



Universidad
Continental

Mecánica Vectorial - Estática

Guía de Trabajo

Visión

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

MISIÓN

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental

Material publicado con fines de estudio

Código: ASUC 00574



PRESENTACIÓN

El material está diseñado para orientar al estudiante en el desarrollo de aplicaciones prácticas relacionadas al avance teórico de la asignatura de Mecánica Vectorial - Estática.

La competencia a desarrollar es: Aplica los principios y leyes de la Estática en la resolución de problemas en el análisis de partículas y cuerpos rígidos en equilibrio, para la determinación de fuerzas en estructuras, en el análisis de las fuerzas en vigas y cables, y en la comprensión de la fuerza de fricción para la resolución de problemas aplicados a cuerpos rígidos en equilibrio.

En general, contiene un compendio de contenidos temáticos concisos con sus respectivas guías de práctica para ser desarrolladas en forma secuencial pues está estructurada por unidades y temas de acuerdo al sílabo de la asignatura. Las cuatro unidades que estructuran este material desarrollan plenamente la competencia citada.

La elaboración de la presente guía es fruto de la investigación y reformulación de temas que han sido enriquecidos a partir de la revisión y contrastación de diversas fuentes del conocimiento, entre ellos los textos universitarios de mayor connotación mundial. Así mismo la valiosa experiencia docente ha permitido percibir la importancia del aprendizaje de esta asignatura pues trasciende en el estudiante tanto en su formación académica como en el estudio de diversas asignaturas posteriores en sus planes académicos de las cuales la Mecánica Vectorial - Estática representa una base sólida e imprescindible.

Es recomendable que el estudiante inicie el desarrollo de este material conceptualizando los principios y leyes teóricas, esto como consecuencia de un hábito de estudio permanente, para luego aplicar estos fundamentos en la resolución de problemas propuestos en las guías de práctica. La naturaleza de la Mecánica Vectorial y de la Ingeniería implican rigurosidad y precisión en los cálculos numéricos, así como reflexión en la interpretación de resultados, pues estos conocimientos consolidarán a la postre un desempeño laboral eficiente.

Agradecemos a todos los que hicieron posible esta publicación y de manera especial al Ing. Carlos Coaquira Rojo por su compromiso en bienestar de la comunidad estudiantil. Cualquier sugerencia que ayude a mejorar este material será bien recibida.

**ÍNDICE**

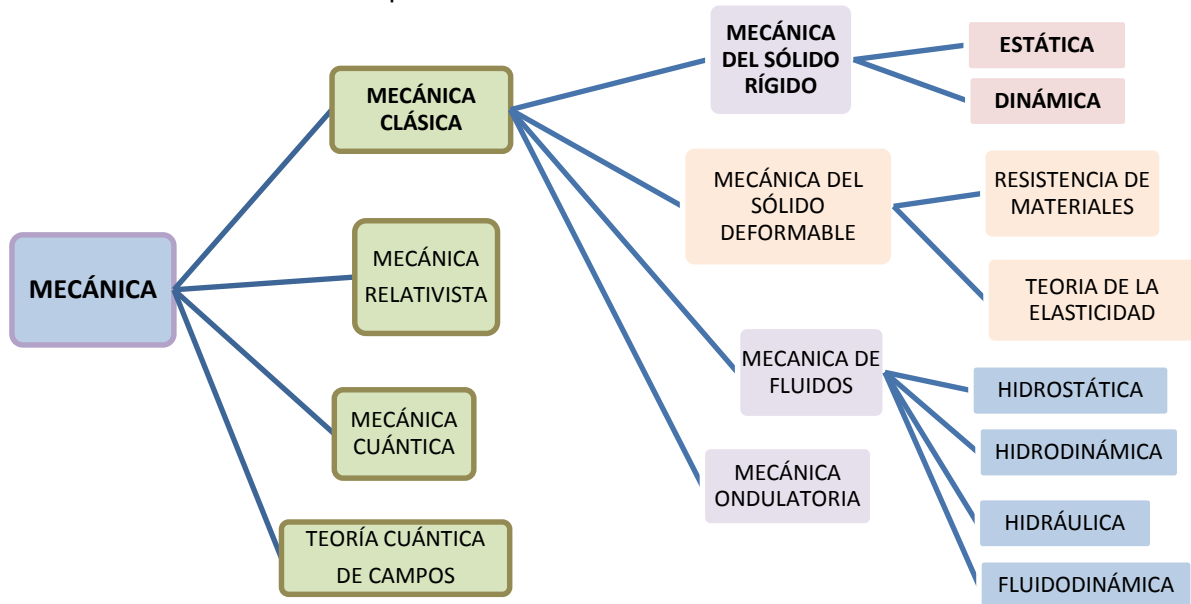
	Pág.
PRESENTACIÓN	3
ÍNDICE	4
PRIMERA UNIDAD: ESTÁTICA DE PARTÍCULAS	
Tema N° 1: INTRODUCCION	6
Guía de práctica N° 1	13
Tema N° 2: EQUILIBRIO DE UNA PARTICULA	16
Guía de práctica N° 2	19
Tema N° 3: FUERZAS EN EL ESPACIO	22
Guía de práctica N° 3	25
Tema N° 4: EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO	27
Guía de práctica N° 4	29
SEGUNDA UNIDAD: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS, SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS, CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD	
Tema N° 5: CUERPOS RÍGIDOS Y SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS	32
Guía de práctica N° 5	37
Tema N° 6: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN EL PLANO	40
Guía de práctica N° 6	45
Tema N° 7: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN EL ESPACIO	48
Guía de práctica N° 7	53
Tema N° 8: CENTROIDES Y CENTRO DE GRAVEDAD	57
Guía de práctica N° 8	63
TERCERA UNIDAD: FUERZAS SISTRIBUIDAS, ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS Y FRICCIÓN	
Tema N° 9: FUERZAS DISTRIBUIDAS	66



Guía de práctica N° 9	69
Tema N° 10: ARMADURAS	72
Guía de práctica N° 10	77
Tema N° 11: ARMAZONES Y MÁQUINAS	81
Guía de práctica N° 11	83
Tema N° 12: FRICCIÓN	87
Guía de práctica N° 12	93
 CUARTA UNIDAD: FUERZAS EN VIGAS Y CABLES, MOMENTOS DE INERCIA Y MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL	
Tema N° 13: FUERZAS EN VIGAS	96
Guía de práctica N° 13	100
Tema N° 14: FUERZAS EN CABLES	103
Guía de práctica 14	108
Tema N° 15: MOMENTO DE INERCIA	111
Guía de práctica N° 15	117
Tema N° 16: MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL	120
Guía de práctica N° 16	125
ANEXOS	127
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ENLACES	133

**PRIMERA UNIDAD "ESTÁTICA DE PARTÍCULAS"****TEMA N° 1: FUERZAS EN EL PLANO****1.1 DEFINICIONES, PRINCIPIOS, LEYES Y UNIDADES.****MECÁNICA:**

La mecánica es una rama de las ciencias físicas que estudia el estado de reposo o movimiento de los cuerpos que están sometidos a la acción de fuerzas. En general, esta materia puede dividirse a su vez en tres ramas: *mecánica de cuerpos rígidos*, *mecánica de cuerpos deformables* y *mecánica de fluidos*; sin embargo, la clasificación de la mecánica es mucho más amplia:



En este material estudiaremos la mecánica de cuerpos rígidos, la misma que es un requisito básico para el estudio de las otras ramas de la mecánica. La mecánica de cuerpos rígidos es esencial para el diseño y el análisis de muchos tipos de elementos estructurales, componentes mecánicos, mecanismos diversos, o dispositivos electrónicos que pueden encontrarse en la práctica de la ingeniería. (Hibbeler 2013 p 24)

La mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos áreas: Estática y dinámica.

Estática: Estudia el equilibrio de los cuerpos, cuerpos en reposo o a velocidad constante.

Dinámica: Estudia el movimiento acelerado de los cuerpos.

Cantidades básicas: Son las siguientes cuatro:

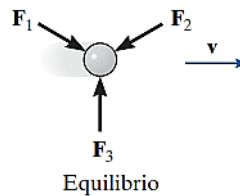
- **Longitud:** Usada para describir la posición de un punto en el espacio y describir el tamaño de un sistema físico. Define distancias y propiedades geométricas.
- **Tiempo:** El tiempo se concibe como una secuencia de eventos.
- **Masa:** Es una medición de una cantidad de materia usada para comparar la acción de un cuerpo con la de otro.
- **Fuerza:** Es la acción ejercida de un cuerpo sobre otro. La interacción puede darse por contacto físico o entre cuerpos separados como las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por completo con su magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación.

Idealizaciones importantes:

- *Partícula*: Es el modelo matemático de un cuerpo y se representa como un punto, se considera la masa del cuerpo, pero no sus dimensiones.
- *Cuerpo Rígido*: Es una combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí, tal que las propiedades del material no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo.
- *Fuerza concentrada*: Una *fuerza concentrada* representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo. Una carga puede representarse mediante una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la que se aplique la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Un ejemplo sería la fuerza de contacto entre una rueda y el suelo.

Principios fundamentales: Basados en la evidencia experimental permiten cimentar el estudio de la mecánica, estos son seis: (Hibbeler 2013 p 25)

- *Principio de Transmisibilidad*: En toda la línea de acción de una fuerza su efecto externo ejercido, sobre un cuerpo rígido, es invariable.
- *Primera Ley de Newton*: Una partícula originalmente en reposo, o que se mueve en línea recta con velocidad constante, tiende a permanecer en este estado siempre que la partícula *no* se someta a una fuerza no balanceada.



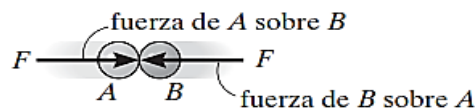
- *Segunda Ley de Newton*. Una partícula sobre la que actúa una *fuerza no balanceada* **F** experimenta una aceleración **a** que tiene la misma dirección que la fuerza y una magnitud directamente proporcional a la fuerza.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



Movimiento acelerado

- *Tercera Ley de Newton*: Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.



Acción-reacción

- *Ley del paralelogramo para la adición de fuerzas*: Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una fuerza llamada resultante.
- *Ley de gravitación de Newton*: Propone que dos partículas cualesquiera o cuerpos tienen una fuerza de atracción (gravitacional) que actúa entre ellos. Sin embargo, en el caso de una partícula localizada en la superficie de la Tierra, o cerca de ella, la única fuerza gravitacional que tiene alguna magnitud significativa es la que existe entre la Tierra y la partícula. En consecuencia, esta fuerza, conocida como *peso*,



será la única fuerza gravitacional que se considere en nuestro estudio de la mecánica.

1.2 UNIDADES DE MEDICIÓN

Conversión de unidades:

En la siguiente tabla se muestran las unidades del SI y del sistema inglés de las cantidades básicas:

Nombre	Longitud	Tiempo	Masa	Fuerza
Sistema Internacional de Unidades SI	metro m	segundo s	kilogramo kg	newton* N $\left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}\right)$
Uso común en Estados Unidos FPS	pie pie	segundo s	slug* $\left(\frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{pie}}\right)$	libra lb

En la siguiente tabla vemos algunos factores de conversión:

Cantidad	Unidad de medida (FPS)	Es igual a	Unidad de medida (SI)
Fuerza	lb		4.448 N
Masa	slug		14.59 kg
Longitud	pie		0.304 8 m

Sistema Internacional de Unidades

El sistema SI de unidades se usa de manera extensa en mediciones en ingeniería puesto que está destinado a convertirse en el estándar mundial para realizar mediciones. Conocer las reglas del SI así como parte de su terminología resulta relevante para la ingeniería.

- *Uso de prefijos:* Si una cantidad numérica es muy grande o muy pequeña, las unidades usadas para definir su tamaño pueden modificarse mediante el uso de un prefijo, en la tabla siguiente se muestran algunos prefijos:

	Forma exponencial	Prefijo	Símbolo SI
<i>Múltiplo</i>			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
<i>Submúltiplo</i>			
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ

- *Reglas básicas:*
 - ✓ Las cantidades definidas por varias unidades que son múltiplos de otras se separan mediante un *punto* para evitar la confusión con la notación de prefijos, como se observa en $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Asimismo, m.s significa metro-segundo (metro por segundo) en tanto que ms representa mili-segundo.
 - ✓ Con excepción de la unidad base kilogramo, por lo general evite el uso de prefijos en el denominador de las unidades compuestas. Por ejemplo, no escriba N/mm, sino kN/m; asimismo, m/mg debe escribirse como Mm/kg.

1.3 ESCALARES Y VECTORES

Las cantidades físicas en ingeniería se definen mediante escalares y vectores.

Cantidad escalar:

Un *escalar* es cualquier cantidad física que se puede especificar por completo mediante su *magnitud o módulo*. La longitud, la masa, la energía y el volumen son ejemplos de cantidades escalares.

Cantidad vectorial:

Un *vector* es cualquier cantidad física que requiere tanto de *magnitud* como de *dirección* y *sentido* para su descripción completa. La fuerza, el desplazamiento, la velocidad y el impulso son ejemplos de cantidades vectoriales.

1.4 VECTOR

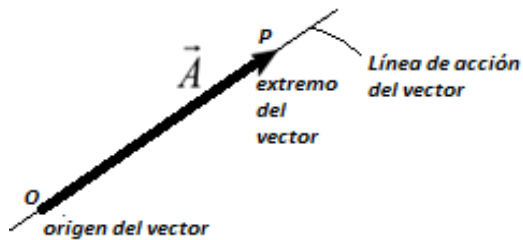
Los vectores son entes matemáticos cuya determinación exige el conocimiento de una magnitud, una dirección y un sentido.

- ✓ Gráficamente un vector se representa por un **segmento de recta orientado**.
- ✓ Analíticamente se representa por una letra con una flecha encima.

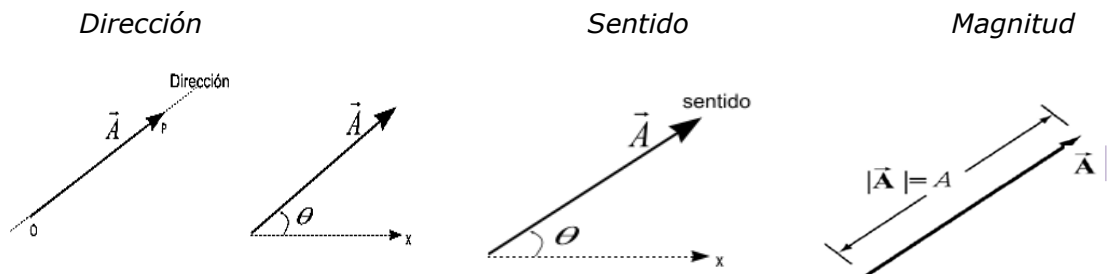
$$\vec{A} = \text{Vector}$$

$$|\vec{A}| = A = \text{Magnitud del Vector } \vec{A}$$

Elementos de un vector:

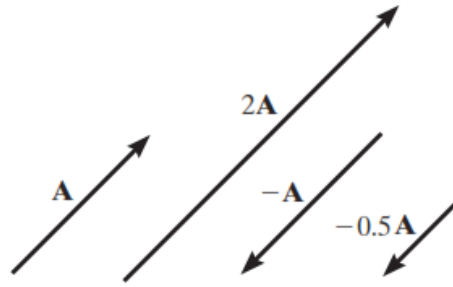


- ✓ *Dirección:* Gráficamente viene representada por la recta soporte o línea de acción. Representada en el plano por un ángulo de referencia.
- ✓ *Sentido:* Es el elemento que indica la orientación del vector, representada por la cabeza de flecha.
- ✓ *Magnitud:* Representa el valor numérico de la cantidad física a la cual se asocia la longitud del segmento de recta.



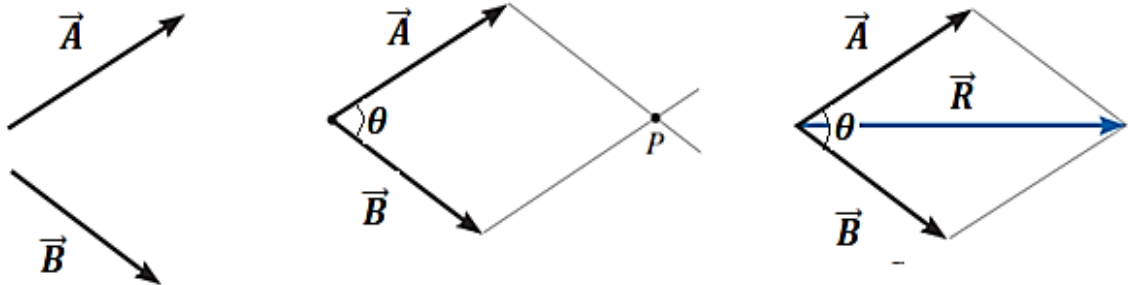
1.5 PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Si un vector se multiplica por un escalar positivo, su magnitud se incrementa en esa cantidad. Cuando se multiplica por un escalar negativo también cambiará el sentido de la dirección del vector. En la figura se muestran ejemplos gráficos de estas operaciones.



1.6 ADICION DE VECTORES

Todas las cantidades vectoriales obedecen la *ley del paralelogramo para la suma*. A manera de Ilustración, los dos *vectores* \vec{A} y \vec{B} de la figura adjunta aplicados en un punto se suman para formar un *vector "resultante"* \vec{R} aplicado en el mismo punto. Los vectores sumandos a manera de lados forman un paralelogramo sobre cuya diagonal se traza el vector resultante o suma.



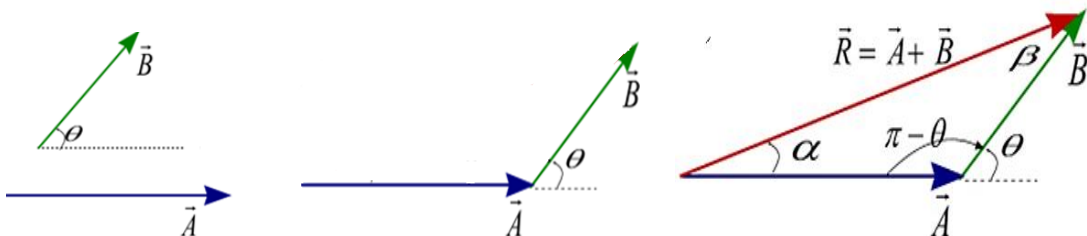
Se cumple la suma vectorial:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

Para determinar el módulo del vector suma podemos usar la ley de cosenos:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

Asimismo podemos sumar los vectores \vec{A} y \vec{B} con el método del triángulo, graficando un vector a continuación del otro y trazando la resultante uniendo el origen del trazo con el extremo libre del segundo vector.



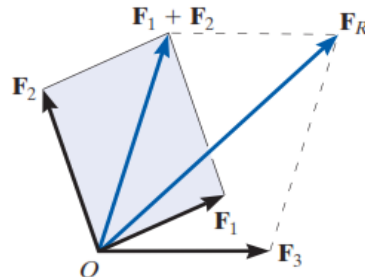
Para relacionar las magnitudes de los vectores usamos la ley de senos:

$$\frac{|\vec{R}|}{\text{sen}(\pi - \theta)} = \frac{|\vec{A}|}{\text{sen}\beta} = \frac{|\vec{B}|}{\text{sen}\alpha}$$

1.7 SUMA DE VARIAS FUERZAS

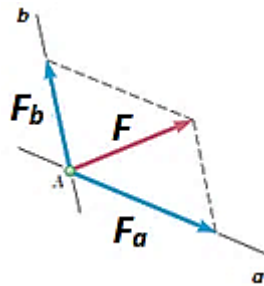
Si deben sumarse más de dos fuerzas, pueden llevarse a cabo aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo para obtener la fuerza resultante.

Por ejemplo, si tres fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 actúan en un punto O , ver figura, se calcula la resultante de dos cualesquiera de las fuerzas, digamos $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, y luego esta resultante se suma a la tercera fuerza, dando la resultante de las tres fuerzas; es decir: $\mathbf{F}_R = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_3$.



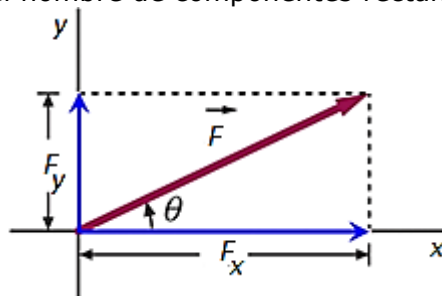
1.8 DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula puede ser reemplazada por dos o más fuerzas que en conjunto produzcan el mismo efecto sobre la partícula. Estas fuerzas se denominan componentes de la fuerza original \mathbf{F} , y al proceso de sustituirlas en lugar de \mathbf{F} se le llama descomposición de la fuerza \mathbf{F} en sus componentes.



1.9 COMPONENTES RECTANGULARES DE UN VECTOR

En muchos problemas será conveniente descomponer el vector \vec{F} en sus componentes perpendiculares entre sí, luego el vector puede representarse como la suma de dos vectores que se encuentran sobre los ejes x y y respectivamente. Estos vectores reciben el nombre de componentes rectangulares del vector \vec{F} .



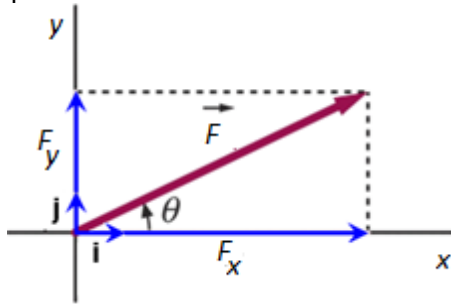
- ✓ F_x es la componente del vector F en el eje x .
- ✓ F_y es la componente del vector F en el eje y .

Se cumple:

$$F_x = F \cos\theta \quad F_y = F \operatorname{sen}\theta \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$



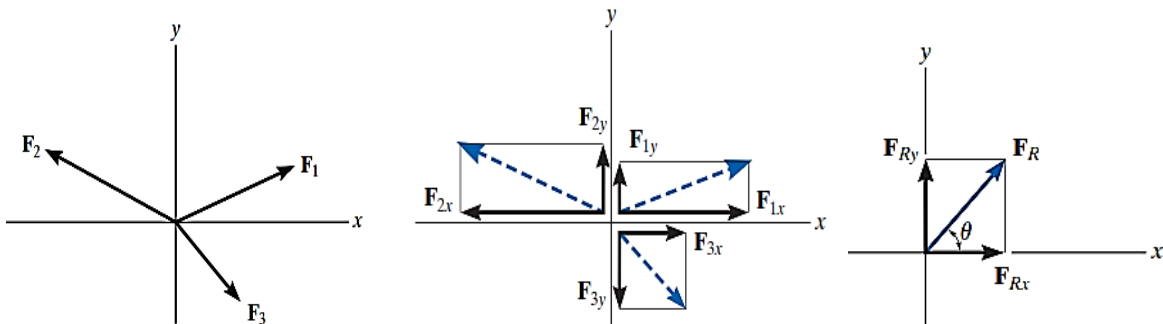
Podemos usar *vectores unitarios*, vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes x e y, representados por \hat{i} y \hat{j} , respectivamente, luego el vector F y sus componentes se escriben así.



$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

1.10 SUMA DE UN SISTEMA DE FUERZAS COPLANARES

Dado un conjunto de fuerzas coplanares se puede obtener una solución analítica para obtener la fuerza resultante, esto mediante la descomposición de cada fuerza en sus componentes rectangulares.



Luego la suma de fuerzas está dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\
 &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j} \\
 &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j} \\
 &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j}
 \end{aligned}$$

$F_{Rx} = \sum F_x$ $F_{Ry} = \sum F_y$

La magnitud y dirección de la fuerza resultante están dadas por:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad \theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL – ESTÁTICA N° 1

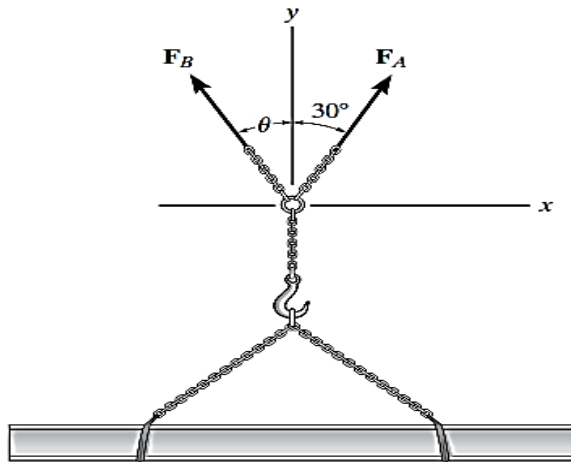
TEMA N° 1: Fuerzas en el plano

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

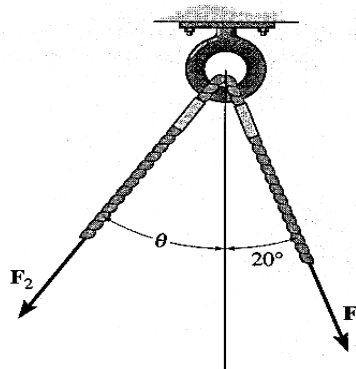
INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada y con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. La viga se va a levantar con dos cadenas. Si la fuerza resultante debe ser de 600 N dirigida a lo largo del eje y positivo, determine las magnitudes de las fuerzas F_A y F_B sobre cada cadena y el ángulo θ de F_B de manera que la magnitud de F_B sea *mínima*. F_A actúa a 30° desde el eje y , como se muestra en la figura.

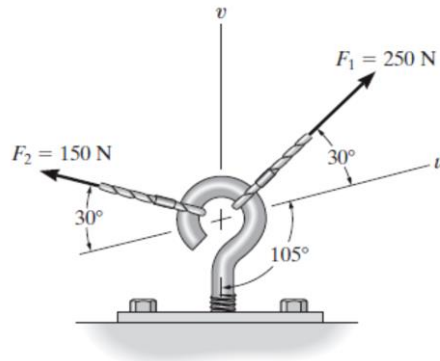


2. Dados los vectores F_1 y F_2 mostrados en la figura.

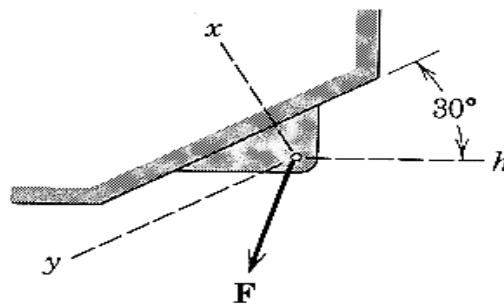
- Si la magnitud de la resultante es de 1 kN y dirigida verticalmente hacia abajo siendo $\theta = 30^\circ$, determine las magnitudes de F_1 y F_2 .
- Si los vectores F_1 y F_2 son de magnitudes 3 y 5 kN respectivamente, y la magnitud de la resultante en este caso es de $F_R = 7$ kN, determine la medida del ángulo θ (que forma F_2 y la vertical) y la medida del ángulo que forma el vector resultante F_R y la vertical.



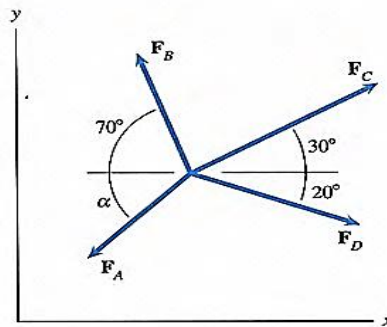
3. Descomponga F_1 y F_2 en sus componentes a lo largo de los ejes u y v , y determine las magnitudes de estas componentes.



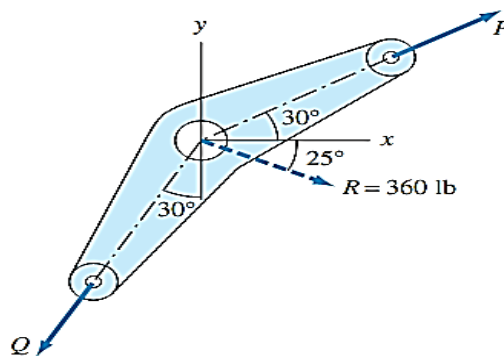
4. La fuerza \mathbf{F} expresada con sus componentes rectangulares está dada por la expresión: $\vec{F} = -40\vec{i} + 60\vec{j}$ N.
- a) Determine la magnitud de \vec{F} y su dirección respecto al eje \mathbf{y} .
 - b) Determine las magnitudes de las componentes no rectangulares de \vec{F} en las direcciones \mathbf{y} y \mathbf{h} .



5. Las cuatro fuerzas concurrentes mostradas tiene una suma vectorial igual a cero. Se sabe que los módulos de las fuerzas F_B , F_C y F_D son 800lb, 1000lb y 900lb respectivamente. Determine la magnitud de F_A y la medida del ángulo α .

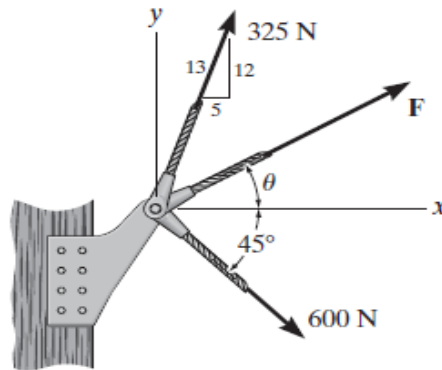


6. Si \vec{R} es la resultante de los vectores \vec{P} y \vec{Q} en cada caso determine las magnitudes de P y Q.

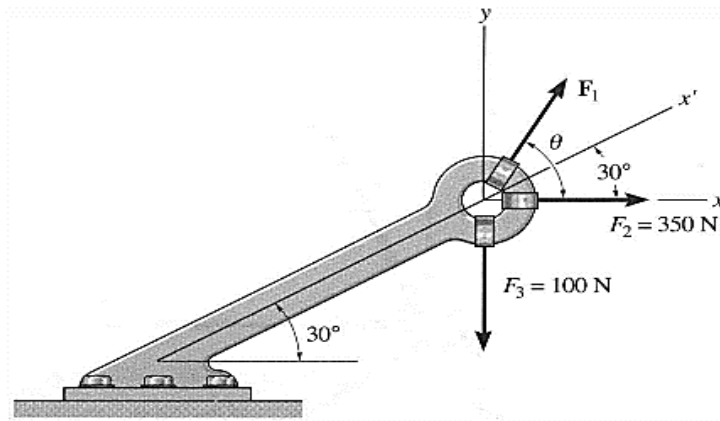




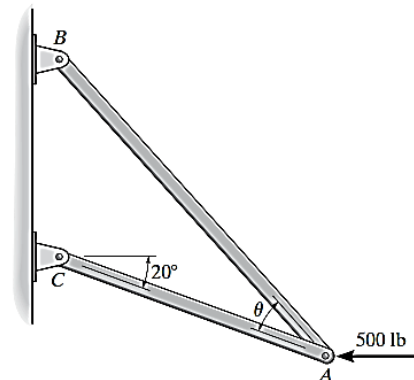
7. Si la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula debe ser de 750 N y estar dirigida a lo largo del eje x positivo, determine la magnitud de F y su dirección θ .



