Universidad Continental

Cálculo III

Guía de Trabajo

Visión

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

MISIÓN

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental
Material publicado con fines de estudio
Código: ASUC 00067

Presentación

El presente material "Guía de Trabajo" se elaboró con el propósito de servir como banco de preguntas sobre ecuaciones diferenciales que serán resueltas en el proceso de aprendizaje de la asignatura de Cálculo III.

Esta recopilación de ejercicios está destinada para los alumnos de la Universidad Continental, cada ejercicio está seleccionado, permitiendo preparar y capacitar debidamente al estudiante en el conocimiento de los temas convencionales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias con un acervo de aplicaciones tomadas de la ingeniería y de las ciencias.

La formación básica de los estudios impartidos en la universidad, en el área de Ciencias e Ingeniería, son muy importantes y la asignatura de Cálculo III juega un rol fundamental, debido a que es un curso terminal del cálculo diferencial e integral, los cuales son herramientas fundamentales que sirven para estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias que están relacionadas con los cursos de las diferentes especialidades de la ingeniería que brinda la Universidad.

Es así como esta guía de aprendizaje se han dividido en cuatro unidades y que son:
Unidad I: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Unidad II: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales
Unidad III: Transformada de Laplace
Unidad IV: Series de Fourier.

Por último quisiéramos agradecer a los colegas que han hecho posible esta recopilación de ejercicios.

Los autores

ÍNDICE

UNIDAD IV: SERIES DE FOURIER

Unidad I

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias usando diferentes métodos de resolución y análisis de resultados.

SEMANA N° 01
INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

SESIÓN N° 01
TEMA: PRESENTACIÓN DE ASIGNATURA
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

SESIÓN N° 02
TEMA: INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA. CLASIFICACIÓN, PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

I. En los problemas siguientes, defina el orden de la ecuación diferencial presentada y determine si la ecuación es lineal o no lineal.

1.1 $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

1.2 $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

1.3 $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$

1.4 $x^2 dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$

1.5 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = seny$

1.6 $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

1.7 $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2}$

1.8 $sen(\theta)y''' - (\cos\theta)y' = 2$

II. Clasifica cada una de las ecuaciones diferenciales que se dan a continuación, según tipo, orden y grado.

	Ecuación	Tipo	Orden	Grado
2.1	$\dfrac{d^2x}{dy^2} + senx\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3 = 0$			
2.2	$\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V$			
2.3	$x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + xy = 0$			
2.4	$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = \cos x$			
2.5	$\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 2\left(\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}\right)^2 + \dfrac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0$			

III. Clasifica cada una de las ecuaciones diferenciales que se dan a continuación, según tipo, orden, grado y linealidad.

	Ecuación	Tipo	Orden	Grado	Linealidad
3.1	$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$				
3.2	$y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)\,e^{2x}$				
3.3	$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = senx^2$				
3.4	$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + xy = e^{x+y}$				
3.5	$y'' - 2x(y')^2 + xy = 0$				
3.6	$\dfrac{d^4y}{dx^4} - \left(2\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = xye^x$				

IV. En los problemas siguientes, compruebe que la función indicada sea una solución de la ecuación diferencial dada. En algunos casos, suponga un intervalo adecuado de validez de la solución. Cuando aparecen, los símbolos C_1 y C_2 son constantes.

4.1 $x^2y'' - xy' + 2y = 0; \;\; y = x\cos(\ln x)$

4.2 $y'' - 6y' + 13y = 0; \;\; y = e^{3x}\cos 2x$

4.3 $\dfrac{dx}{dt} = (2-x)(1-x); \;\; \ln\dfrac{2-x}{1-x} = t$

4.4 $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0; \;\; y = c_1 + c_2x^{-1}$

V. **Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es dada.**

5.1 $y = x^2 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$

5.2 $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

5.3 $y = A(\cos x + xsenx) + B(senx - x\cos x)$

SESIÓN N° 03
TEMA: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN; EDO DE VARIABLE SEPARABLE, EDO REDUCTIBLE A VARIABLE SEPARABLE.

I. En los problemas siguientes, resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables.

1.1 $\frac{dy}{dx}+2xy^2=0$

1.2 $y\ln x\frac{dx}{dy}=\left(\frac{y+1}{x}\right)^2$

1.3 $\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x}$

1.4 $e^x y\frac{dy}{dx}=e^{-y}+e^{-2x-y}$

1.5 $(1+x^2+y^2+x^2y^2)dy=y^2dx$

1.6 $\frac{dP}{dt}=P-P^2$

1.7 $\frac{dN}{dt}+N=N\,t\,e^{t+2}$

1.8 $sen3xdx+2y\cos^3 3xdy=0$

1.9 $(y-yx^2)\frac{dy}{dx}=(y+1)^2$

1.10 $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

II. En los problemas 2.1 a 2.5, encuentre una solución explícita del problema con valores iniciales dado.

2.1 $x^2\frac{dy}{dx}=y-xy,\ \ y(-1)=-1$

2.2 $(1+e^x)y\,y'=e^y,\ \ y(0)=0$

2.3 $(e^{-y}+1)senxdx=(1+\cos x)dy,\ \ y(0)=0$

2.4 $(1+x^4)dy+x(1+4y^2)dx=0,\ \ \ y(1)=0$

2.5 $(e^{-y}+1)senxdx=(1+\cos x)dy,\ \ y(0)=0$

III. Determine la solución de la ecuación diferencial reduciendo a ecuación diferencial de variables separables.

3.1 $\frac{dy}{dx}=sen(x-y)$

3.2 $\frac{dy}{dx}=(2x+3y+4)$

3.3 $(1+x^2y^2)+2x^2y'=0$

3.4 $$\frac{y^2}{x\ln x}+(1-y)e^y\frac{dy}{dx}=0$$

3.5 $$(\ln x+y^3)-3xy^2dy=0$$

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). *Análisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 02
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

SESIÓN N° 01
TEMA: ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS

I. En los ejercicios 1.1 a 1.10 resuelva la ecuación diferencial homogénea.

1.1 $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2}$

1.2 $2x(x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} = y(y^2 + 2x^2)$

1.3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

1.4 $x\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)y' + x = y\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

1.5 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(y-2x)}{x(x-2y)}$

1.6 $4x^2 - xy + y^2 + (x^2 - xy + 4y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

1.7 $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$

1.8 $\left(x - y\ln\dfrac{y}{x}\right)dx + x\ln\dfrac{y}{x}dy = 0$

1.9 $\left(x + (x-y)e^{\frac{y}{x}}\right)dx + xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$

1.10 $xsen\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = ysen\left(\dfrac{y}{x}\right) + x$

II. En los problemas 2.1 a 2.6, encuentre la solución particular que satisface la condición inicial.

	<u>**Ecuación Diferencial**</u>	<u>**Condición inicial**</u>
2.1	$xdy - (2xe^{-y/x} + y)dx = 0$	$y(1) = 0$
2.2	$x(x+y)dy - y^2dx = 0$	$y(1) = 1$
2.3	$\left(x\sec\dfrac{y}{x} + y\right)dx - xdy = 0$	$y(1) = 0$
2.4	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$	$y(1) = 1$
2.5	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right) + y}{x}$	$y(1) = \dfrac{\pi}{4}$
2.6	$ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0$	$y(1) = e$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

3.1 En la siguiente ecuación diferencial, determina el valor de "a" de tal manera que dicha ecuación sea homogénea y resuelva la ecuación con la condición de que $y(1)=2$

$$2xy^{3a}dx \; + \; a(x^2y^{3a-1}-x^4)y^{a-1}dy=0$$

3.2 Demuestre que $(x+y)^{a+b}(x-y)^{a-b}=c$ es la solución de la ecuación diferencial

$$(ax-by)dx \, + \, (bx-ay)dy=0$$

3.3 Resuelva la ecuación diferencial $(2x^2+3xy+2y^2)dx-xydy=0$ de tal modo que la solución pasa por el punto $P(1,0)$

SESIÓN N° 02
TEMA: ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A HOMOGENEAS

I. En los ejercicios 1.1 a 1.7 resuelva la ecuación diferencial reduciéndola a ecuación diferencial homogénea.

1.1 $(x^4-3x^2)dy+xydx=0$

1.2 $(x+y^3)+6xy^2y'=0$

1.3 $(3x^2y-1)\dfrac{dy}{dx}+4xy^2=0$

1.4 $(x-2y+5)dx+(2x-y+4)dy=0$

1.5 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x+5}{2x-y-4}$

1.6 $y\cos xdx+(2y-senx)dy=0$

1.7 $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$

SESIÓN N° 03

TEMA: ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

I. En los ejercicios 1.1 a 1.10 determina si la ecuación diferencial dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

