 4) son vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice que está situado sobre la recta x + y – 1 = 0.
6. Calcula la distancia del punto (5, 2) a la recta 2x – 4y + 3 = 0.
7. Calcula la distancia entre el punto P(4, –1) y la recta que pasa por el punto A(2, 3) con pendiente de –3/4.
8. Calcula la distancia entre el punto A(–2, 1) y la recta que pasa por los puntos B(5, 4) y C(2, 3).
9. Determina la distancia entre las rectas paralelas:
   a) $\mathbf{9x + 16y + 72 = 0}$ y $\mathbf{9x + 16y - 75 = 0}$
   b) $\mathbf{x + 2y + 2 = 0}$ y $\mathbf{2x + 4y - 3 = 0}$
10. Determina la ecuación general de la altura que pasa por el vértice C del triángulo cuyos vértices son A(2, 3), B(5, 7) y C(–3, 4).

11. Determina la ecuación de la mediatriz del segmento que tiene por extremos A(1, 2) y B(3, –1).
12. Determina la ecuación general de la mediatriz que pasa por el lado AB, en el triángulo cuyos vértices son A(4,1) , B(2, –3) y C(–3, –5).
13. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto (4, 2) y es paralela a la recta 2x–3y+4=0.
14. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, –4) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(2, 3) y B(6, –1).
15. Determina la ecuación general de la mediana que pasa por el vértice A del triángulo cuyos vértices son A(2, 3), B(5, 7) y C(–3, 4).
16. Dadas las rectas $\mathbf{r: 2x - my + 7 = 0}$ y $\mathbf{S: 5x + 25y + 13 = 0}$, calcula "m" para que sean paralelas.
17. Dados los puntos $\mathbf{A(1;-2); B(3;2); C(-1;0)}$, calcula:
    a) Las ecuaciones de los lados del triángulo que tiene por vértices dicho puntos.
    b) Las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo.
    c) Las ecuaciones de las medianas a los mismos. (Mediana, recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto al mismo)
    d) Las coordenadas del baricentro. (Punto de intersección de las medianas)
18. En el paralelogramo ABCD se conocen las coordenadas de los vértices $\mathbf{A(1;-4); B(4;-1); C(6;-5)}$.
    a) Calcula las coordenadas del vértice D opuesto al A.
    b) Halla las ecuaciones de los lados del paralelogramo.
    c) Halla las ecuaciones de las diagonales del mismo.
    d) Halla las coordenadas del punto de intersección de las diagonales.
19. Dos vértices de un triángulo son A(3,1), B(6,4) y el tercero está sobre la recta de ecuación $\mathbf{r: 3x - y = 0}$. El área del triángulo es 9. Hallar el tercer vértice.
20. Un vértice de un cuadrado es el punto P(3,11) y una de sus diagonales se halla sobre la recta de ecuación $\mathbf{r: x - 2y + 4 = 0}$. Hallar las coordenadas de los otros vértices.
21. Un triángulo ABC tiene sus lados sobre las rectas de ecuaciones $\mathbf{3x - 2y + 2 = 0}$; $x + 2y - 10 = 0$, $3x - y + 5 = 0$. Calcula el perímetro y el área.
22. Halla la ecuación general de la recta perpendicular a la recta 4x + 3y – 12 =0 y que dista 5 unidades de longitud del origen de coordenadas.
23. Un triángulo rectángulo en A tiene dos vértices en los puntos A(1,3) y C(3,0). Halla las coordenadas del vértice B sabiendo que está situado en la recta 2x + y + 2 = 0.

Referencias bibliográficas

Básica
- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria
- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007). *Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados
- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRI4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

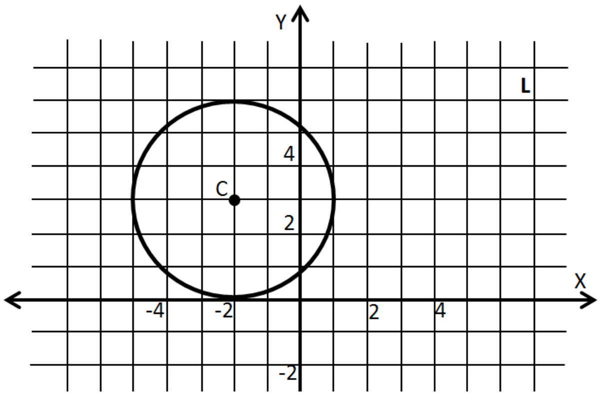
SEMANA N° 06

LA CIRCUNFERENCIA

SESIÓN N° 01

TEMA: LA CIRCUNFERENCIA: DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y ECUACIONES (ORDINARIA Y GENERAL)

1. Determina la ecuación canónica de la circunferencia que pasa por:
   A. P(– 3 ; – 4) y centro en el origen.
   B. Q(5 ; – 4) y centro en el origen.
2. Halla las coordenadas del centro y la longitud del radio. Si la ecuación ordinaria de la circunferencia es:
   A. $(x+7)^2+(y+3)^2=169$
   B. $(x-\sqrt{3})^2+(y+3\sqrt{2})^2=15$
3. Encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia si tiene:
   A. C(2 ; 5), r = 3
   B. C(4 ; – 7), r = $2\sqrt{7}$
4. De la gráfica mostrada escriba la ecuación ordinaria y luego la ecuación general de la circunferencia.



5. Encuentra la ecuación general de la circunferencia de centro (3 ; – 2) y radio 4.
6. Una circunferencia pasa por el punto (x ; 8) y su radio mide 10cm. Halla el valor de “x” si su centro está en C(3 ; 0) .
7. Una circunferencia pasa por el punto (12 ; y) y su radio mide 13cm. Halla el valor de “y” si su centro está en c(0 ; 4)
8. Reduzca cada ecuación a la forma estándar y dibuje la circunferencia:
   A. $x^2+y^2+6x-4x-12=0$
   B. $2x^2+2y^2-20x+8y-14=0$
   C. $3x^2+3y^2-30x-72y+75=0$
9. Halla la ecuación general de la circunferencia que pase por el origen que tenga radio igual a 13 y la abscisa de su centro sea −12.
10. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A(−1 ; 3), B(7 ; 4), obtenga su ecuación en su forma ordinaria y general.

11. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: P(1 ; −2), Q(5 ; 4) y R(10 ; 5).
12. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos de coordenadas P(1 ; 2), Q(1 ; 4) y R(2 ; 0).
13. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: M(0 ; 4), N(6 ; 0) y P(3 ; 8)

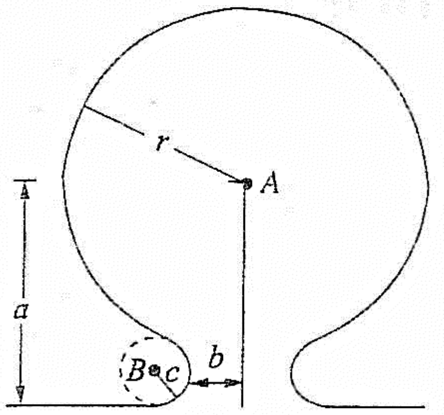
SESIÓN N° 02

TEMA: POSICIÓN RELATIVA DE CIRCUNFERENCIAS Y RECTAS.

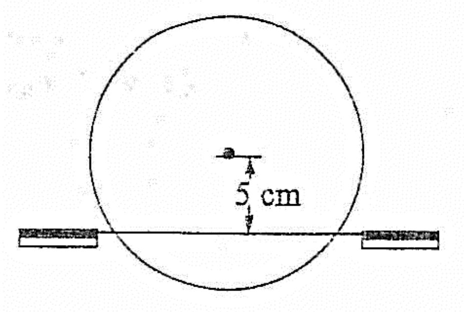
1. Dada las ecuaciones generales de circunferencia, determina el centro, el radio y esboce su gráfica:
   A. $36x^2+36y^2-24x+108y+95=0$
   B. $2x^2+2y^2-16x+12y+58=0$
   C. $4x^2+4y^2+28x-8y+60=0$
   D. $16x^2+16y^2-64x+8y+17=0$
2. Dadas las circunferencias:
   $$\begin{cases} x^2+y^2-6x-8y=0 \\ 2x^2+2y^2-12x-16y+18=0 \end{cases}$$
   Se pide:
   A. Comprobar que son concéntricas.
   B. Calcula el área de la corona circular que determinan.
3. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por el origen, el punto P(8 ; 6) y tiene el centro en la recta y = x – 1.
4. Determina la ecuación general de la circunferencia de centro (1 ; − 4) y sea tangente a la recta y = − x + 2.
5. Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: A(−4; −3), B(5 ; 10) y cuyo centro está sobre la recta 3x + y – 5 = 0.
6. Una circunferencia es tangente a la recta 2x – y + 1 = 0, en el punto (2 ; 5) y su centro se encuentra sobre la recta x + y = 9. Encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia.
7. Halla la ecuación general de la circunferencia, de manera que uno de sus diámetros sea el segmento que une los puntos (5, −1) y (− 3, 7).
8. Halla la ecuación general de la circunferencia de centro el punto (− 4, 2) y que sea tangente a la recta 3x + 4y – 16 = 0.
9. Halla la ecuación ordinaria de la circunferencia que tiene su centro en el punto C(−1; 4) y es tangente a la recta que pasa por los puntos A(3 ; − 2) y B(− 9; 3).
10. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia que pasa por los puntos P(2; 5) y Q(3; 12), sabiendo que la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda PQ es igual a $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

11. **Diseño Industrial.** Al diseñar matrices para punzonar una lámina metálica se utiliza la configuración que se muestra en la figura. Escriba la ecuación de la circunferencia

pequeña con centro en B tomando como origen el punto marcado con A. Utiliza los siguientes valores: r = 3 pulgadas, a = 3.25 pulgadas, b = 1 pulgada y c = 0.25 pulgadas.



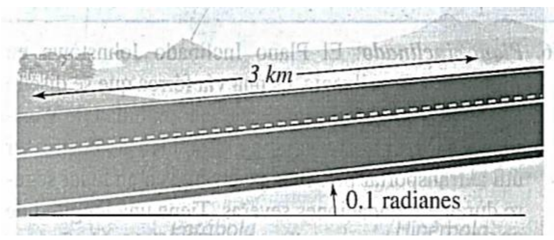
12. **Diseño industrial.** Un volante de 26 cm de diámetro va a montarse de modo que su eje esté a 5cm por arriba del nivel del piso, como se muestra en la figura.
    A. Escriba la ecuación de la trayectoria seguida por un punto en el borde. Utiliza la superficie del piso como el eje horizontal y la recta perpendicular que pasa por el centro como el eje vertical.
    B. Encuentra el ancho de la apertura en el piso, permitiendo un juego de **2cm** a ambos lados del volante.



SESIÓN N° 03

TEMA: REPASO DE RECTA Y CIRCUNFERENCIA
PRÁCTICA CALIFICADA N° 02

1. **Pendiente de un camino.** Un camino recto sube con una inclinación de 0.10 radianes a partir de la horizontal (vea la figura). Determina la pendiente del camino y el cambio en elevación en un tramo de tres kilómetros del camino.



2. **Inclinación de un techo**. Un techo sube 3 metros por cada cambio horizontal de 5 metros (vea la figura). Determina la inclinación del techo.

3. Dado el punto $P(-1; 0)$ y la recta $y = -3$, determina la ecuación de la recta paralela y recta perpendicular a dicha recta que paso pasa por el punto P.
4. Calcula los ángulos interiores al triangulo de vértices P(8 ; 2), Q(3 ; 8) y R(2 ; −2).
5. La recta determinada por los puntos A(3 ; 2) y B(−4 ; −6) es perpendicular a la recta definida por los puntos P(−7 ; 1) y Q(x ; 6). Calcula el valor numérico de "x".
6. Los puntos representan los vértices del triángulo ABC; A(−4 ;−5), B(3 ; 10) y C(6 ; 12). Determina el área del triángulo y la altura trazada desde el vértice B al lado AC.
7. Determina los ángulos interiores del triángulo de vértices P(8 ; 2), Q(3 ; 8) y R(2 ; −2).
8. Dibuja la circunferencia:
   A. $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 7 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 25 = 0$

9. Encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia que pasa por (7; 24) y centro en el origen.
10. Halla la ecuación ordinaria de la circunferencia, si tiene centro C(−3 ; 5) y radio r = 2.
11. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$. En el punto (4 ; 5).
12. Determina la ecuación general de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento de recta: $3x + 4y + 12 = 0$. Comprendido entre los ejes coordenados.
13. Determina la ecuación general de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje "x" y pasa por los puntos A(2 ; 2) y B(6 ; −4).
14. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia de radio 5 que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$ en el punto A(4,1).
15. Determina la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ que es perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$.

Referencias bibliográficas

Básica
- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012)*. *Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria
- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados
- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

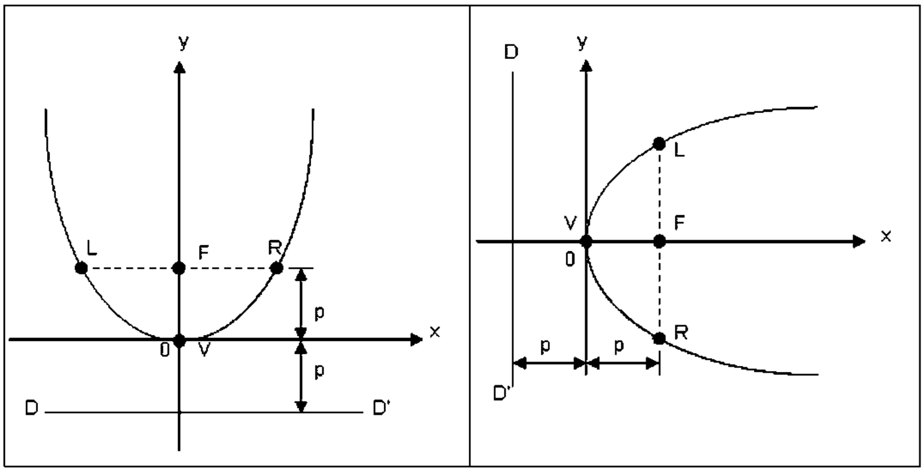
SEMANA N° 07

LA PARÁBOLA

SESIÓN N° 01

TEMA: LA PARÁBOLA: DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y ECUACIONES (ORDINARIA Y GENERAL)

1. Identifique los elementos de la Parábola:

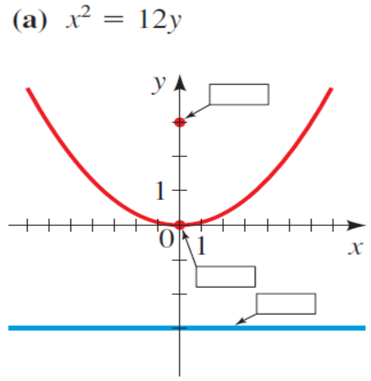


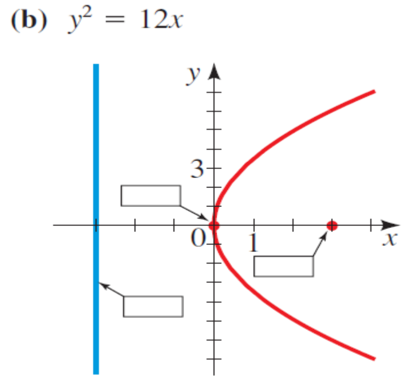
Vertical *Horizontal*

Elemento (Símbolo)	Elemento (Literal)
V	
F	
DD'	
P	
LR	
Y	

2. Complete los datos que faltan:
   A. La gráfica de la ecuación: $x^2 = 4py$ es una parábola con foco F(;) y directriz $y =$. Por lo tanto; la gráfica de la ecuación: $x^2 = 12y$ es una parábola con foco F(;) y directriz $y =$.
   B. La gráfica de la ecuación: $y^2 = 4px$ es una parábola con foco F(;) y directriz $x =$. Por lo tanto; la gráfica de la ecuación: $y^2 = 12x$ es una parábola con foco F(;) y directriz $x =$.

3. Asigne coordenadas al foco, ecuación de la directriz y coordenadas del vértice en las gráficas dadas para las parábolas de los Ejercicios 2.





4. En los ejercicios, encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con la(s) característica(s) dada(s) y vértice en el origen.
   A. Foco: (0, 3/2)
   B. Foco: (2, 0)
   C. Directriz: y = 3
   D. Directriz: x = –2
   E. Eje vertical y pasa por el punto (3, 5).
   F. Eje vertical y pasa por el punto (–4, –6).
   G. Eje horizontal y pasa por el punto (–2, 5).
   H. Eje horizontal y pasa por el punto (3, –2).

5. En los ejercicios, encuentre la forma estándar de la ecuación de la parábola con las características dadas.
   A. Vértice: (4, 3); Foco: (8, 3)
   B. Vértice: (–1, 2); Foco: (–1, 0)
   C. Vértice: (0, 3); directriz: y = 6
   D. Foco: (2, 2); Directriz: x = –4

6. En los ejercicios, encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola y trace su gráfica.
   A. $y = \frac{1}{2}x^2$
   B. $y^2 = -6x$
   C. $(x-3)^2 + 8(y+1) = 0$
   D. $(x+7) + (y-4)^2 = 0$

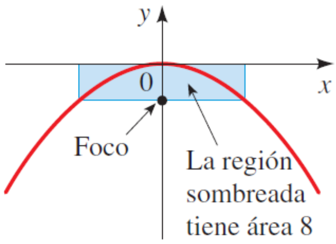
7. En los ejercicios, encuentre el vértice, foco y directriz dela parábola.
   A. $x = \frac{1}{4}(y^2 + 2y + 33)$
   B. $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$
   C. $3x^2 + 4x + 6y - 2 = 0$
   D. $5y^2 + x + y = 0$
   E. $4x^2 - 2x + 8y + 10 = 0$
   F. $7y^2 - 4x - 4 = 0$

8. En los ejercicios, se dan las ecuaciones de una parábola y una recta tangente a ella. Use una calculadora de gráficas para graficar ambas ecuaciones en la misma pantalla. Determine las coordenadas del punto de tangencia.