8. Determine la magnitud y la dirección θ de F_1 de tal modo que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje x' positivo y tenga una magnitud de $F_R = 600\text{N}$.



9. Determine el ángulo de diseño θ (θ agudo) entre las dos barras de modo que la fuerza horizontal de 500 lb tenga una componente de 600 lb dirigida de A hacia C. ¿Cuál es la componente de la fuerza que actúa a lo largo del elemento BA?



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Estática. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

TEMA N° 2: EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO



2.1 Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue: "Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento)".



2.2 Condición para el equilibrio de una partícula en el plano

Una partícula está en *equilibrio* si permanece en reposo y en un principio estaba en reposo, o si tiene una velocidad constante y originalmente estaba en movimiento. No obstante, más a menudo, el término "equilibrio" o, de manera más específica, "equilibrio estático" se usa para describir un objeto en reposo.

Para mantener el equilibrio, es *necesario* satisfacer la primera ley del movimiento de Newton, la cual requiere que la *fuerza resultante* que actúa sobre una partícula sea igual a *cero*. Esta condición puede ser establecida matemáticamente como:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Para un cuerpo en equilibrio en dos dimensiones:

$$\sum F = (\sum F_x)\hat{i} + (\sum F_y)\hat{j} = 0$$

Ecuación que se cumple si se verifica que:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

2.3 Diagrama de cuerpo libre

Para aplicar la ecuación de equilibrio debemos tomar en cuenta *todas* las fuerzas conocidas y desconocidas que actúan *sobre* la partícula. La mejor manera de hacer esto es pensar en la partícula como aislada y "libre" de su entorno. Un dibujo que muestra la partícula junto con *todas* las fuerzas que actúan sobre ella se denomina *diagrama de cuerpo libre (DCL)*.

Entre las fuerzas más comunes para analizar el equilibrio de partículas tenemos:

- a) **Fuerza gravitacional:** Debida a la interacción con el planeta, se representa por un vector dirigido hacia abajo. A su magnitud se le denomina comúnmente peso (W). La magnitud del peso de un cuerpo se relaciona con su masa así:

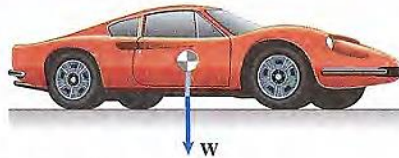
$$W = mg$$

Unidades en el SI:

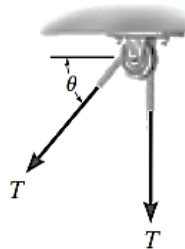
W = Peso (en newton)

m = Masa (en kilogramos)

g = Aceleración de la gravedad = 9.81 m/s^2

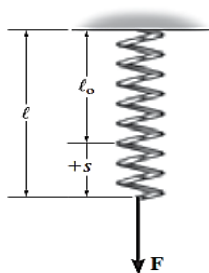


- b) **Fuerzas en cables y poleas:** Para partículas supondremos que todos los cables (o cuerdas) tienen un peso insignificante y que no se pueden deformar. Además, un cable puede soportar *sólo* una tensión o fuerza de "jalón" que actúa en la dirección del cable. La fuerza de tensión desarrollada en un *cable continuo* que pasa sobre una polea sin fricción, debe tener una magnitud *constante* para mantener al cable en equilibrio. En la figura el cable se somete a una tensión T en toda su longitud.



- c) **Fuerzas en resortes:** Si un *resorte elástico lineal* (o cuerda) de longitud no deformada l_0 se usa como soporte de una partícula, su longitud cambiará en proporción directa a la fuerza F que actúe sobre él, figura adjunta. Una característica que define la "elasticidad" de un resorte es la **constante de resorte o rigidez, k** . La magnitud de la fuerza ejercida en un resorte elástico lineal que tiene una rigidez k y está deformado (alargado o acortado) una distancia igual a $s = l - l_0$, medida desde su posición *sin carga*, es:

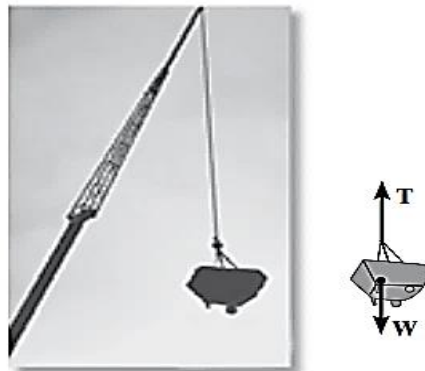
$$F = k s$$



Procedimiento para trazar el DCL de una partícula:

- 1º *Trace un perfil delineado.* Imagine que la partícula está *aislada* o "liberada" de su entorno al trazar su perfil delineado.
- 2º *Muestre todas las fuerzas.* Indique sobre este bosquejo *todas* las fuerzas que *actúan sobre la partícula*. Éstas pueden ser *fuerzas activas*, que tienden a poner la partícula en movimiento, o *fuerzas reactivas*, que son el resultado de las restricciones o soportes que tienden a evitar el movimiento.
- 3º *Identifique cada una de las fuerzas.* Las fuerzas que son *conocidas* deben ser marcadas con sus propias magnitudes y direcciones. Para representar las magnitudes y direcciones de las fuerzas desconocidas se usan letras.

Ejemplo de DCL: La cubeta se mantiene en equilibrio mediante el cable, e instintivamente sabemos que la fuerza en el cable debe ser igual al peso de la cubeta. Al trazar un diagrama de cuerpo libre de la cubeta podemos entender por qué esto es así. Este diagrama muestra que sólo hay dos fuerzas que *actúan sobre la cubeta*, a saber, su peso **W** y la fuerza **T** del cable.

**2.4 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el plano****1º Diagrama de cuerpo libre.**

- ✓ Establezca los ejes x , y en cualquier orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas.
- ✓ Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.

2º Aplique las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

- ✓ Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo.
- ✓ Como la magnitud de una fuerza siempre es una cantidad positiva, si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL - ESTÁTICA N° 2

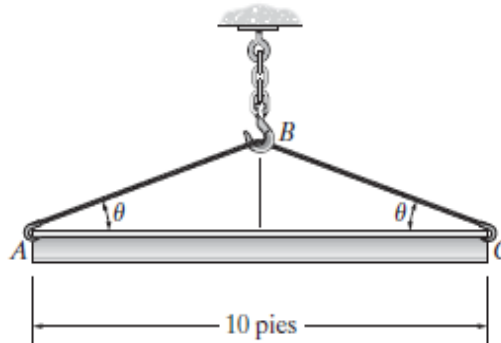
Tema: Equilibrio de una partícula en el plano

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

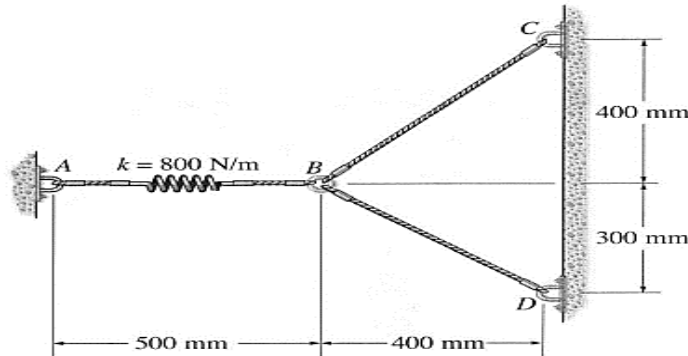
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

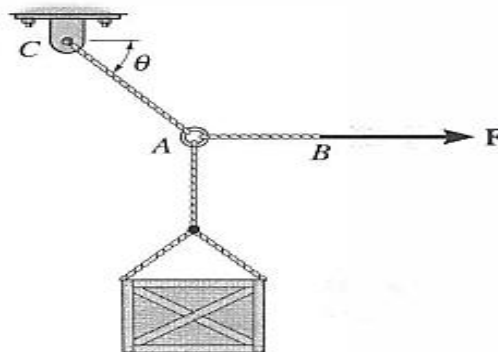
1. La viga tiene un peso de 700 lb. Determine el cable ABC más corto que puede usarse para levantarla, si la fuerza máxima que puede soportar el cable es de 1500 lb.



2. El resorte tiene una rigidez $k = 800 \text{ N/m}$ y longitud no alargada de 200 mm. Determine la fuerza en los cables BC y CD cuando el resorte se mantiene en la posición mostrada.

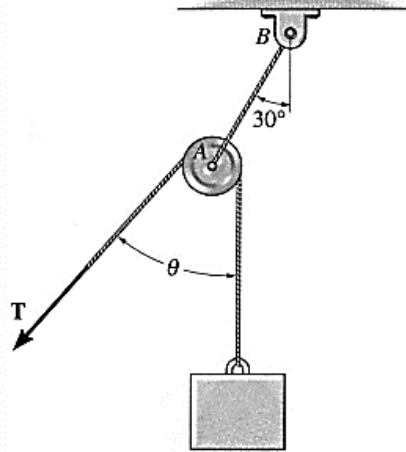


3. El cajón de 500 lb va a ser levantado usando las cuerdas AB y AC. Cada cuerda puede resistir una tensión máxima de 2500 lb antes de romperse. Si AB siempre permanece horizontal, determine el ángulo θ más pequeño con que el cajón puede ser levantado.

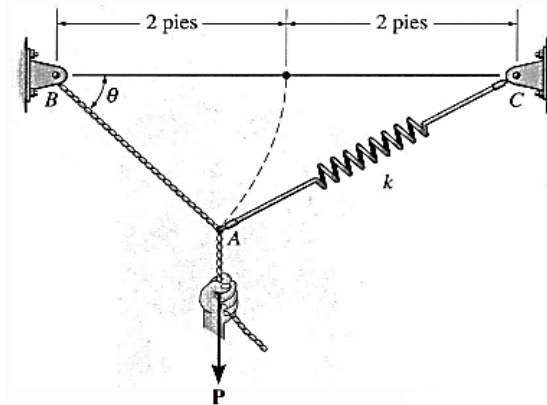




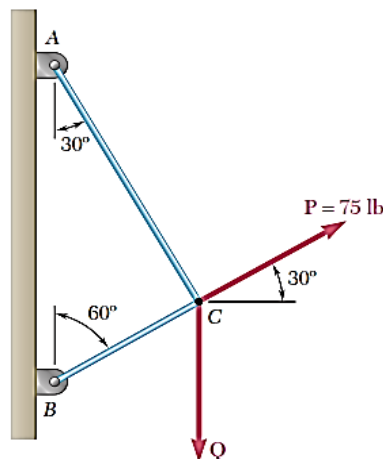
4. Determine el peso máximo W del bloque que puede ser suspendido en la posición mostrada si cada cuerda puede soportar una tensión máxima de 80 lb. ¿Cuál es el ángulo θ en la posición de equilibrio?



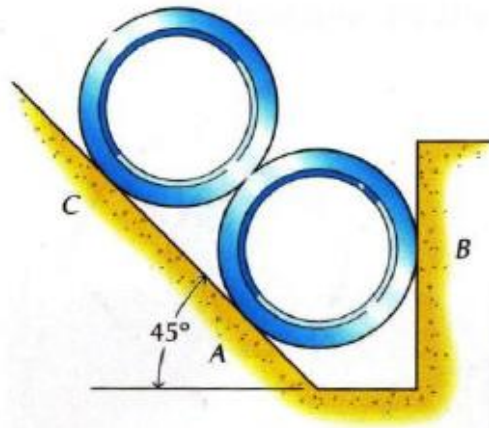
5. Determine la longitud no alargada del resorte AC si una fuerza $P = 80$ lb genera el ángulo $\theta = 60^\circ$ en la posición de equilibrio. La cuerda AB tiene 2 pies de longitud. Considere $k = 50$ lb/pie.



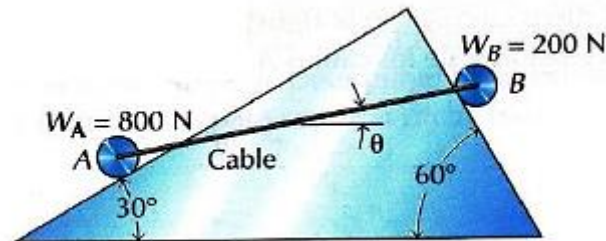
6. En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de Q para los cuales la tensión no será mayor que 60 lb en cualquiera de los cables.



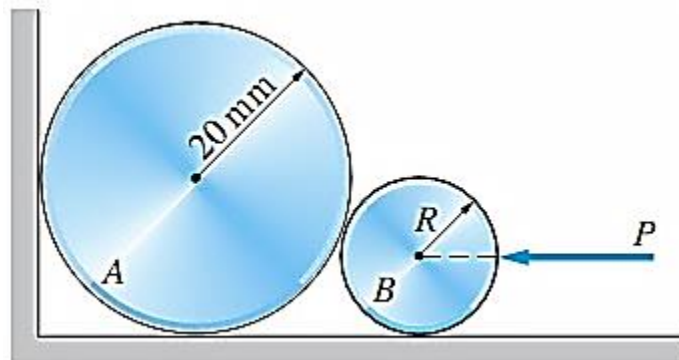
7. Determinar las fuerzas que ejercen los apoyos sobre las tuberías en los contactos A, B y C. Supóngase lisas todas las superficies.



8. Dos cuerpos A y B que pesan 800 N y 200 N, respectivamente, se mantienen en equilibrio sobre superficies perpendiculares mediante un cable flexible que los une y que forma un ángulo θ con la horizontal, según se indica en la figura. Hallar las reacciones de las superficies sobre los cuerpos, la tensión del cable y el ángulo θ . Suponer ausencia de rozamiento en todas las superficies.



9. Las masas de los cilindros sin fricción A y B son 10 kg y 5 kg, respectivamente. El mínimo valor de la fuerza P que podría separar el cilindro A de la superficie es 277,5 N. Determine:
- La medida del radio R del cilindro B.
 - Las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre el cilindro B.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

- Beer F., Jhonston R.**, (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.
- Hibbeler, R.C.** (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.
- Bedford Fowler.** (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.
- Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

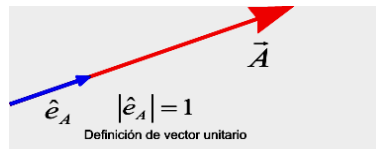
TEMA N° 3: FUERZAS EN EL ESPACIO



En este tema debemos tener presente que las operaciones del álgebra vectorial, cuando se aplican a la resolución de problemas en *tres dimensiones*, se simplifican considerablemente si primero se representan los vectores en forma vectorial cartesiana, lo cual servirá para encontrar la fuerza resultante de un sistema de fuerzas concurrentes. Esta forma convencional cartesiana expresa a un vector en función de sus componentes cartesianas sobre los ejes que vienen a ser las proyecciones sobre los ejes.

1. Vectores cartesianos en el espacio:

Vector unitario: Vector de magnitud unitaria que indica la dirección y sentido de algún vector dado, luego para \vec{A} :



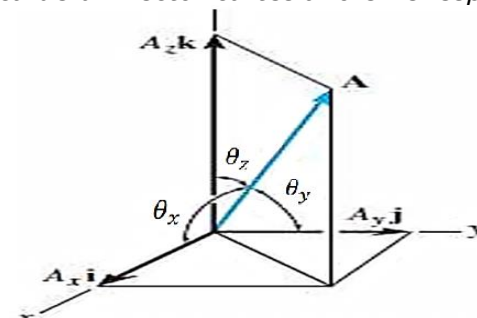
$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

Vectores unitarios cartesianos.

En tres dimensiones, el conjunto de vectores unitarios cartesianos \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , se usa para designar las direcciones de los ejes x , y , z , respectivamente.

2. Representación de un vector cartesiano en tres dimensiones:

Representación gráfica de un vector cartesiano en el espacio





Forma cartesiana de un vector

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Magnitud de un vector cartesiano

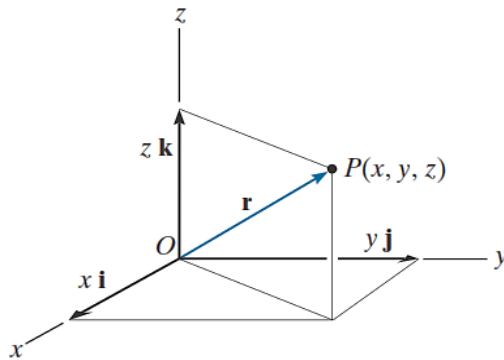
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Dirección de un vector cartesiano: Dada por los cosenos directores:

$$\cos \theta_x = \frac{A_x}{A} \quad \cos \theta_y = \frac{A_y}{A} \quad \cos \theta_z = \frac{A_z}{A} \quad \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

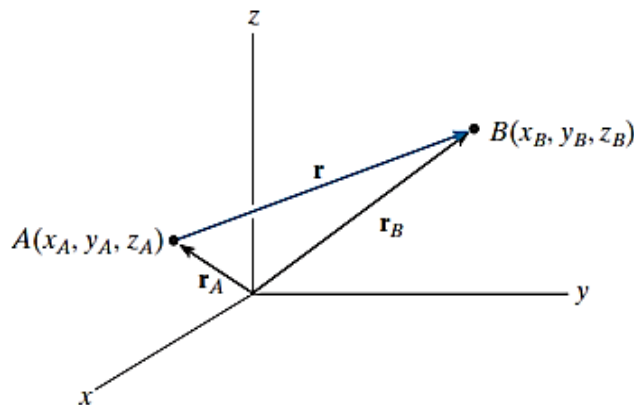
3. **Vector de Posición:** Se define como un vector fijo que localiza un punto en el espacio en relación con otro punto.

Desde el origen hasta un punto P.



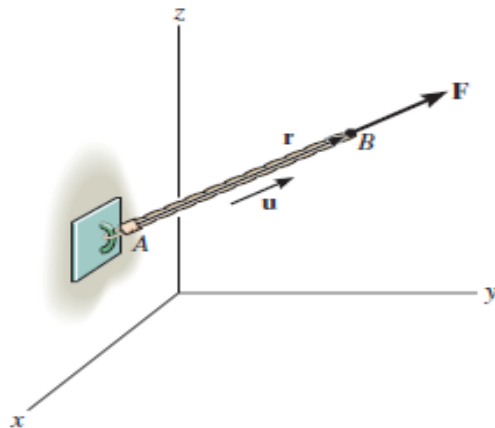
$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

Desde un punto A hasta otro punto B.



$$\vec{r} = (x_B - x_A) \hat{i} + (y_B - y_A) \hat{j} + (z_B - z_A) \hat{k}$$

4. Vector fuerza en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción:



$$\vec{F} = |F| \hat{u}_{AB}$$

$$\vec{F} = |F| \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|}$$

5. Suma de fuerzas concurrentes en el espacio:

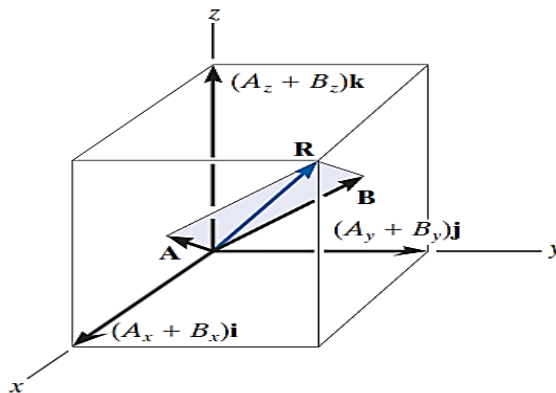
La suma de dos o más vectores se simplifican considerablemente si los vectores se expresan en términos de sus componentes cartesianas.

Dados los vectores:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

El vector resultante \mathbf{R} está dado por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k}$$



Si esto se generaliza y se aplica a un sistema de varias fuerzas concurrentes, entonces la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas presentes en el sistema y puede escribirse como:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} + \sum F_z \hat{k}$$

De la cual se desprende:

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z$$

Luego, la magnitud y dirección de la resultante viene dada por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$



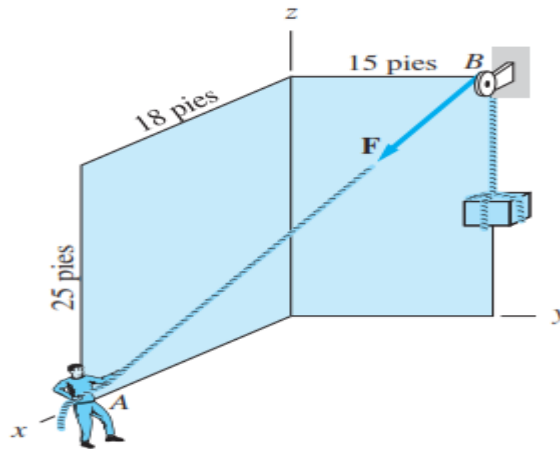
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 3 Tema: Fuerzas en el espacio

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

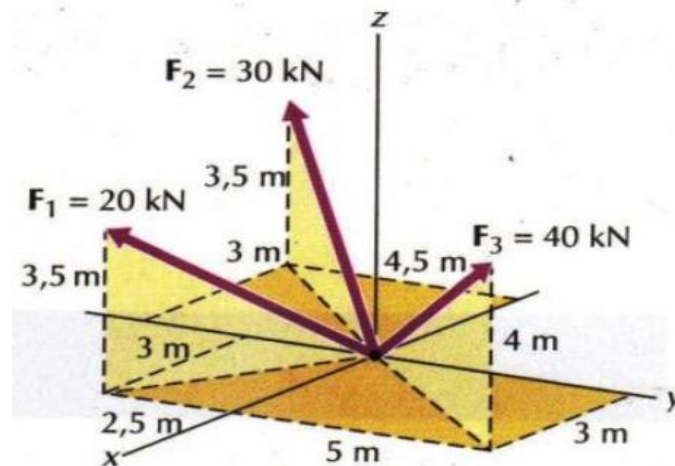
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

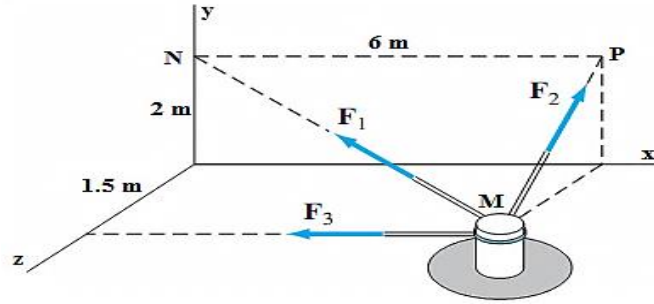
1. Si la magnitud de la tensión en el cable es de 120 lb, determine la expresión cartesiana de F .



2. Determinar el módulo de la resultante de las tres fuerzas representadas en la figura.

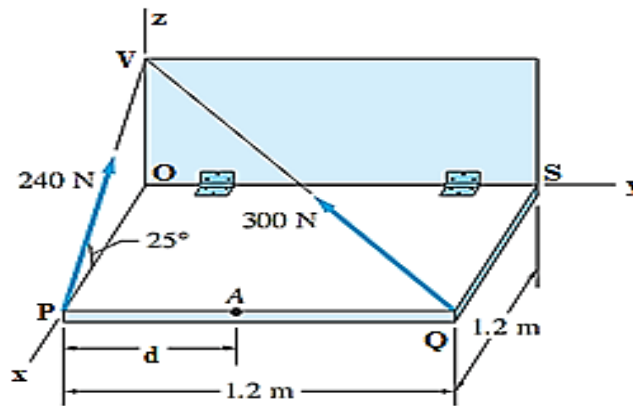


3. Según la figura tres cuerdas son atadas al poste en M. Las fuerzas en las cuerdas son $F_1 = 130$ N, $F_2 = 37.5$ N y $F_3 = 30$ N. Determine:
 - a) La expresión cartesiana del vector fuerza resultante R de las tensiones en la cuerda.
 - b) La magnitud y dirección de la resultante R de las tensiones dadas.
 - c) Las coordenadas del punto en el cual la línea de R que interseca al plano yz .

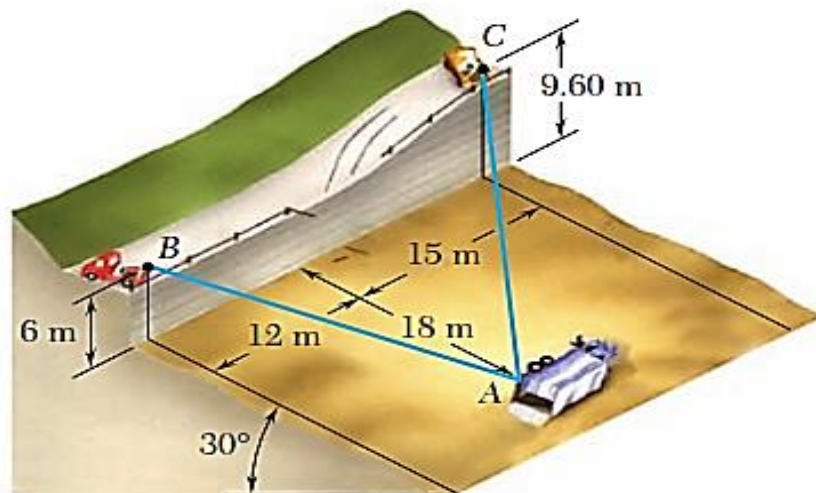


4. La puerta PQSO es sostenida en el plano horizontal por dos cables PV y QV. Determinar:

- a) Una fuerza equivalente \mathbf{R} , que pase por el punto A, que reemplace a las dos fuerzas en los alambres.
- b) Determine la coordenada d del punto A.



5. A fin de mover un camión volcado, se atan dos cables en A y se jalan mediante las grúas B y C como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 10 kN y en el cable AC es de 7.5 kN, determine la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.
Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

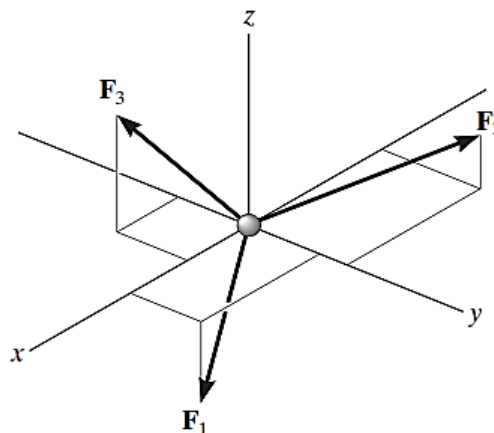
TEMA Nº 4: EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO



Como anteriormente comentamos el equilibrio representa sin duda la situación de existencia de la materia en su forma más habitual. Estamos rodeados de situaciones de cuerpo que se encuentran en equilibrio, tanto de situaciones cotidianas como construcciones simples hasta situaciones de aplicación tecnológica. Los cuerpos en equilibrio en el espacio requieren del conocimiento de las leyes y aplicación de las condiciones necesarias para tal situación, el uso de diagramas apropiados y cálculos pertinentes para su verificación son indispensables para una adecuada comprensión de este tema.

1. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO:

En el caso de un sistema de fuerza tridimensional, como el de la figura siguiente, podemos descomponer las fuerzas en sus respectivas componentes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , de manera que para el equilibrio se debe cumplir:



$$\sum \vec{F} = (\sum F_x) \hat{i} + (\sum F_y) \hat{j} + (\sum F_z) \hat{k} = 0$$



Para satisfacer esta ecuación se requiere que:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0$$

Por tanto, estas tres ecuaciones establecen que la *suma algebraica* de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula a lo largo de cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero.

2. PROCEDIMIENTO PARA EL ANÁLISIS DEL EQUILIBRIO DE PARTÍCULAS EN EL ESPACIO:

1º Se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Marque todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas sobre el diagrama.

2º Escribir las ecuaciones de equilibrio. Expresé primero cada fuerza como un vector cartesiano en el diagrama de cuerpo libre, sustituya esos vectores en $\sum \vec{F} = \mathbf{0}$, y después iguale a cero las componentes **i**, **j**, **k**. Si la solución para una fuerza da un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado en el diagrama de cuerpo libre.