1.1 $(2xy^2-3)dx+(2x^2y+4)dy=0$

1.2 $(y\ln y-e^{-xy})dx+\left(\dfrac{1}{y}+x\ln y\right)dy=0$

1.3 $x\dfrac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$

1.4 $(e^{2y}-y\cos xy)dx+(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)dy=0$

1.5 $\left(2y-\dfrac{1}{x}+\cos 3x\right)\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x^2}-4x^3+3ysen3x=0$

1.6 $(2ysenx\cos x-y+2y^2e^{xy^2})dx=(x-sen^2x-4xye^{xy^2})dy$

1.7 $\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{y}{t^2+y^2}\right)dt+\left(ye^y+\dfrac{1}{t^2+y^2}\right)dy=0$

1.8 $(3y^2-x)(x+y^2)^{-3}dx+(2y^3-6xy)(x+y^2)^{-3}dy=0$

1.9 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$

1.10 $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}sen2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$

II. En los problemas 2.1 a 2.5, Resuelva el problema de valor inicial dado.

	Ecuación Diferencial	Condición inicial
2.1	$(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy$	$y(1)=1$
2.2	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy^2-\cos x\,senx}{y(1-x^2)}$	$y(0)=2$

2.3 $\left(\dfrac{3y^2-t^2}{y^5}+y\right)\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{t}{2y^4}=0$ $y(1)=1$

2.4 $(y^2\cos x-3x^2y-2x)dx+(2ysenx-x^3+\ln y)=0$ $y(0)=e$

2.5 $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x}{y^4}dy=0$ $y(1)=1$

3. Resuelva las siguientes situaciones planteadas.

3.1 En la siguiente ecuación diferencial, determina el valor de "k" de tal manera que dicha ecuación diferencial sea exacta.

$$(6xy^3+\cos y)dx+(2kx^2y^2-xseny)dy=0$$

3.2 En la siguiente ecuación diferencial, determina los valores de "a" y "b" de tal manera que dicha ecuación diferencial sea exacta.

$$(ax+b)ydx+(x^2+x+\frac{1}{y})dy=0$$

3.3 Obtenga una función M(x,y) de modo que la ecuación diferencial sea exacta.

$$M(x,y)dx+\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

3.4 Obtenga una función N(x,y) de modo tal que la ecuación diferencial $N(x,y)dy+\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}-2x\right)dx=0$ sea exacta y luego resuélvala.

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias* (1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). *Análisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 03

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

SESIÓN N° 01
TEMA: ECUACIONES DIFERENCIALES CON FACTOR INTEGRANTE

I. En los ejercicios 4.1 a 4.6 resuelva la ecuación diferencial dada, encontrando un factor integrante apropiado.

1.1 $y(x+y+1)dx+(x+2y)dy=0$

1.2 $\cos x dx+\left(1+\dfrac{2}{y}\right)senxdy=0$

1.3 $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$

1.4 $2xy\ln y\,dx+(x^2+y^2\sqrt{1+y^2})dy=0$

1.5 $2(3y+2y^3+3x^4senx)dx-3x(x^2+1+2y^2)=0$

1.6 $\left(y^2-\dfrac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\dfrac{1}{(x+y)}+2y(x+1)\right)dy=0$

SESIÓN N° 02
TEMA: ECUACION DIFERENCIAL LINEAL Y LA ECUACION DE BERNOULLI

I. En los ejercicios 1.1 a 1.10 encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada. Proporcione el intervalo más amplio sobre el cual está definida la solución general.

1.1 $(1+x)\dfrac{dy}{dx}-xy=x+x^2$

1.2 $xy'+(1+x)y=e^{-x}sen2x$

1.3 $ydx-4(x+y^6)dy=0$

1.4 $ydx=(ye^y-2x)dy$

1.5 $y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}$

1.6 $x\ln x\dfrac{dy}{dx}-y=x^3(3\ln x-1)$

1.7 $\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

1.8 $\cos y dx = (x\, seny + \tan y)dy$

1.9 $\frac{dy - (x+1)ydx}{x^2 + 4x + 2} = dx$

1.10 $\frac{dy}{dx}(x\cos y + a\, sen2y) = 1$

II. En los problemas 2.1 a 2.5, Resuelva el problema de valor inicial dado. Proporcione el intervalo más amplio sobre el cual está definida la solución general

	Ecuación Diferencial	Condición inicial	
2.1	$L\frac{di}{dt} + Ri = E$	$i(0) = i_o$	L, R, E, i_o son constantes
2.2	$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$	$T(0) = T_o$	k, Tm, T_o son constantes
2.3	$y\frac{dy}{dx} - 2x = 3y^2 - 2$	$y(1) = 1$	
2.4	$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{1-x^2} = x + 1$	$y(0) = 0$	
2.5	$y' + y\cos x = senx\cos x$	$y(0) = 1$	

III. En los problemas 3.1 a 3.6, cada ED es una ecuación de Bernoulli. Resuelva cada ecuación diferencial mediante una sustitución apropiada.

3.1 $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$

3.2 $x^2\frac{dy}{dx} + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2)$

3.3 $ydx + \left(x - \frac{x^3y}{2}\right)dy = 0$

3.4 $(2x\, seny\cos y)y' = 4x^2 + sen^2 y$

3.5 $8xy\frac{dy}{dx} - y = -\frac{1}{y\sqrt[3]{x+1}}$

3.6 $2senx\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^3(x\cos x - senx)$

SESIÓN N° 03

PRACTICA CALIFICADA N°01

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 04
APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

SESIÓN N° 01
TEMA: LEY DE NEWTON DE ENFRIAMIENTO / CALENTAMIENTO

I. En los problemas 1.1 a 1.6, resuelva los problemas, aplicando la Ley Newton sobre enfriamiento y calentamiento.

1.1 Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura es de 70° F, y se lleva a un lugar donde la temperatura del aire es de 10° F. Después de medio minuto, el termómetro marca 50° F. ¿Cuál es la temperatura que marcará en $t = 1$ minuto? ¿Cuánto tiempo le llevará al termómetro alcanzar los 15° F?

1.2 Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de 5° F. Después de un minuto el termómetro marca 55° F, y luego de 5 minutos marca 30° F. ¿Cuál es la temperatura inicial del interior de la habitación?

1.3 Una pequeña barra metálica, cuya temperatura inicial era de 20° C, se deja caer en un gran recipiente que contiene agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo le llevará a la barra alcanzar los 90° C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en un segundo? ¿Cuánto le llevará alcanzar los 98° C?

1.4 Dos grandes recipientes *A* y *B* del mismo tamaño se llenan con diferentes líquidos. Estos líquidos se mantienen a 0° C y 100° C, respectivamente. Una pequeña barra de metal con temperatura inicial de 100° C se introduce en el recipiente *A*. Después de un minuto, la temperatura de la barra es de 90° C; luego de 2 minutos la barra se saca y al instante se transfiere al otro recipiente. Pasado un minuto en el recipiente *B*, la temperatura de la barra se eleva en 10°. ¿Cuánto tiempo, desde el inicio de todo el proceso, le llevará a la barra alcanzar los 99.9° C?

1.5 Un termómetro que marca 70° F se coloca en un horno precalentado a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio localizada en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro marca 110° F después de 12 minutos y 145° F luego de un minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno?

1.6 En $t = 0$, una probeta sellada que contiene una sustancia química se sumerge en un baño líquido. En la probeta, la temperatura inicial de la sustancia es de 80° F. El baño líquido tiene una temperatura controlada (medida en °F) dada por $T_m(t) = 100 - 40e^{-0.1t}$ donde t se mide en minutos.

a) Asuma que $k = 0.1$ en la expresión. Antes de resolver el PVI, describa con palabras qué espera $T(t)$ en el corto y largo plazo.

Resuelva el PVI. Use una herramienta graficadora para trazar la gráfica de $T(t)$ en intervalos de tiempo de diferente duración. ¿Las gráficas coinciden con sus predicciones de la parte *a*)?

SESIÓN N° 02
TEMA: CRECIMIENTO Y DESCOMPOSICION

I. En los problemas 1.1 a 1.11, resuelva los problemas, aplicando los modelos de crecimiento y decaimiento.

1.1 La población de una comunidad aumenta a una tasa que es proporcional al número de personas presente en el tiempo t. Si una población inicial P_0 se ha duplicado en 5 años, ¿cuánto tardará en triplicarse?, ¿y en cuadruplicarse?

1.2 Se sabe que la población de la comunidad creciente del problema 1.1 es de 10 000 individuos después de 3 años. ¿Cuál era la población inicial P_0? ¿Cuál será la población en 10 años? ¿Con cuánta rapidez está creciendo la población en $t = 10$?