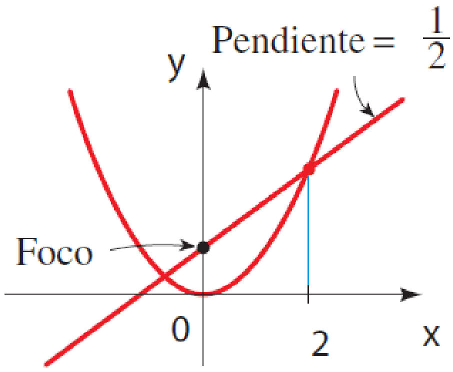
	Parábola	Recta tangente
A.	$y^2 - 8x = 0$	$x - y + 2 = 0$
B.	$x^2 + 12y = 0$	$x + y - 3 = 0$

9. En los ejercicios, encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado y encuentre la intersección de la recta con el eje X.
   A. $x^2 = 2y$; (4, 8)
   B. $y = -2x^2$; (–2, –8)
   C. $x^2 = 2y$; (–4, 8)
   D. $y = -2x^2$; (2, –8)

10. Determine la ecuación de la parábola cuya grafica se muestra a continuación.



11. Determine la ecuación de la parábola cuya grafica se muestra a continuación.



SESIÓN N° 02

TEMA: APLICACIONES, PUENTES, ARCOS, PARABÓLICAS Y OTROS

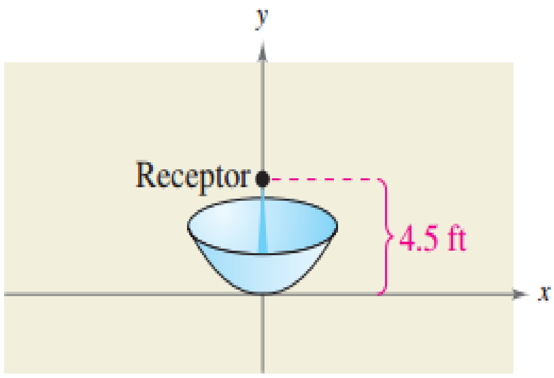
1. El ingreso R (en dólares) generado por la venta de x unidades de un conjunto de muebles para patio está dado por
$$(x - 106)^2 = -\frac{4}{5}(R - 14\,045)$$
Use una calculadora de gráficas para graficar la función y aproximar el número de ventas que maximizarán el ingreso.

2. Cada uno de los cables del puente Golden Gate está suspendido (en forma de parábola) entre dos torres que están a 1280 metros entre sí. Lo alto de cada una de las torres está 152 metros sobre la calzada. Los cables tocan la calzada a medio camino entre las torres.

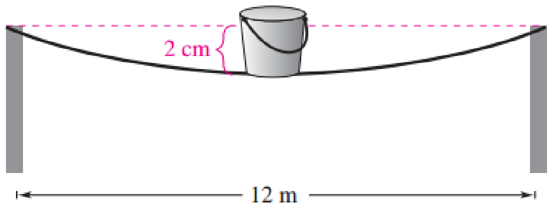
   A. Haga un bosquejo del puente. Localice el origen de un sistema de coordenadas rectangulares en el centro de la calzada. Marque las coordenadas de los puntos conocidos.
   B. Escriba una ecuación que modele los cables.
   C. Complete la tabla al hallar la altura y de los cables de suspensión sobre la calzada a una distancia de x metros del centro del puente.

Distancia, x	Altura, y
0	
100	
250	
400	
500	

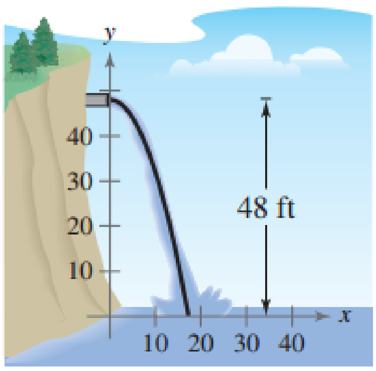
3. El receptor satelital de una antena parabólica está a 4.5 pies del vértice y se encuentra en el foco (vea figura). Escriba una ecuación para una sección transversal del reflector. (Suponga que el disco está dirigido hacia arriba y el vértice está en el origen.)



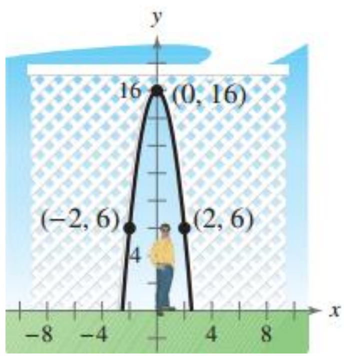
4. Una viga simple de soporte mide 12 metros de largo y tiene una carga en el centro (vea figura). El torcimiento de la viga en su centro es 2 centímetros. Suponga que la forma de la viga torcida es parabólica.
   A. Escriba una ecuación de la parábola. (Suponga que el origen está en el centro de la viga torcida.)
   B. ¿A qué distancia del centro de la viga es de 1 centímetro el torcimiento?



5. Sale agua de un tubo horizontal que está a 48 pies sobre el suelo. El chorro de agua que cae tiene la forma de una parábola cuyo vértice está en el extremo del tubo (vea figura). El chorro de agua cae al suelo en el punto $(10\sqrt{3},\ 0)$. Encuentra la ecuación de la trayectoria tomada por el agua.



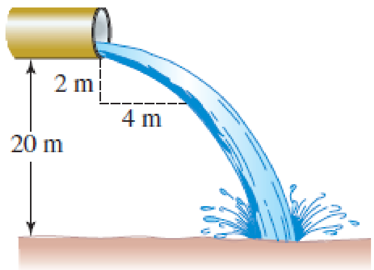
6. Un arco parabólico de malla mide 16 pies de alto en el vértice. A una altura de 6 pies, el ancho del arco mide 4 pies (vea figura). ¿Qué tan ancho es el arco de malla al nivel del suelo?



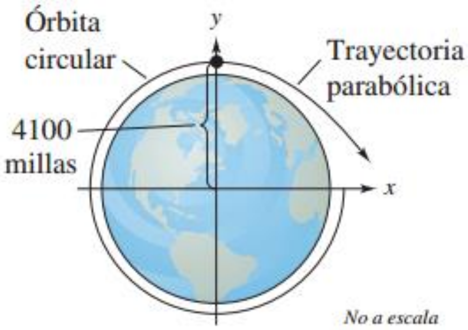
7. **Puente colgante**. Suponga que dos torres de un puente colgante están a 350 pies de distancia, y que el vértice del cable parabólico es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Si el cable está 1 pie arriba del asfalto en un punto a 20 pies del vértice, calcule la altura de las torres sobre el asfalto.

8. **Puente colgante**. Dos torres de 75 pies de alto, de un puente colgante con un cable parabólico, están a 250 pies de distancia. El vértice de la parábola es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Calcule la altura del cable, sobre el asfalto, en un punto a 50 pies de una de las torres.

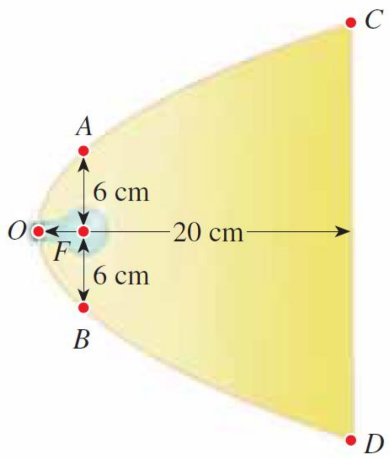
9. **Tubo de alcantarillado**. Suponga que el agua que sale por el extremo de un tubo horizontal describe un arco parabólico con su vértice en el extremo del tubo. Este tubo está a 20 metros sobre el suelo. En un punto a 2 metros abajo del extremo del tubo, la distancia horizontal del agua a una vertical que pase por el extremo del tubo es de 4 m. Vea la figura ¿Dónde el agua toca el suelo?



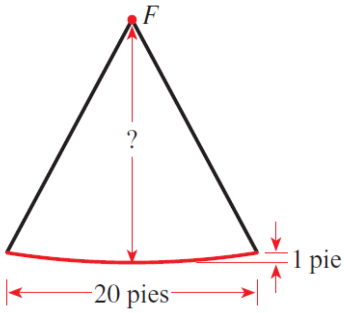
10. Un satélite en una órbita circular de 100 millas de altura alrededor de la Tierra tiene una velocidad de aproximadamente 17 500 millas por hora. Si esta velocidad se multiplica por $\sqrt{2}$, el satélite tendrá la velocidad mínima necesaria para escapar de la gravedad de la Tierra y seguirá una trayectoria parabólica con el centro de la misma como el foco (vea figura).
    A. Halla la velocidad de escape del satélite.
    B. Halla una ecuación del trayecto parabólico del satélite (suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas).



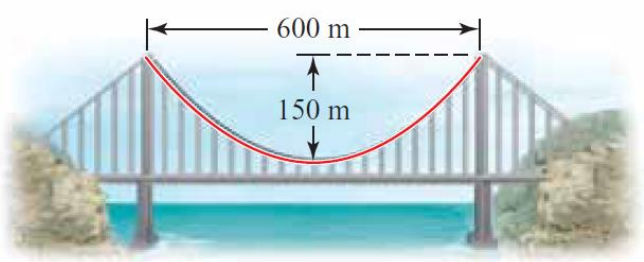
11. **Reflector Parabólico.** En la figura se muestra una lámpara con un reflector parabólico. La bombilla eléctrica está colocada en el foco y el diámetro focal es 12 centímetros.
    A. Encuentra una ecuación de la parábola.
    B. Encuentra el diámetro d(C;D) de la abertura, 20 cm del vértice.



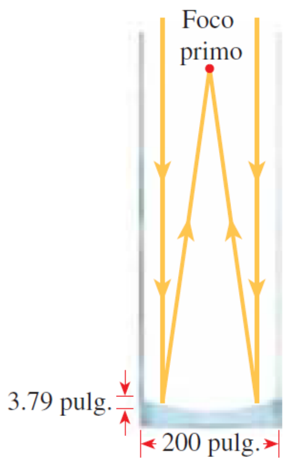
12. **Disco satelital**. Un reflector para disco satelital es parabólico en sección transversal, con receptor en el foco F. El reflector mide 1 pie de profundidad y 20 pies de ancho de borde a borde (vea la fi gura). ¿A qué distancia está el receptor del vértice del reflector parabólico?



13. **Puente Colgante**. En un puente colgante, la forma de los cables de suspensión es parabólica. El puente que se muestra en la figura tiene torres que están a 600 m una de la otra, y el punto más bajo de los cables de suspensión está a 150 m debajo de la cúspide de las torres. Encuentra la ecuación de la parte parabólica de los cables, colocando el origen del sistema de coordenadas en el vértice. [Nota: Esta ecuación se emplea para hallar la longitud del cable necesario en la construcción del puente.]

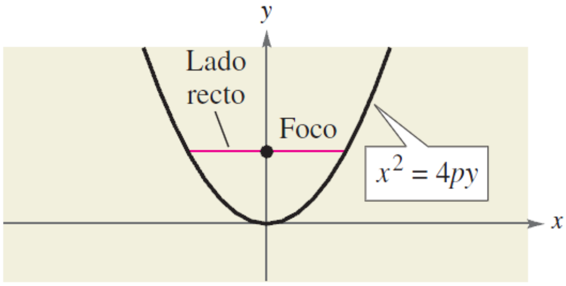


14. **Telescopio reflector.** El telescopio Hale del Observatorio de Monte Palomar tiene un espejo de 200 pulgadas, como se ve en la fi gura. El espejo está construido en forma parabólica que recolecta luz de las estrellas y la enfoca en el foco primo, es decir, el foco de la parábola. El espejo mide 3.79 pulgadas de profundidad en su centro. Encuentra la longitud focal de este espejo parabólico, es decir, la distancia del vértice al foco.



15. **RAZONAMIENTO GRÁFICO**. Considere la parábola $x^2 = 4py$.

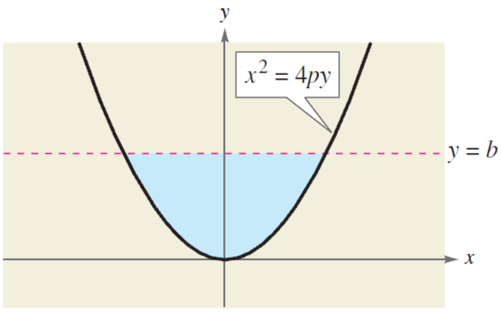
A. Use una calculadora de gráficas para graficar la parábola para $p = 1$; $p = 2$; $p = 3 \; y \; p = 4$. Describa el efecto sobre la gráfica cuando p aumenta.
B. Localice el foco para cada parábola del inciso (a).
C. Por cada parábola del inciso (a), encuentre la longitud del lado recto (vea figura). ¿Cómo puede determinarse la longitud del lado recto directamente de la forma normal de la ecuación de la parábola?



16. **Diana.** Un lanzador de dardos suelta un dardo a 5 pies sobre el suelo. El dardo se arroja horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica. Llega al suelo a $10\sqrt{10}$ pies del lanzador. A una distancia de 10 pies del lanzador, ¿a qué altura debe colocarse la diana para que el dardo le acierte?

17. **Trayectoria balística**. La posición vertical de un proyectil se determina mediante la ecuación $y=-16t^2$, y la posición horizontal con $x=40t$, para $t \geq 0$. Elimine t de las ecuaciones para demostrar que la trayectoria del proyectil es un arco parabólico. Grafique la trayectoria del proyectil.

18. **GEOMETRÍA.** El área de la región sombreada de la figura es $A = \frac{8}{3}p^{1/2}b^{3/2}$



A. Encuentra el área cuando $p = 2 \; y \; b = 4$.
B. Dé una explicación geométrica de por qué el área se aproxima a 0 cuando p se aproxima a 0.

SESIÓN N° 03

REPASO: VECTORES, RECTAS, CIRCUNFERENCIA Y PARÁBOLA

1. De los vectores: $\vec{m} = -2i + 3j;\quad \vec{n} = 8i + j$
   Encuentra $|\vec{m}|$, $\vec{m} + \vec{n}, \vec{m} - \vec{n},\ 2\vec{m}\ \ y\ 3\vec{m} - 2\vec{n}$.

2. De los vectores: $m = 2i + j;\ \ n = i - 2j$
   Encuentra $|\vec{m}|$, $\vec{m} + \vec{n}, \vec{m} - \vec{n},\ 2\vec{m}\ \ y\ 3\vec{m} - 2\vec{n}$.

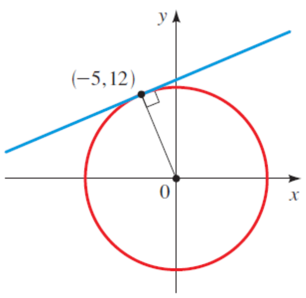
3. Encuentra el vector con punto inicial P(0, 3) y punto terminal Q(3,-1).

4. Nos dan dos vectores: $\vec{u} = 3i - 2j + k;\ \ \vec{v} = 3i + j - 3k$
   A. Encuentra el producto punto: $\vec{u}.\vec{v}$
   B. Encuentra el producto $\vec{u}x\vec{v}$.
   C. ¿u y v son perpendiculares? Si no lo son, encuentre el
   D. Angulo entre ellos.

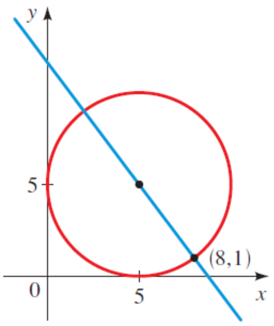
5. Encuentra la ecuación para la recta que pasa por los puntos (-1, -6) y (2, -4).
6. Encuentra la ecuación para la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta 3x+15y=22.

7. Encuentra la ecuación para la recta que pasa por el punto (5, 2) y es paralela a la recta que pasa por (-1, -3) y (3, 2).

8. Determina la ecuación general para la circunferencia y la recta de la figura.

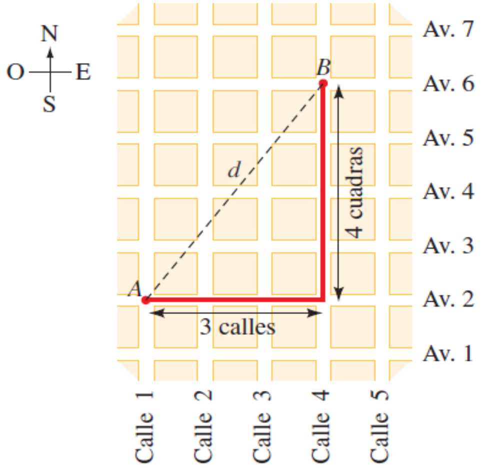


9. Determina la ecuación general para la circunferencia y la recta de la figura.



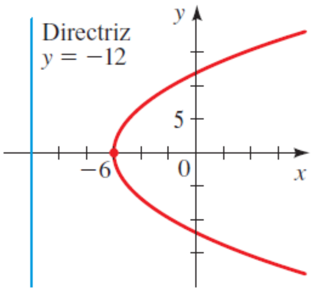
10. Determina el área de la región que está fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ pero dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$.

11. Distancias en una ciudad Una ciudad tiene calles que corren de norte a sur y avenidas que corren de oriente a poniente, todas igualmente espaciadas. Calles y avenidas están numeradas en forma secuencial, como se ve en la figura siguiente. La distancia a pie entre los puntos A y B es de 7 manzanas, es decir, 3 manzanas al oriente y 4 manzanas al norte. Para hallar la distancia d en línea recta, debemos usar la Fórmula para Distancias.
    A. Encuentra la distancia en línea recta (en manzanas) entre A y B.
    B. Encuentra la distancia a pie y la distancia en línea recta entre la esquina de la Calle 4 y la Avenida 2, y la esquina de la Calle 11 y la Avenida 26.
    C. ¿Qué debe ser cierto en relación con los puntos P y Q si la distancia a pie entre P y Q es igual a la distancia en línea recta entre P y Q?.