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 4

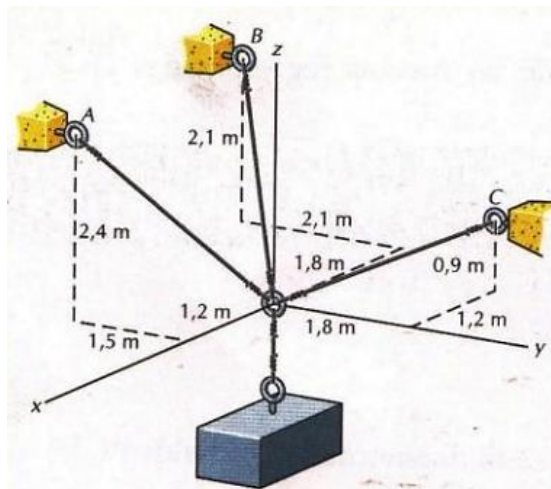
Tema: Equilibrio de una partícula en el espacio

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

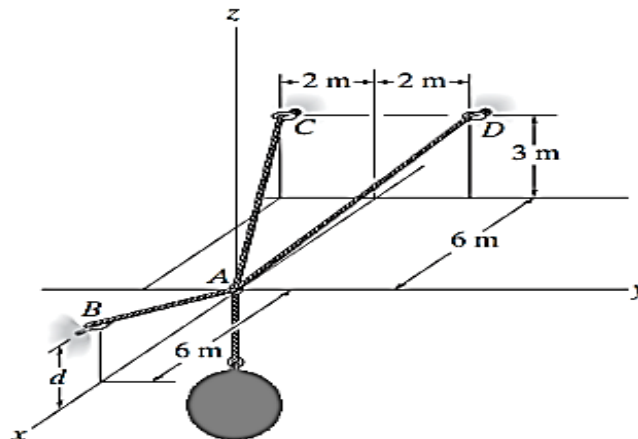
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

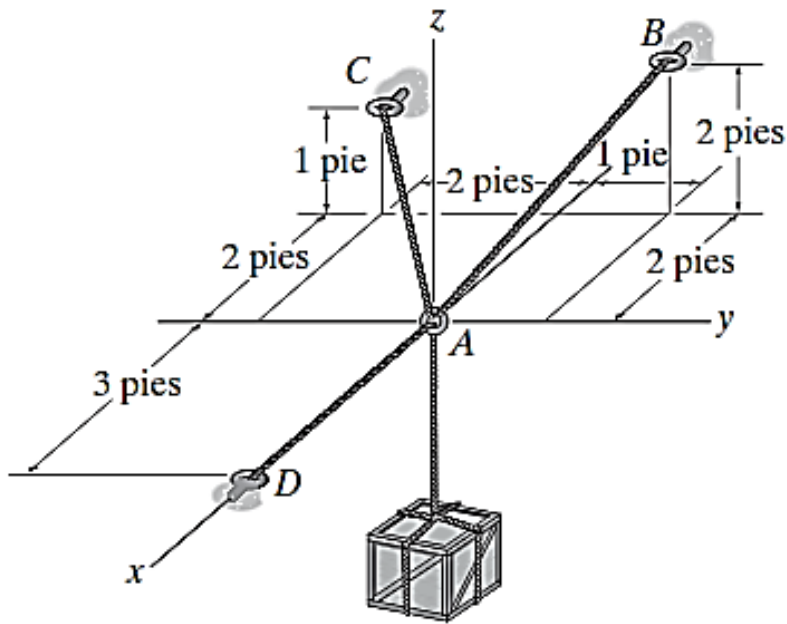
1. Un bloque está suspendido de un sistema de cables tal como se indica en la figura. El peso del bloque es 500 N. Determinar las tensiones en los cables A, B y C.



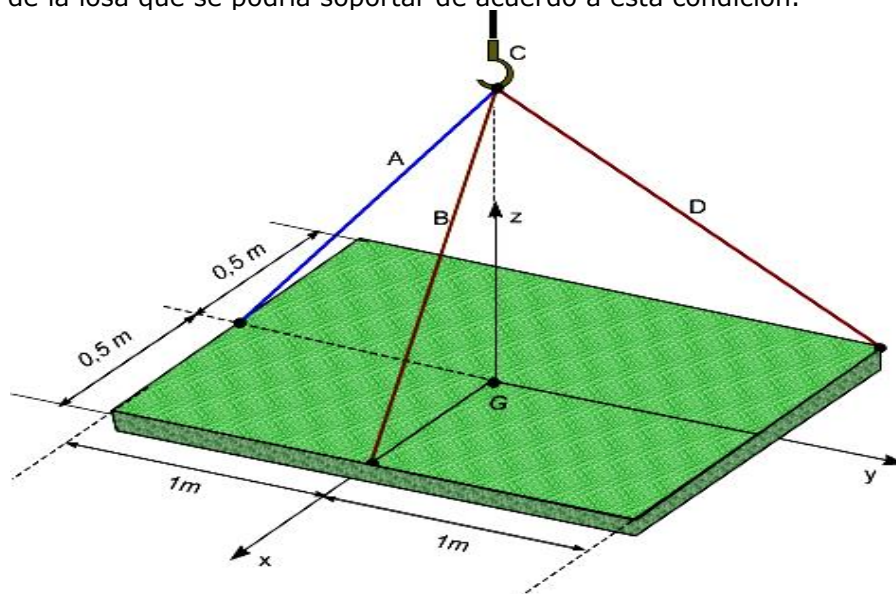
2. Para el sistema mostrado considere la masa de la carga igual a 50 kg. Determine la altura d del cable AB de manera que la fuerza en los cables AD y AC tengan cada una respectivamente la mitad del valor de la fuerza del cable AB.



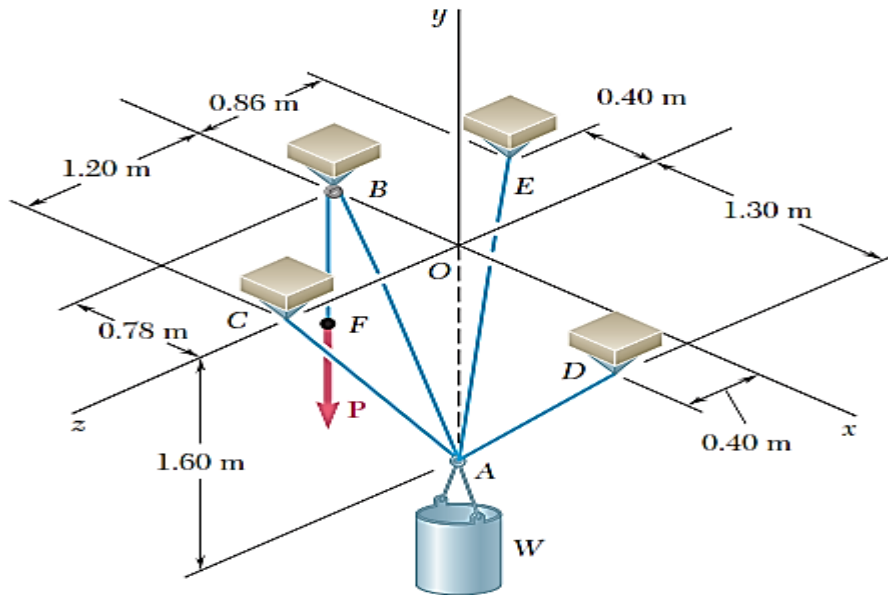
3. Determine el peso máximo de la caja si la tensión desarrollada en cualquiera de los cables no debe exceder 450 lb.



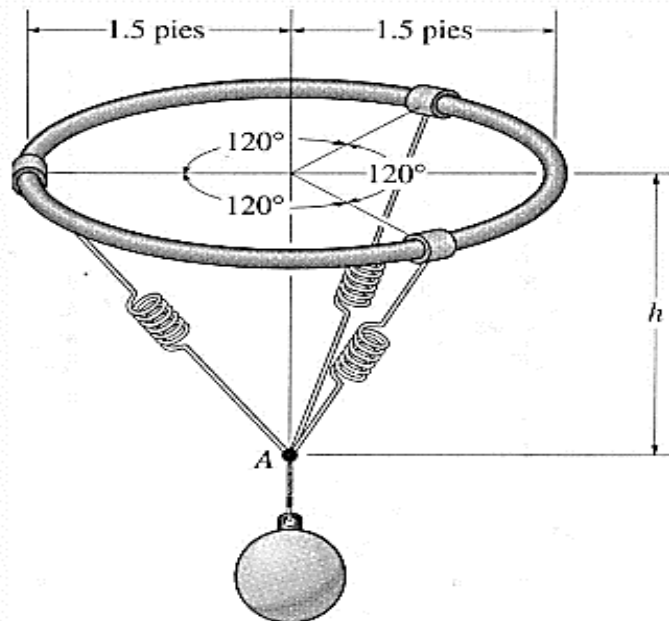
4. La losa de granito de peso W mostrada en la figura está siendo bajada lentamente por un gancho en el extremo del cable C . Los cables A , B y D están fijos a la losa y al gancho. Si la distancia del gancho a la superficie de la losa es de 2 m. Se sabe que las tensiones en los cables no pueden exceder a 500N. Determine el valor máximo del peso de la losa que se podría soportar de acuerdo a esta condición.



5. Un contenedor de peso W está suspendido del aro A , al cual se unen los cables AC y AE . Una fuerza \mathbf{P} se aplica al extremo F de un tercer cable que pasa sobre una polea en B y a través del anillo A y que está unido al soporte en D . Si se sabe que $W = 1\,000\text{ N}$, determine la magnitud de \mathbf{P} . (Sugerencia: La tensión es la misma en todos los tramos del cable $FBAD$.)



6. La bola de 80 lb está suspendida del anillo horizontal usando tres resortes, cada resorte tiene longitud no alargada de 1.5 pies y rigidez de 50 lb/pie. Determine la distancia vertical h del anillo hasta el punto A por equilibrio.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros - Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.
Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica - Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.
Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

SEGUNDA UNIDAD: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS, SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS, CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD

TEMA Nº 5: CUERPOS RIGIDOS



Un *cuerpo rígido* puede considerarse como una combinación de un gran número de partículas donde todas éstas permanecen a una distancia fija entre sí, tanto antes como después de la aplicación de una carga. Este modelo es importante porque las propiedades del material de todo cuerpo que se supone rígido, no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. En la mayoría de los casos, las deformaciones reales que ocurren en estructuras, máquinas, mecanismos, etcétera, son relativamente pequeñas, y el supuesto de cuerpo rígido resulta adecuado para el análisis.

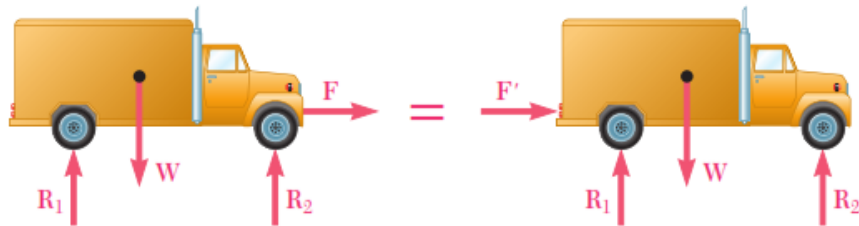
Los efectos de las fuerzas dependen no sólo de sus magnitudes y direcciones, sino también de los *momentos* que ejercen. El momento de una fuerza es una medida de su tendencia a causar giros. Los momentos causan el giro de maquinaria como la manivela de un barco de vela, las ruedas de un vehículo, los cigüeñales y las turbinas. Aun si la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, éstas pueden ejercer un momento, que se denomina par. Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido a las fuerzas externas y pares actuantes en él es igual a cero. Antes de continuar con el estudio del diagrama de cuerpo libre y del equilibrio, es necesario conocer sobre los momentos, los pares, y el concepto de sistemas equivalentes de fuerzas y momentos.

1. Cuerpos Rígidos y Principio de Transmisibilidad.

En toda la línea de acción de una fuerza su efecto externo ejercido, sobre un cuerpo rígido, es invariable. Luego, el Principio de Transmisibilidad establece que las condiciones de equilibrio o movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza F que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza F' que tiene la misma magnitud, dirección y sentido,

pero que actúa en un punto distinto, siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción.

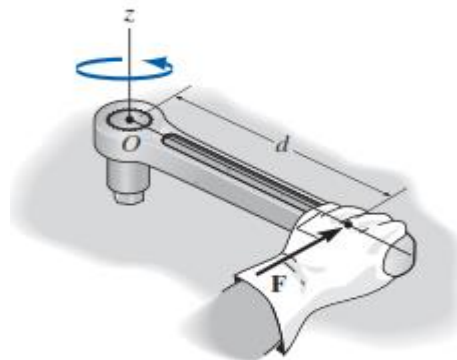
Las dos fuerzas, F y F' , tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son equivalentes. Las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de ben ser representadas por una clase de vector diferente, el *vector deslizante*.



2 Momento de una fuerza

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo, ésta producirá una tendencia a que el cuerpo gire alrededor de un punto que no está en la línea de acción de la fuerza. Esta tendencia a girar se conoce en ocasiones como *par de torsión*, pero con mayor frecuencia se denomina el momento de una fuerza o simplemente el *momento*. Tal es el caso de la llave de torsión que se usa para desenroscar el perno de la figura adjunta. Si se aplica una fuerza al maneral de la llave ésta tenderá a girar el perno alrededor del punto O (o el eje z).

La magnitud del momento es directamente proporcional a la magnitud de \mathbf{F} y a la distancia perpendicular o *brazo de momento* d . Cuanto más grande sea la fuerza o más grande sea el brazo de momento, mayor será el momento o el efecto de giro. Las unidades del momento son el producto de las unidades de fuerza y distancia, es decir, N.m o lb.pie.



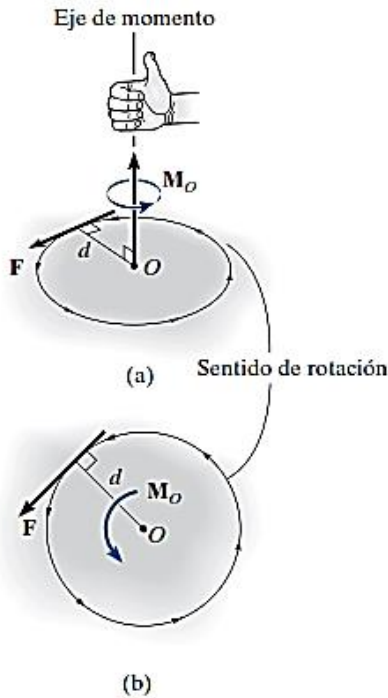
3. Formulación escalar del momento de una fuerza con respecto a un punto:

Considerando la figura siguiente, el vector momento \mathbf{M}_O con respecto al punto O , o con respecto a un eje que pase por O y sea perpendicular al plano, tiene magnitud y dirección específicas.

Magnitud. La magnitud de \mathbf{M}_O es:

$$M_O = F d$$

donde d representa el *brazo de momento* o *distancia perpendicular* desde el eje en el punto O hasta la línea de acción de la fuerza.



Dirección. La dirección de \mathbf{M}_o está definida por su *eje de momento*, el cual es perpendicular al plano que contiene la fuerza \mathbf{F} , y por su brazo de momento d .

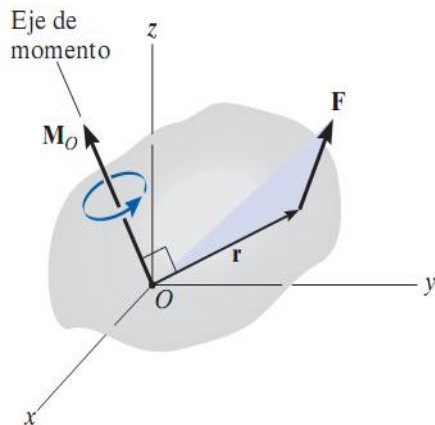
Para establecer el sentido de dirección de \mathbf{M}_o se utiliza la regla de la mano derecha. De acuerdo con esta regla, el curvado natural de los dedos de la mano derecha cuando éstos se doblan sobre la palma representa la tendencia para la rotación.

En dos dimensiones, este vector se representa con la flecha curva como en la figura *b*.

Por consiguiente, el sentido de rotación puede ser anti horario (positivo) u horario (negativo)

4. Formulación vectorial del momento de una fuerza respecto a un punto:

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto al punto O , es decir, con respecto al eje del momento que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a O y a \mathbf{F} , puede expresarse por el producto vectorial.



$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

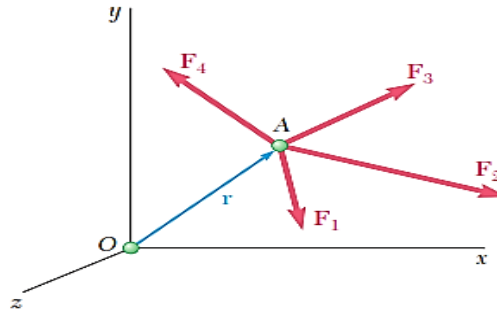
$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Aquí \vec{r} representa un vector de posición trazado desde O hasta cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de \mathbf{F} .

5. Principio de momentos o Teorema de Varignon:

“El momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O ”.

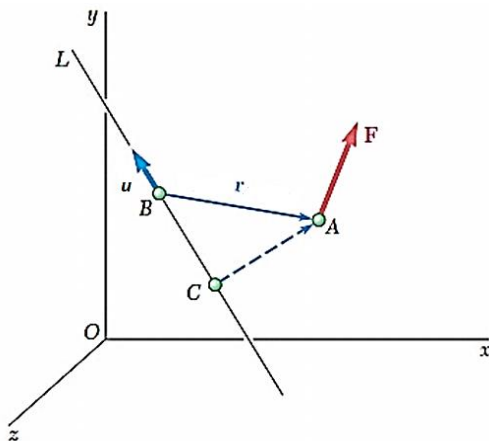
$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots$$



6. Momento de una fuerza con respecto a un eje:

El momento de una fuerza respecto a un eje L se puede obtener:

$$M_{eje} = \vec{\mu} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$



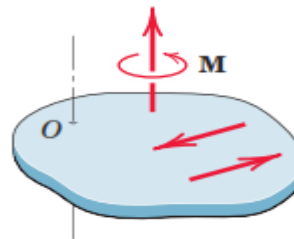
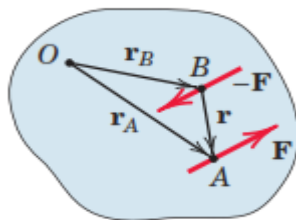
\vec{u} es el vector unitario del eje L

\vec{r} es el vector de posición trazado desde cualquier punto del eje a un punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza.

$$M_{eje} = \begin{vmatrix} \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

7. Momento de un par

Se dice que *dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par*. Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originarán una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, éstas sí tenderán a hacer lo rotar.



$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

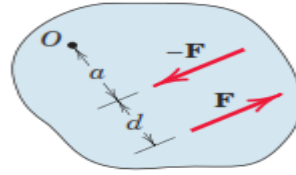
El momento de un par se da por la suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto O :

\mathbf{r} : Vector de posición que va del punto B al punto A cualesquiera.

En la siguiente figura se verifica que la magnitud del momento par está dada por:

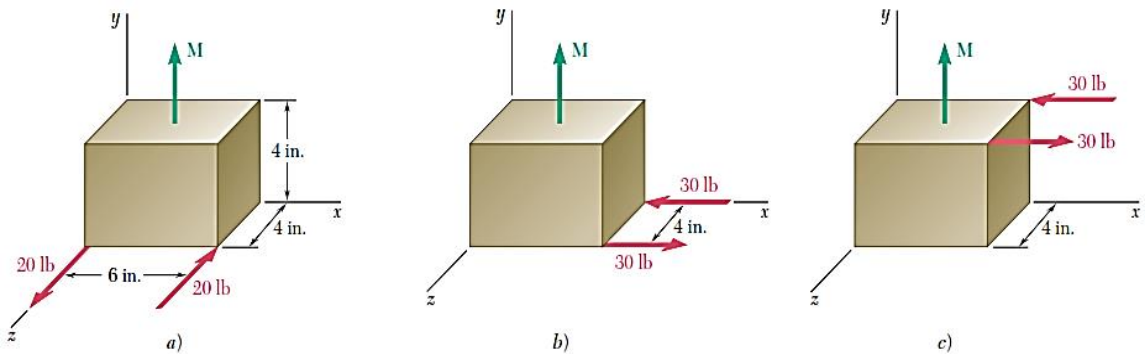
$$M = F(a + d) - Fa$$

$$M = Fd$$



8. Pares equivalentes

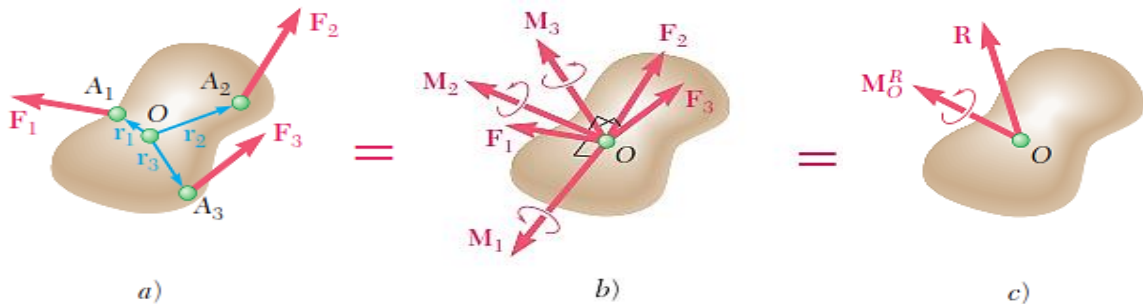
Se sabe que los vectores momento de los pares son vectores libres, se pueden sumar o restar independientemente de su posición en el espacio. Luego, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento \mathbf{M} (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120 \text{ lb} \cdot \text{in}$), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.



9. Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema equivalente de fuerza y momento par.

Considérese un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, A_3, \dots , definidos por los vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, etc. (figura a). La fuerza \mathbf{F}_1 puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O , si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento \mathbf{M}_1 , igual al momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de \mathbf{F}_1 con respecto a O . Si se repite este procedimiento con $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, se obtiene el sistema mostrado en la figura b, que consta de: las fuerzas originales, ahora actuando en O , y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante \mathbf{R} . De manera similar, los vectores de par $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots$ pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector de par \mathbf{M}_O^R . Por tanto, cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado O . (figura c).

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



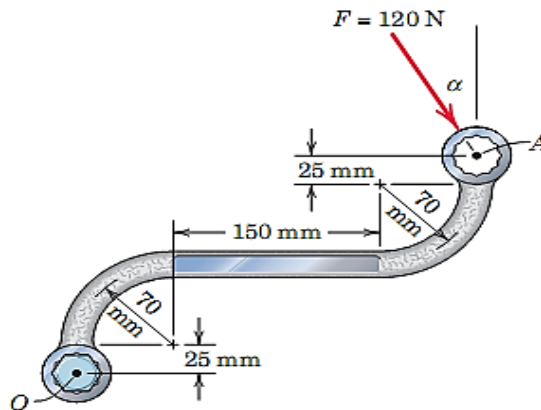
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 5
Tema: Cuerpos Rígidos –Momento de fuerza

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

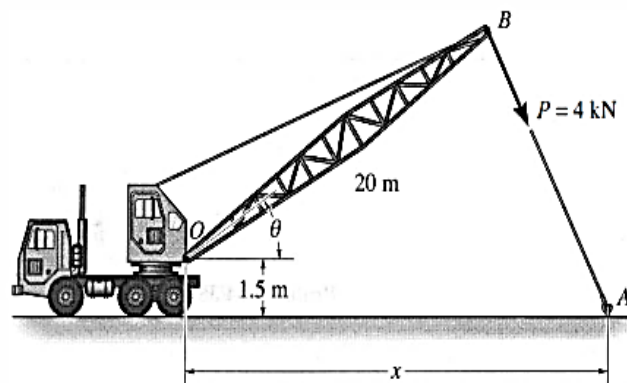
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

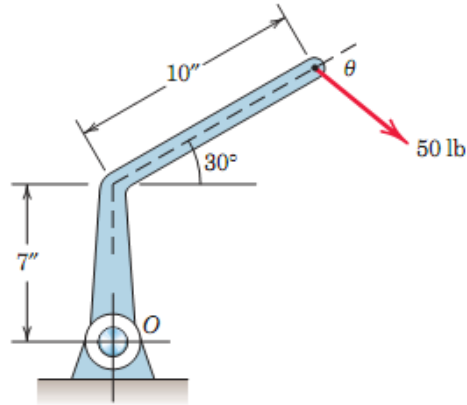
- La fuerza de 120 N es aplicada como se muestra en A. Determinar:
 - Si $\alpha = 30^\circ$, el momento de F respecto al centro O del perno.
 - El valor del ángulo α , que produce el máximo momento de F respecto de O, también la magnitud de dicho momento.



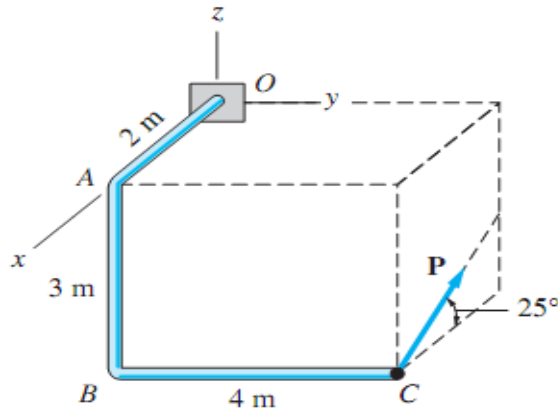
- El cable del remolque ejerce una fuerza $P = 4\text{ kN}$ en el extremo del aguilón de 20m de longitud de la grúa.
 - Si el ángulo $\theta = 30^\circ$, determine la posición x del gancho localizado en A de modo que esta fuerza produzca el máximo momento con respecto al punto O, además calcule el valor de este momento.
 - Si $x=25\text{m}$, determine el ángulo θ de modo que esta fuerza produzca un momento máximo con respecto al punto O, además calcule el valor de este momento.



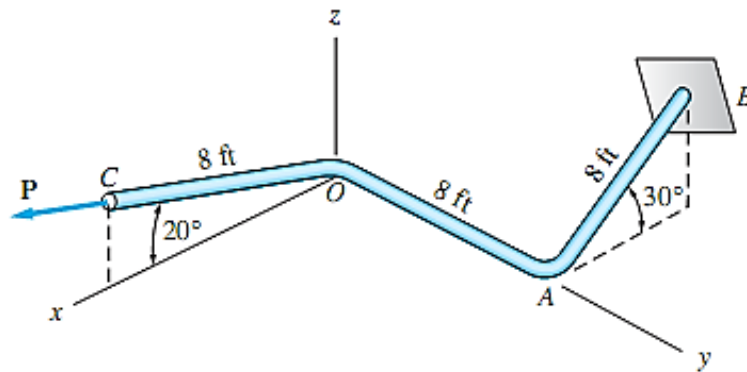
- Determine el valor del ángulo θ que hace máximo el momento de la fuerza (50 lb) respecto al punto O.



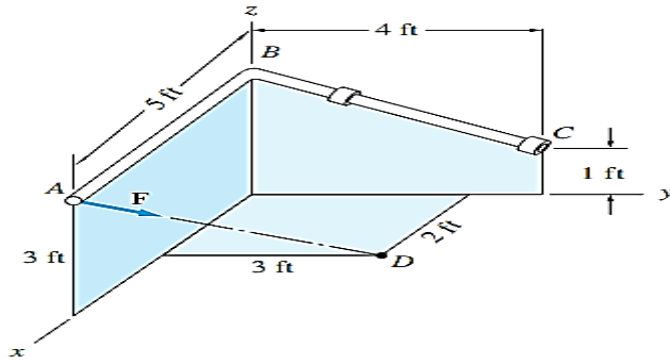
4. La magnitud del momento de fuerza de P respecto al punto O es 200 kN.m. Determine: a) La magnitud de P. b) La magnitud del momento de fuerza de P respecto al eje z.



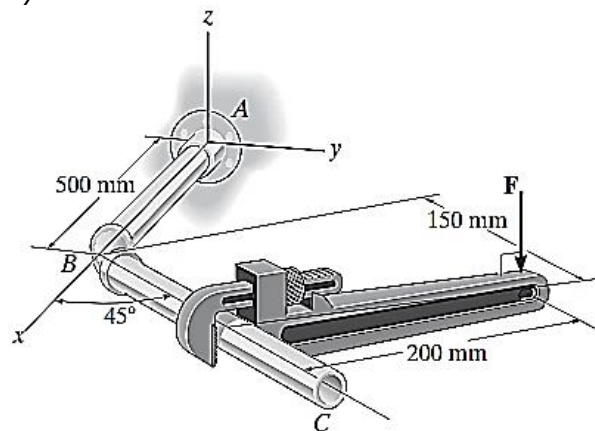
5. El momento de la fuerza P respecto del eje AB es 600 lb-ft. Determine:
a) La magnitud de P.
b) El momento de fuerza de P respecto al eje y.



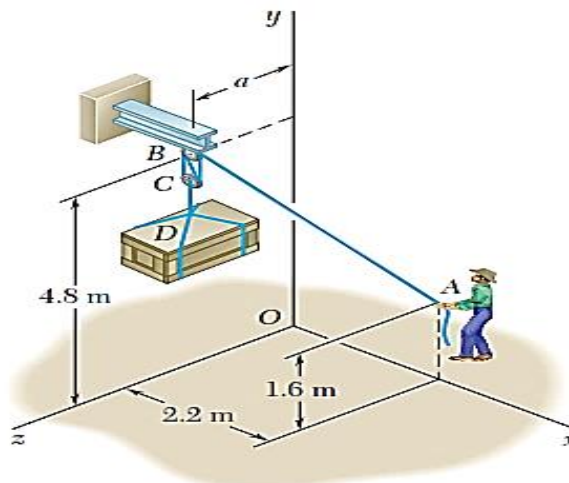
6. Determine la magnitud de la fuerza F dada la magnitud de su momento de fuerza respecto al eje BC de valor 150 lb.ft.



7. Determine la magnitud de la fuerza vertical F que actúa sobre el maneral de la llave si produce una componente de momento a lo largo del eje AB (eje x) de la tubería de $(MA)_x = \{-5\mathbf{i}\}$ N.m. Tanto la llave como el ensamble de tubos ABC , se encuentran en el plano $x-y$.



8. Para levantar una pesada caja, un hombre usa un bloque y un polipasto y los sujeta a la parte inferior de la viga I mediante el gancho B. Si se sabe que los momentos, de los ejes y y z , de la fuerza ejercida en B por el tramo AB de la cuerda son, respectivamente, de 120 N.m y -460 N.m, determine la distancia a .