1.3 La población de cierta ciudad crece a una tasa que es proporcional a la población presente en el tiempo t. La población inicial de 500 individuos aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población en 30 años? ¿Con cuánta rapidez está creciendo la población en $t = 30$?

1.4 En cierto cultivo, la población de bacterias crece a una tasa que es proporcional a la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t. Después de 3 horas, se observa que hay 400 bacterias; luego de 10 horas, 2 000. ¿Cuál fue el número inicial de bacterias?

1.5 Por crecimiento natural, una ciudad de 40 000 habitantes se duplicaría en 50 años. Debido a mudanzas la población aumenta adicionalmente en 400 personas por año. Calcula la población a los 10 años.

1.6 El isótopo radiactivo del plomo, Pb-209, se deteriora a una tasa que es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene vida media de 3.3 horas. Si un gramo de este isótopo está presente en un inicio, ¿cuánto tiempo le tomará descomponerse al 90% del plomo?

1.7 En un principio, estaban presentes 100 miligramos de cierta sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa había disminuido en 3%. Si la tasa de decaimiento es proporcional a la cantidad de sustancia presente en el tiempo t, encuentre la cantidad restante después de 24 horas. Determine la vida media de la sustancia radiactiva descrita en el problema.

1.8

a) Considere el problema de valor inicial $dA/dt = kA$, $A(0) = A_0$, como el modelo del decaimiento de una sustancia radiactiva. Muestre que, en general, la vida media T de la sustancia es $T = -(\ln 2)/k$

b) Muestre que la solución del problema de valor inicial dado en la parte *a*) se puede escribir como $A(t) = A_0 2^{-t/T}$

c) Si una sustancia radiactiva tiene la vida media T dada en la parte *a*), ¿cuánto le tomará a la cantidad inicial A_0 de la sustancia en decaer a 1/8 A_0?

1.9 Cuando un haz vertical de luz atraviesa un medio transparente, la tasa a la cual su intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor del medio (en pies). En agua marina clara, la intensidad a 3 pies por debajo de la superficie es el 25% de la intensidad inicial I_0 del haz incidente. ¿Cuál será la intensidad del haz a 15 pies por debajo de la superficie?

1.10 Cuando el interés se compone de manera continua, la cantidad de dinero aumenta a una tasa que es proporcional a la cantidad *S* presente en el tiempo *t*, es decir, $dS/dt = rS$, donde *r* es la tasa anual de interés.

a) Encuentre la cantidad de dinero acumulado al final de 5 años cuando se depositen $5 000 en una cuenta de ahorros que produzca 5 ¾ % de interés anual compuesto de manera continua.

b) ¿En cuántos años se habrá duplicado la suma inicial depositada?

c) Utilice una calculadora para comparar la cantidad obtenida en la parte *a*) con la cantidad $S = 5000\left(1+\frac{1}{4}(0.0575)\right)^{5(4)}$ que se acumula cuando el interés se compone de manera trimestral.

1.11 Los arqueólogos han utilizado piezas de madera quemada, o carbón, encontradas en el sitio para datar la antigüedad de pinturas prehistóricas y dibujos plasmados en las paredes y techos de una cueva localizada en Lascaux, Francia. Vea la figura, determina la edad aproximada de una pieza de madera quemada si se encontró que el 85.5% del C-14 acumulado en los árboles vivos del mismo tipo se había deteriorado.

SESIÓN N° 03
TEMA: DRENADO DE TANQUES – LEY DE TORRICELLI

1.1 Un tanque de base rectangular de 4m de ancho, 5m de largo y 3m de altura está lleno de agua. Si en el fondo tiene un orificio circular de 0.03m de diámetro, ¿en cuánto tiempo se vacía?

1.2 Se tiene un depósito semiesférico lleno de agua. Si se vacía por un orificio ubicado en el fondo de área A en un tiempo $t_v = \frac{14\pi}{A\sqrt{2g}}$, determine el rádio del depósito

1.3 Un tanque cónico de 4m de radio está lleno de agua hasta las 3/4 partes de su altura que es de 10m. Si en ese instante se abre un orificio en el fondo de 1cm de radio, determine el tiempo de vaciado del tanque.

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 05
APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

SESIÓN N° 01
TEMA: LEY DE LA CONTINUIDAD - MEZCLAS

I. En los problemas 1.1 a 1.7, resuelva los problemas, aplicando las ecuaciones diferenciales de modelado de mezclas

1.1 Un tanque contiene 200 litros de fluido en el cual se han disuelto 30 gramos de sal. La salmuera, que contiene un gramo de sal por litro se bombea hacia el depósito a una velocidad de 4 L/min; perfectamente mezclada, la solución se bombea hacia fuera a la misma velocidad.

a) Encuentre el número $A(t)$ de gramos de sal presentes en el tanque en el tiempo t.

b) Resuelva el problema asumiendo que se bombea agua pura al tanque.

1.2 Un tanque grande se llena a toda su capacidad con 500 galones de agua pura. Hacia el tanque se bombea salmuera, conteniendo 2 libras de sal, a velocidad de 5 galones por minuto. Perfectamente mezclada, la solución se bombea hacia fuera a la misma velocidad. Halla la cantidad $A(t)$ de libras de sal presentes en el tanque en el tiempo t.

1.3 En el problema 3.2, ¿cuál es la concentración $c(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t? ¿En $t = 5$ minutos? ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque después de un largo tiempo, es decir cuando $t \rightarrow$ q? ¿En qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de este valor límite?
Resuelva el problema 3.3 bajo el supuesto de que la solución se bombea hacia fuera a una mayor velocidad de 10 gal/min. ¿Cuándo se vacía el tanque?

1.4 Un tanque grande se llena parcialmente con 100 galones de fluido en los cuales están disueltas 10 libras de sal. Al tanque se bombea salmuera, conteniendo ½ libra de sal por galón, a velocidad de 6 gal/min. La solución, perfectamente mezclada, se saca a la menor velocidad de 4gal/min. Encuentre la cantidad de libras de sal presentes en el tanque después de 30 minutos.

1.5 Un tanque con capacidad de 500 galones contiene inicialmente 200 galones de agua con 100 lb de sal en solución. Se inyecta al tanque agua que cuya concentración de sal es de 1 lb/gal, a razón de 3 gal/min. La mezcla debidamente agitada y homogeneizada sale del tanque a razón de 2 gal/min.

a) Encuentre la cantidad de sal y la concentración de sal en el tanque para cualquier tiempo

b) Determine la concentración de sal en el instante justo en que la solución alcanza el volumen total del tanque

1.6 Un gran depósito está lleno de 500 gal de agua pura. Una salmuera que contiene 2 lb/gal se bombea al tanque a razón de 5 gl/min. La salmuera, adecuadamente mezclada, se bombea hacia fuera con la misma rapidez.

a) Halle el número de libras de sal y la concentración de sal en el tanque en un instante t cualquiera
b) Determine la cantidad de sal y la concentración al cabo de hora y media de iniciado el proceso de mezclado
c) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la cantidad de sal en el tanque sea de 632,12 lb?
d) Efectuar el ejercicio suponiendo que la solución se extrae a razón de 10 gal/min ¿Cuánto tiempo demorará el tanque en vaciarse?

1.7 Considere dos tanques con capacidad de 500 galones. El primer tanque con volumen inicial V_1 = 100 gal y el segundo tanque con volumen inicial V = 200 gal. Cada tanque contiene inicialmente 50 lb de sal. Entra agua pura al tanque 1 a razón de 5 gal/min y la mezcla bien agitada y homogeneizada fluye al tanque 2 a razón de 5 gal/min. De igual manera una vez que la mezcla es agitada y homogeneizada en el tanque 2, fluye fuera de este a razón de 5 gal/min

a) Encuentre la cantidad de sal x(t) en el tanque 1 en un instante t cualquiera

b) Encuentre la cantidad de sal y(t) en el tanque 2 en un instante t cualquiera

c) Encuentre la cantidad máxima de sal que llega a tener el tanque 2

SESIÓN N° 02
TEMA: CIRCUITOS ELECTRICOS SIMPLES Y PROBLEMAS DIVERSOS

I. En los problemas 1.1 a 1.8, resuelva los problemas, aplicando las ecuaciones diferenciales de CIRCUITOS EN SERIE

1.1 Una fuerza electromotriz de 30 volts se aplica a un circuito *LR* en serie donde la inductancia es de 0.1 henrys y la resistencia de 50 ohms. Encuentre la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$. Determine la corriente cuando $t \to \infty$

1.2 Una fuerza electromotriz de 100 volts se aplica a un circuito *RC* en serie donde la resistencia es de 200 ohms y la capacitancia de 10^{-4} farads. Encuentre la carga $q(t)$ sobre el capacitor si $q(0) = 0$. Determine la corriente $i(t)$.