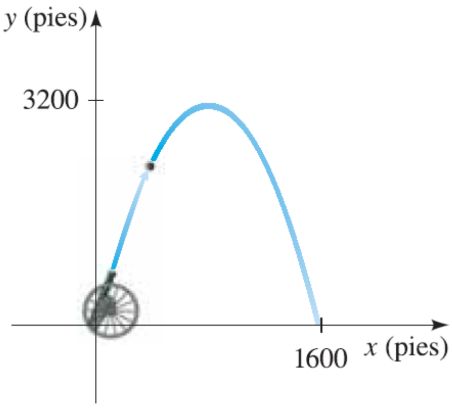
12. **Punto medio.** Dos amigos viven en la ciudad descrita en el Ejercicio 11, uno en la esquina de la Calle 3 y la Avenida 7, el otro en la esquina de la Calle 27 y la Avenida 17. Con frecuencia se ven en una cafetería que está a la mitad de distancia entre sus casas.
    a) ¿En cuál crucero está ubicada la cafetería?
    b) ¿Cuánto debe caminar cada uno para llegar a la cafetería?

13. Encuentra una ecuación general para la cónica cuya gráfica se muestra.



14. Determina la ecuación ordinaria de $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$.

15. **Trayectoria de una bala de cañón.** Un cañón dispara una bala como se ve en la fi gura. La trayectoria de la bala es una parábola con vértice en el punto más alto de la trayectoria. Si la bala cae al suelo a 1600 pies del cañón y el punto más alto que alcanza es 3200 pies sobre el suelo, encuentre una ecuación para la trayectoria de la bala. Coloque el origen en el lugar donde está el cañón.



Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria

- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados

- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

SEMANA N° 08

LA ELIPSE

SESIÓN N° 01

TEMA: PRUEBA DE DESARROLLO Nº2

SESIÓN N° 02

TEMA: LA ELIPSE, DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y ECUACIONES (ORDINARIA Y GENERAL)

1. De las siguientes ecuaciones, determina: centro, vértices, focos y luego traza la gráfica.

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	C. $\frac{y^2}{144}+\frac{x^2}{81}=1$
B. $\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{6}=1$	D. $\frac{9x^2}{16}+\frac{4y^2}{25}=1$

2. De las siguientes ecuaciones, determina: centro, vértices, focos y luego traza la gráfica.

A. $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$	C. $\frac{(y-8)^2}{25}+\frac{(x+3)^2}{4}=1$
B. $\frac{x^2}{4/9}+\frac{(y+1)^2}{9/25}=1$	D. $\frac{(x+2)^2}{12}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

3. De las siguientes ecuaciones determina: lado recto, excentricidad y ecuaciones ordinarias de las directrices.

A. $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$
B. $9x^2+4y^2-54x+40y+37=0$

4. De las siguientes ecuaciones determina: vértices, focos y ecuaciones ordinarias de las directrices.

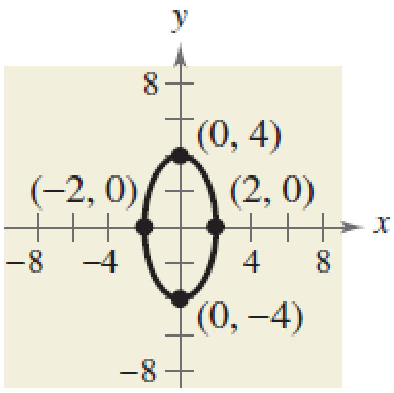
A. $6x^2+2y^2+18x-10y+2=0$
B. $x^2+4y^2-6x+20y-2=0$

5. De las siguientes ecuaciones determina: lado recto, excentricidad y ecuaciones ordinarias de las directrices.

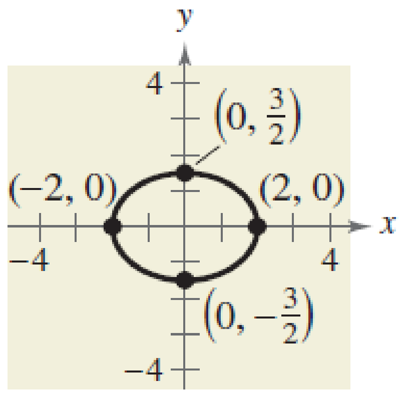
A.	$\mathbf{16x^2+25y^2-32x+50y+16=0}$
B.	$\mathbf{9x^2+25y^2-36x-50y+60=0}$

6. Determina la ecuación general de la elipse:

A.

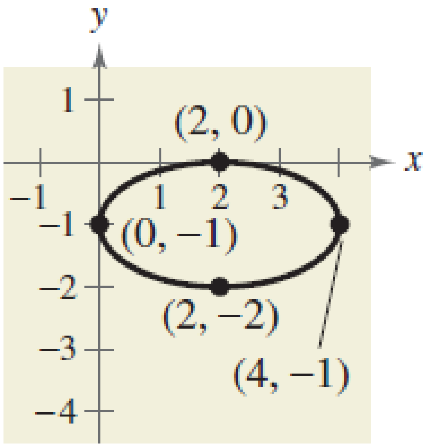


B.

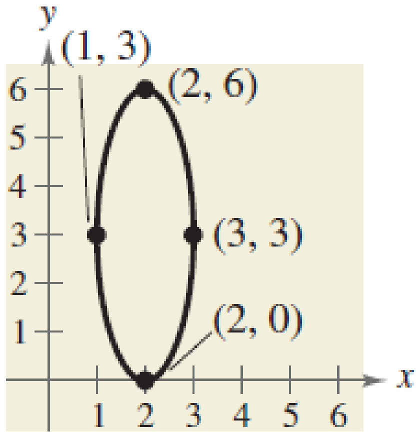


7. Determina la ecuación general de la elipse:

A.



B.



8. Determina la ecuación general de la elipse, con los siguientes datos:

A.	Vértices: (0; 4), (4; 4); eje menor con longitud 2.
B.	Focos: (0; 0), (0; 8); eje mayor con longitud 16.
C.	Centro: (0; 4); a = 2c; vértices: (-4; 4), (4; 4).
D.	Vértices: (0; 2), (4; 2); puntos extremos del eje menor: (2; 3), (2;1)
E.	Vértices: (0; ±8) y excentricidad e = 0,5.

9. Halla la ecuación de la elipse con centro en (0; 0), eje focal en el eje Y, que pasa por P(1; 4) y la relación del lado recto a la semidistancia focal es $\sqrt{2}$.

10. Una elipse es tangente a una circunferencia de tal manera que sus focos se encuentran también sobre la circunferencia. ¿Cuál es la excentricidad de la elipse?

11. Los focos de una elipse son: $F_1(-2;-2)$ y $F_1(4;-2)$. Halla la ecuación general de la elipse, si uno de sus vértices está sobre la recta $L_1: x-y-8=0$.

12. Los focos de una elipse son $F_1(3;1)$ y $F_2(-1;1)$. Halla la ecuación de la elipse sí uno de los extremos del eje menor está en la recta: $L_1: x-2y-3=0$.

13. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje focal sobre el eje Y, pasa por $P(3;-2\sqrt{6})$ y la relación del lado recto a la semidistancia focal es 3.

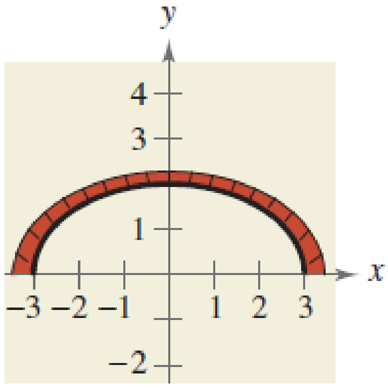
14. Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, distancia entre las directrices perpendiculares al eje X es $\frac{50}{3}$ y la distancia focal es 12.

15. Hallar la ecuación de la elipse en forma general, coordenada del foco (-1; -1), ecuación de la directriz x = 0, y excentricidad $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

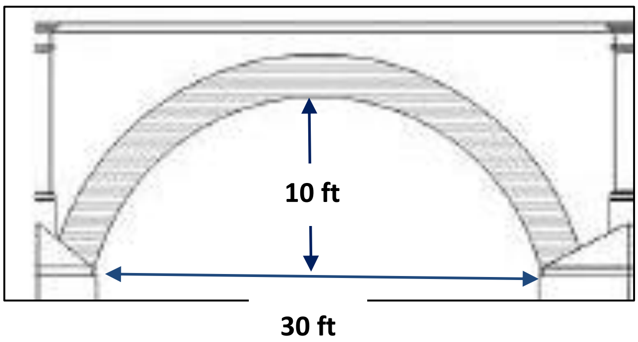
SESIÓN N° 03

TEMA: APLICACIONES DE LA ELIPSE

1. **Arquitectura:** Un arco de chimenea se ha construido en forma de una semielipse. La abertura debe tener una altura de 2 pies en el centro y un ancho de 6 pies a lo largo de la base (ver figura). El contratista traza el perfil de la elipse usando tachuelas como se describe en el inicio de ésta sección. Determina las posiciones de las tachuelas y la longitud de la cuerda.



2. El arco de un puente es semieliptico, con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 pies de longitud y su parte más alta con respecto al suelo mide 10 pies. Determina la altura del arco a 6 pies del centro de la base.

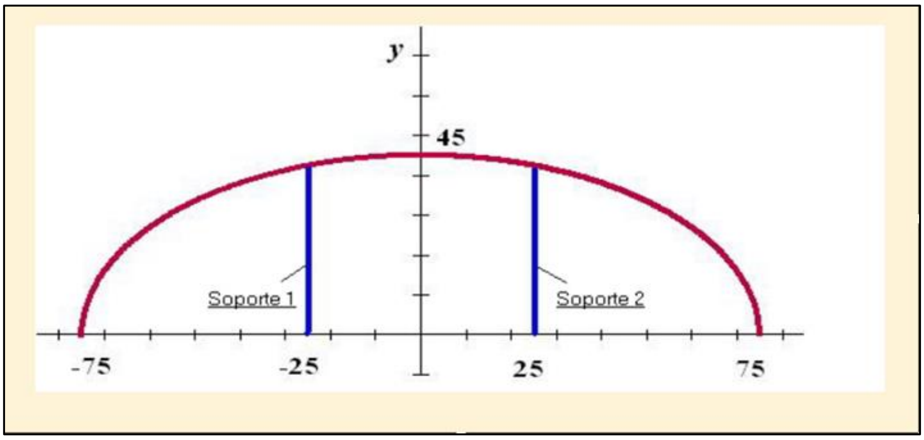


3. **Arquitectura:** Un arco semieliptico sobre un túnel, para un camino en un sentido a través de una montaña, tiene un eje mayor de 50 pies y una altura en el centro de 10 pies.
   A. Dibuja un sistema coordenado rectangular sobre el bosquejo del túnel con el centro del camino entrando al túnel en el origen. Identifica las coordenadas de los puntos conocidos.
   B. Determina una ecuación del arco semieliptico sobre el túnel.
   C. Usted conduce un camión que tiene un ancho de 8 pies y una altura de 9 pies. ¿Pasará el camión por la abertura del arco?

4. Una pista de carros tiene forma de elipse, el eje mayor mide 10 km y el eje menor 6 km. Determina la distancia a que se encuentra un carro del centro de la pista en el momento en que pasa a la altura de uno de los focos.

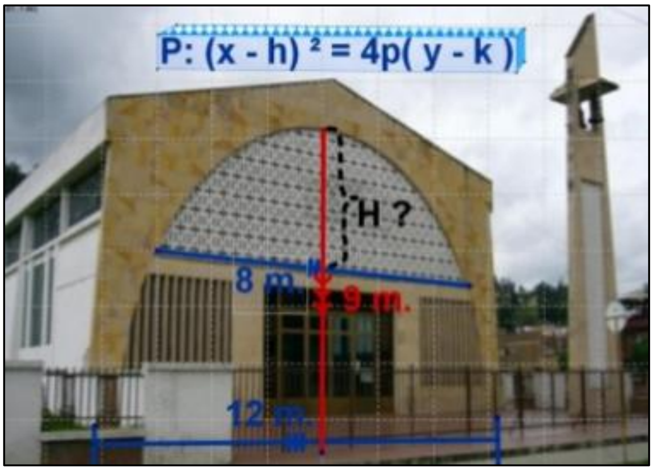
5. El arco semieliptico en el puente de concreto que se muestra en la figura debe tener un claro de 12 pies sobre el agua y salvar una distancia de 40 pies. ¿Qué altura debe tener el claro arriba de 5 pies desde la orilla?

6. Un arco con forma de semielipse tiene una altura máxima de 45 m y un claro de 150 m. Determine la longitud de dos soportes verticales situados de manera que dividan el claro en tres espacios iguales.



7. La puerta de la entrada a la Iglesia de Maracará Ancash tiene la forma semielíptica (ver la figura), tiene 4,86 metros de alto y 3,30 metros de base. Toda la parte superior es una división de alto relieve cuya imagen representa la crucifixión de Cristo y cuya base es paralelo al piso y mide 2 metros. ¿Cuál es la altura máxima de dicha división de alto relieve?

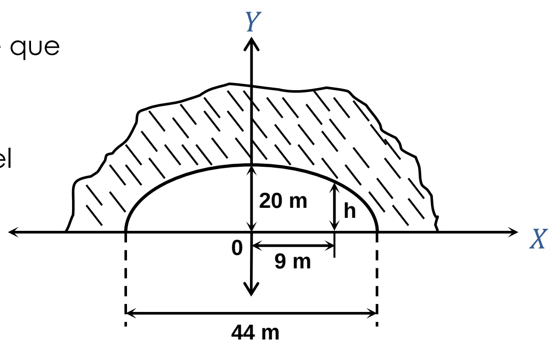
8. La fachada de una iglesia tiene la forma parabólica (ver la figura), de 9 metros de alto y 12 metros de base. Toda la parte superior es una ventana de vidrio cuya base es paralelo al piso y mide 8 metros. ¿Cuál es la altura máxima de dicha división de vidrio?



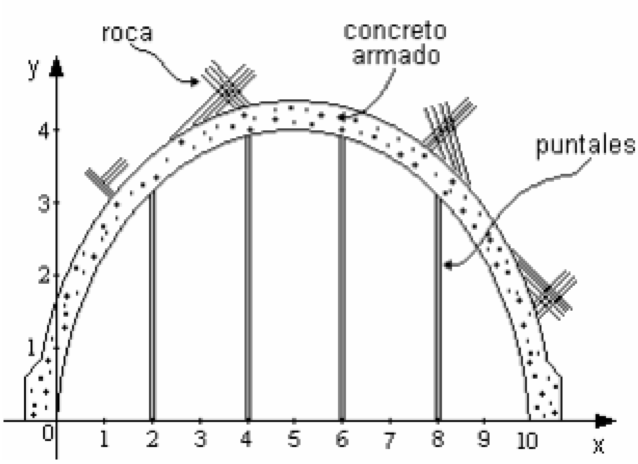
9. Se necesita hacer un túnel en una montaña por donde debe pasar una carretera, el arco para dicho túnel debe tener forma semielíptica, con el eje mayor horizontal de 44 m y la parte más alta de 20 m por encima de la carretera. De acuerdo con esto:

   A. Determina la ecuación general de la elipse que describe la forma del túnel.

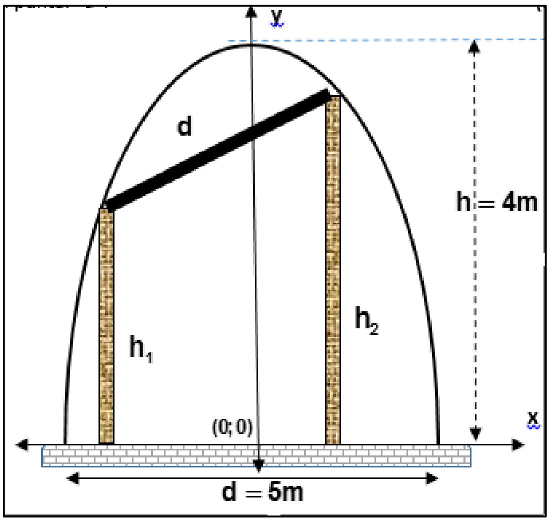
   B. Calcula la altura que tiene el arco a 9 m del centro de la carretera.



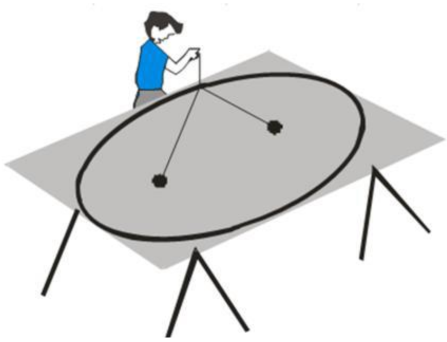
10. Un arco semieliptico de concreto armado, tiene un claro (distancia entre los apoyos) de 10 metros y una altura máxima de 4 metros (ver figura). Para construir dicho arco es necesario apuntarlo a distancias cada 2 metros, se pide determinar la altura de cada puntal.



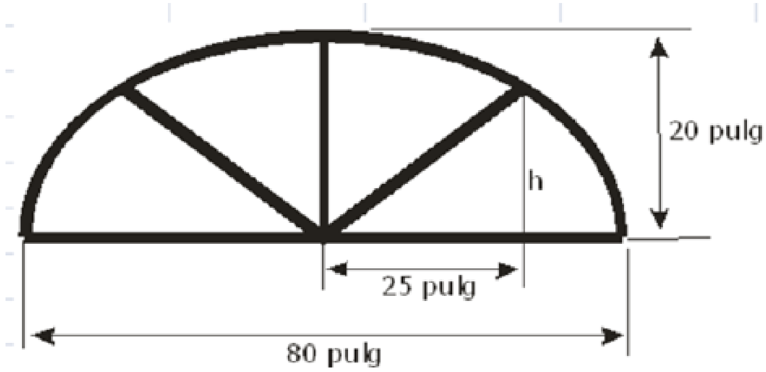
11. Un túnel que conduce a una operación minera subterránea tiene la sección semielíptica de 5 metros de base y 4 metros de altura. Por fallas geo mecánicas de las rocas, el sostenimiento se debilitó un tramo. Por lo que el ingeniero de seguridad ordena provisionalmente poner dos puntales a 1 m y 1,5 m del centro respectivamente y un tercero para armar el cuadro. Determina:
    A. La longitud de los puntales h_1 y h_2.
    B. La longitud del puntal "d".



12. Un carpintero construirá la cubierta de una mesa elíptica a partir de una hoja de madera contrachapada (triplay), de 4 por 8 pies. Trazará la elipse con el método de "tachuelas e hilo". ¿Qué longitud de cordón usará, y a que distancia clavará las tachuelas si la elipse debe tener el tamaño máximo que admita la hoja de madera contrachapada?