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2013). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2013). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

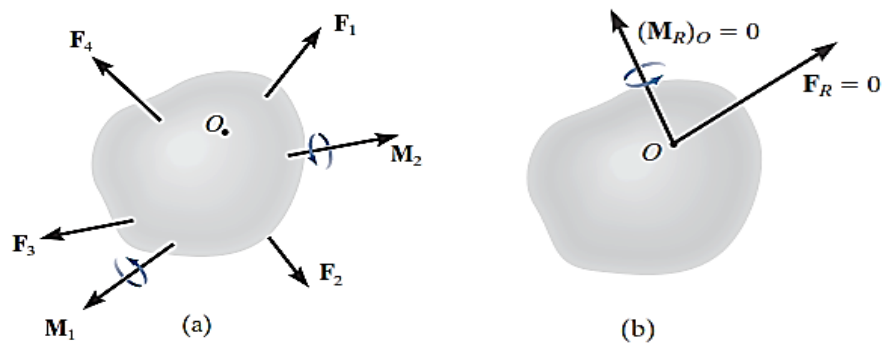
Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

TEMA N° 6: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN DOS DIMENSIONES



Ya hemos aprendido que la estática es el análisis de cuerpos en equilibrio, incluidos los puentes, las presas y los edificios. Ahora que ya hemos aprendido a calcular momentos, podemos enfrentarnos a problemas de equilibrio más interesantes. En este tema establecemos las ecuaciones de equilibrio y describimos modelos sencillos de los diversos tipos de soportes utilizados en ingeniería. Luego mostramos cómo usar las ecuaciones de equilibrio para obtener información respecto a los sistemas de fuerzas y momentos que actúan sobre los cuerpos.

6.1. Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido



El sistema mostrado de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo (figura a) puede reducirse a una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en cualquier punto arbitrario O sobre el cuerpo o fuera de él (figura b). La condición para el equilibrio es que tanto la fuerza como el momento de par resultantes sean iguales a cero. Matemáticamente, el equilibrio de un cuerpo se expresa como:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$



- ✓ La primera de estas ecuaciones establece que la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a *cero*. Ello verifica *traslación nula*.
- ✓ La segunda ecuación establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas en el sistema con respecto al punto *O*, añadida a todos los momentos de par es igual a *cero*. Con lo cual se verifica *rotación nula*.

6.2. Equilibrio en dos dimensiones:

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos. Por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre diferentes vigas y estructuras planas, pinzas, algunas grúas y otras máquinas, así como ciertos tipos de puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

Ecuaciones escalares de equilibrio en dos dimensiones.



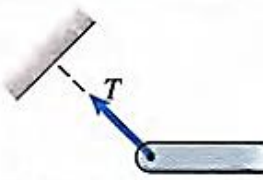
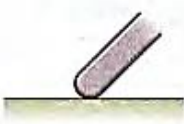
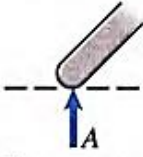
Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema bidimensional de fuerzas y momentos (momentos perpendiculares al plano), se encuentran relacionadas por tres ecuaciones escalares de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_{cualquier\ punto} = 0$$

Soportes:

Algunos tipos muy comunes de soportes se representan con modelos estilizados llamados convenciones de soporte. Los soportes reales a menudo se parecen a los modelos estilizados; pero, aunque no se parecieran, los representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.

MODELADO DE SOPORTES USADOS EN APLICACIONES BIDIMENSIONALES

Soportes	Reacciones	
 Cuerda o cable	 Resorte	 Una fuerza colineal
 Contacto con una superficie lisa	 Una fuerza normal	


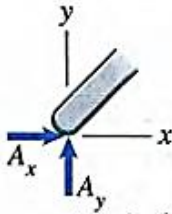

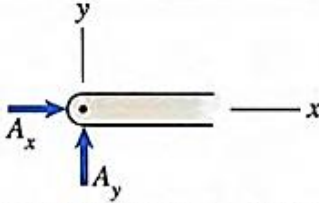

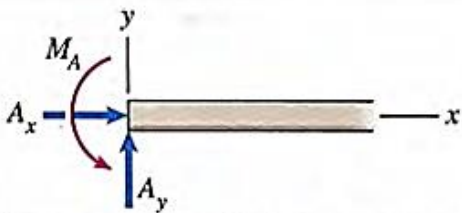

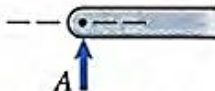

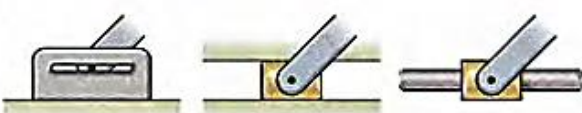
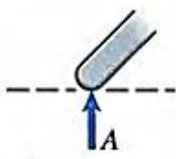
Soportes	Reacciones
 <p>Contacto con una superficie rugosa</p>	 <p>Dos componentes de fuerza</p>
 <p>Soporte de pasador</p>	 <p>Dos componentes de fuerza</p>
 <p>Soporte empotrado</p>	 <p>Dos componentes de fuerza y un par</p>
 <p>Soporte de rodillo</p>	 <p>Una fuerza normal</p>
 <p>Soportes equivalentes</p>	
 <p>Pasador guiado o deslizador</p>	 <p>Una fuerza normal</p>

Diagrama de cuerpo libre:

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido o cualquier grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deben darse los siguientes pasos:

1º *Trace el contorno:*

Idealice el cuerpo *aislado* o recortado "libre" de sus restricciones y conexiones, y delinee (en un bosquejo) su contorno.

2º Muestre todas las fuerzas y momentos de par.

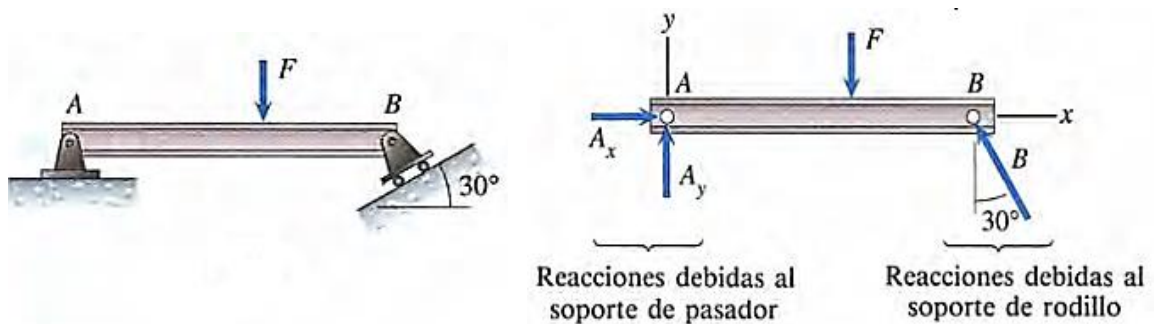
Identifique todas las *fuerzas externas* conocidas y desconocidas y los momentos de par que *actúan sobre el cuerpo*. Las que por lo general se encuentran se deben a (1) cargas aplicadas, (2) reacciones que ocurren en los soportes o en puntos de contacto con otros cuerpos, y (3) el peso del cuerpo.

3º Identifique cada carga y las dimensiones dadas.

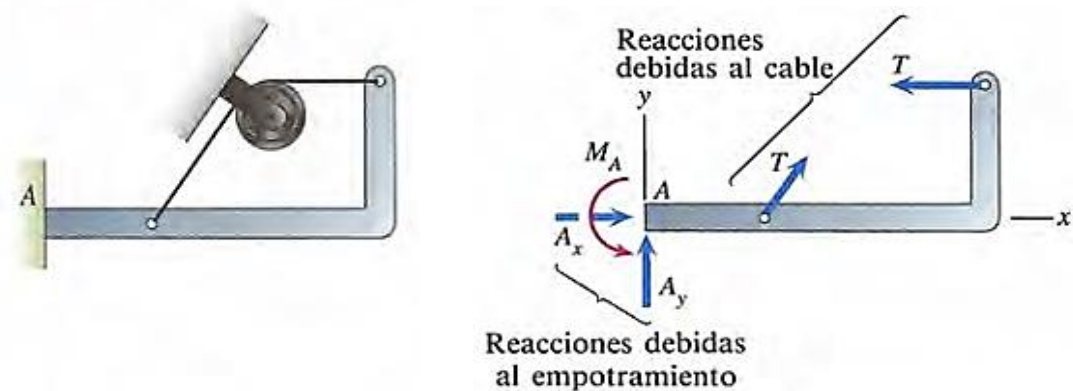
Las fuerzas y los momentos de par que se conocen deben marcarse con sus propias magnitudes y direcciones. Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

Ejemplos de DCL:

a) Viga ingrávida soportada por un pasador y un rodillo.



b) Cuerpo ingrávido soportado por un empotramiento y un cable unido a él en dos puntos.

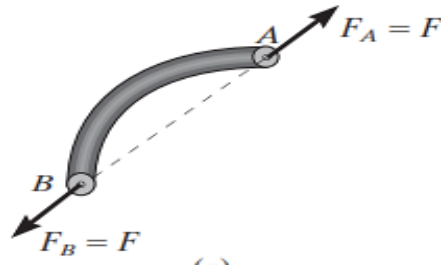


6.3. Equilibrio en elementos de dos y tres fuerzas.

Elemento de dos fuerzas:

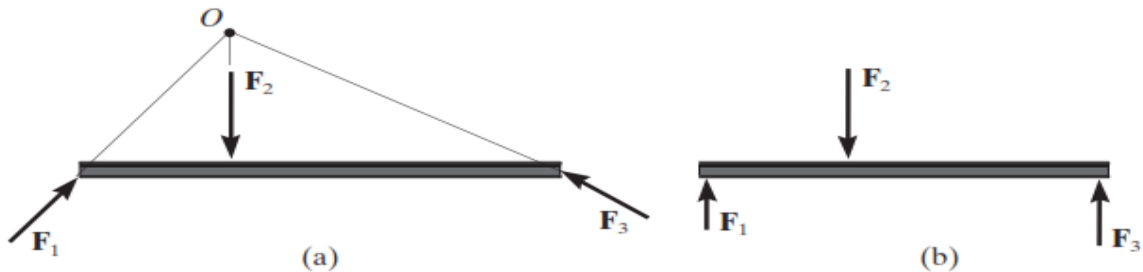
El elemento tiene fuerzas aplicadas en sólo dos puntos sobre el elemento. Un ejemplo se muestra en la figura adjunta. Para satisfacer el equilibrio de fuerzas, F_A y F_B deben tener la misma magnitud, $F_A = F_B = F$, pero dirección opuesta.

Por lo tanto, para que cualquier elemento de dos fuerzas esté en equilibrio, las dos fuerzas que actúan sobre él *deben tener la misma magnitud, actuar en direcciones opuestas y tener la misma línea de acción, dirigida a lo largo de la línea que une los puntos donde actúan estas fuerzas.*



Elemento de tres fuerzas:

Si un elemento está sometido a sólo *tres fuerzas*, se denomina *elemento de tres fuerzas*. El equilibrio de momento se puede satisfacer sólo si las tres fuerzas forman un sistema de fuerzas *concurrentes* o *paralelas*. Para ilustrar esto, considere el elemento sometido a las tres fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 , que se muestra en la figura a. Si las líneas de acción de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 se intersectan en el punto O , entonces la línea de acción de \mathbf{F}_3 también debe pasar por el punto O , de modo que las fuerzas satisfagan $\sum M_o = 0$. Como caso especial, si las tres fuerzas son paralelas, figura b, la ubicación del punto de intersección, O , se aproximará al infinito.



Luego, para el caso de elementos a dos y tres fuerzas analizar el equilibrio implica establecer ecuaciones que no requiere del trazo de vectores componentes siendo su solución respaldada por la geometría del problema.

6.4 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el plano:

1º *Diagrama de cuerpo libre.*

- ✓ Establezca los ejes x , y en cualquier orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de par conocidas y desconocidas.
- ✓ Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.
- ✓ Indique las dimensiones necesarias.

2º *Aplique las ecuaciones de equilibrio:* $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_{cualquier\ punto} = 0$

- ✓ Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo. Los momentos de par son positivos si tienen rotación antihoraria.
- ✓ Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza o momento de par es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.



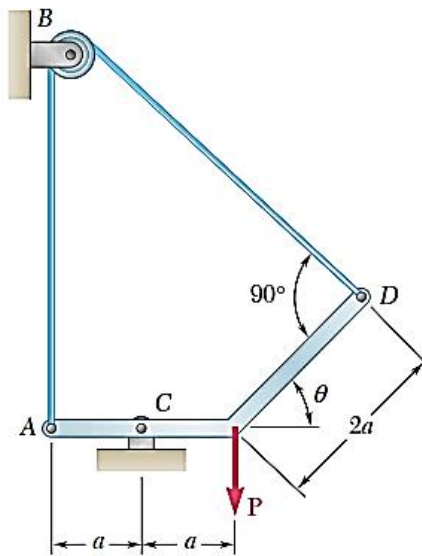
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 6 Tema: Equilibrio de Cuerpos Rígidos en 2D

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

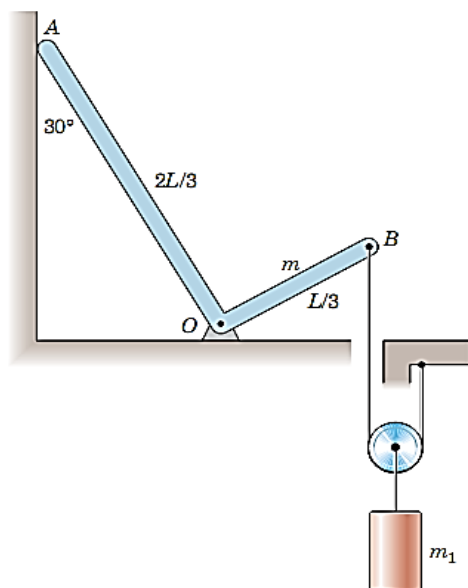
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. Sin tomar en cuenta la fricción determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C, cuando $\theta = 60^\circ$ y $a = 4\text{m}$.

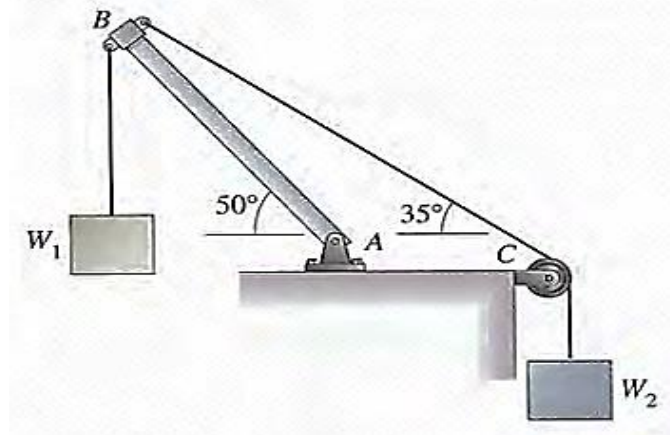


2. Determine la mínima masa m_1 del cilindro requerida para causar la pérdida de contacto en A.

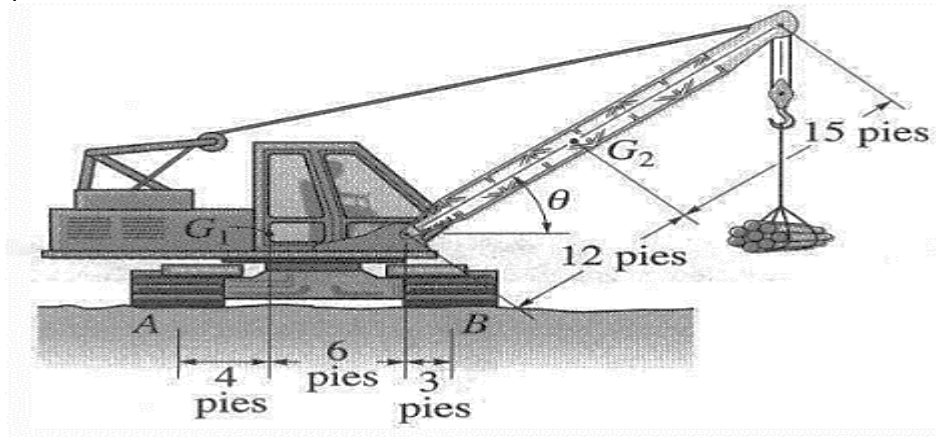


3. En la figura, el peso $W_1 = 1000\text{lb}$. Despreciando el peso de la barra sobre una polea en C. Determine:

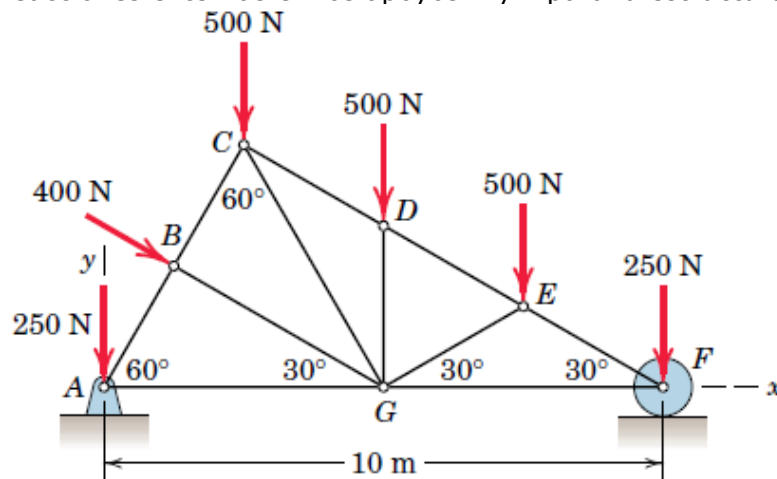
- a) La magnitud del peso W_2 .
- b) La reacción en el soporte de pasador en A.
- c) Si la tensión en la cuerda BC no puede exceder un valor de 3000lb determine la magnitud del peso máximo del bloque 1 y la reacción en el soporte de pasador en A para tal condición.



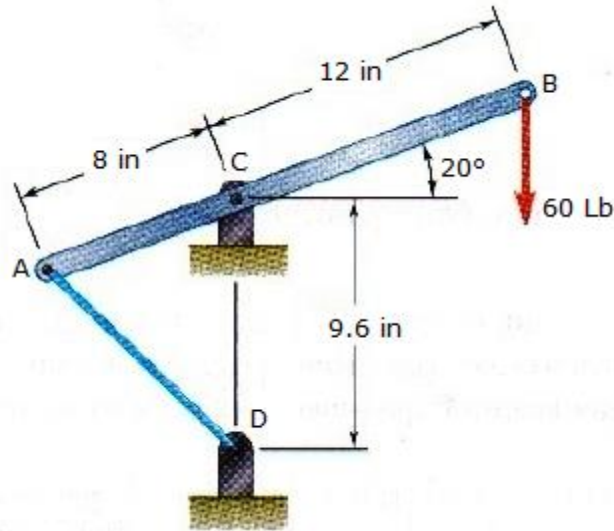
4. La grúa móvil tiene un peso de 120 000 lb y centro de gravedad en G_1 ; el aguilón tiene un peso de 30 000 lb y centro de gravedad en G_2 . Si la carga suspendida tiene un peso de $W = 16 000$ lb, determine las reacciones normales en las ruedas A y B. Para el cálculo, ignore el espesor de las ruedas y considere $\theta = 30^\circ$.



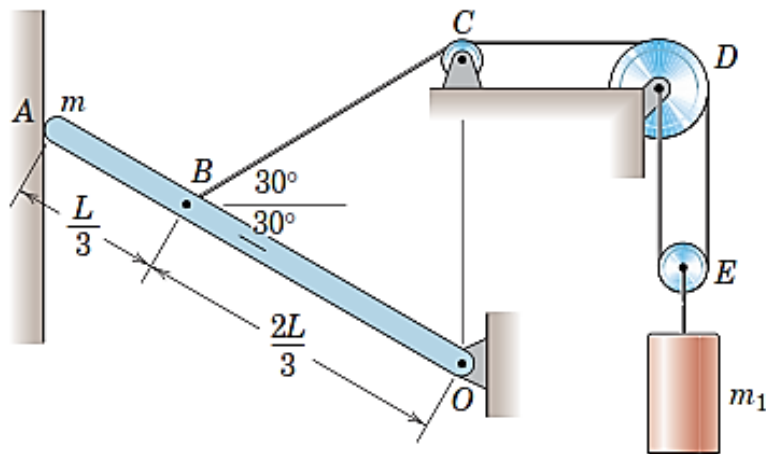
5. Determine Las reacciones externas en los apoyos A y F para la estructura mostrada.



6. Una palanca AB está articulada en C y unida a un cable de control en A. Si la palanca se somete a una fuerza vertical de 60 lb en el punto B, determinar la tensión en el cable y la reacción en C.



7. Determine una expresión general para la fuerza normal N_A ejercida por la pared vertical lisa sobre la barra delgada y uniforme de masa m y longitud L . La masa del cilindro es m_1 , considere las poleas ideales. Determine además el valor de m_1 para el cual se cumple que a) $N_A = mg/2$ y b) $N_A = 0$



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 7: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES



Hemos visto que cuando un cuerpo en equilibrio está sometido a un sistema bidimensional de fuerzas y momentos, no se pueden obtener más de tres ecuaciones independientes de equilibrio. En el caso de un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se pueden obtener hasta seis ecuaciones independientes de equilibrio: las tres componentes de la suma de las fuerzas deben ser nulas y las tres componentes de la suma de los momentos respecto a cualquier punto deben también ser iguales a cero.

El procedimiento para determinar las reacciones sobre cuerpos sometidos a sistemas tridimensionales de fuerzas y momentos -dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicar las ecuaciones de equilibrio- es el mismo que para el de dos dimensiones. Sólo se requiere familiarizarse con las convenciones de soporte usadas en las aplicaciones tridimensionales.

7.1 Equilibrio en tres dimensiones:

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos en sistemas espaciales, por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre estructuras espaciales, grúas y máquinas, así como techos, puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

Ecuaciones vectoriales de equilibrio en tres dimensiones:

Las dos condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido pueden ser expresadas matemáticamente en forma vectorial como

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\Sigma \vec{M}_o = 0$$

donde $\Sigma \vec{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma \vec{M}_o$ es la suma de los momentos de par y los momentos de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto O localizado en o fuera del cuerpo.

Ecuaciones escalares de equilibrio en tres dimensiones.

Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se encuentran relacionadas por seis ecuaciones escalares de equilibrio:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array}$$



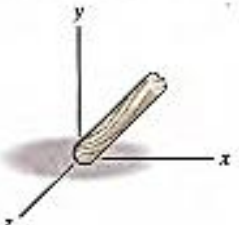
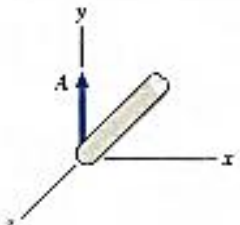

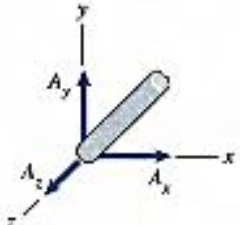
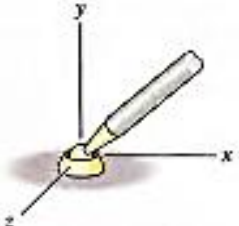
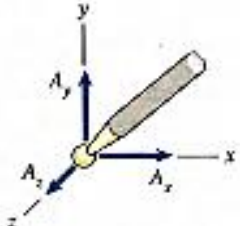
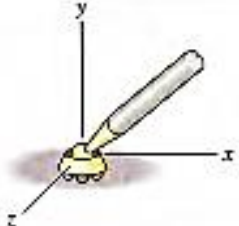
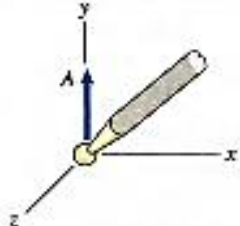


Al usar estas seis ecuaciones escalares de equilibrio se puede resolver cuando mucho seis incógnitas mostradas en el diagrama de cuerpo libre.

Soportes:

Aún, cuando los soportes reales no se parezcan físicamente a los modelos representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.

MODELADO DE SOPORTES USADOS EN APLICACIONES BIDIMENSIONALES

Soportes	Reacciones
 Cuerda o cable	 Una fuerza colineal
 Contacto con una superficie lisa	 Una fuerza normal
 Contacto con una superficie rugosa	 Tres componentes de fuerza
 Soporte de bola y cuenca	 Tres componentes de fuerza
 Soporte de rodillos	 Una fuerza normal

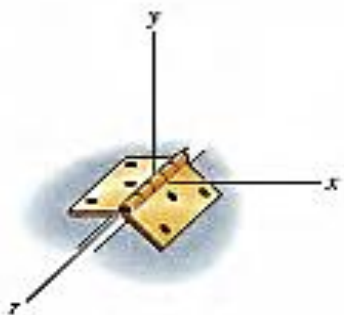
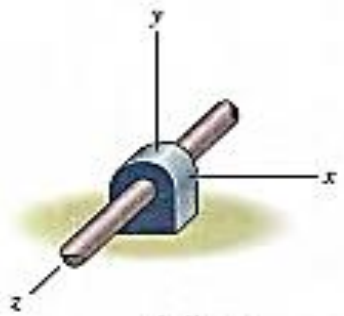
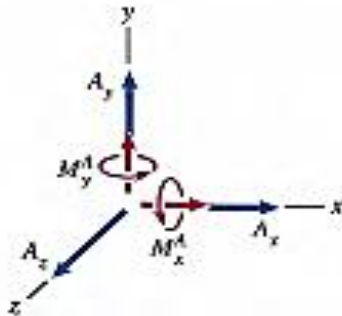
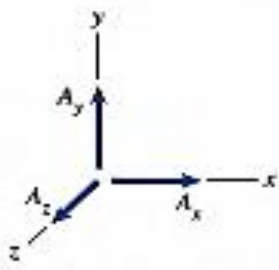
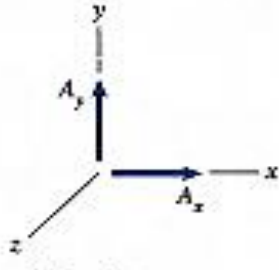
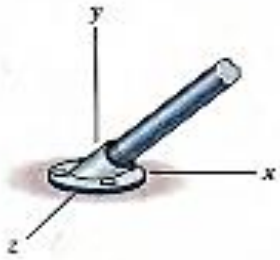
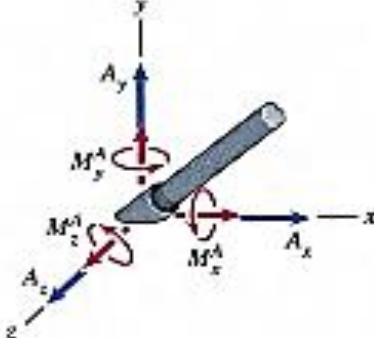
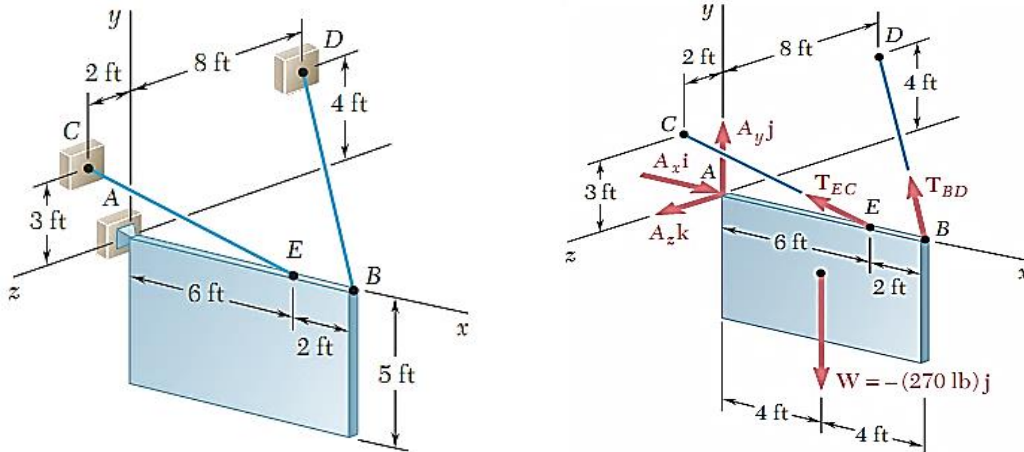
Soportes	Reacciones
 <p>Articulación (el eje z es paralelo al eje de la articulación)</p>  <p>Cojinete (El eje z es paralelo al eje del árbol soportado)</p>	 <p>Tres componentes de fuerza, dos componentes de par</p>  <p>(Cuando no se generan pares)</p>  <p>(Cuando no se generan pares ni fuerza axial)</p>
 <p>Soporte empotrado</p>	 <p>Tres componentes de fuerza, Tres componentes de par</p>

Diagrama de cuerpo libre:

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido en tres dimensiones procedemos en forma análoga al análisis en dos dimensiones con las consideraciones de los soportes tridimensionales.

Ejemplo: Para el letrero de densidad uniforme, apoyado en una rótula esférica en A y sujetado por cables en B y E.



7.2 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el espacio:

1º *Diagrama de cuerpo libre.*

- ✓ Establezca los ejes x , y y z en una orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de par conocidas y desconocidas.
- ✓ Muestre las componentes desconocidas con un sentido positivo a lo largo de los ejes x , y y z .
- ✓ Indique las dimensiones necesarias.