1.3 Una fuerza electromotriz de 200 volts se aplica a un circuito *RC* en serie con resistencia de 1 000 ohms y capacitanciade $5x10^{-6}$ farads. Encuentre la carga $q(t)$ sobre el capacitor si $i(0) = 0.4$. Determine la carga y la corriente en $t = 0.005$ s. Determine la carga conforme $t \to \infty$

1.4 Una fuerza electromotriz

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t \le 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}$$

se aplica a un circuito *LR* en serie que tiene inductancia de 20 henrys y resistencia de 2 ohms. Encuentre la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$.

1.5 Se conecta en serie una inductancia de 1 henry y una resistencia de 2 ohms con una batería de $6e^{-0.0001t}$ voltios. Inicialmente no fluye corriente alguna. ¿en qué tiempo llegará la corriente a 0.5 amperios?

1.6 Una resistencia variable $R=\dfrac{1}{5+t}$ ohms y una capacitancia de 5 + 10^{-6} farad, se conecta en serie con una f.e.m. de 100 volt. ¿Cuál es la carga del condensador después de 1 minuto, si Q(0)=0?

1.7 Determina la corriente de estado estacionario, si se conecta en serie una resistencia de 2000 ohms y una capacitancia de 3 x 10^{-6} faradios con un alternador de 120 cos(2*t*) voltios.

1.8 Un condensador de capacitancia 4 x 10^{-4} faradios descarga através de una resistencia de 100 ohms, si la corriente es 1 amperio al final de 0.01 segundos, ¿cuál era la carga inicial del condensador? ¿cuánta resistencia debe sacarse del circuito para obtener la mitad de la corriente en el mismo tiempo?

II. DIVERSOS MODELOS MATEMÁTICOS

2.1 Un camarero introduce en un vaso de “cuba libre” un cubito de hielo de 3cm de lado. Al cabo de un minuto su lado es de 2,5cm. Suponiendo que se deshace a un ritmo proporcional al área de su superficie (constante = K), ¿cuánto tardará en deshacerse el cubo de hielo?

2.2 Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y a pesar de ella va a la universidad donde hay 5000 estudiantes. Si la razón con la que se propaga el virus es proporcional al producto de la cantidad de infectados por la cantidad de no infectados, determina la cantidad de alumnos infectados a los 6 días después, si se observa que a los 4 días la cantidad de infectados era de 50.

2.3 El aire del interior de un cuarto con dimensiones de 12 x 8 x 8m contiene 3% de monóxido de carbono. Empezando en t=0, se sopla aire fresco que no contiene monóxido de carbono, hacia el interior del cuarto a razón de 100m3/min. Si el aire del cuarto sale al exterior a través de una abertura a la misma velocidad, ¿cuándo tendrá el aire del interior del cuarto 0,01% de monóxido de carbono?

2.4 Un producto nuevo de celulares se introduce a través de unas campañas de publicidad a una población de 1 millón de clientes potenciales. La velocidad a la que la población se entera del producto se supone que es proporcional al número de personas que todavía no son conscientes del producto (no han oído habla del producto). Al final de un año, la mitad de la población ha odio hablar del producto. ¿Cuántas personas han oído hablar de él al final de 2 años?

2.5 Cierta persona tiene una fortuna que aumenta a una velocidad proporcional al cuadrado de su riqueza presente. Si tenía un millón de soles hace un año y ahora tiene dos millones, ¿cuánto tendrá dentro de seis meses? y ¿cuánto dentro de dos años?

SESIÓN N° 03

PRUEBA DE DESARROLLO N°01

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 06

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

SESIÓN N° 01
TEMA: REDUCCION DE ORDEN Y ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

I. En los problemas 1.1 a 1.6, la función indicada como $y_{1(x)}$ es una solución de la ecuación dada. Use el método de reducción de orden, para encontrar una segunda solución $y_{2(x)}$.

1.1 $y''+2y'+y=0$, $y_1 = xe^{-x}$

1.2 $y''+9y=0$, $y_1 = sen3x$

1.3 $9y''-12y'+4y=0$, $y_1 = e^{2x/3}$

1.4 $4x^2y''+y=0$, $y_1 = x^{1/2}\ln x$

1.5 $x^2y''-3xy'+5y=0$, $y_1 = x^2\cos(\ln x)$

1.6 $(1-2x-x^2)y''+2(1+x)y'-2y=0$, $y_1 = x+1$

II. En los problemas 2.1, 2.2 y 2.3, la función indicada $y_{1(x)}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Use el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_{2(x)}$ de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

2.1 $y''-4y=2$, $y_1 = e^{-2x}$

2.2 $y''+y'=1$, $y_1 = 1$

2.3 $y''-3y'+2y=5e^{3x}$, $y_1 = e^x$

III. En los problemas 3.1 a 3.5, encuentre la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dado.

3.1 $y''-y'-6y=0$

3.2 $y''+8y'+16y=0$

3.3 $12y''-5y'-2y=0$

3.4 $y''+9y=0$

3.5 $2y''+2y'+y=0$

IV. **En los problemas 4.1 a 4.10, encuentre la solución general de la ecuación diferencial de orden superior dada.**

4.1 $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

4.2 $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

4.3 $\dfrac{d^3u}{dt^3} + \dfrac{d^2u}{dt^2} - 2u = 0$

4.4 $\dfrac{d^3x}{dt^3} + \dfrac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$

4.5 $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

4.6 $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$

4.7 $16\dfrac{d^4y}{dx^4} + 24\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

4.8 $\dfrac{d^5u}{dr^5} + 5\dfrac{d^4u}{dr^4} - 2\dfrac{d^3u}{dr^3} - 10\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + 5u = 0$

4.9 Resuelva el problema de valor inicial dado

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

4.10 Resuelva el problema de valor inicial dado

$$y''' + 12y'' + 36y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -7$$

SESIÓN N° 02
TEMA: ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES COMPLETAS CON COEFICIENTES CONSTANTES - METODO DE OPERADORES INVERSOS.

I. **En los problemas encuentre una solución particular de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con el método de los operadores inversos.**

1. $(D-2)^2 y = 20 - 3xe^{2x}$

2. $(D+2)^2 y = 12xe^{-2x}$

3. $(D^2 - 4D + 4)(y) = 6x^2e^{2x}$

4. $(D^2 + 4)y = 8\cos^2 x$

5. $(D^2 - 3D + 2)y = 2 + t$

II. **En los problemas encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal con el método de los operadores inversos.**

1. $y'' + y' - 6y = senx$ **ó** $(D^2 + D - 6)y = senx$

2. $y'' + 5y' + 4y = 6e^{-x} + \cos 2x$ **ó** $(D^2 + 5D + 4)y = 6e^{-x} + \cos 2x$

3. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 9y = e^x + sen3x$ **ó** $(D^2 + 9)y = e^x + sen3x$

4. $(D^4 - 8D^2 + 16)(y) = xe^{2x}$

5. $(D^6 - D^4)(y) = x^2$

6. $(D^2 + 16)y = 14\cos 3x$

7. $(D^2 + 5D + 6)y = e^{-2x} sen^2 x(1 + 2\tan x)$

8. $(D^2 + 6D + 9)y = 2e^{-2x} senx$

9. $(D^3 + D)y = senx$

SESIÓN N° 03
TEMA: METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

I. En los problemas 1.1 a 1.10, resuelva la ecuación diferencial dada mediante coeficientes indeterminados.

1.1 $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

1.2 $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

1.3 $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$

1.4 $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3senx)$

1.5 $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$

1.6 $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6e^{2x}$

1.7 $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$

1.8 $y^{(4)} + 2y'' + y = (x-1)^2$

1.9 Resuelva el problema de valor inicial dado

$$y'' + 4y = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$$

1.10 Resuelva el problema de valor inicial dado

$$y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x}, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -4$$

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 07
ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES COMPLETAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

SESIÓN N° 01
TEMA: MÉTODO DE VARIACION DE PARAMETROS

I. En los problemas 1.1 a 1.7, resuelva cada ecuación diferencial por variación de parámetros

1.1 $y'' + y = \tan x$

1.2 $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$

1.3 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{x}}$

1.4 $y'' - 2y' + y = e^{t} \arctan t$

1.5 $y'' + 2y' + y = e^{-t} \ln t$

1.6 $3y'' - 6y' + 6y = e^{x} \sec x$

1.7 $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1-x^{2}}$

II. Resuelva los siguientes problemas utilizando el método más adecuado.

2.1 Resuelva la ED por variación de parámetros sujeto a las condiciones iniciales
$y'' - 4y' + 4y = (12x^{2} - 6x)e^{2x}$