13. Un frontón de una puerta se construye con la forma de la mitad superior de una elipse, como se ve en la siguiente figura. El frontón tiene 20 pulgadas de alto en su punto de máxima altura, y 80 pulgadas de ancho en su base. Calcula la altura del frontón a 25 pulgadas del centro de la base.



14. La orbita que describe la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente una elipse, con el sol en uno de sus focos. Si el eje mayor de la órbita elíptica es de 300 000 km y la excentricidad es de 0,017 aproximadamente. Determina las distancias del afelio y perihelio.

15. Con una excentricidad de 0,25, la órbita de Plutón es la más excéntrica en el sistema solar. La longitud aproximada del eje menor de su órbita es 10 000 millones de kilómetros. Determina la distancia de Plutón al Sol en el perihelio y en el afelio.

Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria

- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados

- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRI4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

SEMANA N° 09

LA HIPÉRBOLA

SESIÓN N° 01

Evaluación parcial

SESIÓN N° 02

TEMA: LA HIPÉRBOLA, DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y ECUACIONES (ORDINARIA Y GENERAL)

1. Trace la gráfica de cada ecuación, encuentre las coordenadas de los focos y también las longitudes de los ejes transversal y conjugado.
   a) $9x^2 - 16y^2 = 144$
   b) $16y^2 - 9x^2 = 144$
   c) $2x^2 - y^2 = 10$
   d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2. En los ejercicios, determina el centro, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.
   a) $x^2 - y^2 = 1$
   b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{81} = 1$
   c) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$
   d) $\frac{(x+3)^2}{144} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

3. En los ejercicios, determina el centro, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.
   a) $x^2 - 9y^2 + 36y - 72 = 0$
   b) $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$
   c) $x^2 - 9y^2 + 2x - 54y - 80 = 0$
   d) $16y^2 - x^2 + 2x + 64y + 63 = 0$

4. En los ejercicios transforme cada ecuación en la forma ordinaria. Determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, la excentricidad, lado recto, longitud del eje transverso y grafíquela.
   a) $-9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y - 144 = 0$
   b) $16x^2 - 25y^2 - 160x = 0$
   c) $x^2 - y^2 - 4x = 0$
   d) $x^2 - y^2 - 4x - 4y = 0$

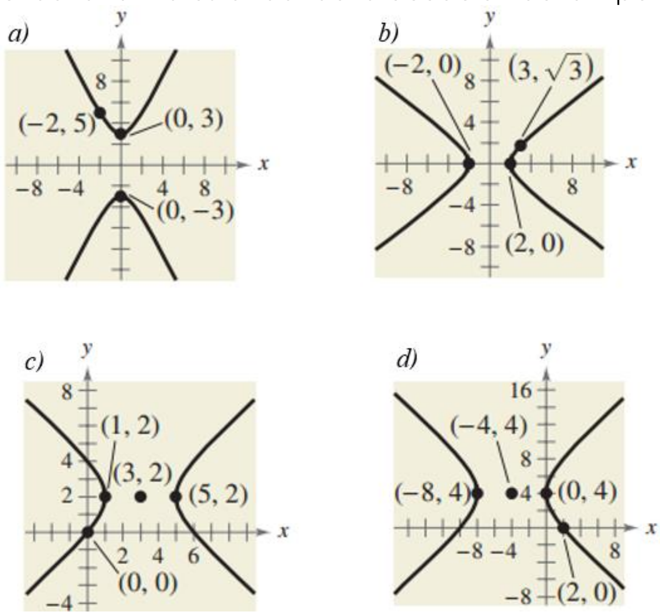
5. En los ejercicios, encuentre el centro, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Use una calculadora de gráficas para graficar la hipérbola y sus asíntotas.
   a) $2x^2 - 3y^2 = 6$
   b) $6y^2 - 3x^2 = 18$
   c) $4x^2 - 9y^2 = 36$
   d) $25x^2 - 4y^2 = 100$
   e) $9y^2 - x^2 + 2x + 54y + 62 = 0$
   f) $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

6. En los ejercicios, encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con las características dadas y centro en el origen.
   a) Vértices: $(0, \pm 2)$; Focos: $(0, \pm 4)$
   b) Vértices: $(\pm 1, 0)$; asíntotas: $y \pm 5x$
   c) Vértices: $(0, \pm 3)$; asíntotas: $y = \pm 3x$

7. En los ejercicios, encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con las características dadas.
   a) Vértices: $(2, 0)$ y $(6, 0)$; Focos: $(0, 0)$ y $(8, 0)$
   b) Vértices: $(2, 3)$ y $(2, -3)$; Focos: $(2, 6)$ y $(2, -6)$

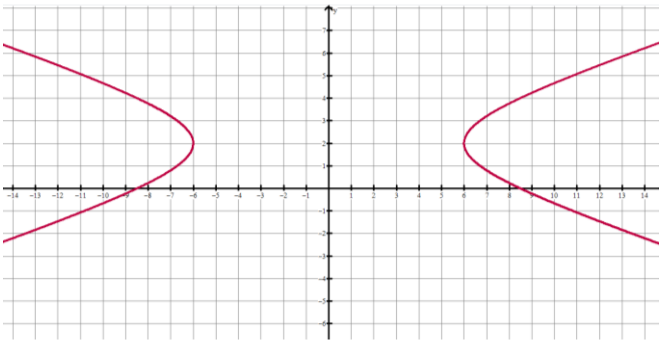
8. En los ejercicios, encuentre la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con las características dadas.
   a) Vértices: $(2, 3)$ y $(2, -3)$; pasa por el punto $(0, 5)$
   b) Vértices: $(-2, 1)$ y $(2, 1)$; pasa por el punto $(5, 4)$
   c) Vértices: $(1, 2)$ y $(3, 2)$; asíntotas: $y = x$, $y = 4 - x$
   d) Vértices: $(3, 0)$ y $(3, 6)$; asíntotas: $y = 6 - x$, $y = x$

9. En los ejercicios, escriba la forma estándar de la ecuación de la hipérbola.



10. Los focos de la gráfica de la ecuación $14x^2 + 8y^2 - 28x - 64y + 30 = 0$ son los vértices de una hipérbola y a su vez los focos de esta última coincide con los vértices de la primera gráfica. Determina la ecuación de la hipérbola

11. De la gráfica mostrada determina su ecuación general si tiene como focos $(\pm 2\sqrt{10}; 2)$.

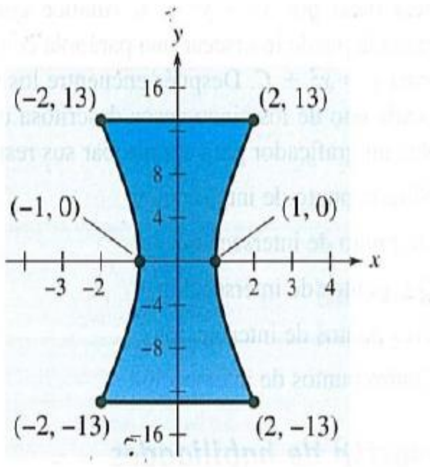


12. Determina los centros, los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica empleando las asíntotas como una ayuda.
$\mathbf{9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0}$.

13. Determina la ecuación de la hipérbola si te dan los siguientes datos.
    A. V(3, 4), V'(3, 0) F(3,5), F'(3, -1).
    B. V(2, 4),V'(6, 4), excentricidad = 3/2
    C. V(3, 3), V'(3, -3), LR = 8/3

14. Se tienen los vértices (0;2); (6;2) y las asíntotas $\mathbf{y = \frac{2}{3}x;\ \ y = 4 - \frac{2}{3}x}$. Determina la ecuación general de la misma.

15. **Arte:** Una escultura tiene una sección transversal hiperbólica (ver la figura)



A. Determine la ecuación que modele los lados de la curva.
B. Cada unidad en el sistema coordenado representa 1 pie. Determine el ancho de la escultura a una altura de 5 pies.

SESIÓN N° 03

TEMA: EJERCICIOS DE LA HIPÉRBOLA

1. Determina la ecuación de la hipérbola con las propiedades dadas. Cada hipérbola tiene su centro en (0,0)
   a) Foco en (6,0), vértice en (4,0)
   b) Foco en (12,0), vértice en (9,0)
   c) Foco en (0,5), vértice en (0,-3)
   d) Foco en (0,-4), vértice en (0,2)
   e) Foco en (4,0), longitud del eje conjugado, 6.

2. Determina los centros, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.
   a) $x^2 - y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$
   b) $2x^2 - 2y^2 - x - y = 0$
   c) $3x^2 - 3y^2 + x = 0$
   d) $2x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0$
   e) $3x^2 - 2x + 4y = 0$
   f) $x^2 - 5y^2 + 25y + 2x = 0$

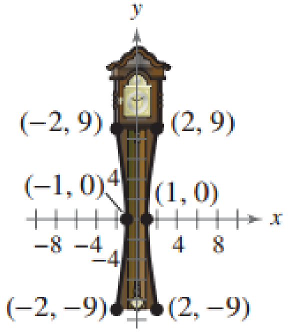
3. Determina los centros, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.
   a) $\mathbf{9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0}$
   b) $\mathbf{x^2 - 9y^2 + 36x - 72 = 0}$

4. De $\mathbf{9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0}$, determina:
   a) La coordenada del centro.
   b) Las coordenadas de los focos.
   c) Las coordenadas de los vértices.
   d) Ecuaciones de las asíntotas.

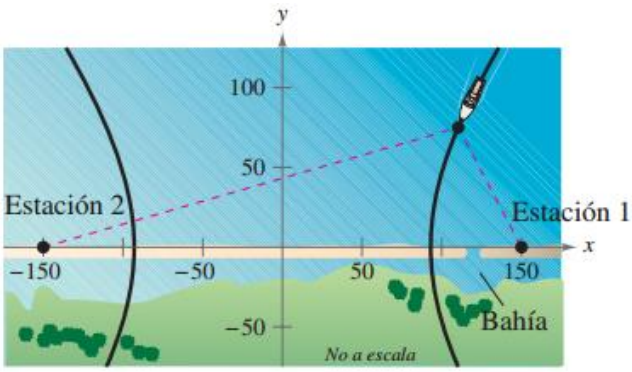
5. Determina la ecuación general de la hipérbola de centro (0; 0), un vértice (3; 0) y ecuación de una asíntota $2x - 3y = 0$.

6. Tres estaciones de escucha situadas en (3300, 0), (3300, 1100) y (–3300, 0) vigilan una explosión. Las dos últimas estaciones detectan la explosión 1 segundo y 4 segundos después de la primera, respectivamente. Determina las coordenadas de la explosión. (Suponga que el sistema de coordenadas se mide en pies y que el sonido viaja a 1100 pies por segundo.)

7. La base para el péndulo de un reloj tiene forma de hipérbola (vea figura).
   A. Escriba una ecuación de la sección transversal de la base.
   B. Cada unidad del plano de coordenadas representa 1/2 pie. Encuentre el ancho de la base del péndulo a 4 pulgadas del inciso más baja.



8. La radionavegación a larga distancia para aviones y barcas utiliza pulsos sincronizados transmitidos por estaciones muy separadas entre sí. Estos pulsos viajan a la velocidad de la luz (186 000 millas por segundo). La diferencia en los tiempos de llegada de estos pulsos en un avión o barco es constante en una hipérbola que tiene las estaciones transmisores como focos. Suponga que dos estaciones, situadas a 300 millas entre sí, están ubicadas en el sistema de coordenadas rectangulares en puntos con coordenadas (–150, 0) y (150, 0) y que un barco está viajando sobre una trayectoria hiperbólica con coordenadas (x, 75) (vea figura).



   A. Encuentre la coordenada x de la posición del barco si la diferencia en tiempo entre los pulsos desde las estaciones transmisoras es 1000 microsegundos (0.001 de segundo).
   B. Determina la distancia entre el barco y la estación 1 cuando el barco llegue a la orilla.
   C. El barco desea entrar a una bahía localizada entre las dos estaciones. La bahía está a 30 millas de la estación 1. ¿Cuál debe ser la diferencia en tiempo entre los pulsos?
   D. El barco está a 60 millas frente a la costa cuando se obtiene la diferencia en tiempo del inciso (c). ¿Cuál es la posición del barco?

Unidad III

COORDENADAS POLARES Y MATRICES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas de coordenadas polares y matrices, utilizando de manera compresiva el lenguaje algebraico para expresar en diferentes situaciones.

SEMANA N° 10

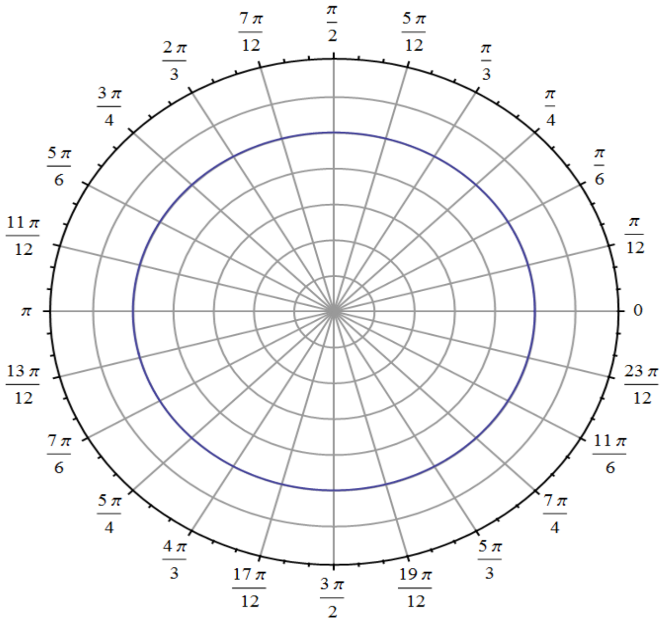
COORDENADAS POLARES

SESIÓN N° 01

TEMA: COORDENADAS POLARES
UBICACIÓN DE PUNTOS Y CONVERSIÓN DE PUNTOS

1. Localiza los siguientes puntos en el plano polar:

A. $\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$	B. $\left(3;\frac{13\pi}{12}\right)$	C. $\left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$	D. $\left(4;-\frac{7\pi}{12}\right)$
E. $\left(-6;\frac{\pi}{3}\right)$	F. $\left(-3;\frac{5\pi}{6}\right)$	G. $\left(-4;\frac{-\pi}{4}\right)$	H. $\left(-6;\frac{-7\pi}{6}\right)$



2. Determina tres representaciones polares adicionales al punto, usando $-2\pi < \theta < 2\pi$.

A. $\left(2;\frac{\pi}{12}\right)$	B. $\left(3;\frac{5\pi}{4}\right)$	C. $\left(-1;\frac{-3\pi}{4}\right)$	D. $\left(-2;\frac{2\pi}{3}\right)$
E. $\left(-\sqrt{2};\frac{19\pi}{12}\right)$	F. $\left(4;\frac{23\pi}{12}\right)$	G. $(-2;1,57)$	H. $(-2\sqrt{2};4,71)$

3. Determina las coordenadas rectangulares para el punto cuyas coordenadas polares se dan:

A. $\left(\sqrt{2};\frac{7\pi}{4}\right)$	B. $\left(\sqrt{5};\frac{-19\pi}{12}\right)$	C. $\left(\frac{-3}{2};\frac{-17\pi}{12}\right)$	D. $\left(\frac{-1}{2};\frac{5\pi}{4}\right)$
E. $\left(6\sqrt{2};\frac{11\pi}{6}\right)$	F. $\left(0;\frac{-5\pi}{6}\right)$	G. $\left(-3\sqrt{3};\frac{\pi}{6}\right)$	H. $\left(-2\sqrt{5};-2,36\right)$

4. Convierta las coordenadas rectangulares en coordenadas polares con r>0 y $\mathbf{0 \le \theta < 2\pi}$.

A. $(1;1)$	B. $(-1;1)$	C. $(3\sqrt{3};\sqrt{3})$	D. $(1;-2)$
E. $(-6;0)$	F. $(\sqrt{3};-1)$	G. $(-1;\sqrt{3})$	H. $(-4;-3)$

5. Determina la distancia entre los siguientes puntos:

A. $(4;\frac{\pi}{12});\left(11;\frac{4\pi}{5}\right)$	B. $(-11;\frac{-7\pi}{12});\left(8;\frac{3\pi}{5}\right)$
C. $(-\sqrt{2};\frac{5\pi}{12});\left(\frac{3}{4};\frac{-11\pi}{12}\right)$	D. $(6\sqrt{2};\frac{-11\pi}{6});\left(3\sqrt{3};\frac{-5\pi}{4}\right)$
E. $\left(-5;\frac{5\pi}{12}\right);\left(\frac{-1}{5};\frac{-2\pi}{3}\right)$	F. $\left(\sqrt{3};\frac{-11\pi}{12}\right);\left(12;\frac{-5\pi}{4}\right)$

6. Uno de los vértices de un triángulo se encuentra sobre el polo, los otros son: $\mathbf{A}\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ y $\mathbf{B}\left(4;\frac{\pi}{12}\right)$. Determina el área del triángulo.

7. Uno de los vértices de un triángulo se encuentra sobre el polo, los otros son: $\mathbf{P(4;110^o)}$ **y** $\mathbf{C(6;80^o)}$**.** Determina el área del triángulo.

8. Determina el área de la región triangular de vértices: $\mathbf{A}\left(3;\frac{\pi}{8}\right)$, $\mathbf{B}\left(8;\frac{7\pi}{24}\right)$ **y** $\mathbf{C}\left(6;\frac{5\pi}{8}\right)$**.**

9. Determina el área de la región triangular de vértices: $\mathbf{A}\left(-4;\frac{\pi}{12}\right)$, $\mathbf{B}\left(14;\frac{-5\pi}{12}\right)$ **y** $\mathbf{C}\left(-7;\frac{13\pi}{12}\right)$**.**

10. En el sistema de coordenadas polares se dan dos vértices opuestos de un cuadrado: $\mathbf{P}\left(6;\frac{-7\pi}{12}\right)$ **y** $\mathbf{C}\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$**.** Determina el área del cuadrado.