2º *Aplique las ecuaciones de equilibrio.*

- ✓ Según la conveniencia se deben aplicar las ecuaciones escalares o las ecuaciones vectoriales.
- ✓ En ocasiones serán necesarios usar ejes de dirección arbitraria para realizar la suma de fuerzas y momentos.
- ✓ Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza o momento de par es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

7.3. RESTRICCIONES REDUNDANTES Y CUERPOS IMPROPIAMENTE RESTRINGIDOS

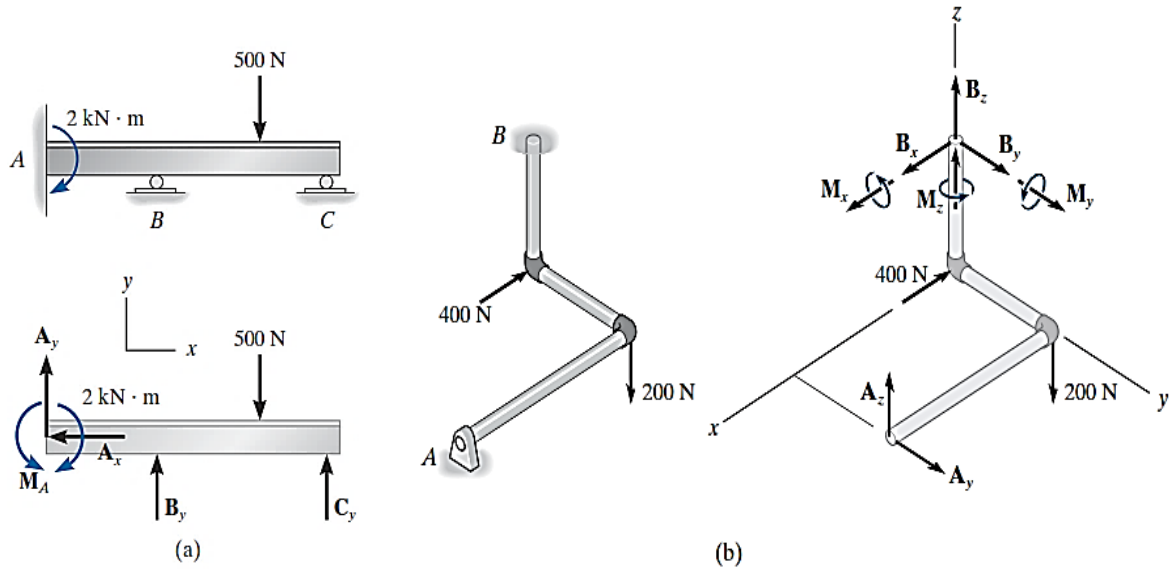
Para garantizar el equilibrio de un cuerpo rígido, no sólo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio, sino que el cuerpo también debe estar sostenido o restringido propiamente por sus soportes. Algunos cuerpos pueden tener más soportes que los necesarios para el equilibrio, mientras que otros pueden no tener suficientes o estar colocados de tal manera que ocasionen el movimiento del cuerpo. A continuación, se analiza cada uno de esos casos.

Cuando un cuerpo tiene soportes redundantes, es decir, más de los necesarios para mantenerlo en equilibrio, se vuelve estáticamente indeterminado. *Estáticamente indeterminado* significa que habrá más cargas desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para su solución. Por ejemplo, la viga de la figura *a*, y el ensamble de tubos de la figura *b*, que se muestran junto con sus diagramas de cuerpo libre, son estáticamente indeterminados debido a las reacciones adicionales (o redundantes) en los



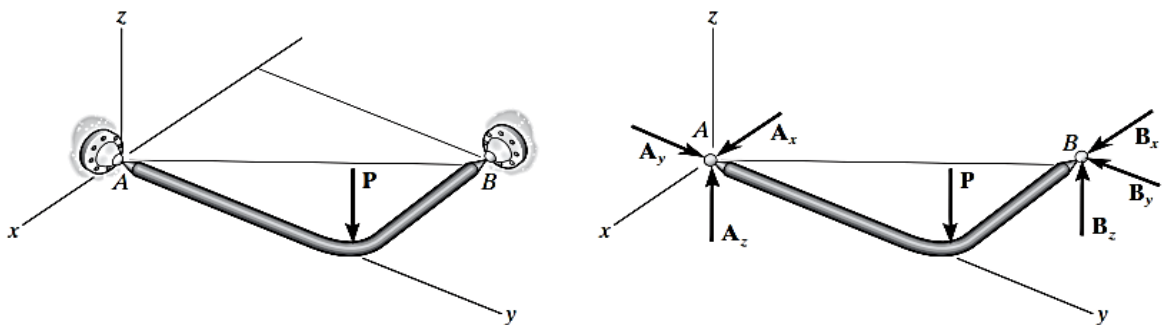
soportes. Para la viga hay cinco incógnitas, M_A , A_x , A_y , B_y y C_y , para las cuales sólo se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_o = 0$. El ensamble de tubos tiene ocho incógnitas, para las cuales sólo se pueden escribir seis ecuaciones de equilibrio.

Las ecuaciones adicionales necesarias para resolver problemas estáticamente indeterminados del tipo que se muestra en las figuras a y b se obtienen generalmente a partir de las condiciones de deformación presentes en los puntos de soporte. Estas ecuaciones implican las propiedades físicas del cuerpo que se estudian en temas relacionados con la mecánica elástica, como la "mecánica de materiales".



Cuerpo impropriamente restringido

En el espacio, un cuerpo estará *impropriamente restringido* si las líneas de acción de todas las fuerzas reactivas intersecan un eje común. Por ejemplo, las fuerzas reactivas en los soportes de rótula esférica, ubicados en los puntos A y B de la figura, intersecan el eje que pasa por A y B. Como los momentos de estas fuerzas con respecto a A y B son todos iguales a cero, entonces la carga \mathbf{P} hará que el elemento gire con respecto al eje AB, puesto que la sumatoria de momentos respecto al eje AB es diferente de cero.



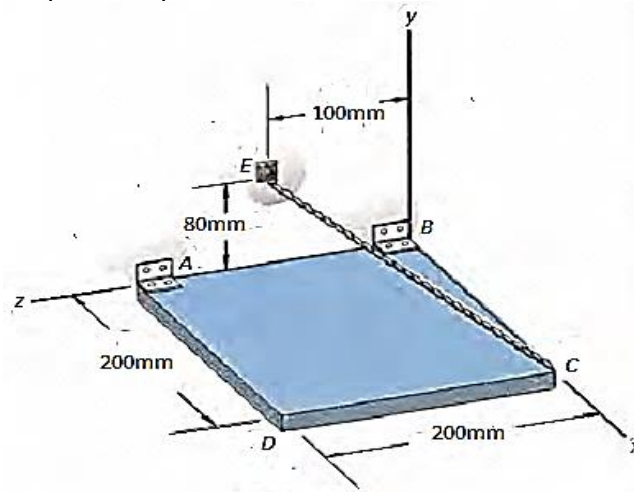
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 7
Tema: Equilibrio de Cuerpos Rígidos en 3D

Sección :
 Docente : Escribir el nombre del docente
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar
 Semana

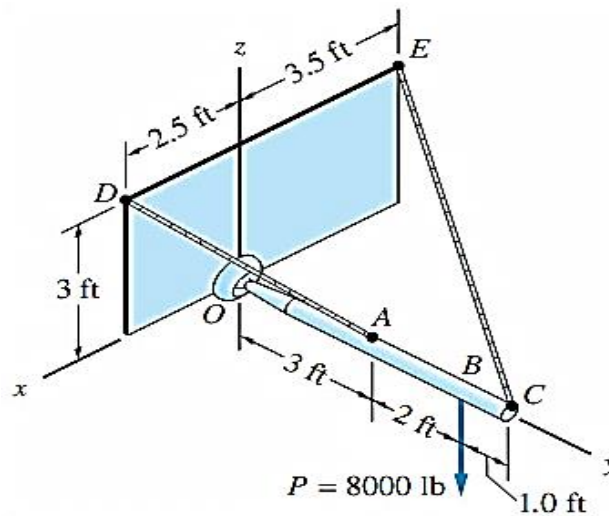
Apellidos :
 Nombres :
 Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
 Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

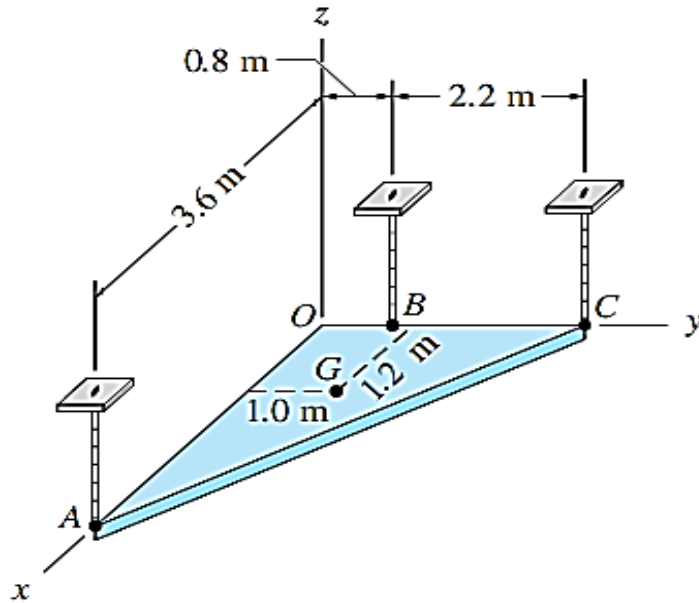
- En la figura la placa está soportada por bisagras en A y en B, también por el cable CE. Las bisagras, propiamente alineadas, no generan pares sobre la placa, y la bisagra en A no genera una fuerza sobre la placa en la dirección del eje de la bisagra, además la magnitud del momento de la tensión en la cuerda respecto al eje z no debe ser mayor de 337Nm. Determine para tal condición el peso máximo que puede ser soportado por el sistema.



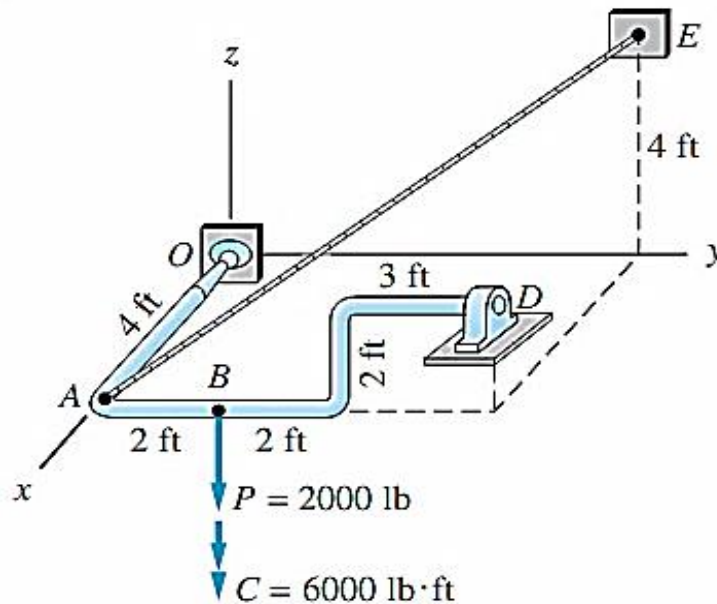
- El elemento horizontal de peso despreciable está sujeto por una rótula en O, determine las magnitudes de las tensiones en los cables y la magnitud de la reacción en O.



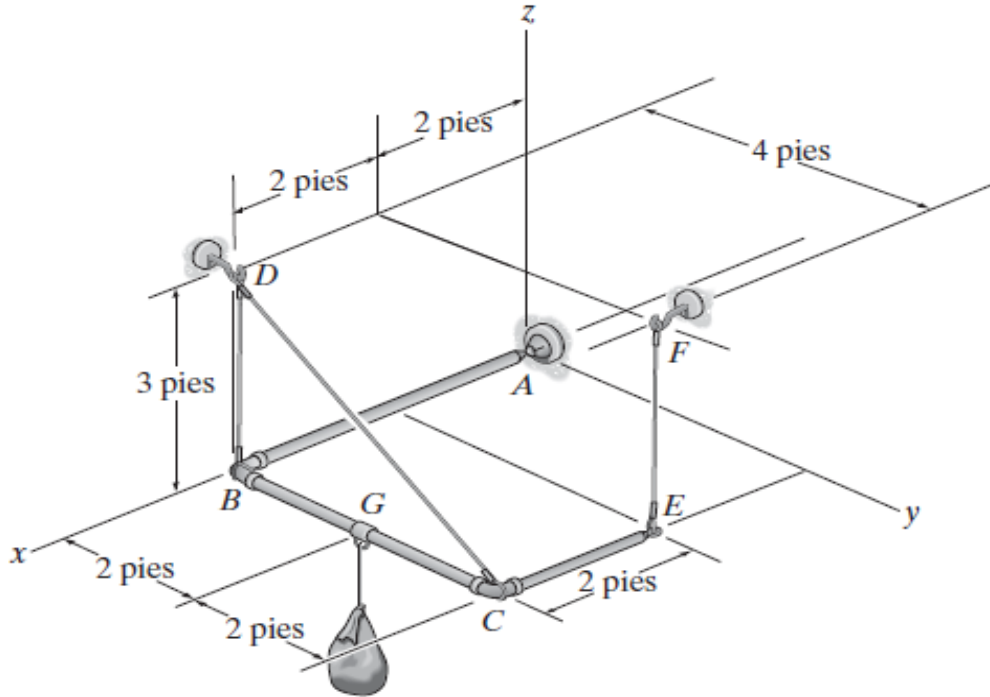
3. La placa de peso W con centro de gravedad en G es soportada en el plano horizontal como se muestra, determine las magnitudes de cada una de las tensiones y el peso máximo a soportar si la tensión que soportan los cables no debe exceder a 27.3 kN.



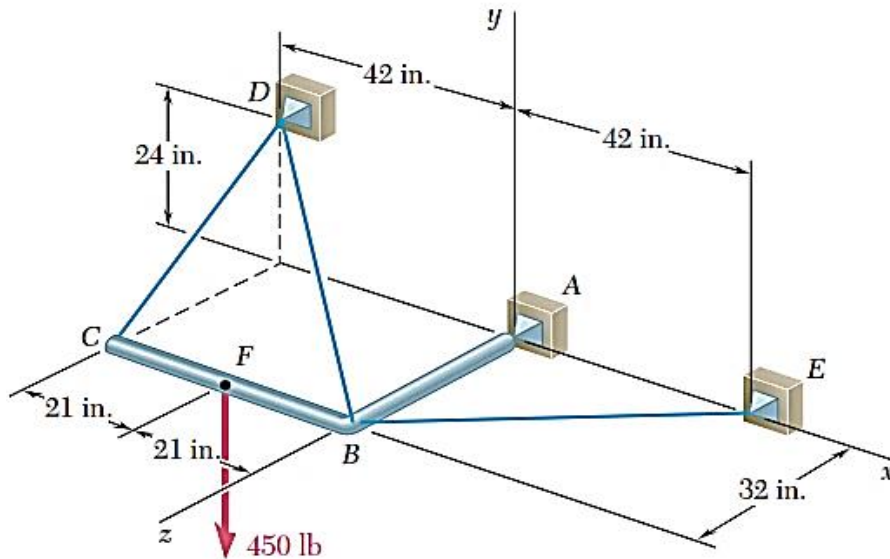
4. El elemento de peso despreciable es soportado por una rótula en O , un cable AE y un cojinete de empuje (que no genera pares). Sobre la barra actúan una fuerza P y un par C , ambos paralelos al eje x . Determine las magnitudes de las reacciones en D y en O , así como la tensión en el cable.



5. Si la carga tiene un peso de 200 lb, determine las componentes x , y , z de la reacción en la junta de rótula esférica A y la tensión en cada uno de los cables.



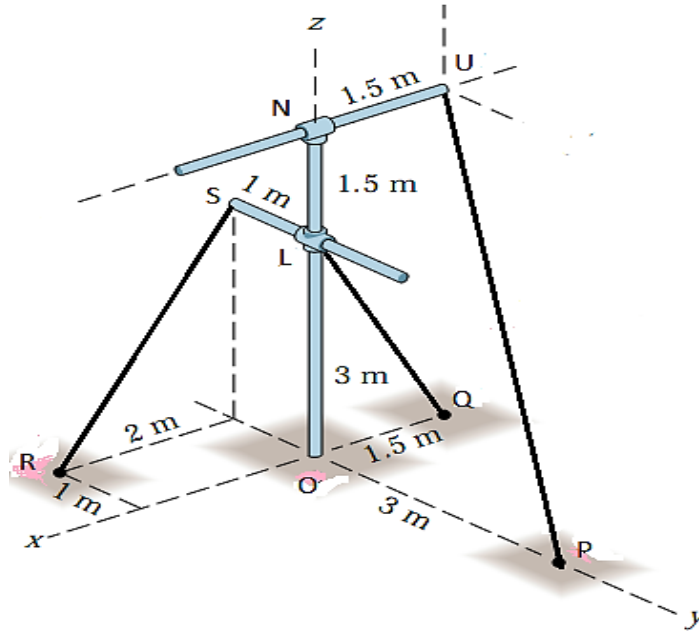
6. El elemento rígido ABC en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Si se aplica una carga de 450 lb en F, determine la tensión en cada cable.



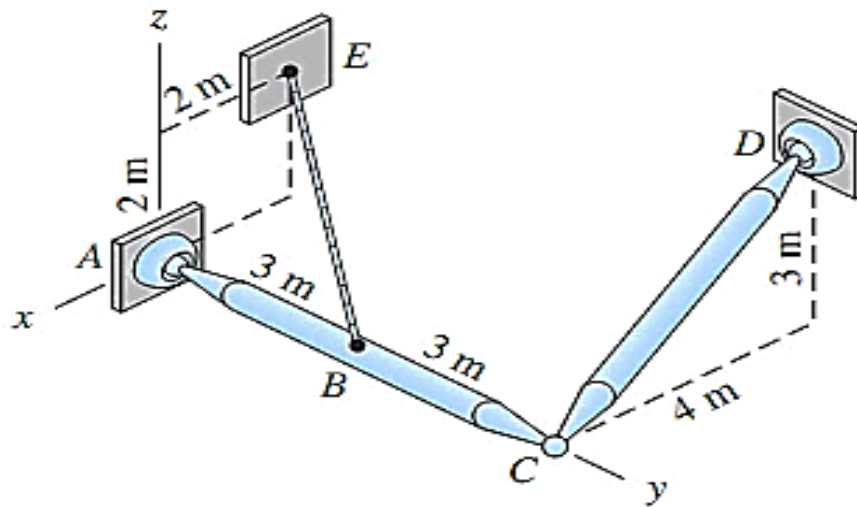
7. El poste rígido y las crucetas están en equilibrio. Se sabe que la tensión T_{UP} tiene una magnitud de 1200N y que únicamente existe momento par sobre el poste en la dirección z.

Determine:

- Las magnitudes de las tensiones en los cables T_{LQ} Y T_{SR} .
- La magnitud y dirección del momento par sobre la base del poste.



8. Las dos barras AC y CD son homogéneas y pesan 200 N/m cada una. Las juntas A, C y D son rótulas y el cable BE está conectado entre B y E. Determine todas las fuerzas sobre la barra AC.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 8: CENTROIDES Y CENTRO DE GRAVEDAD

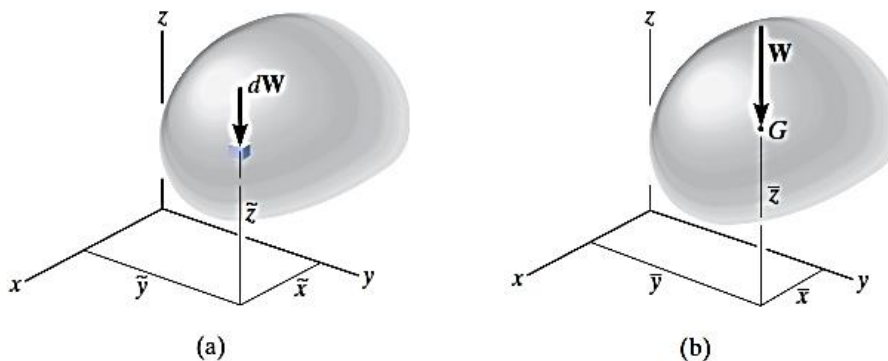


8.1 Centro de gravedad, centro de masa y centroide de un cuerpo.

A continuación, mostraremos en primer lugar cómo localizar el centro de gravedad para un cuerpo y después deduciremos que el centro de masa y el centroide de un cuerpo pueden desarrollarse con este mismo método.

Centro de gravedad.

Un cuerpo está compuesto de un número infinito de partículas de tamaño diferencial, y por tal razón si el cuerpo se ubica dentro de un campo gravitatorio, entonces cada una de estas partículas tendrá un peso dW , figura *a*. Estos pesos formarán un sistema de fuerzas aproximadamente paralelas, y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo, la cual pasa a través de un solo punto llamado el *centro de gravedad*, G , figura *b*. Esto es cierto mientras se suponga que el campo de gravedad tiene la misma magnitud y dirección en todas partes. Ese supuesto es apropiado para la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, ya que la gravedad no varía apreciablemente entre, por ejemplo, la parte inferior y la superior de un edificio.



Se sabe que el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas sus partículas, es decir:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z; \quad W = \int dW$$

La ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje y , se determina al igualar el momento de W con respecto al eje y , figura *b*, con la suma de los momentos de los



pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje. Si dW se ubica en el punto \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} figura a, entonces:

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad \bar{x}W = \int \tilde{x} dW$$

De la misma manera, si se suman los momentos con respecto a los ejes x y y :

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad \bar{y}W = \int \tilde{y} dW$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad \bar{z}W = \int \tilde{z} dW$$

Luego, la ubicación del centro de gravedad G con respecto a los ejes x , y y z es:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dW}{\int dW} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dW}{\int dW}$$

$$\mathbf{G} = (x; y; z)$$

Donde:

G = Centro de gravedad

$x; y; z$ = Coordenadas del centro de gravedad

- ✓ El centro de gravedad toma en cuenta los materiales que componen el cuerpo y es el punto donde está aplicada la fuerza resultante equivalente llamada peso W .

Centro de masa:

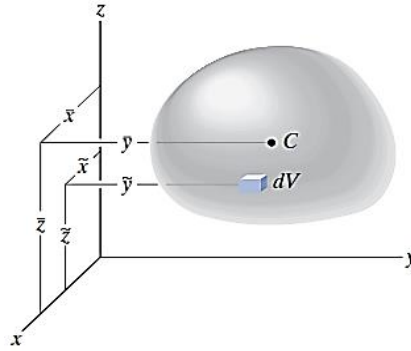
Al sustituir $dW = g dm$ en la ecuación del centro de gravedad obtenemos el centro de masa de un cuerpo. A fin de estudiar la *respuesta dinámica* o el movimiento acelerado de un cuerpo, resulta importante localizar este punto.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm}$$

Centroide de un volumen

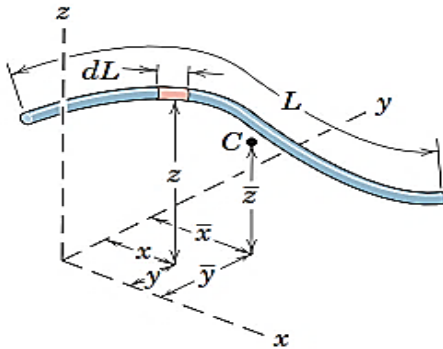
Si el cuerpo de la figura a está hecho de un material homogéneo, entonces su densidad (ρ_0) será constante. Por lo tanto, un elemento diferencial de volumen dV tiene una masa $dm = \rho_0 dV$. Al sustituir esto en las ecuaciones de centro de masa y al cancelar, obtenemos fórmulas que localizan el *centroide* C o centro geométrico del cuerpo; así:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$



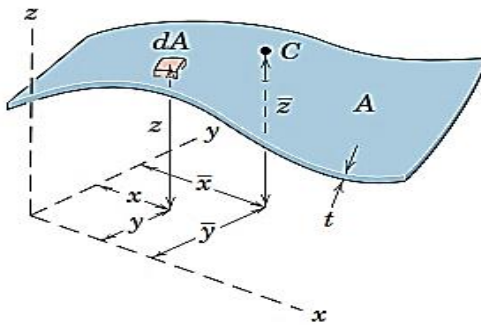
Centroides de Líneas:

Para alambres de sección constante.



$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} \quad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL}$$

Centro de Gravedad de Áreas:



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$

Consideraciones importantes.

- ✓ El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo, es una propiedad geométrica y no considera los materiales del cuerpo. El centro de gravedad es una propiedad física y si considera los materiales que componen el cuerpo.
- ✓ Este punto coincide con el centro de masa o con el centro de gravedad sólo si el material que compone el cuerpo es uniforme u homogéneo.
- ✓ Las fórmulas usadas para localizar el centro de gravedad o el centroide simplemente representan un balance entre la suma de momentos de todas las partes del sistema y el momento de la "resultante" para el sistema.
- ✓ En algunos casos, el centroide se ubica en un punto fuera del objeto, como en el caso de un anillo, donde el centroide está en el centro del anillo. Además, este punto se encontrará sobre cualquier eje de simetría del cuerpo.

CENTROIDES DE FORMAS COMUNES DE ÁREAS Y DE LÍNEAS.

Forma		\bar{x}	\bar{y}	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica a		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \text{ sen}\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Forma		\bar{x}	\bar{y}	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \text{ sen}\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Determinación de Centroides por Integración

El centro de gravedad o centroide de un objeto o forma, se puede determinar mediante integraciones simples por el siguiente procedimiento.

1º *Seleccionar un elemento diferencial.*

Seleccione un sistema coordenado apropiado, especifique los ejes coordenados, y luego elija un elemento diferencial para la integración: Para líneas dL , para áreas: dA , con una longitud finita y ancho diferencial, para volúmenes, el elemento puede ser un disco circular de volumen dV , con un radio finito y espesor diferencial.

2º *Tamaño y brazos de momento.*

Expresar la longitud dL , el área dA , o el volumen dV del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva. Expresar los brazos de momento para el centroide o centro de gravedad del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva.

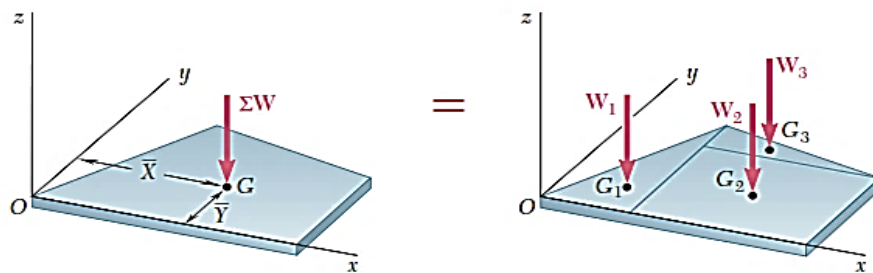
3º *Integraciones.*

Sustituya las formulaciones para dL , dA o dV en las ecuaciones apropiadas y exprese la función en el integrando en términos de la *misma variable aplicada al espesor del elemento*. Los límites de la integral se definen a partir de las dos ubicaciones extremas del espesor diferencial del elemento, de manera que cuando los elementos se "suman" o la integración se realiza, toda la región queda cubierta.

8.2 Cuerpos compuestos:

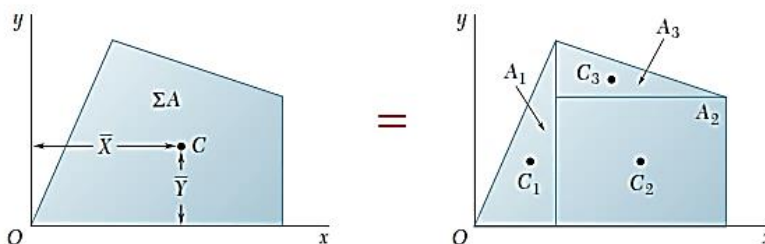
Un *cuerpo compuesto* consiste en una serie de cuerpos "más simples" conectados, los cuales pueden ser rectangulares, triangulares, semicirculares, etcétera. Un cuerpo de este tipo a menudo puede ser seccionado o dividido en sus partes componentes y, si se conocen el peso y la ubicación de cada una de esas partes, es posible eliminar la necesidad de la integración para determinar el centro de gravedad de todo el cuerpo.

Veamos el caso de una placa mostrada en la figura siguiente:



Procedimiento para determinar el centroide de un cuerpo compuesto:

- 1º Separar el cuerpo en partes de formas conocidas.
- 2º Determinar el centroide de cada parte por separado. Además determinar el área de cada parte y el área total.





3º Las coordenadas del centroide **C** del cuerpo compuesto se determina promediando los centroides de las partes.

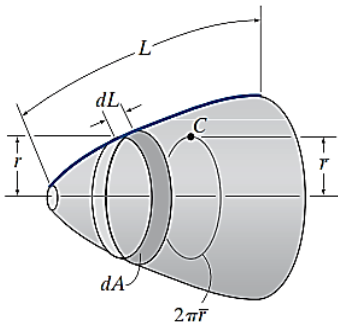
$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

8.3 Teoremas de Pappus-Guldinus

Se utilizan para calcular la superficie y volumen de cualquier objeto de revolución. Una superficie de revolución se crea girando una curva plana con respecto de un eje fijo que no intercepta el plano de la curva; mientras que un volumen de revolución se forma girando el área de un plano con respecto de un eje fijo que no intercepta el plano del área.

PRIMER TEOREMA: El área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de la curva generatriz y la distancia viajada por el centroide de la curva al generar el área superficial.

$$A = \theta \bar{r} L$$



A = área superficial de revolución

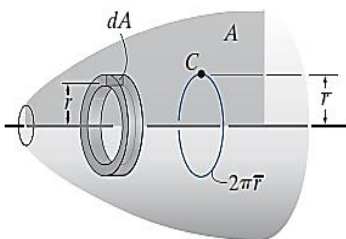
θ = ángulo de revolución medido en radianes, θ ≤ 2π

r̄ = distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de la curva generatriz

L = longitud de la curva generatriz

SEGUNDA TEOREMA: El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.

$$V = \theta \bar{r} A$$



V = volumen de revolución o giro

θ = ángulo de revolución medido en radianes, θ ≤ 2π

r̄ = distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de la curva generatriz

A = área generatriz

También podemos aplicar los dos teoremas anteriores a líneas o áreas que están integradas por una serie de partes componentes. En este caso, el área superficial total o el volumen generado es la suma de las áreas superficiales o volúmenes generados por cada una de las partes componentes.