2.2 Resuelva la ecuación diferencial de tercer orden por variación de parámetros
$y''' + y' = \tan x$

2.3 Resuelva la ecuación diferencial de tercer orden por variación de parámetros
$y''' + 4y' = \sec 2x$

2.4 $y'' - 4y' - 5y = 5x$

2.5 $\dfrac{d^{3}y}{dx^{3}} - \dfrac{dy}{dx} = x + 1$

2.6 $y''' + y'' + y' + y = x^2 + 2x - 2$

2.7 $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x$

2.8 $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{dy}{dx} = x, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

2.9 $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$

2.10 $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 5x = \cos t + sent$

2.11 $4y'' - 5y' + y = e^x(sen2x - \cos 2x)$

SESIÓN N° 02

PRACTICA CALIFICADA N°02

SESIÓN N° 03
TEMA: ED LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES – ECUACION DE EULER CAUCHY Y ECUACION DE LEGENDRE

I. En los problemas 1.1 a 1.8, resuelva la ecuación diferencial de Euler Cauchy dada.

1.1 $4x^2y'' + y = 0$

1.2 $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$

1.3 $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$

1.4 $x^2y'' + 8xy' + 6y = 0$

1.5 $x^3y''' - 6y = 0$

1.6 $x^3y''' + xy' - y = 0$

1.7 $xy^{(4)} + 6y''' = 0$

1.8 $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$

II. En los problemas 2.1 a 2.4, resuelva cada ecuación diferencial por variación de parámetros

2.1 $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$

2.2 $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$

2.3 $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{1}{x+1}$

2.4 $$((x+1)^2 D^2 + (x+1)D - 1)y = Ln(x+1)^2 + x - 1$$

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 08
APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

SESIÓN N° 01
TEMA: SISTEMA RESORTES – MASA: MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO Y AMORTIGUADO

1. Si situamos una masa de 5 kg en un resorte, éste se alarga 10 cm. Liberamos la masa 8 cm por debajo de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la ecuación del movimiento suponiendo un movimiento armónico simple? (tómese el valor aproximado de g=10 m/s^2).

2. Supongamos que una masa de 1 kg alarga 5 m un resorte. Determinar la ecuación del movimiento libre amortiguado si la masa se libera dos metros por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 m/s suponiendo que la fuerza amortiguadora es 3 veces la velocidad instantánea.

3. Determinar la ecuación del movimiento de un sistema masa – resorte para el caso m=1 Kg, c=2 N s/m y k=10 N/m suponiendo que la masa se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 3 m/s.

4. Una masa de 2 kg se sujeta a un resorte cuya constante es k = 2 N/m. Supongamos que sobre el sistema está actuando una fuerza amortiguadora que es igual a 4 veces la velocidad instantánea. Determinar la ecuación del movimiento si la masa se libera 1 m por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s.

5. De un resorte, con constante de rigidez k= 13/2 libras por pie, se suspende una pesa provocando un estiramiento de 32/13 pies. En el instante t=0, se sumerge la pesa en un líquido que impone una resistencia de 2 libra por pies por segundo y se aplica una fuerza externa de $f(t) = \frac{1}{4}\, sen\,(2\sqrt{3}\,t)$. Determine la posición x(t) del cuerpo en función del tiempo si x(0)= x´(0) =0.

6. Una masa de 0,2 kilos que está adherida a un resorte con constante de rigidez k=2 newton/m se desplaza en un medio con coeficiente de amortiguación c=1,2 kg/s. Suponga además que está sometida a una fuerza externa dada $f(t) = 5\,cos\,(4\,t)$ newton. Si la masa se suelta a partir del reposo desde una posición ubicada a 50 cm por debajo de la posisción de equilibrio, encuentre la posición de la masa en cualquier instante t.

7. A un sistema masa – resorte amortiguado cuyos parámetros son m = 1 kg, c= 4 N s/m y k= 3 N/m se le aplica una fuerza externa dada por $f(t) = 5\,cos\,(t)$. Determinar la ecuación que describe el movimiento del sistema suponiendo que x(0)= x´(0) =0.

Ejercicios

1. Supongamos que una masa de 2 kg alarga 5 m un resorte. Determinar la ecuación del movimiento libre amortiguado si la masa se libera 2 m por encima de su posición de equilibrio sin velocidad inicial suponiendo que la fuerza amortiguadora es 4 veces la velocidad instantánea.

Solución: $x(t) = -2e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$

2. Consideremos una masa de 5 kg sujeta a un resorte de constante $k = 20\,N/m$. Sobre este sistema está actuando una fuerza amortiguadora de constante $c = 20\,N\,s/m$. Si la masa se suelta 2 m por debajo de su posición de equilibrio con una velocidad inicial descendente de 1 m/s, determínese la ecuación del movimiento del sistema.

Solución: $x(t) = 2e^{-2t} + 5te^{-2t}$

SESIÓN N° 02
PRUEBA DE DESARROLLO N°02

SESIÓN N° 03
TEMA: CIRCUITOS ELECTRICOS RLC

1. Se conecta en serie una fuente de voltaje V= 1,5 V, una resistencia R = 20 Ω, un capacitor de 10^{-3} F y un inductor L=0,1 H. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito en todo tiempo, si inicialmente el capacitor está totalmente descargado y no fluye corriente sobre el circuito.

2. Se conecta en serie una fuente de voltaje V= 110 V, un capacitor de 10^{-3} F y un inductor L=0,1 H. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito en todo tiempo, si inicialmente el capacitor está totalmente descargado y no fluye corriente sobre el circuito.

3. Determinar la carga en todo tiempo sobre un circuito RLC en serie que satisface a la condición $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Consideremos que la fuente de voltaje es constante e igual a V, la carga inicial en el capacitor es cero y no circula corriente en el circuito.

Ejercicios:

1. Se conecta en serie un resistor de 12 Ω, un capacitor de 0.1 F, un inductor de 2 H y una fuente de voltaje $V = 20$ V, formando un circuito RLC. Si inicialmente se encuentra descargado el capacitor y no circula corriente por el circuito, determinar en todo tiempo posterior expresiones para la carga y la corriente.

2. Un circuito RLC en serie está formado por un resistor de 4 Ω, un capacitor de 1 F y un inductor de 4 H. Una fuente de voltaje $V = 120$ V suministra energía al circuito. Suponga que inicialmente no circula corriente por el circuito y que el capacitor está descargado. Determinar la corriente que circula en todo tiempo por el circuito. ¿En qué tiempo se obtiene la corriente máxima?

3. Se conecta en serie un resistor de 4 Ω, un capacitor de 0.05 F y un inductor de 0.2 H a una fuente de voltaje $V = 50$ V formando un circuito RLC. Determinar la carga en el capacitor y la corriente por el circuito en el tiempo t, si inicialmente la carga es de 2 C y no circula corriente por el circuito. ¿En qué tiempo el capacitor obtiene su mayor carga?

4. Un circuito RLC está formado por un resistor $R = 3.2$ Ω, un inductor $L = 0.4$ H y un capacitor $C = 0.1$ F. Si colocamos una fuente de voltaje directa de 50 V en $t = 0$ s, y la suspendemos en $t = \pi/3$ s, determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito antes y después de $t = \pi/3$ s, suponiendo que inicialmente el capacitor tiene una carga de 5 C y circula una corriente de 12 A.

5. Se conecta en serie un resistor $R = 5$ Ω, un capacitor de 0.04 F, un inductor de 0.5 H y una fuente de voltaje $V = 120$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente por el circuito en el tiempo t, si inicialmente la carga es de 10 C y la corriente de 5 A.

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias* (1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). *Análisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

Unidad II

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, usando diferentes métodos de solución

SEMANA N° 09

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

SESIÓN N° 01
Evaluación parcial

SESIÓN N° 02
Resolución de la evaluación parcial

SESIÓN N° 03
TEMA: TEORIA DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1. Un modelo de la serie para el decaimiento radiactivo para tres elementos es el sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x \;;\quad \frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y \;;\quad \frac{dz}{dt} = \lambda_2 y$$

   Encuentre una solución para sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

2. Construya un modelo matemático para una serie radiactiva de cuatro elementos *W*, *X*, *Y* y *Z*, donde *Z* es un elemento estable.