11. En el sistema de coordenadas polares se dan dos vértices adyacentes de un cuadrado: $\mathbf{P}\left(-4;\frac{\pi}{12}\right)$ **y** $\mathbf{C}\left(2;\frac{-7\pi}{12}\right)$**.** Determina el área del cuadrado.

12. Comprueba gráficamente que los puntos: $\mathbf{P(2\sqrt{2};0);\ Q(2;\frac{\pi}{4})}$ y $\mathbf{R\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{2}\right)}$, se encuentran sobre una recta.
13. Comprueba gráficamente que los puntos: $\mathbf{P(0;0);\ Q(\frac{3}{2}\sqrt{3};\frac{\pi}{3});\ R\left(3;\frac{\pi}{2}\right)}$ y $\mathbf{Q\left(-\frac{3}{2};210^o\right)}$, pertenecen a una circunferencia. Además determina el radio de la circunferencia.

SESIÓN N° 02

TEMA: CONVERSIÓN DE ECUACIONES POLARES

I. Convierta las siguientes ecuaciones rectangulares a la forma polar. Suponga a>0.

1. $\mathbf{x^2+y^2=16}$	2. $\mathbf{x^2+y^2-64=0}$
3. $\mathbf{x=6}$	4. $\mathbf{y=3a}$
5. $\mathbf{2x-y=11}$	6. $\mathbf{y=\frac{2}{5}x+3}$
7. $\mathbf{y=x}$	8. $\mathbf{3x-y+11=0}$
9. $\mathbf{9x^2-y^2-36x-6y+18=0}$	10. $\mathbf{2x^2-3y^2=6}$
11. $\mathbf{\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{4}=1}$	12. $\mathbf{\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1}$
13. $\mathbf{y^2-4x-4=0}$	14. $\mathbf{y^2=3x}$
15. $\mathbf{xy-1=0}$	16. $\mathbf{2xy-1=0}$
17. $\mathbf{y^2-8x-16=0}$	18. $\mathbf{(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)}$
19. $\mathbf{x^2+y^2-2ax=0}$	20. $\mathbf{x^2-4y-4=0}$

II. Convierta las siguientes ecuaciones polares a la forma rectangular.

1. $\mathbf{r=4sen\theta}$	2. $\mathbf{r=5\cos\theta}$
3. $\theta=\mathbf{\frac{2\pi}{3}}$	4. $\theta=\mathbf{\frac{5\pi}{3}}$
5. $\mathbf{r=4}$	6. $\mathbf{r=5\csc\theta}$
7. $\mathbf{r^2=\cos\theta}$	8. $\mathbf{r^2=sen2\theta}$
9. $\mathbf{r=5sen3\theta}$	10. $\mathbf{r=3\cos3\theta}$

11. $\mathbf{r = 4\cos 2\theta}$	12. $\mathbf{r = \dfrac{2}{1 + sen\theta}}$
13. $\mathbf{r = \dfrac{6}{2 - 3sen\theta}}$	14. $\mathbf{r = \dfrac{6}{2\cos\theta - 3sen\theta}}$
15. $\mathbf{r - r\cos\theta}$	16. $\mathbf{sen^2\theta - 4r\cos^3\theta = 0}$
17. $\mathbf{r = 2\sec^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$	18. $\mathbf{r = 4\csc^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$
19. $\mathbf{r^2 = 4\cos 2\theta}$	20. $\mathbf{r^2 = 16sen2\theta}$

SESIÓN N° 03

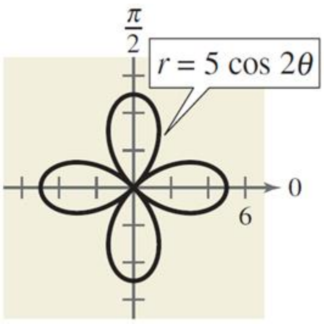
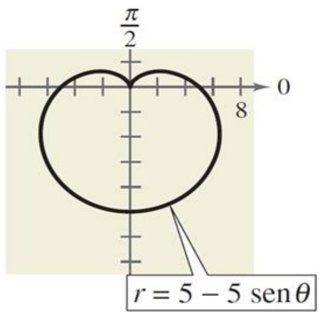
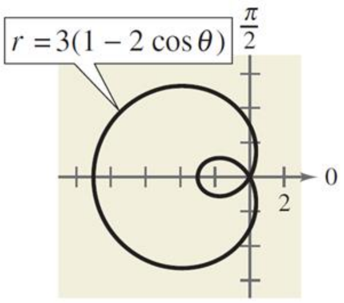
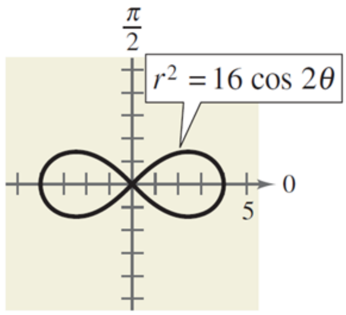
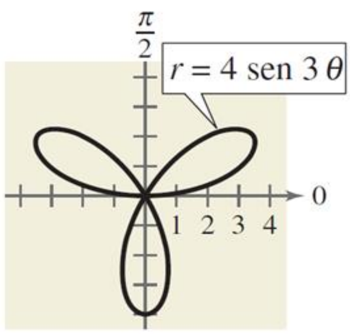
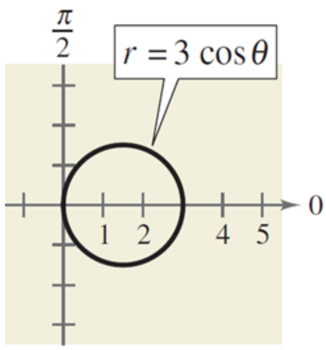
TEMA: GRÁFICAS POLARES ESPECIALES

Completa los espacios en blanco, con las palabras correctas:

1. El origen del sistema de coordenadas polares se llama _________.
2. Al convertir $(r;\theta)$ a coordenadas rectangulares, r = ____________ y θ = ____________.
3. Al convertir $(x;y)$ a coordenadas polares, x = _____________ y y = __________.
4. Las coordenadas polares están relacionadas con las coordenadas rectangulares como sigue: Tanθ = ________; Sec θ =____________; r^2 = _____________.
5. La ecuación polar de $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ se representa en coordenadas polares como _______________ y es una __________________.
6. La gráfica de r = f(senθ) es simétrica respecto a la recta ____________.
7. La gráfica de r =g(cosθ) es simétrica respecto a la ________________.
8. La ecuación r = 2 + cosθ representa una ______________.
9. La ecuación r = 2 cosθ representa una _______________.
10. La ecuación r^2 = 4 sen2θ representa una _________________.
11. La ecuación r = 5sen3θ representa una ___________________.
12. La ecuación r = 2sen2θ representa una ___________________.
13. La ecuación r = 5 + 5sen6θ representa una _________________.
14. Para investigar, la ecuación polar de una mariposa polar es ____________________________________.
15. Grafica las siguientes ecuaciones polares especiales:

A. $\mathbf{r = 10 - 10sen\theta}$	B. $\mathbf{r = 6 + 12\cos\theta}$
C. $\mathbf{r = 4\cos 3\theta}$	D. $\mathbf{r = 3sen2\theta}$
E. $\mathbf{r = 4 + 3\cos\theta}$	F. $\mathbf{r = 9\cos 3\theta}$
G. $\mathbf{r^2 = 36\cos 2\theta}$	H. $\mathbf{r^2 = 25sen2\theta}$
I. $\mathbf{r = 3(1 - \cos\theta)}$	J. $\mathbf{r = 4(1 - sen\theta)}$
K. $\mathbf{r^2 = 9sen2\theta}$	L. $\mathbf{r^2 = 36\cos 2\theta}$
M. $\mathbf{r = 4sen\theta}$	N. $\mathbf{r = 5\cos\theta}$
O. $\mathbf{r = 6\cos 5\theta}$	P. $\mathbf{r = 6 + 6\cos\theta}$

16. Identifica el tipo de gráfica de ecuación polar especial que representa y determina la simetría:

A. 	B. 
C. 	D. 
E. 	F. 

17. Utiliza un graficador y determina los puntos de intersección con los ejes y la simetría:

A. $\mathbf{r = 8sen\theta.\cos^2\theta}$	B. $\mathbf{r = 2\cos(3\theta - 2)}$
C. $\mathbf{r = 2sen\theta\cos^2\theta}$	D. $\mathbf{r = 2\csc\theta + 5}$
E. $\mathbf{r = 2\cos(3\theta - 2)}$	F. $\mathbf{r = 2\csc\theta + 5}$
G. $\mathbf{r = 2\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)}$	H. $\mathbf{r = 2sen\left(\frac{5\theta}{2}\right)}$
I. Concoide: $\mathbf{r = 2 - \sec\theta}$ Asíntota: x = -1.	J. Concoide: $\mathbf{r = 2 + \csc\theta}$ Asíntota: y = 1.
K. Espiral hiperbólica: $\mathbf{r = \frac{3}{\theta}}$	L. Cisoide de Diocles: $\mathbf{r = sen\theta\tan\theta}$
M. Espiral de Arquímedes: $\mathbf{r = \theta;\quad \theta \geq 0}$	N. Nefroide: $\mathbf{r = 1 + 2sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
O. Hipopedia: $\mathbf{r = \sqrt{1 - 0{,}8sen^2\theta}}$	P. $\mathbf{r = \frac{1}{\sqrt{\theta}}}$
Q. Concoides de Nicómenes: $\mathbf{r = 2\sec\theta + 3}$	R. Nefroide de Freeth: $\mathbf{r = 1 + 2sen\frac{\theta}{2}}$
S. $\mathbf{r = Sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}$	T. $\mathbf{r = \theta sen\theta}$
U. $\mathbf{r = 1 + 3\cos 3\theta}$	V. $\mathbf{r = \frac{1}{\sqrt{\theta}}}$

Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012)*. *Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria

- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

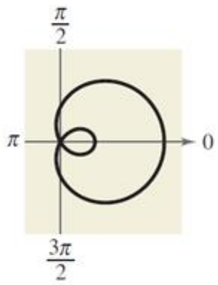
Enlaces recomendados

- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRI4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

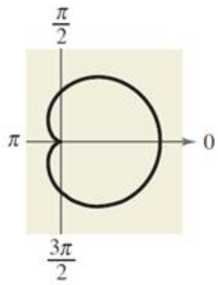
GRÁFICAS DE POLARES ESPECIALES

CARACOL DE PASCAL:

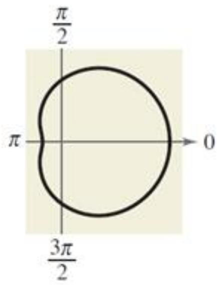
$$r = a \pm b\cos\theta$$
$$r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$$



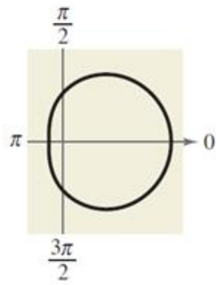
$\frac{a}{b} < 1$
Limaçon con lazo interior



$\frac{a}{b} = 1$
Cardioide (forma de corazón)



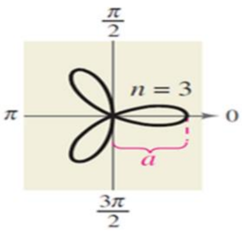
$1 < \frac{a}{b} < 2$
Caracol con depresión



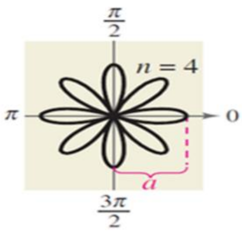
$\frac{a}{b} \geq 2$
Limaçon convexo

CURVAS EN FORMA DE ROSA:

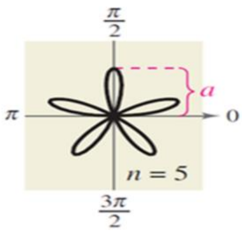
n pétalos si "n" es impar.
2n pétalos si "n" es par.



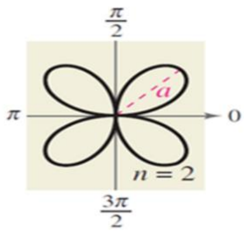
$r = a\cos n\theta$
Curvas roseta



$r = a\cos n\theta$
Curvas roseta

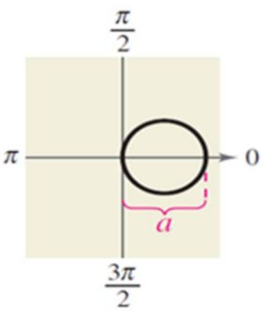


$r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$
Curvas roseta

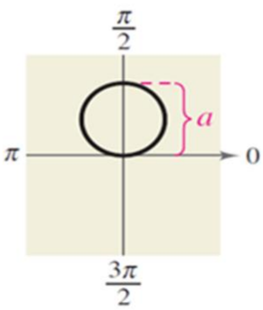


$r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$
Curvas roseta

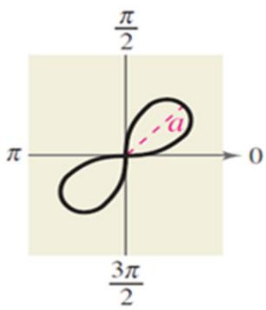
CIRCUNFERENCIAS Y LEMNISCATAS:



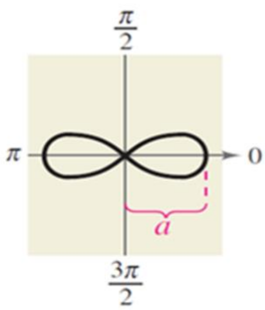
$r = a\cos\theta$
Circunferencia



$r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$
Circunferencia



$r^2 = a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$
Lemniscata



$r^2 = a^2\cos 2\theta$
Lemniscata

SEMANA N° 11

ECUACIÓN POLAR DE LAS CÓNICAS

SESIÓN N° 01

ECUACIÓN POLAR DE LAS CÓNICAS

Identifica y esboza su gráfica de las siguientes ecuaciones polares

1. $r = 4 /(1 + \cos\theta)$
2. $r = 2 /(1 - 3\text{sen}\,\theta)$
3. $r = 8 /(2 - \text{sen}\,\theta)$
4. $r = 6 /4 + \text{sen}\,\theta)$
5. $r = 10 /(2 - 5\cos\theta)$
6. $r = 8 /(4 + 8\,\text{sen}\,\theta)$

Dadas las ecuaciones siguientes, halla:

A. Las intersecciones con los ejes.
B. Coordenadas polares de los focos.
C. Coordenadas polares de los vértices.
D. Esboce su gráfica.

7. $r = 3/(1 - \text{sen}\,\theta)$
8. $r = 4/(1 + \cos\theta)$
9. $r = 4/(2 - \cos\theta)$
10. $r = 3/(5 + \text{sen}\,\theta)$
11. $r = 2/(1 - 2\text{sen}\,\theta)$
12. $r = 4/(1 + 3\cos\theta)$

SESIÓN N° 02

TEMA: CÁLCULO DE LA ECUACIÓN POLAR DE LAS CÓNICAS CONOCIENDO SUS ELEMENTOS.

Determina la ecuación polar de la cónica, si el polo coincide con un foco de:

1. Parábola : $Vértice\ (1; -\frac{\pi}{2})$
2. Parábola : $Vértice\ (5; \pi)$
3. Parábola : $Vértice\ (10; \frac{\pi}{2})$
4. Elipse : Vértices: $(16; \frac{\pi}{2})$; $(2; \frac{3\pi}{2})$.
5. Elipse : Vértices: $(18; 0)$ $(6; \pi)$

6. Elipse : $Vértices: \left(4; \frac{\pi}{2}\right); \left(8; \frac{3\pi}{2}\right)$
7. Elipse : $Vértices: (30; 0);\ (10; \pi)$
8. Hipérbola : $Vértices: (4; 0);\ (12; 0)$
9. Hipérbola : $Vértices: \left(4; \frac{3\pi}{2}\right); \left(12; \frac{3\pi}{2}\right)$
10. Hipérbola : Vértices (8; π/2), (2; π/2)

SESIÓN N° 03

TEMA: REPASO DE COORDENADAS POLARES. PRÁCTICA CALIFICADA Nº 3.

1. Ubica todos los puntos en coordenadas polares en un solo plano polar.
   A. $A\left(-1\ ;\ \frac{5\pi}{9}\right)$
   B. $B\left(-2\ ;\ -\frac{5\pi}{18}\right)$
   C. C (– 4, 40°)
   D. D (5, 108°)

Convertir las siguientes ecuaciones rectangulares en polares.

2. $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$
3. $y^2 - 8x - 16 = 0$
4. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$
5. $x^2 + y^2 - 3x = 0$
6. $4x^2 - 5y^2 + 18y - 9 = 0$

En los siguientes ejercicios convierta de ecuaciones polares a ecuaciones rectangulares.

7. $r^2 = \sin 2\theta$
8. r = 5 para: $0 \le \theta \le 2\pi/3$
9. $r = \cos 2\theta - \text{sen}\ 2\theta$
10. $r = 6/(2 - \text{sen}\theta)$

Identifica y esboce su gráfica las siguientes ecuaciones polares

11. $r = 5$ para: $-2\pi/3 \le \theta \le \pi$
12. $r = \theta$

Halla los puntos de intersección y traza las gráficas de las siguientes parejas de ecuaciones polares:
13. $r = 8 \cos \theta$, $r = 4$
14. $r = 3 \cos \theta$, $r = 1 + \cos\theta$
15. $r = \text{sen}\ \theta$, $r^2 = \text{sen}\ 2\theta$
16. $r = \cos\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$

17. Determine una ecuación polar de la cónica, si el polo coincide con el foco:

   A. Parábola; e=1; directriz: x=-2.
   B. Elipse; Vértices: (20; $\frac{\pi}{2}$); (4; $\frac{3\pi}{2}$).

18. Dada la cónica de ecuación polar $r = \dfrac{3}{2+4\cos\theta}$ determina:
   A. Determina el tipo de cónica al que pertenece la ecuación
   B. Traza la gráfica correspondiente a dicha cónica
   C. Determina las coordenadas polares de los vértices y del centro
   D. Determina la ecuación polar de la directriz más próxima al polo.
   E. Determina las longitudes de los semiejes

19. Determina la ecuación polar de:
   A. Cónica: Elipse Vértices: (20; 0) (4; π)
   B. Cónica: Hipérbola Vértices (4; π/2), (1; π/2)

20. Identifique la cónica, determine la ecuación de las directrices en su forma polar y rectangular; asíntotas (según sea el caso) y trace la gráfica.
   A. $r = \frac{5}{1+\mathrm{Sen}\theta}$
   B. $r = \frac{6}{2+\mathrm{Sen}\theta}$
   C. $r = \frac{3}{2+4\mathrm{Sen}\theta}$
   D. $r = \frac{3}{2+6\mathrm{Sen}\theta}$

Dadas las ecuaciones siguientes, halla:
   A. Las intersecciones con los ejes.
   B. Coordenadas polares de los focos.
   C. Coordenadas polares de los vértices.
   D. Esboce su gráfica.