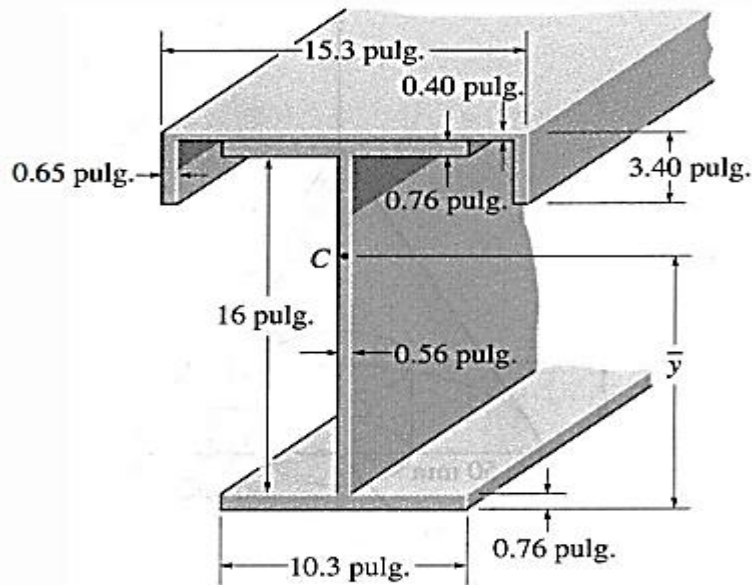
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 8 Tema: Centroides y Centro de gravedad

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

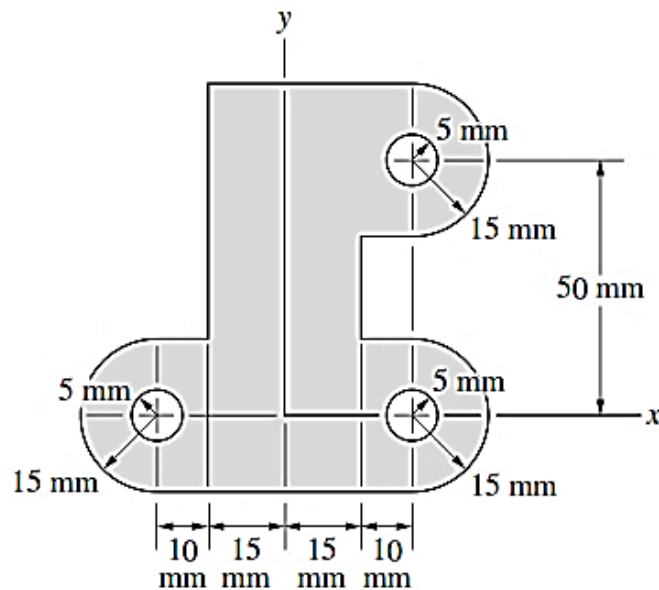
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

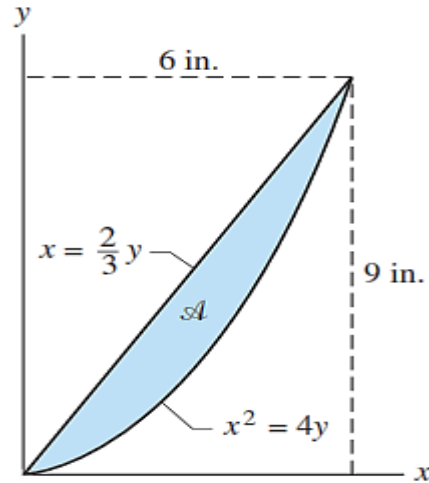
1. Localice el centroide del área de sección transversal de la viga compuesta construida a partir de una canaleta y una viga de patín ancho.



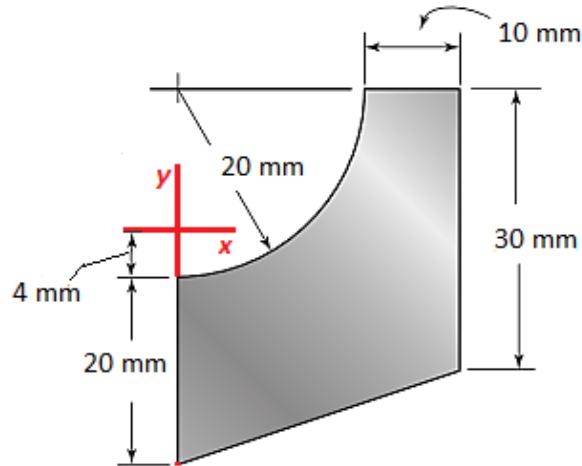
2. El muro de contención a gravedad está hecho de concreto. Determine la ubicación del centro de masa G para el muro.



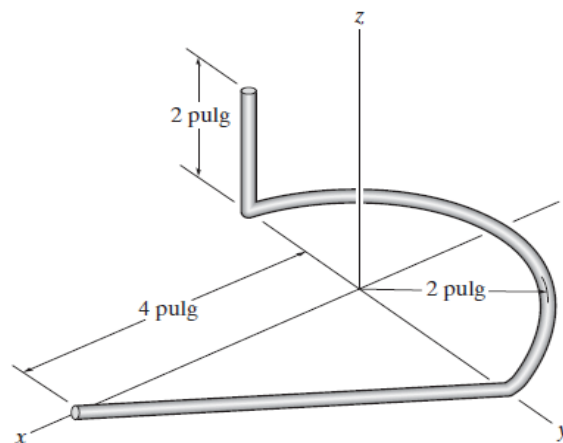
3. Localice el centroide al área sombreada.



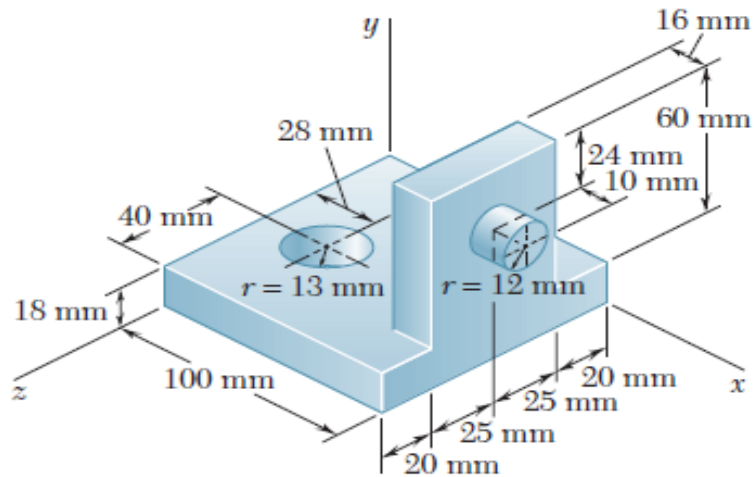
4. Determine el centroide de la figura mostrada para los ejes cartesianos consignados.
- Elabore una tabla indicando el área de cada figura y las coordenadas de cada centroide.
 - Consigne las fórmulas finales de cálculos de las coordenadas en cada eje.



5. Localice el centroide del alambre que se dobla en la forma que se muestra.

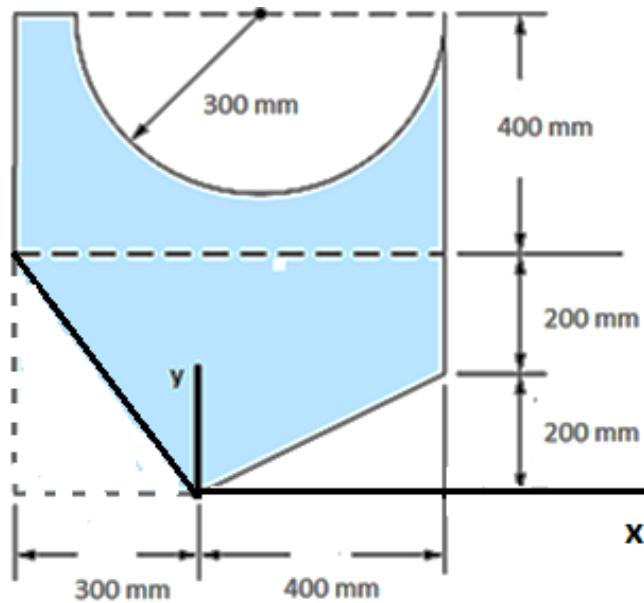


6. Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice las coordenadas del centro de gravedad.



7. Determine, para el sistema cartesiano indicado:

- El centroide del cuerpo compuesto.
- El centroide del cuerpo si la circunferencia aumenta su radio a 400 mm sin variar la ubicación de su centro, tampoco varían las demás dimensiones ni la ubicación del sistema de coordenadas x-y.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica - Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

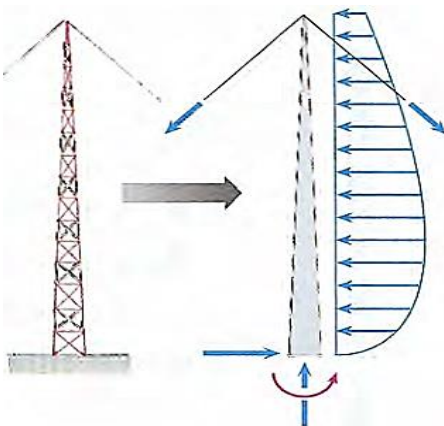
TERCERA UNIDAD

"FUERZAS DISTRIBUIDAS, ANÁLISIS ESTRUCTURAL, Y FRICCIÓN"

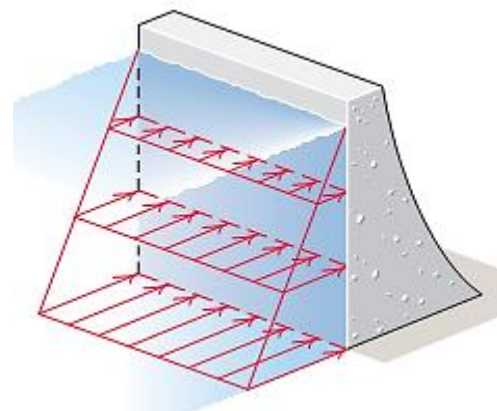
TEMA N° 9: FUERZAS DISTRIBUIDAS



Existen situaciones en las que un cuerpo puede estar sometido a una carga que se encuentra distribuida por toda su superficie. Por ejemplo, la presión del viento sobre la superficie de un señalamiento, la presión del agua dentro de un tanque o en una presa como en la fotografía previa, o el peso de la arena sobre el piso de un contenedor de almacenaje, son todas *cargas distribuidas*. La presión ejercida sobre cada punto de la superficie indica la intensidad de la carga. Ésta se mide por pascales Pa (o N/m^2) en unidades SI o lb/ft^2 en el sistema de uso común en Estados Unidos.



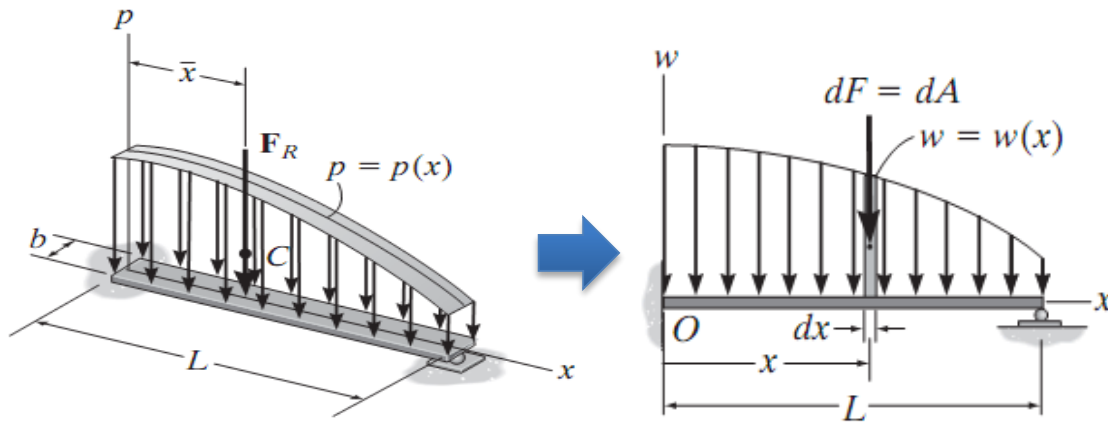
Carga distribuida de viento sobre la torre



Carga distribuida del agua sobre la pared de la presa

9.1 CARGA UNIFORME A LO LARGO DE UN SOLO EJE

Si la viga de la figura es de ancho constante y está sometida a una carga de presión que actúa sólo a lo largo del eje x , esta carga se puede describir como una función $p = p(x)$ en N/m^2 y se puede representar como una **carga distribuida coplanar** y se cumple que: $w(x) = p(x) b$. Este sistema de fuerzas paralelas se puede representar por una fuerza equivalente F_R que actúa en una ubicación específica sobre la viga.



Magnitud de la carga distribuida

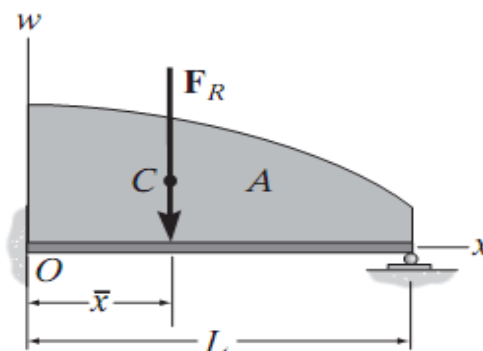
La fuerza resultante que representa la carga distribuida es equivalente al área bajo el diagrama de carga.

$$F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A$$

Ubicación de la carga distribuida

Esta coordenada en el eje x ubica el centroide C del área bajo la curva:

$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

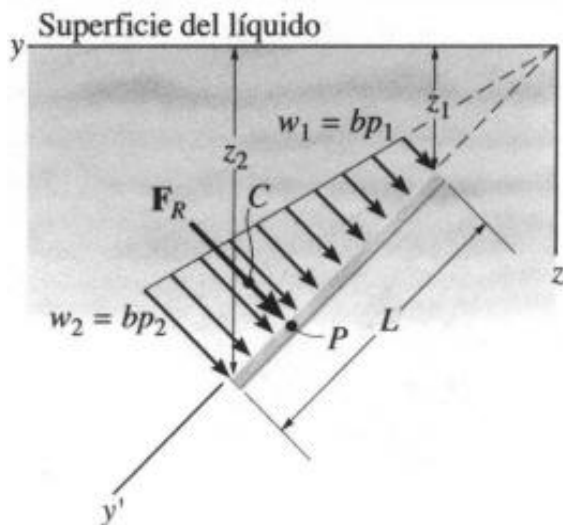
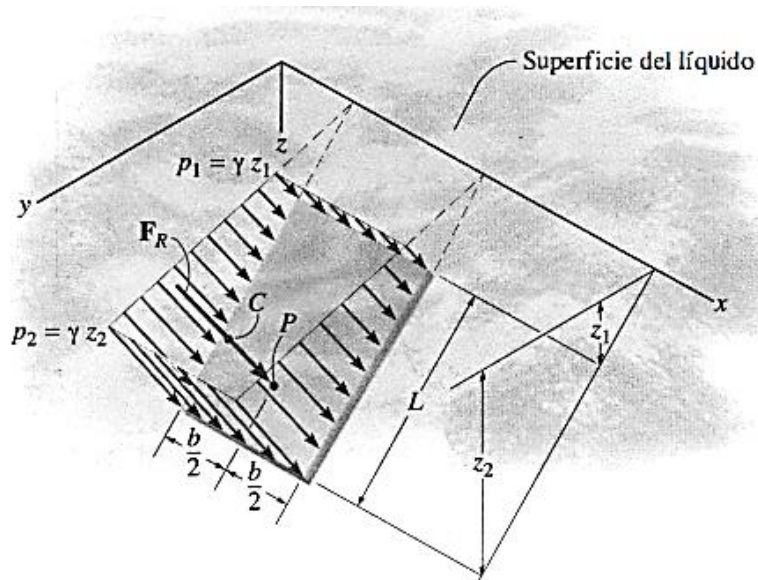


9.2 Fuerzas Sobre Superficies Sumergidas

La presión medida como fuerza por unidad de área depende del peso específico y la profundidad desde la superficie del líquido. La presión actúa en forma perpendicular al área superficial que se localiza en un punto especificado. La fuerza resultante ejercida por efectos de la presión sobre cuerpos sumergidos se puede determinar con un procedimiento similar al de la sección anterior.

Fuerza sobre una placa plana de ancho constante

- ✓ *Magnitud de la fuerza resultante:*
Vista en dos dimensiones es igual al área trapezoidal.
- ✓ *Ubicación de la fuerza resultante*
En la línea de acción que pasa por el centroide C del área, y actúa en un punto P llamado centro de presión.



$$F_R = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)L$$

Donde la carga de presión es:

$$w = b p$$

w = Carga de presión (N/m)
b = Ancho de la placa (m)
P = Presión hidrostática (Pa)



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 9

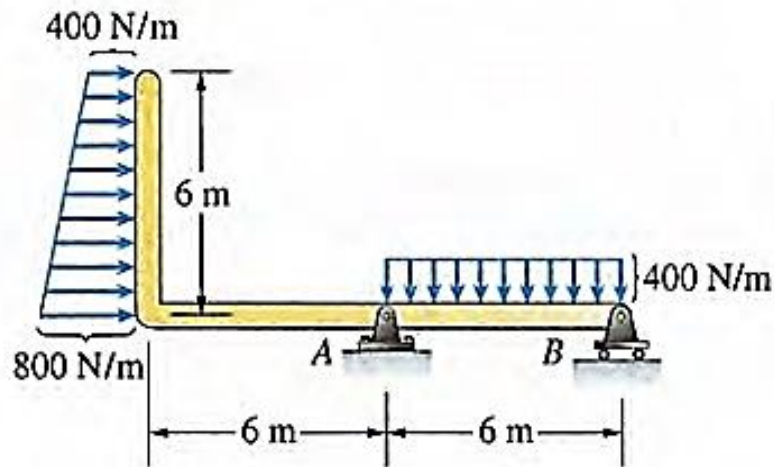
Tema: Fuerzas Distribuidas

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

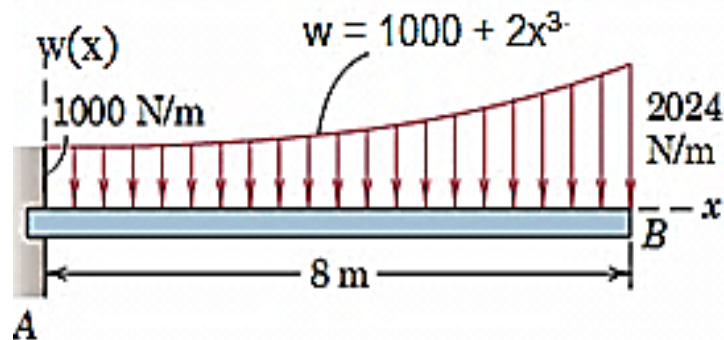
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

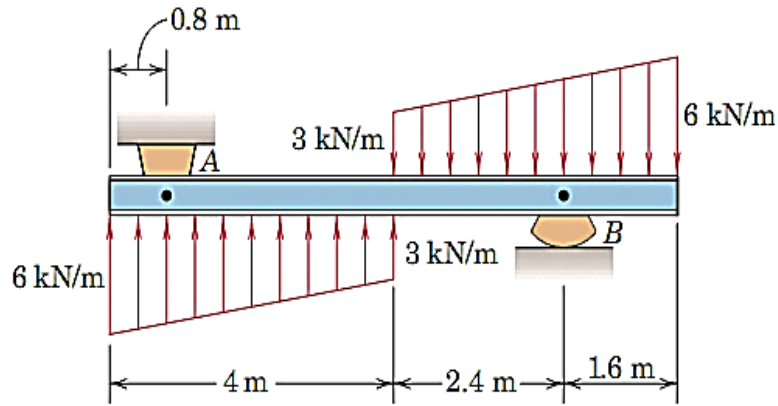
1. La viga mostrada está sometida a dos cargas distribuidas, determine las magnitudes de las reacciones en A y en B.



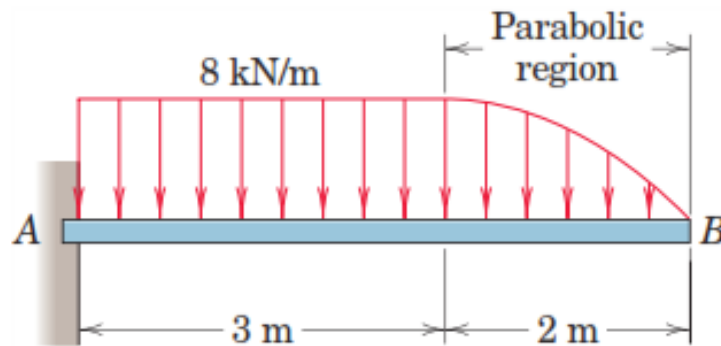
2. La viga está sometida a la carga parabólica mostrada. Determine las reacciones en el empotramiento.



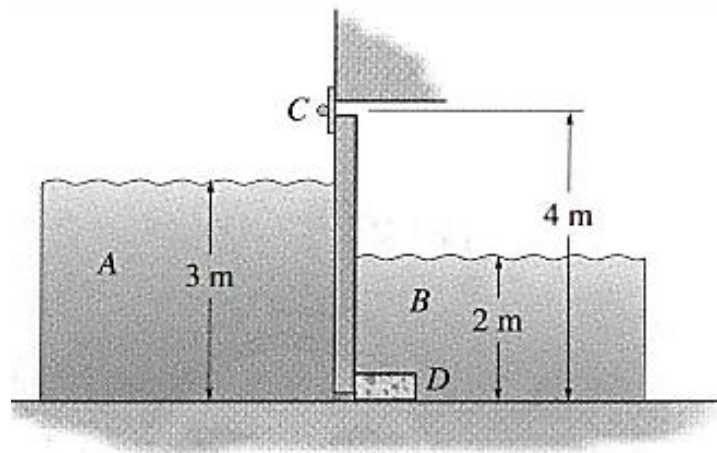
3. Calcular las reacciones de apoyo en A y B para la viga sometida a las dos cargas distribuidas linealmente.



4. Reemplace la carga distribuida mostrada por una sola fuerza resultante y especifique su ubicación medida desde el punto A.

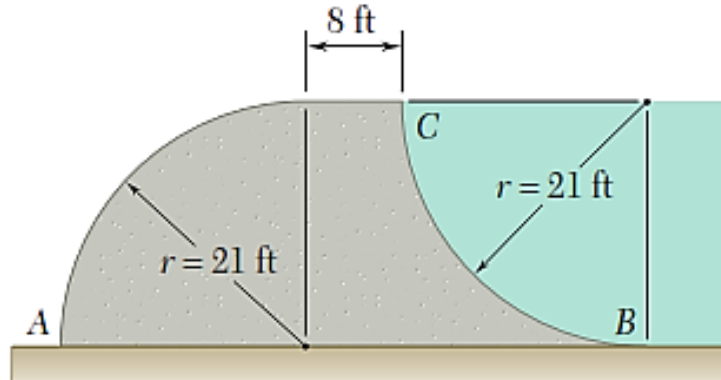


5. Cuando el agua de la marea A desciende, la compuerta de marea gira automáticamente abriéndose para drenar el agua de la ciénaga B. Para la condición de marea alta mostrada, determine las reacciones horizontales desarrolladas en la articulación e y en el tope D. La longitud de la compuerta es de 6 m y su altura de 4 m. $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



6. La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Para una sección del dique de 1 ft de ancho, determine:
a) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base AB del dique.
b) el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de reacción encontradas en el inciso a) y

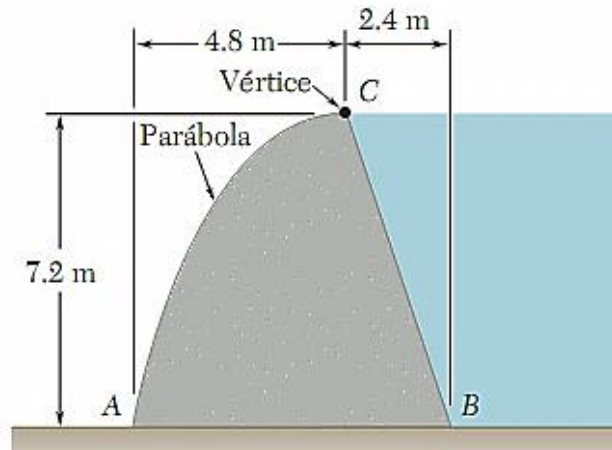
c) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara BC del dique.



7. En la figura mostrada que indica la sección de un dique de concreto de 1m de ancho, determine:

- La magnitud de la reacción del suelo sobre la base AB del dique.
- El punto de aplicación de la reacción del suelo sobre la base AB del dique.
- La magnitud de la fuerza de presión sobre la cara BC del dique.

Las densidades del agua y del concreto son 1000 kg/m^3 y 2500 kg/m^3 , respectivamente.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

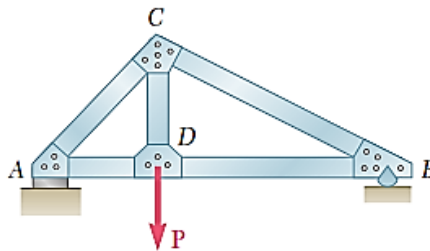
Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 10: ARMADURAS

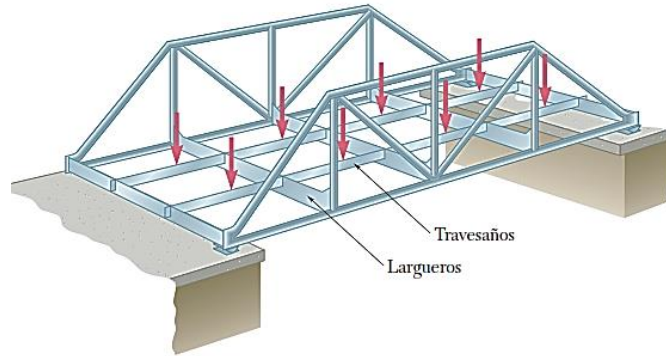


DEFINICIÓN DE ARMADURA

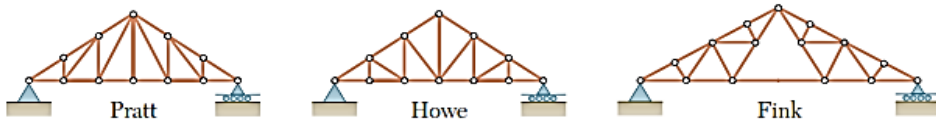
Uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería es la armadura. Ésta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios. Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos. Los elementos de la armadura sólo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura no existe un elemento AB , en su lugar existen dos elementos distintos AD y DB . La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.



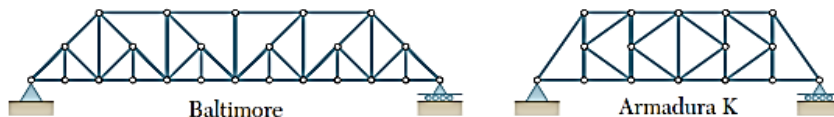
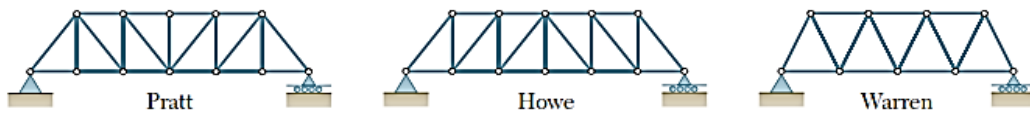
Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y sólo pueden soportar cargas laterales pequeñas; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de piso, el cual, mediante el uso de travesaños y largueros, transmite la carga a los nodos. Los pesos de los elementos de la armadura los cargan los nodos. Cada elemento de una armadura puede considerarse como un elemento a dos fuerzas.



Armaduras típicas



Armaduras típicas para techo



Armaduras típicas para puentes

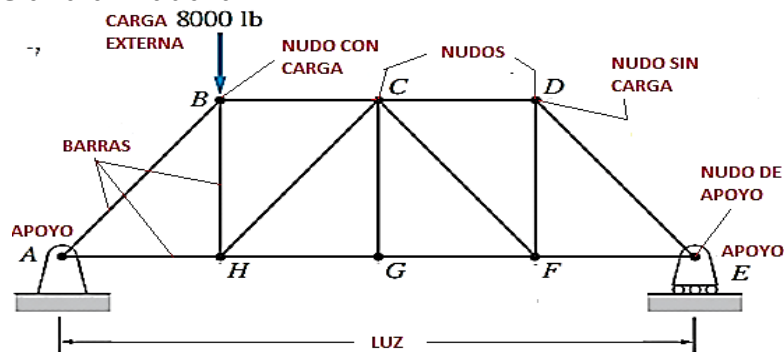
Armaduras simples

Estas armaduras consisten de sistemas formados básicamente de tres barras unidas por pasadores en sus extremos, formando un triángulo, y luego agregando dos nuevas barras por cada nuevo nudo formamos armaduras cada vez más grandes. La experiencia verifica que una configuración triangular es la mejor forma de disponer las barras para soportar cargas sin desplomarse, es decir, se obtiene un sólido rígido estable.

Armadura plana:

Es aquella en la cual las barras y demás elementos de la armadura están contenidos en un mismo plano.

Elementos de una armadura

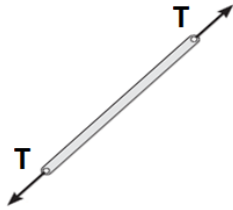


- ✓ Barras o elementos: AB, BC, AH, BH,
- ✓ Nudos o nodos: A, B, C, H,

Fuerzas en una armadura

Los elementos de estas estructuras están sometidos a dos fuerzas iguales y opuestas dirigidas a lo largo del elemento, **fuerzas axiales**: Estas pueden ser tracción o compresión.