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 10
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

SESIÓN N° 01
TEMA: SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES POR ELIMINACIÓN

I. En los problemas 1.1 a 1.6, resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales planteadas.

1.1. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = -5x \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} Dx + D^2y = e^{3t} \\ (D+1)x + (D-1)y = 4e^{3t} \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} (2D^2 - D - 1)x - (2D+1)y = 1 \\ (D-1)x + Dy = -1 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} Dx + z = e^t \\ (D-1)x + Dy + Dz = 0 \\ x + 2y + Dz = e^t \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} Dx + (D+1)y = 1 \\ (D+2)x - (D-1)z = 1 \\ (D+1)y + (D+2)z = 0 \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} (D^2+4)x - y = sen^2 z \\ (D^2+1)y - 2x = \cos^2 z \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} (D-1)x + (D+2)y = 1 + e^t \\ (D+2)y + (D+1)z = 2 + e^t \\ (D-1)x + (D+1)z = 3 + e^t \end{cases}$

SESIÓN N° 02
TEMA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEOS Y NO HOMOGENEOS

I. En los problemas 1.1 a 1.4 resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales planteadas.

1.1 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 7y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - t \end{cases}$

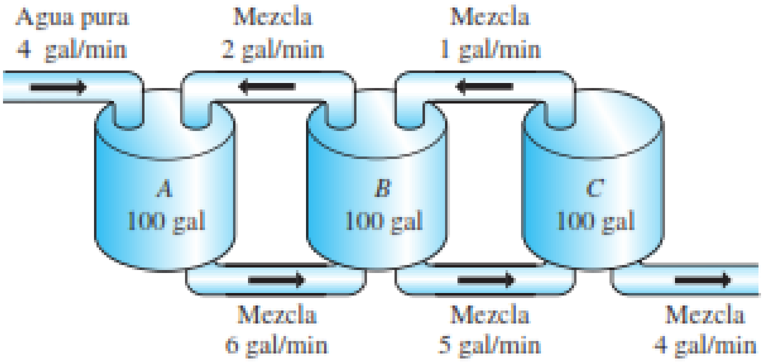
1.3 $\begin{cases} (D^2+5)x - 2y = 0 \\ -2x + (D^2+2)y = 0 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} (D+1)x + (D-1)y = 2 \\ 3x + (D+2)y = -1 \end{cases}$

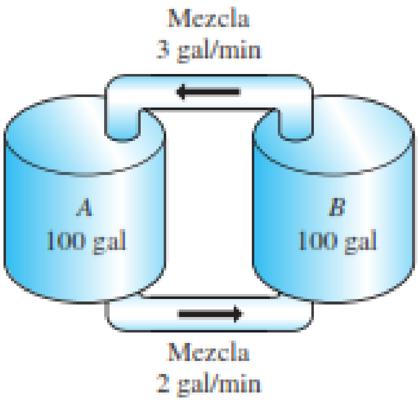
SESIÓN N° 03
TEMA: APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Resuelva los problemas planteados.

1. Use la información dada en la figura para construir un modelo matemático para la cantidad de libras de sal $x1(t)$, $x2(t)$ y, $x3(t)$ presentes en el tiempo t en los tanques A, B y C, respectivamente.



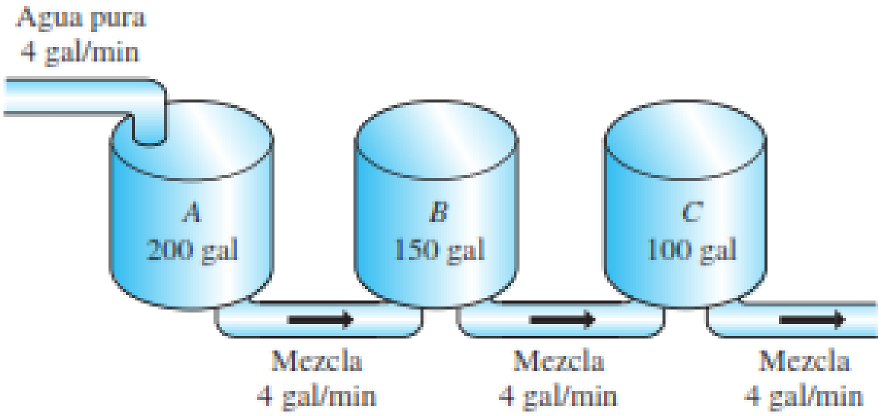
2. Dos tanques muy grandes, A y B, se llenan parcialmente con 100 galones de salmuera cada uno. En un inicio, se disuelven 100 libras de sal en la solución del tanque A y otras 50 libras de sal en la solución del tanque B. El sistema es cerrado y el líquido, perfectamente mezclado, sólo se bombea entre los tanques, como indica la figura



   a) Use la información dada en la figura para construir un modelo matemático para la cantidad de libras de sal $x1(t)$ y $x2(t)$ presente en el tiempo t en los tanques A y B, respectivamente.

   b) Encuentre una relación entre las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que se mantenga en el tiempo t. Explique por qué esta relación es lógica, y úsela para encontrar la cantidad de sal presente en el tanque B en $t = 30$ minutos.

3. Tres tanques grandes contienen salmuera, como lo muestra la figura. Use la información de esa figura para construir un modelo matemático de la cantidad de libras de sal $x1(t)$, $x2(t)$ y $x3(t)$ presentes en el tiempo t en los tanques A, B y C, respectivamente. Sin resolver el sistema, pronostique los valores limitantes de $x1(t)$, $x2(t)$ y $x3(t)$ cuando $t \to \infty$



Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias* (1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). *Análisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

Unidad III

TRANSFORMADA DE LAPLACE

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar la transformada de Laplace para resolver problemas de una ecuación diferencial lineal de orden “n”, utilizando diversas técnicas y métodos de solución.

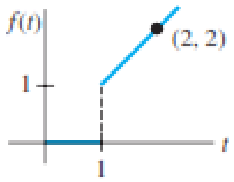
SEMANA N° 11
LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

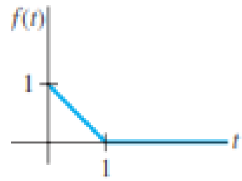
SESIÓN N° 01
TEMA: DEFINICION, EXISTENCIA Y LA PROPIEDAD DE LINEALIDAD DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

I. **En los problemas 1.1 a 1.16, encuentra** $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

1.1 $f(t)=\begin{cases} 2t+1, & 0\le t<1 \\ 0\ , & t\ge 1 \end{cases}$

1.2 $f(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<\pi/2 \\ \cos t\ , & t\ge \pi/2 \end{cases}$

1.3 

1.4 

1.5 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t-5}$

1.6 $f(t)=t^2e^{-2t}$

1.7 $f(t)=e^{-t}sent$

1.8 $f(x)=t\cos t$

1.9 $f(t)=-4t^2+16t+9$

1.10 $f(t)=(t+1)^3$

SESIÓN N° 02
TEMA: TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

1. $f(t)=t^2-e^{-9t}+5$

2. $f(t)=(e^t-e^{-t})^2$

3. $f(t)=\cos 5t+sen2t$

.4 $f(t)=e^t senh\,t$

5. $f(t)=\cos^2 t$

6. $f(t)=10\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$

SESIÓN N° 03

PRACTICA CALIFICADA N°03

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 12

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

SESIÓN N° 01
TEMA: TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE MEDIANTE FRACCIONES PARCIALES

I. En los problemas 1.1 a 1.14, encuentre la transformada inversa de Laplace dada.

1.1 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\}$

1.2 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{48}{s^5}\right\}$

1.3 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

1.4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s-2}\right\}$

1.5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{10s}{s^2+16}\right\}$

1.6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

1.7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2-4s}\right\}$

1.8. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2s-3}\right\}$

1.9 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$

1.10. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+1}{s(s-1)(s+1)(s-2)}\right\}$

1.11. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3+5s}\right\}$

1.12. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}\right\}$

1.13. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

1.14. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\}$

SESIÓN N° 02
TEMA: TRANSFORMADA DE LA DERIVADA. APLICACIONES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

I. En los problemas 1.1 a 1.9, use la transformada de Laplace de la derivada para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes con valores iniciales.

1.1 $y' + 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$

1.2 $y' - y = 2\cos 5t, \quad y(0) = 0$

1.3 $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

1.4 $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

1.5 $y'' + y = \sqrt{2}\,\text{sen}\sqrt{2}t,\ y(0) = 10,\ y'(0) = 0$

1.6 $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

1.7 $y''' + 2y'' - y' - 2y = sen3t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

1.8 $y' + y = e^{-3t}\cos 2t,\ y(0) = 0$

1.9 $y'' - 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

SESIÓN N° 03
TEMA: TRANSFORMADA DE LA INTEGRAL, TRASLACIÓN DE LA TRANSFORMADA, FORMA INVERSA

I. TRANSFORMADAS DE INTEGRALES. En los problemas 1.1 a 1.10, evalúe cada una de las transformadas de Laplace. No evalúe la integral antes de transformar.