21. $r = 4(\mathrm{sen}\ \theta + 1)$
22. $r = 4\mathrm{sen}\ \theta + 3$
23. $r = 2\theta$
24. $r^2 = 4\mathrm{sen}2\theta$

Referencias bibliográficas

Básica
- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria
- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados
- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

SEMANA N° 12

MATRICES

SESIÓN N° 01

TEMA: MATRICES, DEFINICIÓN, ELEMENTOS, ORDEN Y CLASIFICACIÓN. OPERACIONES DE MATRICES

En los ejercicios del 1 al 4; Determina el valor de “x” y “y”.

1. $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 7 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 22 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -5 & x \\ y & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 16 & 4 & 5 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2x+1 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 3x \\ 0 & 2 & 3y-5 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} x+2 & 8 & -3 \\ 1 & 2y & 2x \\ 7 & -2 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+6 & 8 & -3 \\ 1 & 18 & -8 \\ 7 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 5 al 11. Determina:

A. A + B
B. A – B
C. 3A
D. 3A – 2 B

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -7 \\ 10 & -9 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 12 al 15; despeja y determina la matriz “X”.

$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

12. $X = 3A - 2B$
13. $2X = 2A - B$
14. $2X + 3A = B$
15. $2A + 4B = -2X$

En los ejercicios del 16 al 22; calcula “AB” y diga el orden del resultado.

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 8 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 4 \\ 8 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 6 & 13 & 8 & -17 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

SESIÓN N° 02

TEMA: APLICACIÓN DE MATRICES
PROBLEMAS.

1. **MANUFACTURA.** Una compañía tiene tres fábricas, cada una de las cuales fabrica guitarras acústicas y eléctricas. El número de unidades de guitarras producidas en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 25 \\ 35 & 100 & 70 \end{bmatrix}.$$

   Encuentra en términos de matrices los niveles de producción si ésta se aumenta en 20%.

2. **MANUFACTURA.** Una compañía tiene cuatro fábricas, cada una de las cuales produce vehículos de uso general y camionetas pequeñas. El número de unidades del vehículo i producido en la fábrica j en un día está representado por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 90 & 70 & 30 \\ 40 & 20 & 60 & 60 \end{bmatrix}.$$

   Encuentra en términos de matrices los niveles de producción si ésta se aumenta en 10%.

3. **AGRICULTURA**. Un productor produce dos cosechas, manzanas y duraznos. Cada una de ellas es enviada a tres mercados para su venta. Estos mercados son el del Agricultor, el de la Fruta y el de la Granja. El número de cajas de manzanas enviadas a los tres mercados son 125, 100 y 75, respectivamente. El número de cajas de duraznos enviados a los tres mercados son100, 175 y 125, respectivamente. La utilidad por cajas de manzanas es $3.50 y por cajas de duraznos $6.00.
   A. Escriba una matriz A que represente el número de cajas de cada cosecha i que son enviados a cada mercado j. Diga lo que representa cada elemento a_{ij} de la matriz.
   B. Escriba una matriz B que represente la utilidad por cajas de cada fruta. Diga lo que representa cada elemento b_{ij} de la matriz.
   C. Encuentra el producto BA y diga lo que representa cada elemento de la matriz.

4. **INGRESOS.** Un fabricante de productos electrónicos produce tres modelos de televisores de pantalla de cristal líquido, que son enviados a dos almacenes. El número de unidades del modelo i que son enviadas al almacén j están representados por a_{ij} en la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 5000 & 4000 \\ 6000 & 10\,000 \\ 8000 & 5000 \end{bmatrix}.$$

   Los precios por unidad están representados por la matriz.

$$B = [\$699.95 \quad \$899.95 \quad \$1099.95].$$

   Calcula BA e interprete el resultado.

5. **INVENTARIO.** Una compañía vende cinco modelos de computadoras por medio de tres mercados de venta al menudeo. Los inventarios están representados por S.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array}}^{\text{Modelo}} \\ S = & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

   Los precios al mayoreo y al menudeo están representados por T.

$$T = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{3.5cm}}^{\text{Precio}}} \\ \text{Mayoreo} & \text{Menudeo} \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} \$840 & \$1100 \\ \$1200 & \$1350 \\ \$1450 & \$1650 \\ \$2650 & \$3000 \\ \$3050 & \$3200 \end{bmatrix}$$

Calcula **ST** e interprete el resultado.

6. **NECESIDADES DE MANO DE OBRA/SUELDO.** Una compañía que fabrica botes tiene las siguientes necesidades de mano de obra y sueldos.
   Mano de obra por bote

$$\begin{array}{cl} & \overbrace{\begin{array}{ccc} \text{Corte} & \text{Ensamble} & \text{Empaque} \end{array}}^{\text{Departamento}} \\ S = & \begin{bmatrix} 1.0\text{ h} & 0.5\text{ h} & 0.2\text{ h} \\ 1.6\text{ h} & 1.0\text{ h} & 0.2\text{ h} \\ 2.5\text{ h} & 2.0\text{ h} & 1.4\text{ h} \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \text{Pequeño} \\ \text{Mediano} \\ \text{Grande} \end{array}\right\} \text{Tamaño de bote} \end{array}$$

Sueldos por hora

$$\begin{array}{cl} & \overbrace{\begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array}}^{\text{Planta}} \\ T = & \begin{bmatrix} \$15 & \$13 \\ \$12 & \$11 \\ \$11 & \$10 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \text{Corte} \\ \text{Ensamble} \\ \text{Empaque} \end{array}\right\} \text{Departamento} \end{array}$$

Calcula **ST** e interprete el resultado.

7. **UTILIDADES.** En un mercado de lácteos, el número de galones de leche descremada, leche al 2% y leche entera vendido en el fin de semana está representado por A.

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{ccc} \text{Leche descremada} & \text{leche al 2\%} & \text{Leche entera} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 40 & 64 & 52 \\ 60 & 82 & 76 \\ 76 & 96 & 84 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Viernes} \\ \text{Sábado} \\ \text{Domingo} \end{array} \end{array}$$

Los precios de venta (en dólares por galón) y las utilidades (en dólares por galón) para los tres tipos de leche vendidos por el mercado de lácteos están representados por B.

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{cc} \text{Precio de venta} & \text{Utilidad} \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} \$3.45 & \$1.20 \\ \$3.65 & \$1.30 \\ \$3.85 & \$1.45 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Leche descremada} \\ \text{Leche al 2\%} \\ \text{Leche entera} \end{array} \end{array}$$

   A. Calcula **AB** e interprete el resultado.
   B. Encuentra la utilidad total del mercado de lácteos por ventas de leche para el fin de semana.

8. **UTILIDADES.** En una tienda de conveniencia (abierta todo el día), el número de galones de gasolina de 87 octanos, 89 octanos y 93 octanos vendido el fin de semana está representado por A.

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 87 & 89 & 93 \end{array}}^{\text{Octanos}} \\ \begin{bmatrix} 580 & 840 & 320 \\ 560 & 420 & 160 \\ 860 & 1020 & 540 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Viernes} \\ \text{Sábado} \\ \text{Domingo} \end{array}$$

Los precios de venta (en dólares por galón) y las utilidades (en dólares por galón) para los tres grados de gasolina vendidos por la tienda de conveniencia están representados por B.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Precio de venta} & \text{Utilidad} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$2.00 & \$0.08 \\ \$2.10 & \$0.09 \\ \$2.20 & \$0.10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} 87 \\ 89 \\ 93 \end{array}\right\} \text{Octanos} \end{array}$$

A. Calcula AB e interprete el resultado.
B. Encuentra la utilidad de la tienda de conveniencia por ventas de gasolina para el fin de semana.

9. **EJERCICIO.** El número de calorías quemadas por personas de diferentes pesos corporales, que realizan diferentes tipos de ejercicios aeróbicos durante un periodo de 20 minutos, se muestra en la matriz A.

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cc} \text{Persona de 120 lb} & \text{Persona de 150 lb} \end{array}}^{\text{Calorías quemadas}} \\ \begin{bmatrix} 109 & 136 \\ 127 & 159 \\ 64 & 79 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Ciclismo} \\ \text{Trotar} \\ \text{Caminar} \end{array}$$

A. Una persona de 120 lb y otra de 150 lb corrieron en bicicleta durante 40 minutos, trotaron 10 minutos y caminaron 60 minutos. Organiza en una matriz B el tiempo que pasaron ejercitándose.
B. Calcula BA e interprete el resultado.

10. **Ventas de comida rápida.** Una pequeña cadena de restaurantes de comida rápida, con sucursales en Santa Mónica, Long Beach y Anaheim vende sólo hamburguesas, perros calientes y malteados. En cierto día, las ventas se distribuyeron de acuerdo con la siguiente matriz.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Hamburguesas} \\ \text{Perros calientes} \\ \text{Malteadas} \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} \text{Santa Monica} & \text{Long Beach} & \text{Anaheim} \end{array}}^{\text{Número de piezas vendidas}} \\ \begin{bmatrix} 4000 & 1000 & 3500 \\ 400 & 300 & 200 \\ 700 & 500 & 9000 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

El precio de cada pieza está dado en la matriz siguiente.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hamburguesa} & \text{Perro caliente} & \text{Malteada} \\ [\$0.90 & \$0.80 & \$1.10] \end{array} = B$$

A. Calcula el producto **BA**.
B. Interpreta los elementos de la matriz producto **BA**.

11. **Utilidades de fabricación de autos.** Un fabricante de autos especiales tiene plantas en Auburn, Biloxi y Chattanooga. Se producen tres modelos, con producción diaria dada en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Auburn} \\ \text{Biloxi} \\ \text{Chattanooga} \end{array} \begin{array}{c} \text{Autos producidos cada día} \\ \hline \begin{array}{ccc} \text{Modelo K} & \text{Modelo R} & \text{Modelo W} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

Debido a aumentos de salarios, las utilidades en febrero son más bajas que las de enero. La utilidad por auto está tabulada por modelo en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Modelo K} \\ \text{Modelo R} \\ \text{Modelo W} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Enero} & \text{Febrero} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$1000 & \$500 \\ \$2000 & \$1200 \\ \$1500 & \$1000 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

A. Calcula **AB**.
B. Suponiendo que se vendieran todos los autos producidos, ¿cuál fue la utilidad diaria en enero en la planta Biloxi?
C. ¿Cuál fue la utilidad diaria total (de las tres plantas) en febrero?

12. **Productos de tomate enlatados.** Jaeger Foods produce salsa de tomate y pasta de tomate, enlatadas en latas pequeñas, medianas, grandes y gigantes. La matriz A da el tamaño (en onzas) de cada recipiente.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Onzas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Pequeñas} & \text{Medianas} & \text{Grandes} & \text{Gigantes} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 & 28 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

La matriz B tabula la producción de un día de salsa de tomate y pasta de tomate.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Pequeñas} \\ \text{Medianas} \\ \text{Grandes} \\ \text{Gigantes} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Latas de salsa} & \text{Latas de pasta} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2000 & 2500 \\ 3000 & 1500 \\ 2500 & 1000 \\ 1000 & 500 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

A. Calcula el producto de **AB**.
B. Interpreta los elementos de la matriz producto AB.

13. **Ventas de productos agrícolas.** Los tres hijos de un agricultor, Amy, Beth y Chad, trabajan durante los meses de verano en tres puestos de venta situados al lado de una carretera. En un fin de semana todos venden sandías, calabacitas amarillas y tomates. Las matrices A y B tabulan el número de libras de cada producto vendido por cada hermano en sábado y domingo.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Amy} \\ \text{Beth} \\ \text{Chad} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{Sábado} \\ \begin{array}{ccc} \text{Sandías} & \text{Calabacitas} & \text{Tomates} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 50 & 60 \\ 40 & 25 & 30 \\ 60 & 30 & 20 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Amy} \\ \text{Beth} \\ \text{Chad} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{Domingo} \\ \begin{array}{ccc} \text{Sandías} & \text{Calabacitas} & \text{Tomates} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 60 & 30 \\ 35 & 20 & 20 \\ 60 & 25 & 30 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

La matriz C da el precio por libra (en dólares) por cada tipo de producto que vendan.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Sandías} \\ \text{Calabacitas} \\ \text{Tomates} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{Precio por libra} \\ \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{bmatrix} \end{array} = C$$

Realiza cada una de las siguientes operaciones e interpreta las entradas en cada resultado.

A. AC
B. BC
C. A B
D. (A + B)C

14. **SERVICIOS DE SALUD.** Los planes de servicios de salud ofrecidos este año por una planta local de manufactura son como sigue. Para personas, el plan completo cuesta \$694.32, el plan estándar de la HMO (Health Management Organization) cuesta \$451.80 y el plan HMO Plus cuesta \$489.48. Para familias, el plan completo cuesta \$1725.36, el plan estándar de la HMO cuesta \$1187.76 y el plan HMO Plus cuesta \$1248.12. La planta espera que el costo de los planes cambie el año siguiente como sigue. Para personas, el costo para el plan completo, estándar HMO y HMO Plus serán de \$683.91, \$463.10 y \$499.27, respectivamente. Para familias, el costo para el plan completo, HMO estándar y HMO Plus serán de \$1699.48, \$1217.45 y \$1273.08, respectivamente.
    A. Organiza la información usando dos matrices A y B, donde A represente el costo del plan de atención de salud para este año y B represente el costo del plan de atención de salud para el año siguiente. Exprese lo que representa cada entrada de cada matriz.
    B. Calcula e interprete el resultado.
    C. Los empleados reciben cheques de pago mensualmente, de los cuales están deducidos los costos del plan de atención de salud. Use las matrices del inciso (a) para escribir matrices que muestren cuánto se deducirá del cheque de empleados este año y el siguiente.
    D. Suponga en cambio que el costo de los planes de atención de salud aumentan 4% el año siguiente. Escriba una matriz que muestre los nuevos pagos mensuales.

15. **PIÉNSELO.** Si $a; b$ y c son números reales tales que $c \neq 0$ y $ac = bc$ entonces $a = b$. No obstante, si $A; B\ y\ C$ son matrices diferentes de cero tales que $AC = BC$, entonces A no es necesariamente igual a B. Ilustra esto usando las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

SESIÓN N° 03

TEMA: MATRIZ INVERSA
OPERACIONES ELEMENTALES EN FILAS Y GAUSS-JORDAN 3X3

En los ejercicios del 1al 7; Interpreta **AB y BA**.

1. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix}2 & -17 & 11\\ -1 & 11 & -7\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-4 & -5 & 3\\ -4 & -8 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

4. $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

5. $A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}\frac{3}{6} & -\frac{5}{2}\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

6. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & -1\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

7. $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\ -4 & -6 & 1\\ 3 & 5 & -1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -3 & -4\\ -\frac{1}{2} & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

En los ejercicios del 8 al 11; llena los espacios en blanco, utilizando las operaciones elementales de renglón (fila) para formar una matriz equivalente de renglones (filas).

8. $\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 10 & 5\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & & -1\end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix}-3 & 3 & 12\\ 18 & -8 & 4\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & \\ 18 & -8 & 4\end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & & \\ 0 & 3 & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 6/5 \\ 0 & 3 & & \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3/2 \\ 0 & & -7 & 1/2 \\ 0 & 2 & & \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 12 al 17; determina la inversa de la matriz (si existe), utilizando las operaciones elementales de Gauss Jordan.

12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

SEMANA N° 13

MATRIZ INVERSA. MÉTODO DE LA ADJUNTA (2X2 Y 3X3)
REPASO: HIPÉRBOLA, COORDENADAS POLARES Y MATRICES.

SESIÓN N° 01

TEMA: MATRIZ INVERSA. MÉTODO DE LA ADJUNTA (2X2 Y 3X3)

1. Halla la matriz inversa de las siguientes matrices por el método de adjunta:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ $G=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $E=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $H=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $F=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $I=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. Determina la matriz inversa de las siguientes matrices por el método de adjunta:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -12 & -2 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Determina si:

A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ es inversible. Si así lo fuera, calcular si inversa.

4. Halla A^{-1} para la matriz

A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. Mediante el método esquemático, halla la inversa si existe de la matriz.

A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

6. Halla la inversa de las matrices siguientes

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

B= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

7. Encuentra las inversas de las matrices, si existen:

A= $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

8. Sean

A = $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Halla ABC, A-1, B-1, C-1.