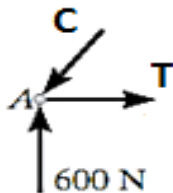
ELEMENTO A TENSIÓN O TRACCIÓN



ELEMENTO A COMPRESIÓN



Si graficamos las fuerzas en un nudo:

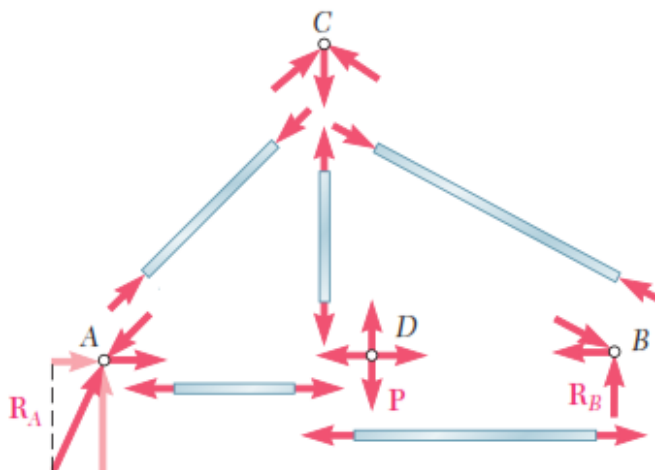


C = Compresión (Entrante)

T = Tensión (Saliente)

ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL METODO DE NUDOS:

- Si es necesario se determinan las reacciones en los apoyos considerando como sólido rígido a la armadura completa,
- Se escoge un nudo donde no existan más de dos fuerzas desconocidas, se grafica el DCL y se aplican las condiciones de equilibrio de fuerzas: $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$.
- Se escoge otro nudo verificando las condiciones del paso anterior y aplicando las condiciones de equilibrio; así se continúa sucesivamente hasta determinar las fuerzas en todas las barras.

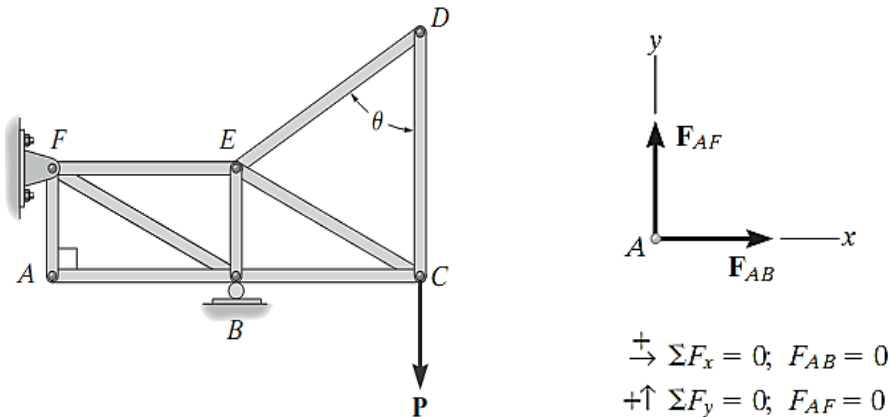


Miembros de fuerza cero

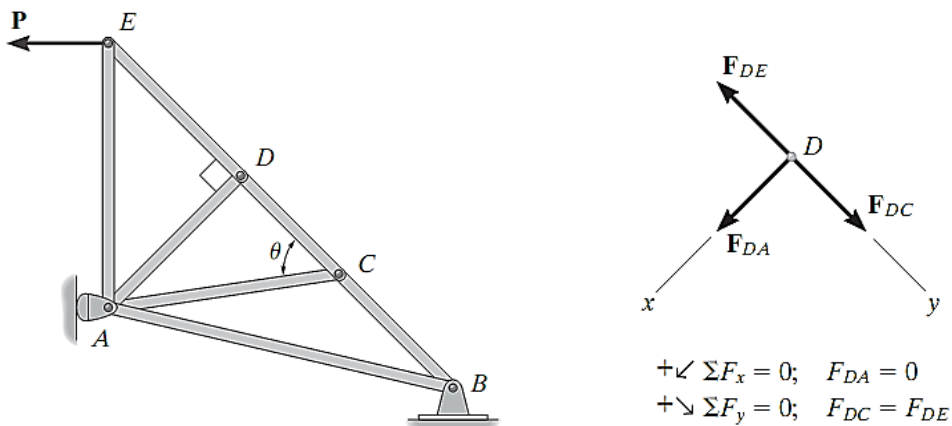
El análisis de armaduras podría simplificarse en algunos casos si se identifica qué miembros no soportan carga. Esos miembros de fuerza cero se usan para incrementar la estabilidad de la armadura durante la construcción y para proporcionar soporte si la carga aplicada se modifica.

Normalmente se pueden identificar estos elementos por simple inspección.

1. Nudo sin carga formado por dos elementos no colineales.



2. Nudo sin carga formado por tres elementos, dos de ellos colineales.



ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SECCIONES:

Cuando se quiere determinar las fuerzas en sólo algunos elementos de la armadura se procede más rápido con el método de las secciones.

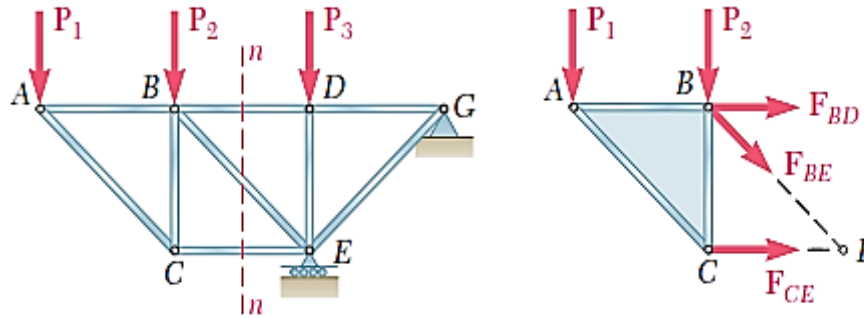
- a) Si es necesario se determinan las reacciones en los apoyos considerando como sólido rígido a la armadura completa.
- b) Se dibuja una línea que divida a la armadura en dos partes completamente separadas pero que no interseque a más de tres elementos. Cualquiera de las



dos secciones de la armadura que obtenga después de que los elementos intersecados han sido "removidos" puede usarse como cuerpo libre.

- c) En la sección elegida se deben graficar las fuerzas externas, reacciones en apoyos si los hubiera y las fuerzas internas en las barras cortadas.
- d) Se aplican las condiciones del equilibrio a la sección elegida: ($\Sigma F=0$, $\Sigma M=0$) determinando así las fuerzas en las barras que se desean analizar.

En ocasiones se requieren hacer varios cortes para obtener resultados esperados.





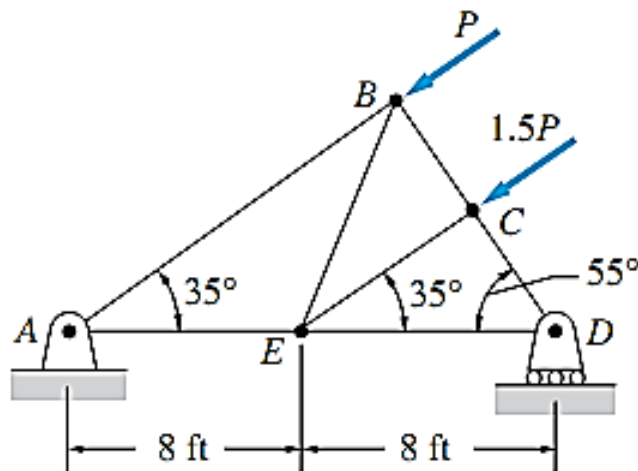
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 10
Tema: Análisis Estructural - Armaduras

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

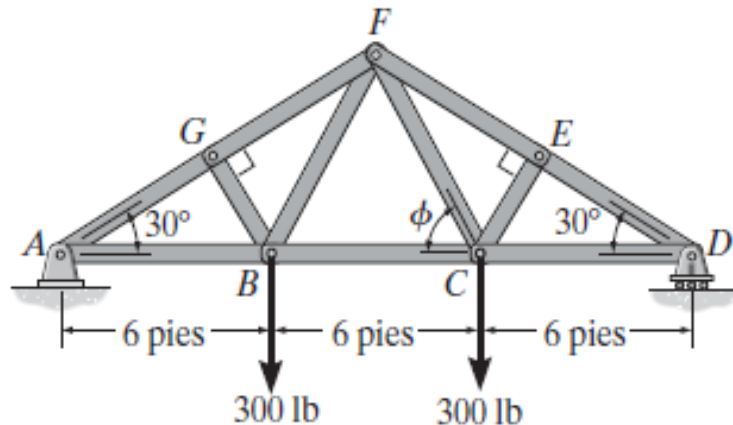
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic.
Tiempo

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

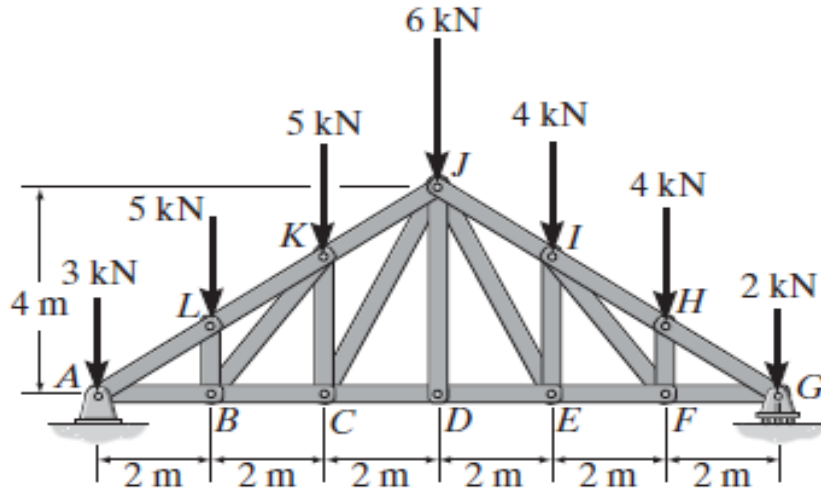
1. Determine en cada caso las fuerzas en cada elemento de las armaduras mostradas: (Considere recto el ángulo ABD en la primera armadura)



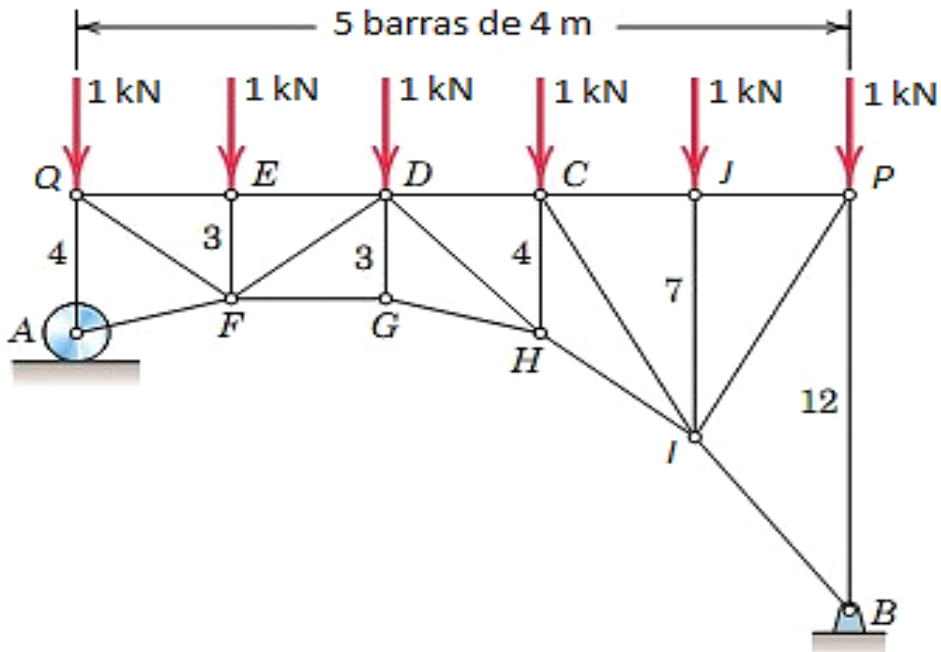
2. Determine la fuerza en los elementos EF, CF y BC de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



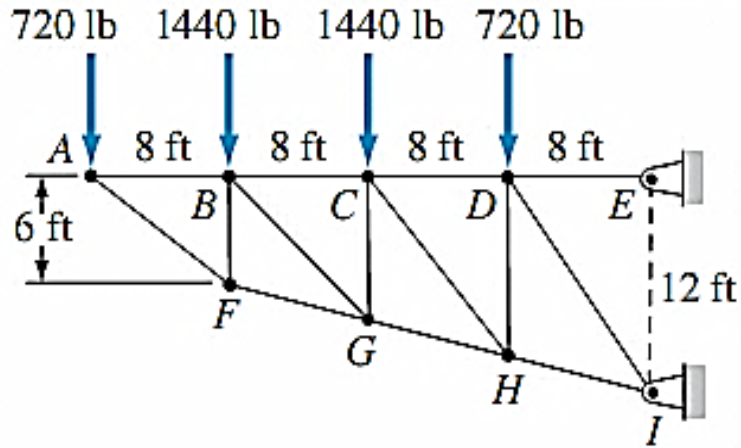
3. Determine la fuerza en los elementos KJ, KC y BC de la armadura Howe, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



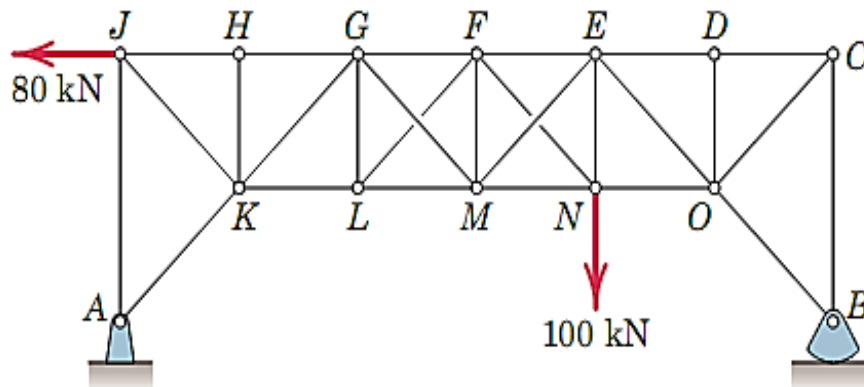
4. Despreciando los pesos de los elementos de la armadura, cuyas dimensiones están en metros, apoyada en un pasador en A y en un rodillo en G. Determine la magnitud de la fuerza en el elemento DH y PI.



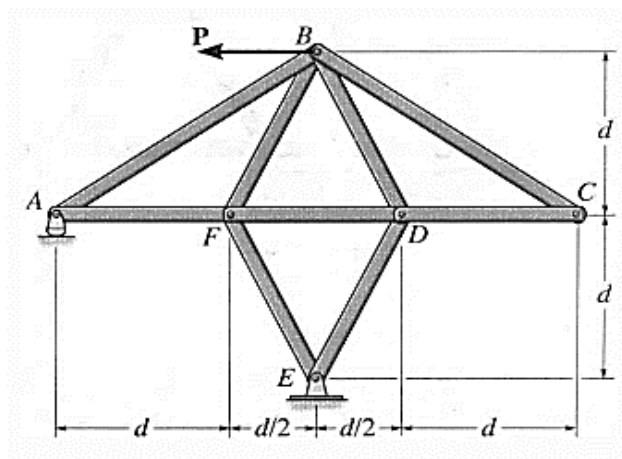
5. Despreciando los pesos de los elementos, determine, indicando si existe tensión o compresión las fuerzas axiales en los elementos GH, y CD.



6. La armadura representada por triángulos rectángulos isósceles. Los miembros que se cruzan en los dos tramos del centro son varillas delgadas que no pueden trabajar a compresión. Conservar las dos varillas que trabajan a tensión y calcular sus valores. Determine además la fuerza en el miembro MN.

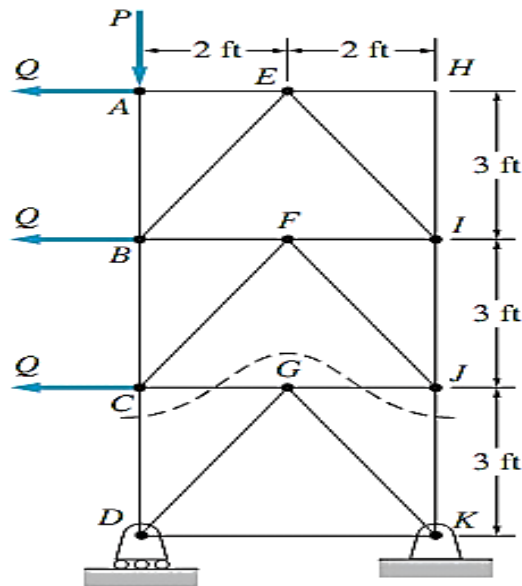


7. Si la fuerza máxima que cualquier miembro puede soportar es de 4kN en tensión y 3 kN en compresión, determine la fuerza máxima P que puede ser soportada en el punto B. Considere $d = 1\text{m}$.

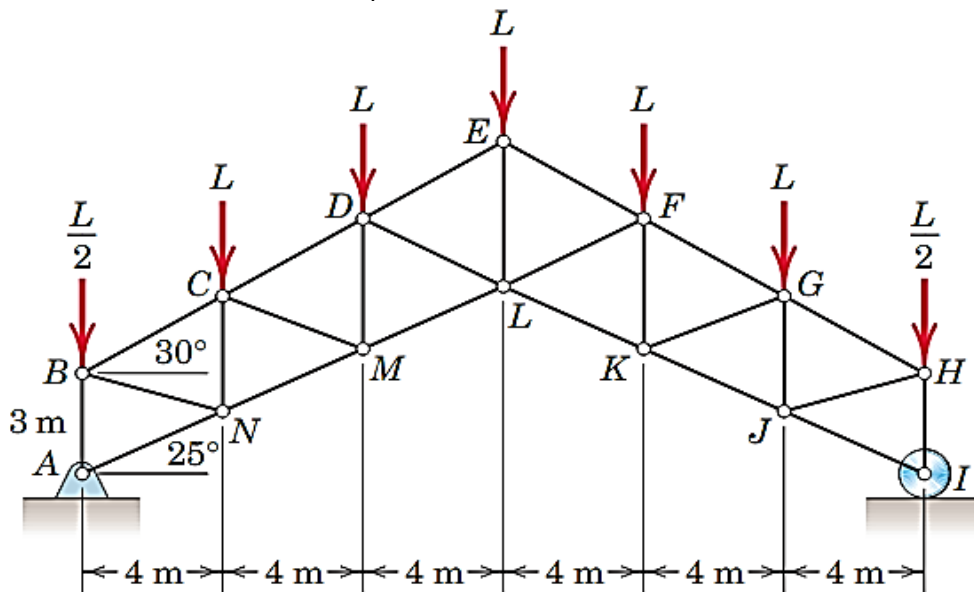




8. Determinar las fuerzas en los elementos CD y JK siendo $P = 3000 \text{ lb}$ y $Q = 1000 \text{ lb}$. Use la sección indicada por la línea discontinua). Determine además las magnitudes de P y Q si $P_{CD} = 6000 \text{ lb}$ y $P_{GD} = 1000 \text{ lb}$, ambas fuerzas a compresión.



9. Para la armadura mostrada, determine en función de L, dimensiones en m:
a) Las fuerzas en los elementos DL y DE.
b) Las fuerzas en los elementos LM y EL.



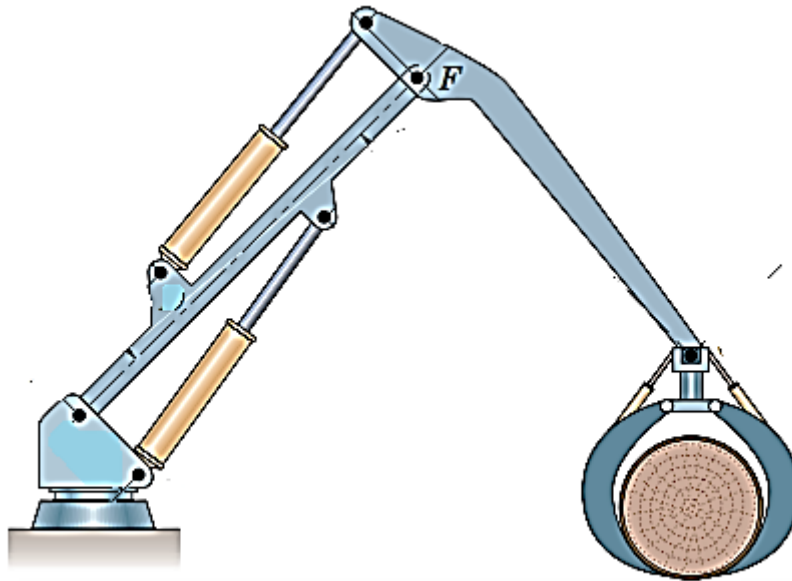
Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 11: ARMAZONES



Muchas estructuras, como el bastidor de un automóvil y la estructura humana de huesos, tendones y músculos, no están compuestas enteramente de miembros de dos fuerzas y no se pueden representar como armaduras. En esta sección consideraremos estructuras de miembros interconectados que no satisfacen la definición de una armadura. Estas estructuras se denominan *armazones* si están diseñadas para permanecer en reposo al soportar cargas, es decir son totalmente restringidas, y *máquinas* si están diseñadas para moverse y aplicar cargas, las máquinas pueden ser estacionarias o no.

Los elementos que conforman un armazón o una máquina están unidos generalmente por pasadores, estas conexiones generan una reacción cuya dirección es desconocida y por ello se descompone en una fuerza horizontal y una fuerza vertical en cada conexión. A diferencia de las armaduras las fuerzas se presentan no sólo en sus pasadores sino también en cualquier punto de los elementos.

Siempre que un bastidor o una máquina no contengan más soportes o elementos que los necesarios para evitar el colapso, las fuerzas que actúan en las uniones y soportes pueden determinarse si se aplican las ecuaciones de equilibrio a cada uno de sus elementos. Una vez obtenidas las fuerzas en las uniones, es posible *diseñar* el tamaño de los elementos, conexiones y soportes al aplicar la teoría de la mecánica de materiales y un código de diseño de ingeniería adecuado.

Procedimiento para determinar las fuerzas en los elementos de un bastidor.

1º ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA COMPLETA: Para determinar las reacciones en los soportes.

- Dibujamos el DCL de la estructura completa.
- Aplicamos las condiciones de equilibrio: $\Sigma F=0$, $\Sigma M=0$

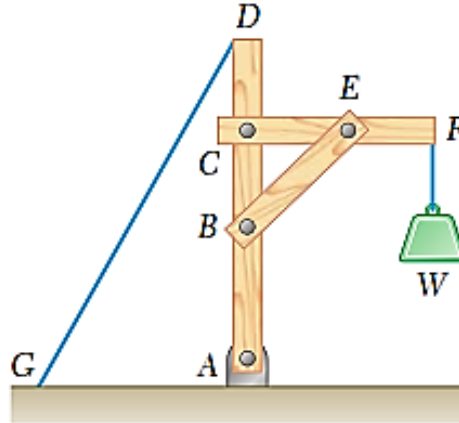
2º ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS POR SEPARADO: Para determinar las fuerzas que actúan sobre ellos.

- Identificar los elementos a dos fuerzas.

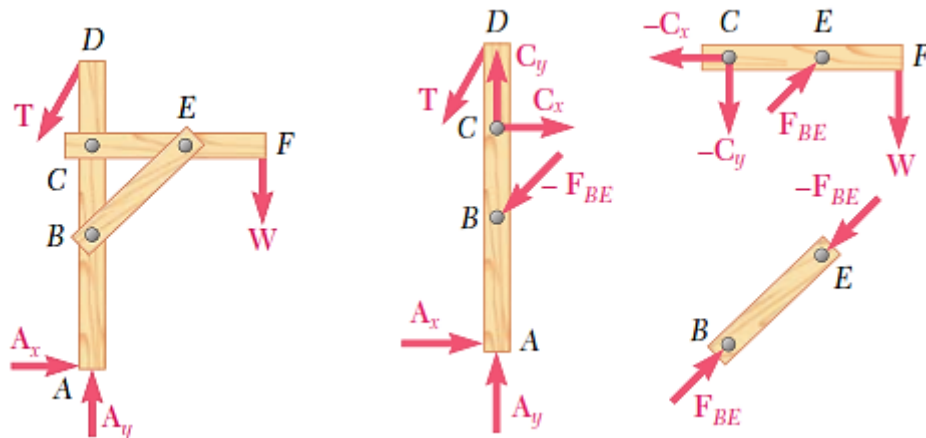


- Dibujamos el DCL de cada parte.
- Aplicamos las condiciones de equilibrio: $\Sigma F=0$, $\Sigma M=0$ a los elementos que sean necesarios para el análisis.

Ejemplo de análisis del equilibrio mediante fuerzas en un bastidor.



En primer lugar, se tiene el DCL del bastidor completo y a continuación el DCL de cada elemento por separado. Note el caso particular de elemento a dos fuerzas (miembro BE).





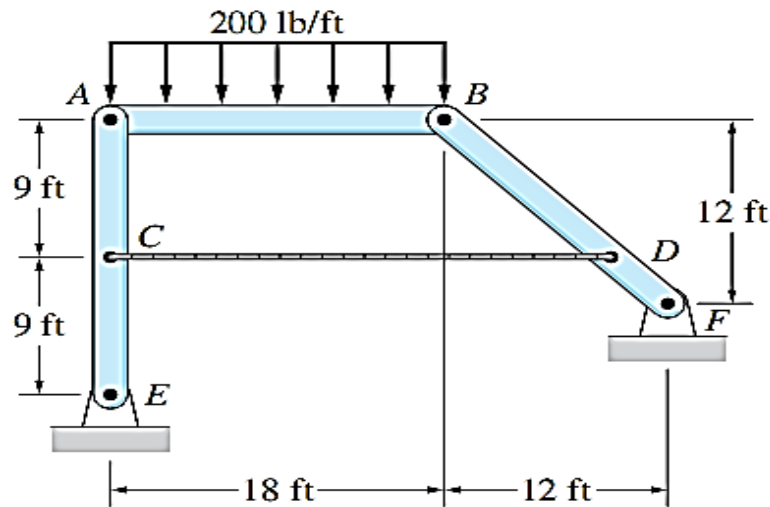
PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 11
Tema: Análisis Estructural – Armazones y Máquinas

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

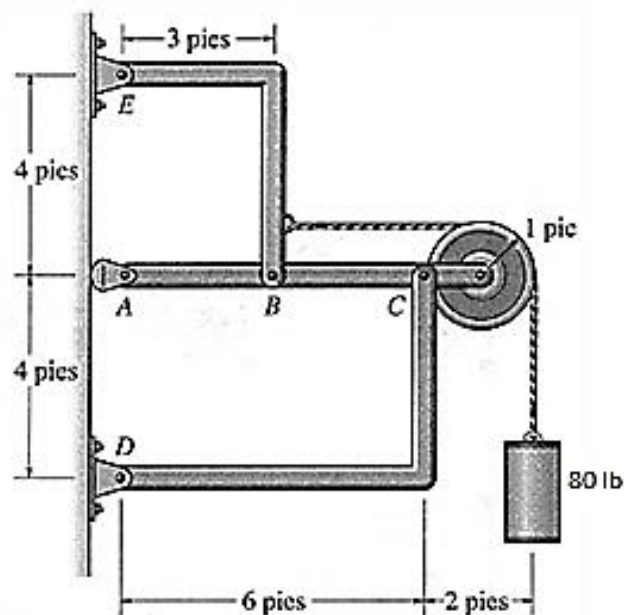
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

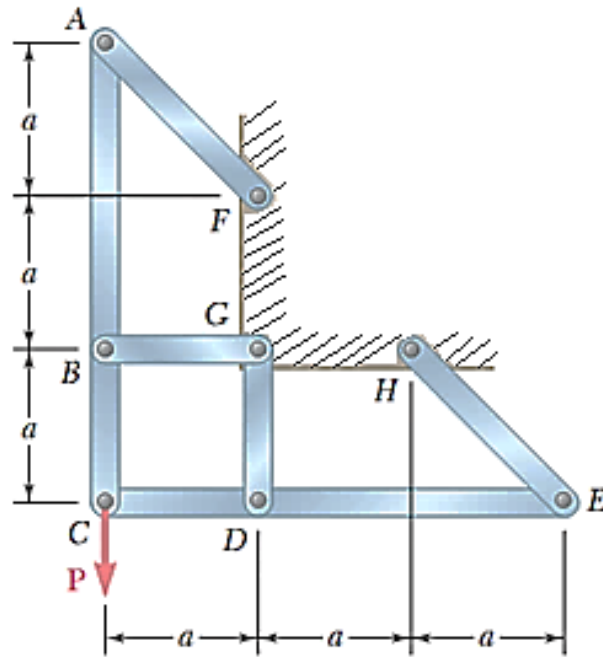
Para 1. Determine la magnitud de la tensión en el cable CD. Desprecie el peso de las barras.