1.1 $\mathcal{L}\left\{1 * t^3\right\}$

1.2 $\mathcal{L}\left\{e^{-t} * e^t \cos t\right\}$

1.3 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau \, d\tau\right\}$

1.4 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos\tau \, d\tau\right\}$

1.5 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{1-\tau} d\tau\right\}$

1.6 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t sen\,\tau \cos(t-\tau) d\tau\right\}$

1.7 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-1)}\right\}$

1.8 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s-1)}\right\}$

1.9 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)^2}\right\}$

1.10 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-1)}\right\}$

II. TRANSFORMADAS DE INTEGRALES. En los problemas 2.1 a 2.6, use la transformada de Laplace para resolver la ecuación integral o la ecuación integro diferencial.

2.1 $f(t) + \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau = t$

2.2 $f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t-\tau) d\tau$

2.3 $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau) d\tau$

2.4 $f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t e^{-\tau} (\tau - t)^3 f(\tau) d\tau$

2.5 $y'(t) = 1 - sen\,t - \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0$

2.6 $\dfrac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0$

III. En los problemas 3.1 a 3.8, usando la propiedad de traslación encuentre $F(s)$ o $f(s)$.

3.1 $\mathcal{L}\left\{te^{-6t}\right\}$

3.2 $\mathcal{L}\left\{t^3e^{-2t}\right\}$

3.3 $\mathcal{L}\left\{e^t sen3t\right\}$

3.4 $\mathcal{L}\left\{(1-e^t+3e^{-4t})\cos 5t\right\}$

3.5 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$

3.6 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+10}\right\}$

3.7 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$

3.8 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$

IV. En los problemas 4.1 a 4.5, use la Transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

4.1 $y'+4y=e^{-4t}, \quad y(0)=2$

4.2 $y''-4y'+4ye=t^3e^{2t}, \quad y(0)=0,\ y'(0)=0$

4.3 $y''-4y'+4y=t^3, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

4.4. $y''-6y'+13y=0, \quad y(0)=0,\ y'(0)=-3$

4.5. $y''-y'=e^t\cos t, \quad y(0)=0,\ y'(0)=0$

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias* (1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). *Análisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 13

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

SESIÓN N° 01
TEMA: TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA FUNCION TRASLADADA. FUNCION ESCALON UNITARIO. FORMA INVERSA

I. En los problemas 1.1 a 1.6, encuentre $F(s)$ o $f(s)$

1.1 $\mathcal{L}\{(t-1)U(t-1)\}$

1.2 $\mathcal{L}\{tU(t-2)\}$

1.3 $\mathcal{L}\{\cos 2t\,U(t-\pi)\}$

1.4 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$

1.5 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\}$

1.6 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}\right\}$

II. En los problemas 1.1 a 1.6, use la Transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

2.1 $y'+y=f(t),\quad y(0)=0$, donde $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1\\ 5, & t\ge 1\end{cases}$

2.2 $y'+2y=f(t),\quad y(0)=0$, donde $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<1\\ 0, & t\ge 1\end{cases}$

2.3 $y''+4y=f(t),\quad y(0)=0,\ y'(0)=-1$, donde $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 0, & t\ge 1\end{cases}$

2.4 $y''+y=f(t),\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$, donde $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi\\ 1, & \pi\le t<2\pi\\ 0, & t\ge 2\pi\end{cases}$

2.5. $y''+4y=sent\,U(t-2\pi),\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

2.6. $y''+4y'+3y=1-U(t-2)-U(t-4)+U(t-6),\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$

SESIÓN N° 02
PRUEBA DE DESARROLLO N°03

SESIÓN N° 03
TEMA: DERIVADA DE UNA TRANSFORMADA, SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES VARIABLES.

I. DERIVADAS DE UNA TRANSFORMADA. En los problemas 1.1 a 1.6, evalúe cada una de las transformadas de Laplace.

1.1 $\mathcal{L}\left\{te^{-10t}\right\}$

1.2 $\mathcal{L}\left\{t\cos 2t\right\}$

1.3 $\mathcal{L}\left\{t^2 senh\, t\right\}$

1.4 $\mathcal{L}\left\{t^2 \cos t\right\}$

1.5 $\mathcal{L}\left\{te^{2t} sen 6t\right\}$

1.6 $\mathcal{L}\left\{te^{-3t} \cos 3t\right\}$

II. En los problemas 1.1 a 1.5, use la Transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales dado.

2.1 $y' + y = t\, sent, \quad y(0) = 0$

2.2 $y' - y = t\, e^t sent, \quad y(0) = 0$

2.3 $y'' + 9y' = \cos 3t, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 5$

2.4. $y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, donde $f(t) = \begin{cases} \cos 4t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

2.5. $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, donde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi/2 \\ sen\, t, & t \ge \pi/2 \end{cases}$

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). *Análisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 14

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

SESIÓN N° 01
TEMA: CONVOLUCION, TEOREMA DE CONVOLUCION Y FORMA INVERSA

1. Determinar $(\boldsymbol{cos\ t}) * (\boldsymbol{sen\ t})$

2. Determinar $\boldsymbol{e^{at} * e^{bt}}$

3. Determinar **t**$*\ (\boldsymbol{cos\ a\ t})$

4. Hallar $\boldsymbol{L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\}}$

5. Hallar $\boldsymbol{L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s-2)^2}\right\}}$

6. Hallar $\boldsymbol{L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^3+4s)}\right\}}$

7. Resolver la siguiente ecuación diferencial utilizando convolución:

$\boldsymbol{y'' + 4y = sen\ 3t}$; $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$

8. Resolver la siguiente ecuación diferencial utilizando convolución:

$\boldsymbol{y'' + 9y = e^{-9t}}$; $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$

9. Resolver la siguiente ecuación diferencial utilizando convolución:

$\boldsymbol{y'' + 36y = sen\ 6t}$; $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$

10. Resolver la siguiente ecuación integral:

$$\boldsymbol{y = 8 + \int_0^t y(t-\tau)\ \tau\ d\tau}$$

SESIÓN N° 02
TEMA: SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

I. En los problemas 1.1 a 1.8, use la transformada de Laplace para resolver el sistema dado de ecuaciones diferenciales

1.1 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - t \end{cases} \quad x(0)=1,\ y(0)=1$$

1.2 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + \dfrac{dy}{dt} = 1 \\ \dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} - y = e^t \end{cases} \quad x(0)=0,\ y(0)=0$$

1.3 $$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x = 1 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2 \end{cases} \quad x(0)=0, y(0)=0$$

1.4 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - \dfrac{dy}{dt} + y = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = 0 \end{cases} \quad x(0)=0,\ y(0)=1$$

1.5 $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + y - x = 0 \\ x(0)=0,\ x'(0)=-2 \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

1.6 $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = t^2 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4t \\ x(0)=8,\ x'(0)=0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

1.7 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x + \dfrac{d^3y}{dt^3} = 6sen\,t \\ \dfrac{dx}{dt} + 2x - 2\dfrac{d^3y}{dt^3} = 0 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

1.8 $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y = 0 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t} \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

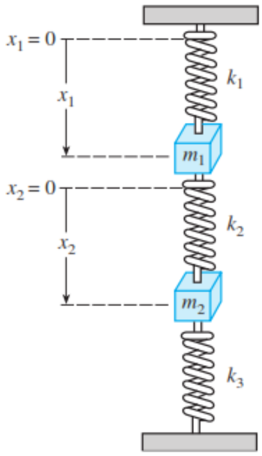
II. Usando la transformada de Laplace, resuelva los siguientes problemas

2.1 Resuelva el sistema mostrado:

$$m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$
$$m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1)$$

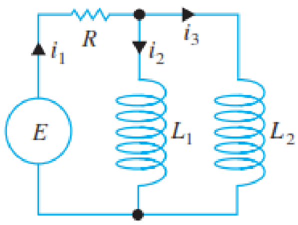
cuando $k_1 = 3,\ k_2 = 2,\ m_1 = m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0,\ x_1'(0) = 1,\ x_2(0) = 1,\ x_2'(0) = 0$

2.2 Construya el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento vertical en línea recta de los resortes acoplados que se muestran en la figura adjunta. Use la transformada de Laplace para resolver el sistema cuando $k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 1,\ m_1 = 1,\ m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0,\ x_1'(0) = -1,\ x_2(0) = 0,\ x_2'(0) = 1$



2.3 a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra es

$$L_1\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t)$$
$$L_2\frac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t).$$



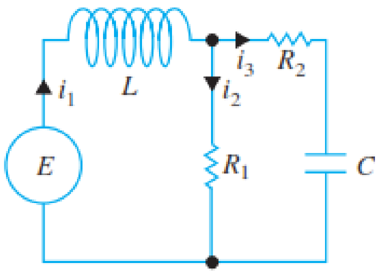
b) Resuelva el sistema del inciso a) si $R = 5\Omega,\ L_1 = 0.01h,\ L_2 = 0.0125h,\ E = 100V,$