9. Resuelva las ecuaciones matriciales:

A. Ax = B, si A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y B = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

B. xA = B, si A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ y B = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

10. Muestra que las matrices son inversas entre sí, haciendo ver que su producto es la matriz identidad I.

A. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{3}{6} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

11. Encuentra la inversa de la matriz, si ésta existe. Comprueba su respuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

SESIÓN N° 02

TEMA: REPASO, HIPÉRBOLA, COORDENADAS POLARES Y MATRICES

1. Traza la gráfica de cada ecuación, encuentre las coordenadas de los focos y también las longitudes de los ejes transversal y conjugado.
   A. $9x^2 - 16y^2 = 144$
   B. $16y^2 - 9x^2 = 144$
   C. $2x^2 - y^2 = 10$

2. En los ejercicios transforma cada ecuación en la forma ordinaria. Determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, la excentricidad, lado recto, longitud del eje transverso y grafíquela.
   A. $4x^2 – 3y^2 – 8x – 8 = 0$
   B. $2y^2 – 2x^2 – 4x – 4y = 0$
   C. $9y^2 – x^2 + 2x + 54y + 62 = 0$

3. En los ejercicios, encuentra la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con las características dadas y centro en el origen.
   A. Focos: $(0, \pm 8)$; asíntotas: $y = \pm 4x$
   B. Focos: $(\pm 10, 0)$; asíntotas: $y = \pm 3x/4$

4. En los ejercicios, encuentra la forma estándar de la ecuación de la hipérbola con las características dadas.
   A. Vértices: (4, 1) y (4, 9); Focos: (4, 0) y (4, 10)
   B. Vértices: (–2, 1) y (2, 1); Focos: (–3, 1) y (3, 1)

5. Determina los centros, vértices, focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.
   A. $9y^2 - x^2 + 2x + 54y + 62 = 0$
   B. $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

6. Convierta la ecuación rectangular a forma polar. Suponga que $a > 0$.
   A. $xy = 16$
   B. $x^2 + y^2 – 2ax = 0$

7. En los ejercicios, convierta la ecuación polar a forma rectangular.
   A. $r = 4\csc\theta$
   B. $r = \dfrac{2}{1+ sen q}$
   C. $r = – 3 \sec\theta$
   D. $r = \dfrac{1}{1- \cos q}$

8. En los ejercicios, identifica la cónica y trace su gráfica.
   A. $r = \dfrac{2}{2- \cos q}$

B. $r = \dfrac{9}{2-\ 2\cos q}$

9. En los ejercicios, encuentra una ecuación polar de la cónica con su foco en el polo.

	CÓNICA	**EXCENTRICIDAD**	**DIRECTRIZ**
A.	Parábola	e = 1	x = –1
B.	Elipse	e = ½	y = 1
C.	Hipérbola	e = 3/2	x = –1

10. Determina la ecuación polar de la cónica con su foco en el polo.

A.	Parábola	$\text{Vértice: }(1; \frac{-\pi}{2})$
B.	Parábola	$\text{Vértice: }(5; \pi)$
C.	Parábola	$\text{Vértice: }(10; \frac{\pi}{2})$
D.	Elipse	$\text{Vértice: }\left(2; \frac{\pi}{2}\right);\ (4; \frac{3\pi}{2})$
E.	Elipse	$\text{Vértice: }(20; 0);\ (4; \pi)$
F.	Hipérbola	$\text{Vértice: }(2; 0);\ (8; 0)$
G.	Hipérbola	$\text{Vértice: }\left(1; \frac{3\pi}{2}\right);\ \left(9; \frac{3\pi}{2}\right)$
H.	Hipérbola	$\text{Vértice: }\left(4; \frac{\pi}{2}\right);\ \left(1; \frac{\pi}{2}\right)$

11. Los números de calorías consumidas por individuos de distintos pesos corporales, realizando diferentes tipos de ejercicios aeróbicos, para un período de 20 minutos, se encuentran en la matriz A.

$$A = \begin{array}{c@{}l} \overbrace{\begin{array}{cc} \begin{matrix}Persona\\ que\ pesa\\ 54\,Kg\end{matrix} & \begin{matrix}Persona\\ que\ pesa\\ 68\,Kg\end{matrix} \end{array}}^{Modelo} & \\ \begin{bmatrix} 109 & 136 \\ 127 & 159 \\ 64 & 79 \end{bmatrix} & \begin{matrix} Ciclismo \\ Trote \\ Caminata \end{matrix} \end{array}$$

A. Una persona que pesa 54 Kg y una persona que pesa 68 Kg practicaron ciclismo durante 40 minutos, trotaron durante 10 minutos y caminaron durante 60 minutos. Organice el tiempo empleado ejercitándose en una matriz B.

B. Calcula BA e interprete el resultado.

12. Halla la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Determina la inversa (si existe). Por el método esquemático.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

14. Determina la inversa (si existe). Por el método esquemático.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -5/6 & 1/3 & 11/6 \\ 0 & 2/3 & 2 \\ 1 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

SESIÓN N° 02
TEMA: PRUEBA DE DESARROLLO Nº 03

Referencias bibliográficas

Básica
- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012)*. *Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria
- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados
- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

Unidad IV

DETERMINANTES, SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, SUCESIONES Y SERIES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas de determinantes, sistemas de ecuaciones, sucesiones y series identificando e interpretando los resultados.

SEMANA N° 14

DETERMINANTES Y SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

SESIÓN N° 01
TEMA: DETERMINANTES, DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y EJERCICIOS

En los ejercicios 1 – 5; encuentre la determinante de la matriz.

1. $\begin{bmatrix} -10 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -1/2 & 1/3 \\ -6 & 1/3 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}; \; a, b \neq 0$

En los ejercicios 6 – 10; determine todos los menores y cofactores de la matriz

6. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} -2 & 9 & 4 \\ 7 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 11 - 15; calcula la determinante de la matriz por el método de expansión de cofactores. Expanda usando la fila o columna indicadas.

11. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
    A. Fila 1
    B. Columna 2
12. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -8 \end{bmatrix}$
    A. Fila 2
    B. Columna 3
13. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$
    A. Fila 2
    B. Columna 1
14. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & 13 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
    A. Fila 3
    B. Columna 2
15. $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$
    A. Fila 4
    B. Columna 2

SESIÓN N° 02

TEMA: DETERMINANTES, MÉTODOS DE CÁLCULO COFACTORES Y GAUSS JORDAN 4X4

En los ejercicios 1 - 21; calcula la determinante de la matriz.

A. Por el método de expansión de cofactores.
B. Por el método de Gauss Jordan.

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 1 & -2 & 8 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \\ 7 & 7 & -3 & 5 \\ 3 & -12 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -8 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 1 & 9 \\ -7 & 3 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

SESIÓN N° 03

TEMA: SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DE 3 VARIABLES POR EL MÉTODO DE CRÁMER

En los ejercicios 1 – 8; usa la regla de Cramer para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones.

1. $\begin{cases} -7x+11y=-1 \\ 3x-9y=9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-3y=-10 \\ 6x+9y=12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ 6x+4y=4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-y+z=-5 \\ 2x+2y+3z=10 \\ 5x-2y+6z=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-2y+3z=-2 \\ 2x+2y+5z=16 \\ 8x-5y-2z=4 \end{cases}$

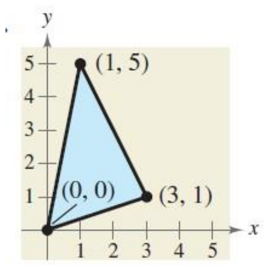
6. $\begin{cases} x+2y+3z=-3 \\ -2x+y-z=6 \\ 3x-3y+2z=-11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x-4y+z=-14 \\ -x+2y-2z=10 \\ 3x+y+z=1 \end{cases}$

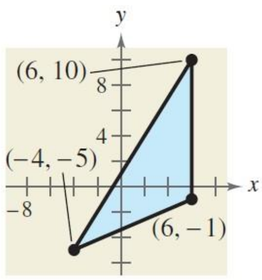
8. $\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ 3x+z=11 \\ -x-2y=0 \end{cases}$

En los ejercicios 9 - 12; usa un determinante y los vértices dados de un triángulo para hallar el área del triángulo.

9.

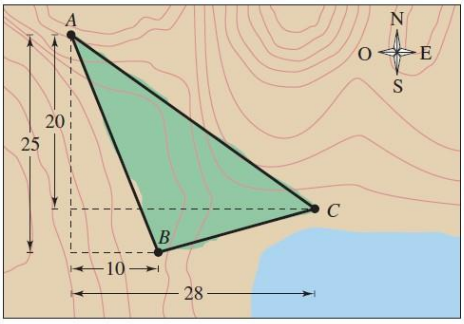


10.

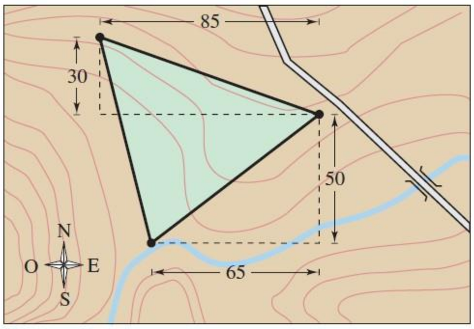


11. Coordenadas: (−2; 4); (2; 3); (−1; 5)
12. Coordenadas: (-4;2); (0;7/2);(3;-1/2)
13. Determina un valor de “y” tal que el triángulo con los vértices dados tenga un área de 4 unidades cuadradas.
(-5;1); (0;2);(-2:y)
(-4;2); (-3;5);(-1:y)

14. **ÁREA DE UNA REGIÓN**. Una región grande de bosque ha sido infectada por polillas "lagartas". La región es aproximadamente triangular, como se ve en la figura. Del vértice A, situado más al Norte de la región, las distancias a los otros vértices son 25 millas al Sur y 10 millas al Este (para el vértice B), y 20 millas al Sur y 28 millas al Este (para el vértice C). Use una calculadora de gráficas para aproximar el número de millas cuadradas en esta región.



15. **ÁREA DE UNA REGIÓN.** Usted es propietario de un terreno triangular, como se muestra en la figura. Para estimar el número de pies cuadrados del terreno, usted empieza en un vértice, camina 65 pies al Este y 50 pies al Norte al segundo vértice y luego camina 85 pies al Oeste y 30 pies al Norte para el tercer vértice. Use una calculadora de gráficas para determinar cuántos pies cuadrados hay en el terreno.



Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria

- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007). *Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados

- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

SEMANA N° 15

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

SESIÓN N° 01

TEMA: SISTEMA DE ECUACIONES "n" VARIABLES POR EL MÉTODO DE GAUSS JORDAN.

Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de Gauss Jordan:

1. $\begin{cases} -4x - 7y = 47 \\ -x + 6y = -27 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x \quad\;\; - 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x + y - z = -14 \\ 2x - y + z = 21 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ x - 3y + z = -28 \\ -x + y \quad\;\; = 14 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 15 \\ -x + y + 2z = 10 \\ x - y - 4z \quad = 14 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y - z = 4 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 5x - y - 3z = -7 \\ 4x + 3y + z = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \\ 2x + y \quad\;\; = -4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y + 9z = -8 \\ -x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + 2y - z = 17 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 3x-y-z=-6 \\ -x+y-3z=-2 \end{cases}$

Resuelva el sistema de ecuaciones. Use la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás o eliminación de Gauss – Jordan.

1. $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+y+z-w=4 \\ x+y-z+w=-4 \\ x-y+z+w=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y-w=3 \\ 2y+z+4w=-2 \\ 2x-w=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-y+z-4w=-32 \\ 7x+2y+9z-w=14 \\ 3x-y+z+w=11 \\ x+y-4z-2w=-4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+y-5z+w=8 \\ x-3y-6w=9 \\ 2y-z+2w=-5 \\ x+4y-7z+6w=0 \end{cases}$

5. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

   $\begin{cases} x+ky+z=-2 \\ kx+y+z=3-k \\ xy+kz=k-1 \end{cases}$

   Usando el método de eliminación gaussiana, determine los valores de k, si existen, para que dicho sistema:

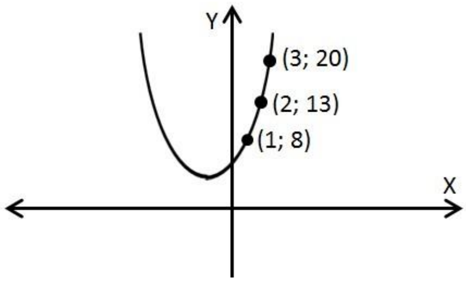
   A. Tenga una única solución
   B. Tenga infinitas soluciones.
   C. No tenga solución

SESIÓN N° 02

APLICACIÓN DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES: PROBLEMAS

1. **Parábola**. Usa un sistema de ecuaciones para encontrar la ecuación especificada que pasa por los puntos de la gráfica.

$$y = ax^2 + bx + c$$



2. **Red Eléctrica**. Las intensidades de corriente en una red eléctrica están dadas por la solución del sistema. Determina dichas intensidades.

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 3I_1 + 4I_2 = 18 \\ I_2 + 3I_3 = 6 \end{cases}$$

3. **Fracciones Parciales**. Use un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Resuelva el sistema empleando matrices.

$$\frac{4x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

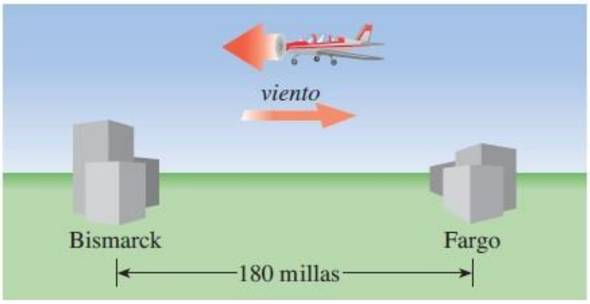
4. Del extremo de una cinta se quitan 5 cm menos que la quinta parte de ella y del otro extremo 4 cm más que la cuarta parte de ella, por lo cual la cinta tiene 34 cm. ¿Cuál es la longitud original de la cinta?

5. Un técnico agropecuario preparó una mezcla de avena y maíz. Cada onza de avena produce 4 g de proteínas y 18 g de carbohidratos, y cada onza de maíz produce 3 g de proteínas y 24 g de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de cada grano deben utilizarse para producir una ración que debe contener 200 g de proteínas y 1320 g de carbohidratos?

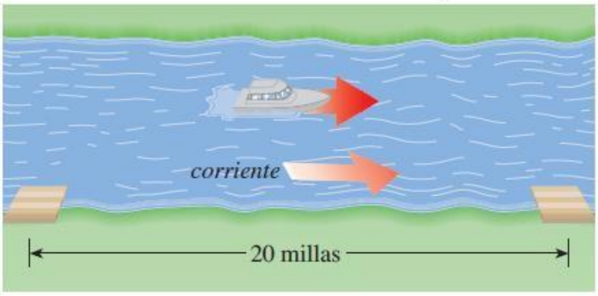
6. Una granja estatal tenía sembradas 480 ha más de papas que de cereales. Después de haber recolectado el 80% del cultivo de papas y el 25% del de cereales quedaron en el campo 300 ha más de cereales que de papas. ¿Qué cantidad de ha de cada uno de los cultivos habrían sembrados en la granja?

7. En una industria se fabricaron en total 480 artículos con una misma producción diaria. Si se hubieran producido 16 artículos más cada día, se hubiese terminado la producción 5 días antes. ¿En cuántos días se produjeron los 480 artículos?

8. **Velocidad de un aeroplano** Un hombre vuela en un pequeño aeroplano desde Fargo hasta Bismarck, en Dakota del Norte, que representa una distancia de 180 millas. Como vuela con viento en contra, el viaje dura 2 horas. De regreso, el viento sigue soplando a la misma velocidad, de modo que el viaje de retorno dura sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano con el viento en calma y cuál es la velocidad del viento?



9. Velocidad de un bote Un bote que va por un río viaja durante una hora aguas abajo entre dos puntos, que están separados 20 millas. El viaje de regreso, contra la corriente, dura 2 h 30 min. ¿Cuál es la velocidad de la embarcación y ¿cuál es la velocidad de la corriente en el río?



10. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.
    Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños fueron de excursión.

11. **Finanzas:** Una corporación pequeña de zapateros solicitó un préstamo por 1 500 000 dólares para ampliar su línea de zapatos. Parte del dinero se recibió al 7%, parte al 8% y parte al 10%. Utilice un sistema de ecuaciones para determinar cuánto se pagó a cada tasa, si el interés anual fue 130 000 dólares y la cantidad prestada al 10% fue 4 veces mayor que la cantidad prestada al 7%. Resuelva el sistema empleando matrices.

12. Una empresa fabricó tres tipos de estanterías: A, B y C. Para ello se utilizaron unidades de madera, plástico y aluminio, tal como se detalla en la siguiente tabla:

TIPOS	MADERA	PLÁSTICO	ALUMINIO
A	1 unidad	1 unidad	2 unidades
B	1 unidad	1 unidad	3 unidades
C	1 unidad	2 unidades	5 unidades

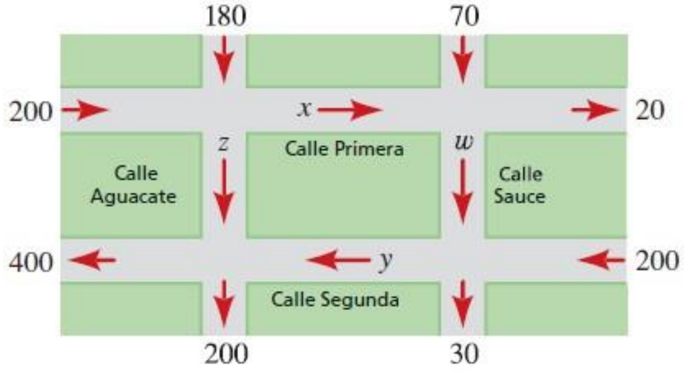
La empresa tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Sabiendo que utilizó todas sus existencias, calcula cuántas estanterías de cada tipo fabricó.

13. John recibe una herencia de 50 000 dólares. Su asesor financiero le aconseja invertir en tres fondos mutualistas: un fondo de mercado de valores, un fondo de acciones selectas y un fondo de acciones de alta tecnología. El asesor financiero estima que el fondo del mercado de valores dará 5% el año próximo, el fondo de las acciones selectas dará 9% y el fondo de acciones de alta tecnología generará 16%. John desea un rendimiento total en el primer año de 4000 dólares. Para evitar un riesgo excesivo, decide invertir tres veces más en el fondo del mercado de valores que en el fondo de acciones de alta tecnología. ¿Cuánto debe invertir en cada fondo?

14. **Fabricación de muebles:** Una fábrica de muebles manufactura mesas, sillas y armarios. Cada pieza requiere tres operaciones: corte de la madera, ensamble y acabado. Cada proceso requiere la cantidad de horas (h) que se da en la tabla. Los trabajadores de la fábrica pueden proporcionar 300 horas de corte, 400 h de ensamble y 590 h de acabado por cada semana. ¿Cuantas mesas, sillas y armarios se deben producir de modo que todas las horas de mano de obra se utilicen? ¿O esto es imposible?

	Mesa	Silla	Armarios
Corte (h)	$\frac{1}{2}$	1	1
Ensamble (h)	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1
Acabado (h)	1	$1\frac{1}{2}$	2

15. **Tránsito urbano:** Una parte de la red de calles de la ciudad se muestra en la figura. Las flechas indican las calles de un solo sentido y los números señalan cuantos automóviles entran o salen de esta sección de la ciudad por la calle indicada en un cierto periodo de una hora. Las variables x, y, z, w representan la cantidad de automóviles que se desplaza a lo largo de las partes de las calles Primera, Segunda, Aguacate y Sauce durante el primer periodo. Determine x, y, z, w, suponiendo que ninguno de los automóviles se detiene o se estaciona en cualquiera de las calles mostradas.