$i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$

c) Determine la corriente $i_1(t)$

2.4. a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_1(t)$ de la red eléctrica que se muestra en la figura satisface:

$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t)$$
$$-R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0.$$



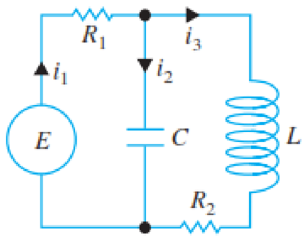
b) Resuelva el sistema si $R_1 = 10\Omega,\ R_2 = 5\Omega,\ L = 1h,\ C = 0.2\mathrm{f}$

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases} \quad i_2(0) = 0 \text{ e } i_3(0) = 0$$

c) Determine la corriente $i_1(t)$

2.5. a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales para la carga en el capacitador $q(t)$ y la corriente $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra es

$$R_1\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q + R_1 i_3 = E(t)$$
$$L\frac{di_3}{dt} + R_2 i_3 - \frac{1}{C}q = 0.$$



b) Determine la carga en el capacitador cuando $L = 1h,\ R_1 = 1\Omega,\ R_2 = 1\Omega$ y $C = 1\text{f}$

$$E(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \quad i_3(0) = 0 \ \text{ y } \ q(0) = 0$$

SESIÓN N° 03

PRACTICA CALIFICADA N°04

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

Unidad IV

SERIES DE FOURIER

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar la serie de Fourier para resolver problemas de aproximación, diferenciación e integración aplicando los diferentes métodos y técnicas

SEMANA N° 15
SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON SERIES DE POTENCIA

SESIÓN N° 01
TEMA: SOLUCION ALREDEDOR DE PUNTOS ORDINARIOS

1. Encontrar la solución de: $2y'' + xy' + y = 0$ en forma de serie de potencia en torno al punto ordinario x = 0.

2. Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\boxed{\mathbf{y'' - xy' - y = 0}}$, determinando dos soluciones linealmente independientes en serie de potencias de x. Campo de validez de las mismas. En particular obtener la solución tal que y(0) = 1 , y´(0) = 0.

3. Hallar, por el método de series de potencias en torno a $x_0 = 0$, la solución general de la ecuación diferencial: $\mathbf{(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0}$

4. Hallar por el método de series de potencias en torno a $x_0 = 1$ los términos hasta la potencia de grado 4, correspondientes a la solución general de la ecuación diferencial: $\mathbf{2y'' + xy' + y = 0}$

5. Hallar, por el método de series, la solución del problema de valor inicial:

$$y'' - 2xy' + 8y = 0 ; \qquad y(0) = 3 , \qquad y'(0) = 0.$$

Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales en forma de serie de potencia en torno al punto ordinario x = 0.

6. $(x^2-1)y'' + 4x\,y' + 2y = 0$

7. $(x^2+2)y'' + 3x\,y' - y = 0$

8. $y'' - (x+1)y' - y = 0$

9. $(x^2-1)y'' + x\,y' - y = 0$

10. $y'' - x\,y' - (x+2)y = 0$

SESIÓN N° 02

TEMA: SOLUCION ALREDEDOR DE PUNTOS SINGULARES

1. Encontrar la solución de: $3x\,y'' + y' - y = 0$ en forma de serie de potencia en torno al punto singular regular x = 0.

2. En los siguientes problemas use el método de Frobenius para obtener dos soluciones en serie linealmente independientes en torno x= 0.

$2xy'' - y' + 2y = 0$
$4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$
$2x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$
$3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$
$x^2y'' - (x - \frac{2}{9})y = 0$
$2xy'' - (3 + 2x)y' + y = 0$
$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{4}{9})y = 0$
$9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$
$2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$

SESIÓN N° 03

TEMA: SERIES DE FOURIER. FUNCIONES PERIODICAS Y FUNCIONES ORTOGONALES.

1.- Hallar el período de la función: $f(x) = Sen(\frac{2\pi}{b-a})x$.

2.- Probar que si $f(x)$,tiene período p; $f(\alpha x)$ tiene período $\frac{p}{\alpha}$

3.- Pruebe que la función :

$f(x) = Sen\,x + \frac{1}{3}Sen\,3x + \frac{1}{5}Sen\,5x$, es de período 6π

4.- Pruebe la ortogonalidad de la base: $\{1; Cosx; Senx; \ldots\ldots Coskx; Senkx \ldots\ldots\}$

5.- Si la función : $f(t) = Cos\,\alpha t + Cos\,\beta t$ es de periodo "p".Demostrar que existen m,n enteros tal : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$

6.- Pruebe que la función $f(t) = Cos(10t) + Cos(10 + \pi)t$, no es periódica.

7.- Pruebe que la función : $f(t) = 10^2 Cos^2 t$, es de período π .

8.- Encontrar el período de la función: $f(t) = Cos\dfrac{t}{3} + Cos\dfrac{t}{4}$.

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

SEMANA N° 16

SERIES DE FOURIER

SESIÓN N° 01
TEMA: EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE DE FOURIER

1. Determinar los coeficientes de Fourier, de la función:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \pi/2 & 0<x\le \pi/2\\ 0 & \pi/2<x<\pi\end{cases}$$

2. Encontrar la **Serie de Fourier** de la función: $f(x)=\begin{cases}\pi+x\ldots\ldots -\pi\le x\le 0\\ x\ldots\ldots\ldots\ldots 0\le x\le \pi\end{cases}$

3. Si f(x) = Cos (αx), $-\pi\le x\le\pi$; α una constante no entera. Probar que a partir de su Serie de Fourier.

$$\frac{\pi}{Sen\,\alpha\pi}=2\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2-1}+\frac{1}{\alpha^2-2^2}-\frac{1}{\alpha^2-3^2}+\ldots\ldots\ldots\right)$$

4. Determinar la representación en Serie de Fourier para la función

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

Graficar la extensión periódica que ella representa y probar que: $\dfrac{\pi^2}{8}=\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

5. Hallar la Serie de Fourier parta la función $f(x)=\begin{cases}x & -\pi/2<x<\pi/2\\ \pi-x & \pi/2<x<3\pi/2\end{cases}$

6. Encontrar la Serie de Fourier y su Serie de Cosenos para la función:

$$f(x)=\begin{cases}1/2-x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0\le x\le 1\\ x-3/2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1<x\le 2\end{cases}$$

SESIÓN N° 02
TEMA: APROXIMACION MEDIANTE UNA SERIE FINITA DE FOURIER. TEOREMA DE PARSEVAL. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER.

1. Sea $\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_k Coskx + b_k Senkx)$, la Serie de Fourier de f(x).Si $g(x) = f(x-\pi)$,

mostrar que la Serie de Fourier de g(x) es $\frac{a_0}{2}+\sum(-1)^k(a_k Coskx + b_k Senkx)$

2. Sea $t \in R$ y $f(x) = Cos(tSenx)$.

a) Probar que f(x) es par y de período π

b) Escriba los coeficientes y la Serie de Fourier si $x \in [0,\pi]$

c) Probar que para $a_0(t)$ se tiene : $ta_0'' + a_0' + ta_0 = 0$.

3. Si $f(x) = e^x$ $0 \le x \le 2$. Obtener la Serie de Fourier de g(x) ,función par de período 8 tal que g(x) = f(x) en $0 \le x \le 2$.

4. Probar la relación de Parseval:

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)dx = \frac{a_0^{\,2}}{2}+\sum(a_k^{\,2}+b_k^{\,2}).$$

5. Hallar la Serie de Fourier de solo cosenos para la función: f(x)= x en $[0,2]$ y mediante la relación de Parseval, probar que :

$$\frac{\pi^2}{96}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}.$$

6. Si a_k y b_k son los coeficientes de Fourier para f(x) .Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

SESIÓN N° 03

PRUEBA DE DESARROLLO N°04

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica:

- Larson, R. y Edward, B.H. (2012). *Cálculo de una variable* (9ª ed. 9. México.: Mc Graw Hill. Código Biblioteca UC. 515.L26.
- Zill, D.G y Wright, W.S. *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ª ed.) México.: Mc Graw Hill.

Bibliografía complementaria:

- Cengel, Y.A. y Palma, W.J. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias (*1ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Espinoza Ramos, E. (2014). A*nálisis matemático IV*. Perú: Editorial Servicios Gráficos J.J.

Link para Consultar

- Tareas Plus (13 de febrero de 2016). Video sobre la Transformada de Laplace. www.youtube.com/watch?v=c3TwyoLS_98
- Universidad de Sevilla (13 de febrero de 2016). La transformada de Laplace. http://euler.us.es/~renato/clases/mm2/laplace.pdf
  Universidad del Valle (13 de febrero de 2016). La Transformada de Laplace.

  http://matematicas.univalle.edu.co/~jarango/Books/curso/cap07.pdf