SESIÓN N° 03
TEMA: REPASO DE DETERMINANTES Y SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES - PRÁCTICA CALIFICADA N° 04

Calcula los siguientes determinantes:

1. $M = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$

2. $N = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 12 & 7 \end{vmatrix}$

3. $P = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 12 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

4. $Q = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

5. $R = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 & -1 \\ 3 & 7 & -3 & 1 \\ 6 & 14 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Resuelva el sistema de ecuaciones:

6. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 7 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x + 8y - z = -1 \\ x - 2y + z = 5 \\ 3x + 2y + 2z = 12 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-2y+z=5 \\ 4x+2y+z=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x+y+2z=1 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 5x+4y+2z=4 \end{cases}$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

11. Dos turistas se dirigen simultáneamente a una ciudad que se encuentra a 30km de ellos. La velocidad del primero de ellos es de 1 km/h más que la del segundo, debido a lo cual llega a la ciudad una hora antes. ¿Cuántos km/h hace cada turista en el recorrido?

12. Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que, el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10% de descuento.

13. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

    A. Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.
    B. Resuelva, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

14. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales *A*, *B* y *C*. El primer lingote contiene 20 g del metal *A*, 20 g del *B* y 60 del *C*. El segundo contiene 10 g de *A*, 40 g de *B* y 50 g de *C*. El tercero contiene 20 g de *A*, 40 g de *B* y 40 g de *C*. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de *A*, 35 g de *B* y 50 g de *C*.

    ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

15. Una persona invierte bonos clasificados A; bonos B y bonos C. Los rendimientos promedio son 6,5% en bonos A, 7% en bonos B y 9% en bonos C. La persona invierte el doble en bonos C que en bonos B. Sean "x", "y" y "z" las cantidades invertidas en bonos A, B y C respectivamente.

$$\begin{cases} x+y+z=10000 \\ 0.065x+0{,}07y+0{,}09z=760 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

    Determina el valor de "x", "y" y "z", que satisface el sistema de ecuaciones. (Utiliza reducción de Gauss ó sustitución hacia atrás).

Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria

- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados

- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRI4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

SEMANA N° 16

SUCESIONES Y SERIES

SESIÓN N° 01

PRUEBA DE DESARROLLO N° 04

SESIÓN N° 02

TEMA: SUCESIONES

1. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión. (Suponga que n empieza con 1.)

   A. $a_n = 2n + 5$

   B. $a_n = 4n - 7$

   C. $a_n = 2^n$

   D. $a_n = (1/2)^n$

   E. $a_n = (-2)^n$

   F. $a_n = (-1/2)^n$

   G. $a_n = \dfrac{n+2}{n}$

   H. $a_n = \dfrac{n}{n+2}$

   I. $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

   J. $a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$

   K. $a_n = \dfrac{10}{n^{2/3}}$

   L. $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n^{3/2}}$

   M. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$

   N. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

2. Calcula el término indicado de la sucesión.

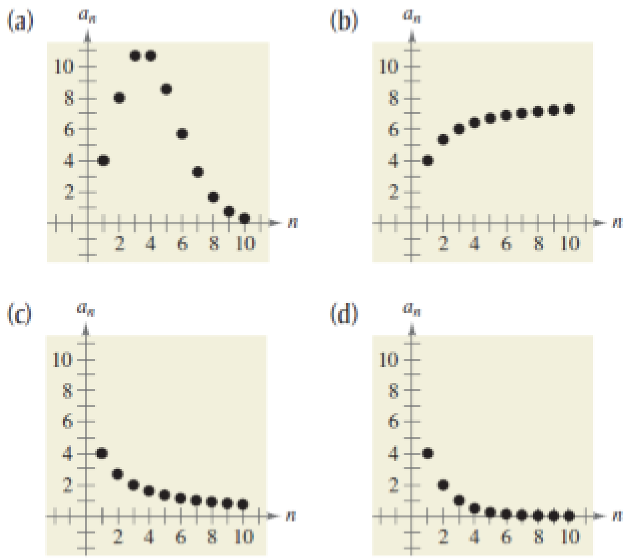
A. $a_n = (-1)^n (3n-2)$
$a_{25} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

B. $a_n = (-1)^{n-1}[n(n-1)]$
$a_{16} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

C. $a_n = \dfrac{4n}{2n^2 - 3}$
$a_{11} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

D. $a_n = \dfrac{4n^2 - n + 3}{n(n-1)(n+2)}$
$a_{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. En los ejercicios A - D, relaciona la sucesión con la gráfica de sus primeros 10 términos. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]



A. $a_n = \dfrac{8}{n+1}$

B. $a_n = \dfrac{8n}{n+1}$

C. $a_n = 4(0{,}5)^{n-1}$

D. $a_n = \dfrac{4n}{n!}$

4. Escriba una expresión para el n-ésimo término aparente de la sucesión. (Suponga que n empieza con 1.)

A. $1;4;7;10;13;...$

B. $3;7;11;15;24;...$

C. $0;3;8;15;24;...$

D. $2;-4;6;-8;10;...$

E. $-\frac{2}{3};\frac{3}{4};-\frac{4}{5};\frac{5}{6};-\frac{6}{7};...$

F. $1;\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{24};\frac{1}{120};...$

G. $1;-1;1;-1;1;...$

H. $1+\frac{1}{2};1+\frac{3}{4};1+\frac{7}{8};1+\frac{15}{16};1+\frac{31}{32};...$

5. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión definidos recursivamente.

A. $a_1 = 6; \quad a_{k+1} = a_k - 4$

B. $a_1 = 15; \quad a_{k+1} = a_k + 3$

C. $a_1 = 3; \quad a_{k+1} = 2(a_k - 1)$

D. $a_1 = 32; \quad a_{k+1} = (\frac{1}{2})a_k$

6. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión definidos recursivamente. Use el patrón para escribir el n-ésimo término de la sucesión como función de n. (Suponga que **n** empieza con 1.)

A. $a_1 = 6; \quad a_{k+1} = a_k + 2$

B. $a_1 = 25; \quad a_{k+1} = a_k - 5$

C. $a_1 = 81; \quad a_{k+1} = (\frac{1}{3})a_k$

D. $a_1 = 14; \quad a_{k+1} = (-2)a_k$

7. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión. (Suponga que **n** empieza con

A. $a_n = \frac{1}{n!}$

B. $a_n = \frac{n!}{2n+1}$

C. $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$

D. $a_n = \frac{n^2}{(n+1)!}$

E. $a_n = \dfrac{(-1)^{2n}}{(2n)!}$

F. $a_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

8. Simplifique la expresión factorial.

A. $\dfrac{4!}{6!}$

B. $\dfrac{5!}{8!}$

C. $\dfrac{12!}{4!.8!}$

D. $\dfrac{10!.3!}{4!.6!}$

E. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

F. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

G. $\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

H. $\dfrac{(3n+1)!}{(3n)!}$

SESIÓN N° 03

TEMA: SERIES

1. Calcula la Suma.

A. $\sum_{i=1}^{5}(2i+1)$

B. $\sum_{i=1}^{6}(3i-1)$

C. $\sum_{k=1}^{4}10$

D. $\sum_{k=1}^{5}6$

E. $\sum_{i=0}^{4}i^2$

F. $\sum_{i=0}^{5}3i^2$

G. $\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k^2+1}$

H. $\sum_{j=3}^{5}\frac{1}{j^2-3}$

I. $\sum_{k=2}^{5}(k+1)^2(k-3)$

J. $\sum_{i=1}^{4}\left[(i-1)^2+(i+1)^3\right]$

K. $\sum_{i=1}^{4}2^i$

L. $\sum_{j=0}^{4}(-2)^j$

2. Usa notación sigma para escribir la suma.

A. $\frac{1}{3(1)}+\frac{1}{3(2)}+\frac{1}{3(3)}+\ldots+\frac{1}{3(9)}$

B. $\frac{5}{1+1}+\frac{5}{1+2}+\frac{5}{1+3}+\ldots+\frac{5}{1+10}$

C. $\left[2\left(\frac{1}{8}\right)+3\right]+\left[2\left(\frac{2}{8}\right)+3\right]+\ldots+\left[2\left(\frac{8}{8}\right)+3\right]$

D. $\left[1-(\frac{1}{6})^2\right]+\left[1-(\frac{2}{6})^2\right]+\ldots+\left[1-(\frac{6}{6})^2\right]$

E. $3-9+27-81+243-729$

F. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots-\frac{1}{128}$

G. $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots-\frac{1}{20^2}$

H. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{10.12}$

I. $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{7}{16}+.\frac{15}{32}+\frac{31}{64}$

J. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{6}{8}+\frac{24}{16}+\frac{120}{32}+\frac{720}{64}$

3. Determina la suma parcial indicada de la serie.

A. $\sum_{i=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{2}\right)^i\ ;cuarta\ \ suma\ \ parcial$

B. $\sum_{i=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}$; quint a suma parcial

C. $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$; cuarta suma parcial

D. $\sum_{n=1}^{\infty} 8\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}$; tercera suma parcial

4. Determina la suma de la serie infinita.

A. $\sum_{i=1}^{\infty} 6\left(\frac{1}{10}\right)^{i}$

B. $\sum_{K=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{K}$

C. $\sum_{K=1}^{\infty} 7\left(\frac{1}{10}\right)^{K}$

D. $\sum_{i=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{10}\right)^{i}$

5. **INTERÉS COMPUESTO.** Usted deposita $25 000 en una cuenta que gana 7% de interés compuesto mensualmente. El saldo en la cuenta después de n meses está dado por:

$$A_n = 25000\,(1+\frac{0.07}{12})^n \;\; ; \; n = 1;2;3;\ldots$$

A. Escriba los primeros seis términos de la sucesión.
B. Encuentra el saldo de la cuenta después de 5 años al calcular el 60avo término de la sucesión.
C. ¿El saldo en la cuenta después de 10 años es el doble del saldo después de 5 años? Explique.

6. **INTERÉS COMPUESTO.** Se hace un depósito de $10 000 en una cuenta que gana 8.5% de interés capitalizado trimestralmente. El saldo de la cuenta después de n trimestres está dado por:

$$A_n = 10000\,(1+\frac{0.085}{4})^n \;\; ; \; n = 1;2;3;\ldots$$

A. Escriba los primeros ocho términos de la sucesión.
B. Encuentra el saldo de la cuenta después de 10 años al calcular el 40avo término de la sucesión.
C. ¿El saldo en la cuenta después de 20 años es el doble del saldo después de 10 años? Explica.

7. **ANÁLISIS DE DATOS: NÚMERO DE TIENDAS.** La tabla siguiente muestra el número de tiendas Best Buy del 2002 a 2007. (Fuente: Best Buy Company, Inc.)

Año	Número de tiendas, a_n
2002	548
2003	595
2004	668
2005	786
2006	822
2007	923

A. Usa el comando regresión de una calculadora de gráficas para hallar una sucesión lineal que modele los datos. Con n represente el año, con n=2 correspondiente a 2002.
B. Usa el comando regresión de una calculadora de gráficas para hallar una sucesión cuadrática que modele los datos.
C. Evalúa las sucesiones de los incisos (a) y (b) para n= 2; 3; ...7 . Compare estos valores con los mostrados en la tabla. ¿Cuál modelo se ajusta mejor a los datos? Explique.
D. ¿Cuál modelo piensa usted que predice mejor el número de tiendas Best Buy en el futuro? Use el modelo escogido por usted para predecir el número de tiendas Best Buy en 2013.

8. **MEDICINA.** El número (en miles) de casos de sida reportados de 2000 a 2007 se pueden aproximar con el modelo

$$a_n = 0.0786n^3 - 3.150n^2 + 41.56n - 136.4$$
$$n = 10,11,...,17$$

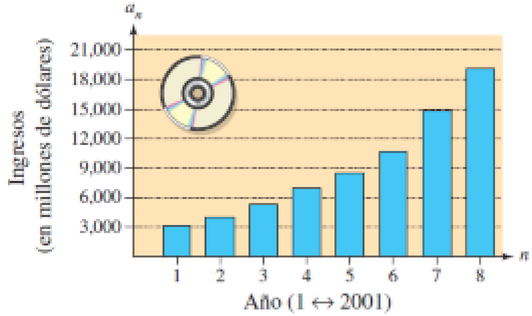
Donde **n** es el año, con n=10 correspondiente a 2000. (Fuente: U.S. Centers for Disease Control and Prevention)

A. Encuentra los términos de esta sucesión finita. Use el comando statistical lotting de una calculadora de gráficas para construir una gráfica de barras que represente la sucesión.
B. ¿Qué dice la gráfica en el inciso (a) acerca de casos reportados de sida?

9. **INGRESOS.** Los ingresos (en millones de dólares) de Amazon.com de 2001 a 2008 se muestran en la figura de la página siguiente. Los ingresos pueden aproximarse con el modelo

$$a_n = 296.477n^2 - 469.11n + 3606.2$$
$$n = 1,2,...,8$$

Donde **n** es el año, con n=1 correspondiente a 2001. Use este modelo para aproximar el ingreso total de 2001 a 2008. Compare esta suma con el resultado de sumar los ingresos mostrados en la figura de la página siguiente. (Fuente: Amazon.com)



10. Interés compuesto. Julio deposita $2000 en una cuenta de ahorros que paga 2.4% de interés al año capitalizado mensualmente. La cantidad en la cuenta después de n meses está dada por la sucesión.

$$A_n = 2000\left(1+\frac{0.042}{12}\right)^n$$

A. Encuentra los primeros seis términos de la sucesión.
B. Encuentra la cantidad en la cuenta después de 3 años.

11. **Interés compuesto.** Al finalizar cada mes, Elena deposita $100 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado mensualmente. La cantidad de interés que ella ha acumulado después de n meses está dada por la sucesión:

$$A_n = 100\left(\frac{1.005^n - 1}{0.005} - n\right)^n$$

A. Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.
B. Encuentre el interés que ella ha acumulado después de 5 años.

12. **Población de una ciudad.** En el año 2004, una ciudad ha incorporado una población de 35,000. Se espera que la población aumente a razón de 2% al año. La población n años después de 2004 está dada por la sucesión:

$$P_n = 35000(1.02)^n$$

A. Encuentra los primeros cinco términos de la sucesión.
B. Encuentra la población en 2014.

13. **Pagar una deuda.** Margarita solicita en préstamo $10,000 a su tío y conviene en pagarlo en pagos mensuales de $200. Su tío le cobra 0.5% de interés al mes sobre el saldo.

A. Demuestra que su saldo A_n en el n-esimo mes está dado en forma recursiva por $A_n = 10000$ y

$$A_n = 1.005A_{n-1} - 200$$

B. Encuentra su saldo después de seis meses.

14. **Cultivo de peces.** Un criador de pescado tiene 5000 bagres en su estanque. El número de bagres aumenta en 8% al mes, y el criador cosecha 300 bagres al mes.

A. Demuestra que la población de bagres Pn después de n meses está dada recursivamente por Pn=500 y

$$P_n = 1.08P_{n-1} - 300$$

B. ¿Cuántos peces hay en el estanque después de 12 meses?

15. **Precio de una casa.** El precio medio de una casa en Orange County aumenta en alrededor de 6% al año. En 2002 el precio medio era de $240,000. Sea Pn el precio medio n años después de 2002.
    A. Encuentra una fórmula para la sucesión P.
    B. Encuentra el precio medio esperado en 2010.

Referencias bibliográficas

Básica
- Larson, R. y Edwards, B.H *(2012). Calculo de una variable* (9ª ed.). México: Mc Graw Hill.

Complementaria
- Zill, D.G. y Wright, W.S. (2011). *Calculo de una variable: Transcendentes tempranas* (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007*). Precálculo: Gráfico, numérico, algebraico (7ª ed.).* México: Editorial Pearson.
- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). *Precálculo* (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Wooton W. (1985). *Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.*

Enlaces recomendados
- http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRI4
- http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf
- http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf

Referencias bibliográficas

Básica

- Larson, R. y Edwards B.H (2012). *Calculo de una variable* (9ª ed.). *México: Mc Graw Hill*

Complementaria

- Barnett, Ziegler, Byleen y Sobecki. (2013). Precálculo (7ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Demana, Waits, Foley y Kennedy. (2007). Precálculo: Gráfico, numérico y algebraico (7ª ed.). México: Editorial Pearson.
- Figueroa, R. Geometría Analítica. Séptima edición. Lima: Ediciones RFG, 2006. Biblioteca UCCI: 516.3 - F49 - 2006
- Figueroa, R. (2001). Vectores y matrices. Cuarta edición. Lima: Editorial América, 2001. pág. 571. Biblioteca UCCI: 512.9434 - F49 – 2001
- Larner, Jagdish C. Arya y Robin, W. (1992). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía (3ª ed.). México: Editorial Prentice Hall. Biblioteca UCCI: 519 - A78
- Lehmann (1998). Geometría analítica. México: Limusa Noriega Editores. Biblioteca UCCI: 516.3 - L41
- Peterson, J. (2011). Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica (3ª reimpresión). México: Editorial CECSA.
- Wooton, W. (1985). Geometría analítica moderna (3ª reimpresión). México. Publicaciones Cultural S.A.
- Zill, D.G. y Wright W.S. (2011). Calculo de una variable: Transcendentes tempranas (4ª ed.). China: Mc Graw Hill.

Enlaces recomendados

- *http://www.youtube.com/watch?v=sF6NAi9IRl4*
- *http://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_1/Vectores.pdf*
- *http://www.cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/vectores/teoriavectores.pdf*
- *Luna, A. (2000, Apr 16). No te quebres la cabeza. Reforma. Retrieved from http://search.proquest.com/docview/310454473?accountid=146219*
- *Armando, F. A. (2001, Oct 25). Mirador. Palabra. Retrieved from http://search.proquest.com/docview/377323241?accountid=146219*
- *Cruz J. Al buen entendedor, muchas matemáticas. Reforma 2000 Feb24:2-2.*