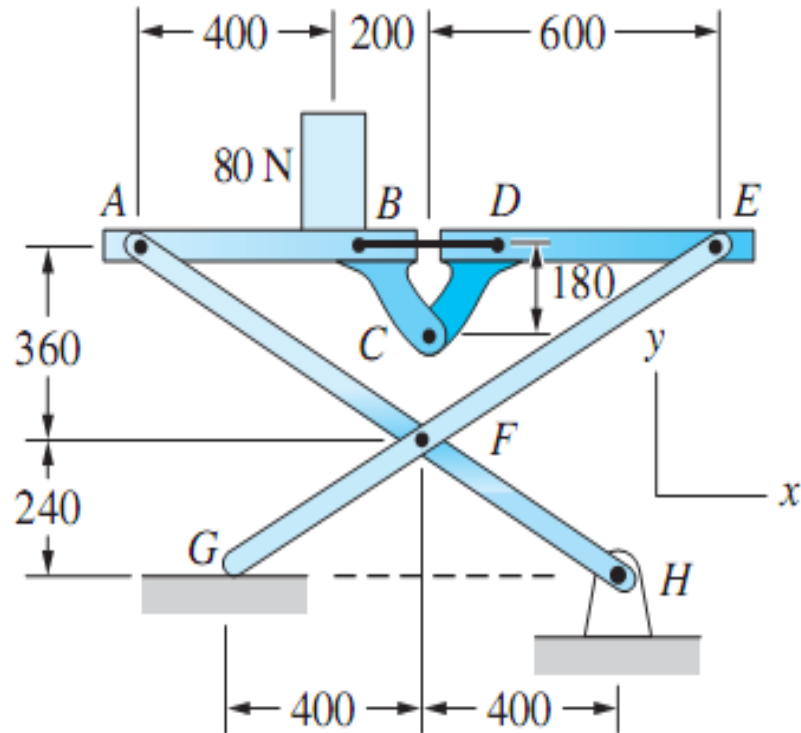
- 1.
2. Despreciando el peso del bastidor determine las magnitudes de las fuerzas en los apoyos de pasador E y D, así como en el balancín A y en el pasador B.



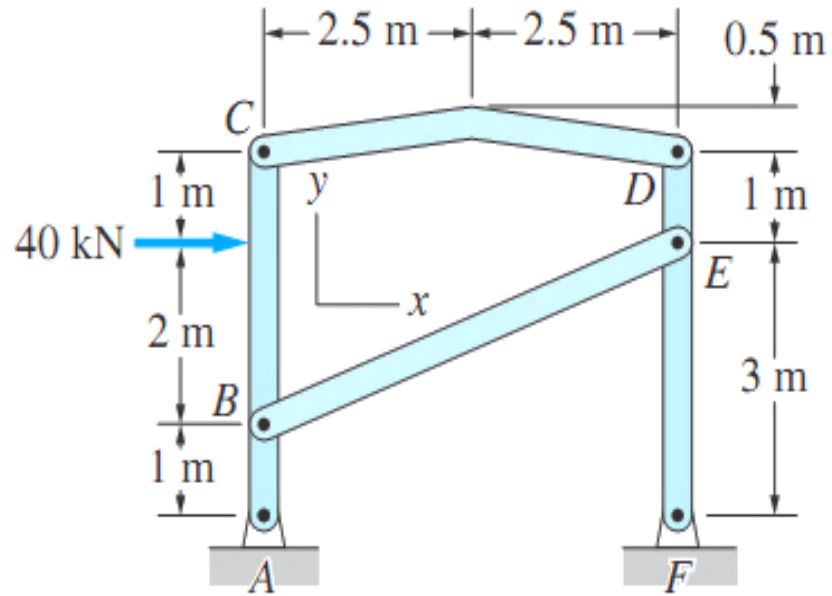
3. Para el bastidor mostrado se tiene $a = 3 \text{ m}$ y $P = 300 \text{ N}$, si esta estructura está unida a la superficie por pasadores en G, F y H, determine las fuerzas en los pasadores F, G, D y C.



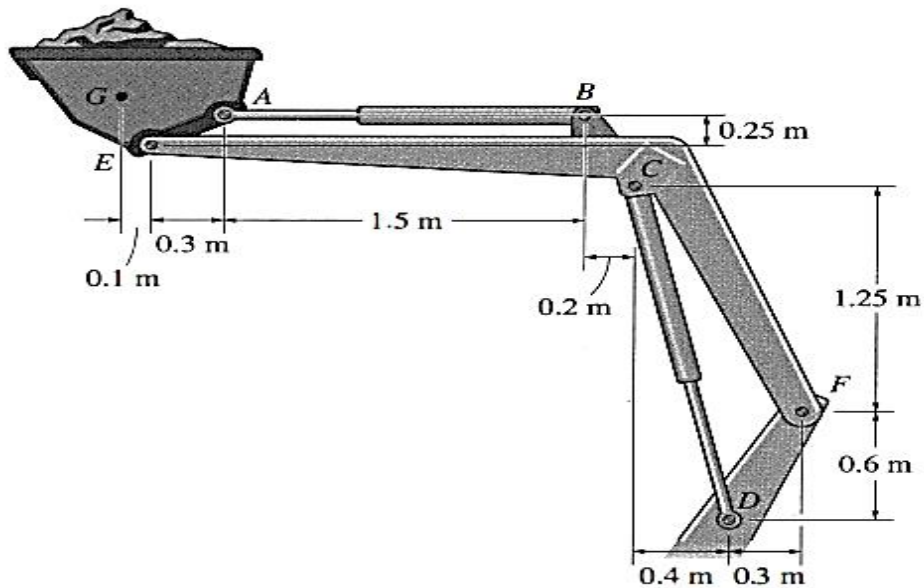
4. Una caja de 80 N es colocada sobre el elemento AB como se muestra en la figura. Despreciando los pesos de los elementos determine las fuerzas que actúan sobre el elemento EFG y la tensión en el cable BD. Las dimensiones están en mm.



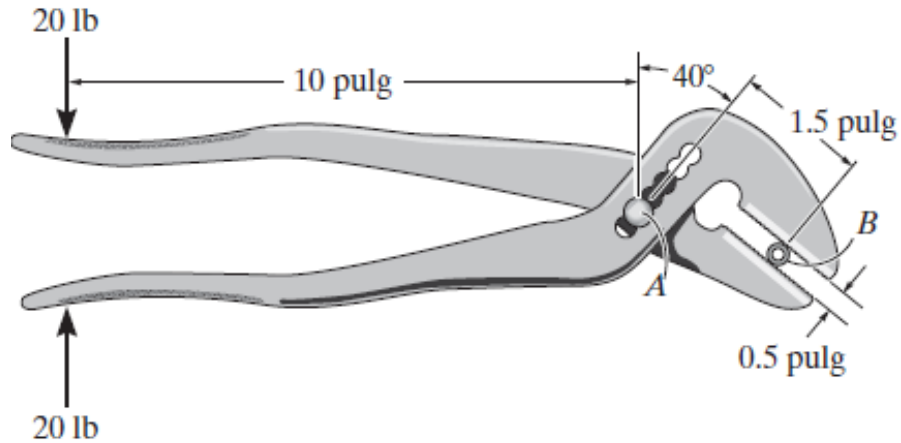
5. Determine las reacciones en A y las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre el miembro DEF del bastidor mostrado, Desprecie los pesos de los miembros.



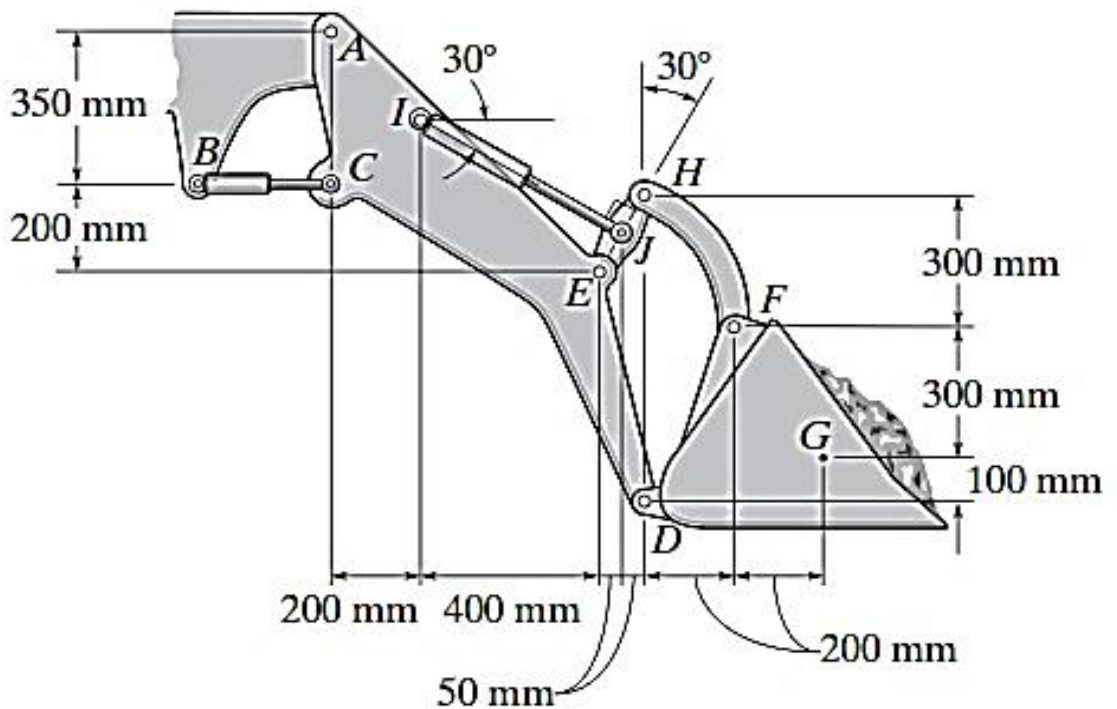
6. En la figura se observa un aguilón de tractor de masa uniforme de 500 kg en el cucharón, el cual tiene centro de gravedad en G. Despreciando los pesos de los elementos, determine la fuerza en cada cilindro hidráulico AB y CD así como la fuerza resultante en los pasadores E y F. La carga está soportada equitativamente a cada lado del tractor mediante un mecanismo semejante.



6. Determine la fuerza de apriete ejercida sobre el tubo liso en B si se aplica una fuerza de 20 lb a los mangos de las pinzas. Las pinzas están articuladas en A.



7. El cucharón de la excavadora contiene una carga de masa 500 kg con centro de gravedad en G. Despreciando el peso de los elementos determine las fuerzas desarrollada por los cilindros hidráulicos BC e IJ.



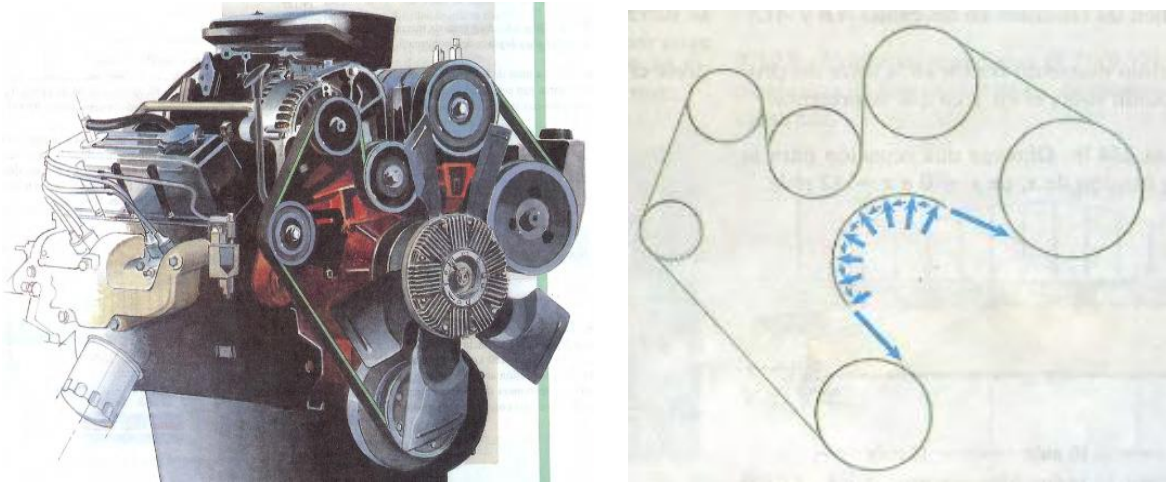
Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 12: FRICCIÓN



(Bedford, 2000, p 503).

En este tema estudiaremos la fricción, previamente veamos un caso especial; se sabe que parte de la potencia producida por el motor de un automóvil es transformada por bandas y poleas que impulsan el alternador y la bomba de refrigeración. Para diseñar una banda y determinar el par de torsión máximo que puede ejercer es necesario analizar las fuerzas de fricción que tienen lugar en las superficies de contacto entre ella y la polea.

Además, en el presente tema aprenderemos que las fuerzas de fricción tienen muchos efectos importantes, tanto deseables como indeseables, en las aplicaciones del campo de la ingeniería. Por ejemplo, el funcionamiento adecuado de un automóvil depende de las fuerzas de fricción entre sus neumáticos y el suelo, y entre las bandas y las poleas de su motor, pero la fricción entre sus pistones y cilindros ocasiona un desgaste que se debe minimizar por medio de algún lubricante. En algunos casos hemos visto que las fuerzas de fricción se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. (Bedford, 2000, p 503).

1. ANÁLISIS DE LA FRICCIÓN SECA

Iniciamos analizando la teoría de la fricción de Coulomb, que nos permite calcular la fuerza de fricción máxima que se puede ejercer entre superficies en contacto y la fuerza de fricción ejercida por superficies deslizantes. Esto nos permite el análisis de nuevos e importantes tipos de soportes y máquinas, incluidas cuñas, conexiones roscadas, chumaceras y bandas. (Bedford, 2000, p 504).

Se observa que una persona al subir por una escalera, ésta permanece en reposo por la fuerza de fricción ejercida por el piso (Fig. a). Si se permanece quieto sobre la escalera, las ecuaciones de equilibrio determinan la fuerza de fricción. Pero, hay una cuestión importante que no puede aclararse sólo con las ecuaciones de equilibrio: ¿permanecerá la escalera en reposo o resbalará sobre el piso? Si un camión se estaciona sobre un terreno inclinado, la fuerza de fricción ejercida sobre él por el terreno impide que se deslice cuesta abajo (Fig. b). Surge otra pregunta: ¿qué pendiente *máxima* puede tener el terreno sin que el camión estacionado se deslice?

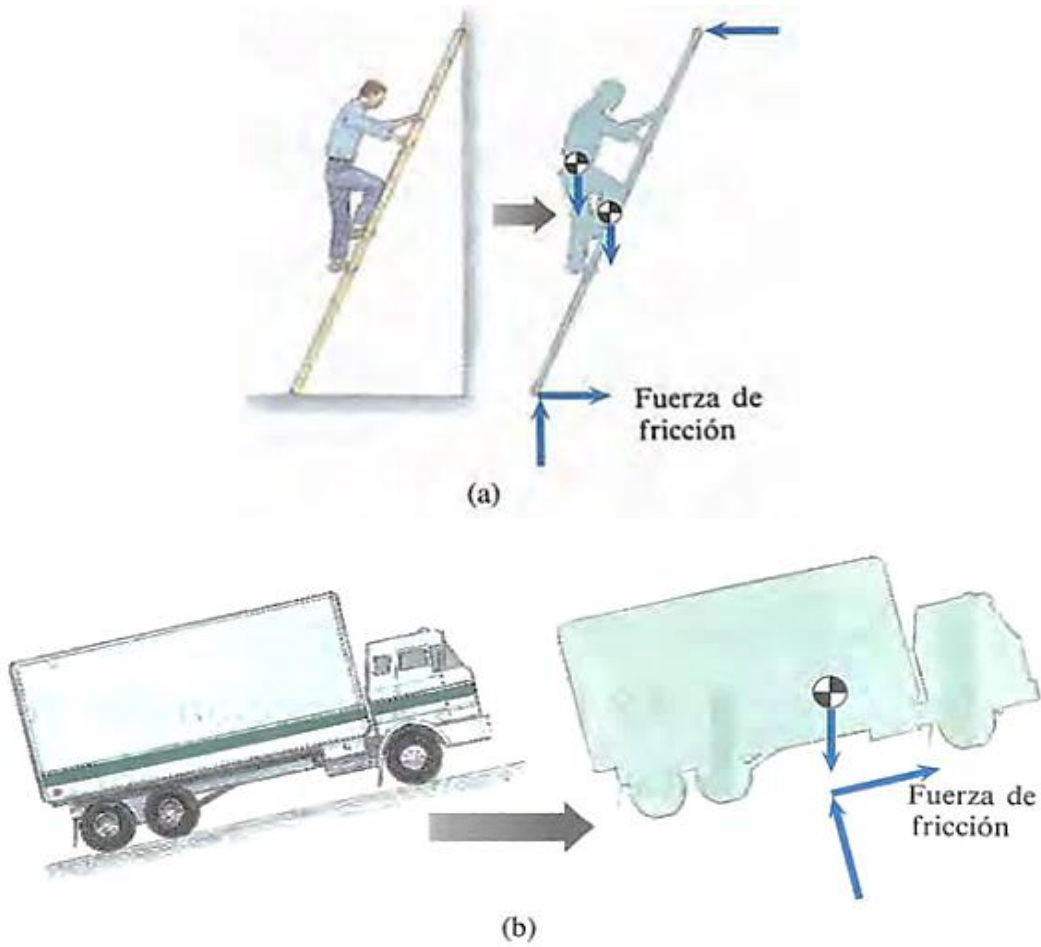


Fig 1. Ejemplos de fricción
(Bedford, 2010)

Para responder estas preguntas, debemos examinar con mayor detalle la naturaleza de las fuerzas de fricción. Coloque un libro sobre una mesa y empújelo con una pequeña fuerza horizontal (Fig. 2a). Si la fuerza que usted ejerce es suficientemente pequeña, el libro no se moverá. En la figura 2b se muestra el diagrama de cuerpo libre. La fuerza W es el peso del libro, y N es la fuerza normal ejercida por la mesa. La fuerza F es la fuerza horizontal que se aplica, y f es la fuerza de fricción ejercida por la mesa. Como el libro está en equilibrio, $f = F$. (Bedford, 2000, p 506).



Fig 2. Análisis de fricción
(Bedford, 2010)

Ahora incremente con lentitud la fuerza sobre el libro. Mientras éste permanezca en equilibrio, la fuerza de fricción debe aumentar en forma correspondiente, ya que es igual

a la fuerza que se aplica. Cuando ésta llega a ser muy grande, el libro se deslizará sobre la mesa. Después de alcanzar cierto valor máximo, la fuerza de fricción ya no es capaz de mantener el libro en equilibrio. Observe también que la fuerza necesaria para mantener al libro en movimiento es menor que la requerida para que empiece a deslizarse (usted estará familiarizado con este fenómeno si alguna vez trató de empujar un mueble sobre el piso). ¿Cómo ejerce la mesa una fuerza de fricción sobre el libro? ¿Por qué éste se desliza? ¿Por qué para mantenerlo en movimiento se requiere una fuerza menor que para empezar a deslizarlo? Si las superficies de la mesa del libro se amplifican suficientemente, adquieren un aspecto rugoso (Fig.3). Las fuerzas de fricción surgen en parte debido a las rugosidades o asperezas de las superficies en contacto. A escala aún menor, las superficies tienden a formar enlaces atómicos que las adhieren entre sí (Fig. 4). La última pregunta planteada arriba la explica, en parte, la necesidad de romper esos enlaces antes de que pueda comenzar el deslizamiento. (Bedford, 2000, p 503).

También existe una teoría que predice los fenómenos básicos que hemos descrito que ha resultado útil para representar, en aplicaciones de ingeniería, las fuerzas de fricción entre superficies secas (la fricción entre superficies lubricadas es un fenómeno hidrodinámico que debe analizarse en el contexto de la mecánica de fluidos).

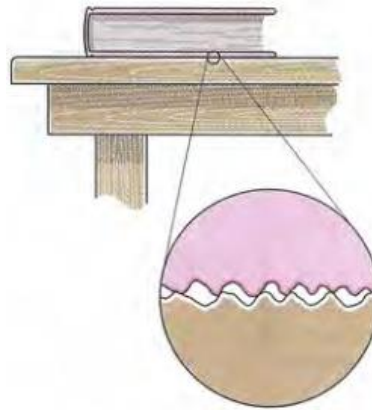


Fig 3. Rugosidades de las superficies en forma ampliada
(Bedford, 2010)

2. COEFICIENTES DE FRICCIÓN

La teoría de la fricción seca, o fricción de Coulomb, predice las fuerzas de fricción máximas que pueden ser ejercidas por superficies secas en contacto, y que se hallan en reposo entre sí. También predice las fuerzas de fricción ejercidas por las superficies cuando éstas se hallan en movimiento relativo, es decir, deslizándose unas con respecto a otras. (Bedford, 2000, p 509).

El coeficiente estático La magnitud de la fuerza de fricción *máxima* que se puede ejercer entre dos superficies planas secas en contacto es:

$$f = u_s N$$

donde N es la componente normal de la fuerza de contacto entre las superficies y u_s es una constante llamada coeficiente de fricción estática. Se supone que el valor de u_s depende sólo de los materiales de las superficies en contacto de sus condiciones (lisura grado de contaminación por otros materiales). En la tabla siguiente se muestran valores típicos de u_s para varios materiales. El intervalo relativamente grande de valores para cada par de materiales refleja la sensibilidad de u_s respecto a las condiciones de las



superficies. En las aplicaciones de ingeniería suele ser necesario medir el valor de u_s de las superficies consideradas.

Tabla: Valores típicos del coeficiente de fricción estática

Materiales en contacto	Coefficiente de fricción estática μ_s
Metal sobre metal	0.15 - 0.20
Mampostería sobre mampostería	0.60 - 0.70
Madera sobre madera	0.25 - 0.50
Metal sobre mampostería	0.30 - 0.70
Metal sobre madera	0.20 - 0.60
Hule sobre concreto u hormigón	0.50 - 0.90

Fuente: (Bedford, 2000, p 503).

Volvamos al ejemplo de la figura 2. Si la fuerza F sobre el libro es tan pequeña que éste no se mueve, la condición de equilibrio indica que la fuerza de fricción $f = F$. ¿Para qué necesitamos la teoría de la fricción seca? Si se incrementa a la fuerza aumentará hasta que el libro se deslice. La ecuación (1) da la fuerza de fricción *máxima* que las dos superficies pueden ejercer y, por ende, la fuerza máxima F que se puede aplicar sin que el libro se deslice. Si se conoce el coeficiente de fricción estática u_s entre el libro y la mesa y el peso W del libro, como la fuerza normal $N = W$, el valor máximo de F es $F = f = u_s W$. La ecuación (1) determina la magnitud de la fuerza máxima de fricción, pero no su dirección. La fuerza de fricción es un máximo, la ecuación (1) es aplicable, si las dos superficies están a punto de deslizarse una con respecto a la otra. Se dice que el deslizamiento es inminente y que las fuerzas de fricción resisten el movimiento inminente. Si (Fig. 5a) la superficie inferior está fija y el deslizamiento de la superficie superior hacia la derecha es inminente, la fuerza de fricción sobre la superficie superior resistirá este movimiento inminente (Fig. 5b). La fuerza de fricción sobre la superficie inferior tendrá dirección opuesta. (Bedford, 2000, p 509).

El coeficiente cinético Según la teoría de la fricción seca, la magnitud de la fuerza de fricción entre las dos superficies planas y secas en contacto, que están en movimiento (deslizamiento) relativo, es:

$$f = u_K N$$

donde es la fuerza normal entre las superficies u_K es el coeficiente de fricción cinética. Se supone que el valor de u_K depende sólo de las composiciones condiciones de las superficies. Para un par de superficies dado, su valor es generalmente menor que el de u_s . Una vez que el libro de la figura 2 ha comenzado a deslizarse, la fuerza de fricción $f = u_K N = u_K W$. Por tanto, la fuerza que debe ejercerse para mantener el libro en movimiento uniforme es $F = u_K W$. Cuando dos superficies están deslizándose entre sí, las fuerzas de fricción resisten el movimiento relativo. Suponga que en la figura 6(a) la superficie inferior se encuentra fija y que la superficie superior está moviéndose hacia la derecha. La fuerza de fricción sobre la superficie superior actúa en dirección opuesta a la de su movimiento (Fig. 6b). La fuerza de fricción sobre la superficie inferior actúa en dirección opuesta.

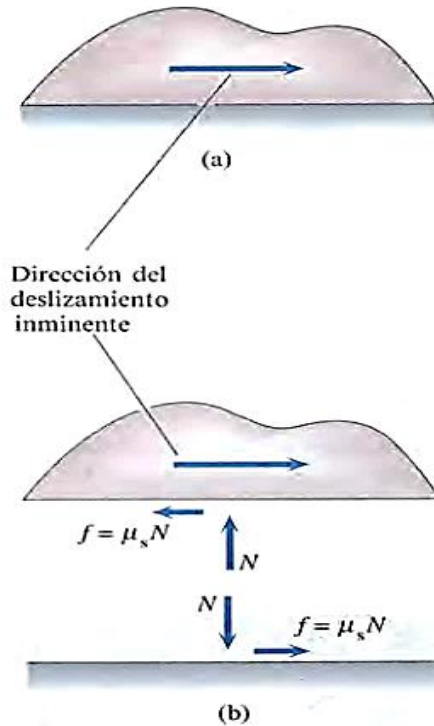


Fig 5. a) La superficie superior está a punto de deslizarse a la derecha.
b) Direcciones de la fuerza de fricción
(Bedford, 2010)

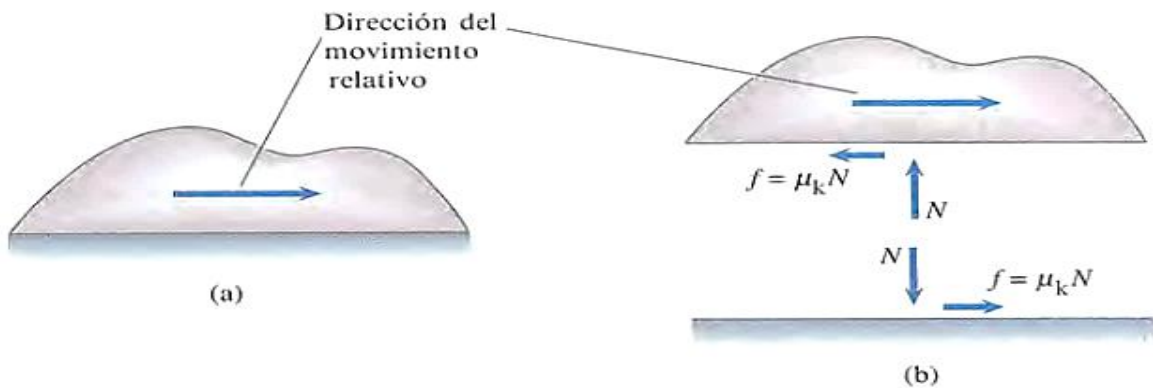


Fig 6. a) La superficie superior se está moviendo hacia la derecha respecto a la superficie inferior. b) Direcciones de las fuerzas de fricción.
(Bedford, 2010)

3. ÁNGULO DE FRICCIÓN

En vez de que la reacción ejercida en una superficie por su contacto con otra se descomponga en una fuerza normal N y en una fuerza de fricción f (Fig. 7a), podemos expresarla en términos de su magnitud R y del ángulo de fricción θ entre la fuerza y la normal a la superficie (Fig. 7b). Las fuerzas, normal y de fricción, están relacionadas con R y θ por:

$$f = R \operatorname{sen}\theta \qquad N = R \operatorname{cos}\theta$$

El valor de θ cuando el deslizamiento es inminente se llama **ángulo de fricción estática** θ_s y su valor cuando las dos superficies están en movimiento relativo se llama



ángulo de fricción cinética θ_k . Utilizando las ecuaciones (1)-(4), podemos expresar los ángulos de fricción estática y cinética en términos de los coeficientes de fricción:

$$\tan \theta_s = \mu_s$$

$$\tan \theta_k = \mu_k$$

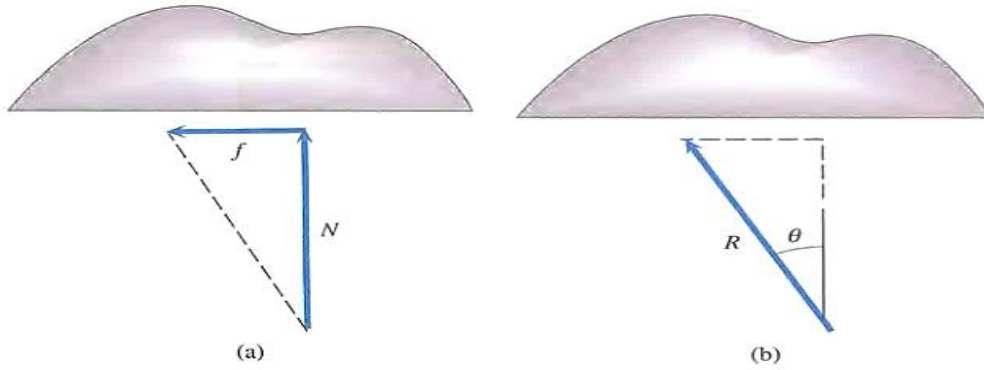


Fig 7. a) Ángulo de fricción. b) Reacción del plano sobre el cuerpo (Bedford, 2010)



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 12
Tema: Fricción

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

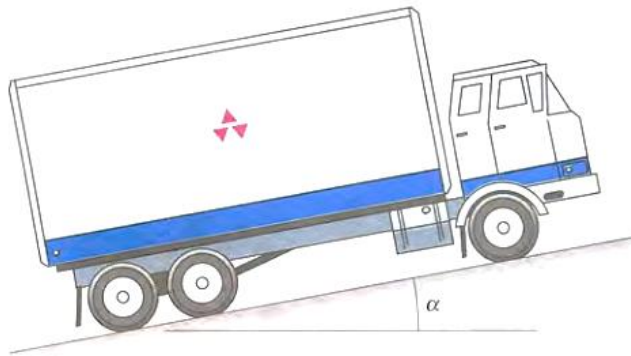
Apellidos :
Nombres :
Fecha : .../.../.....
Duración : Indicar el tiempo

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio en grupo de 5 integrantes considerando su diagrama y proceso. Evite borrones. El orden influirá en su calificación.

1. El camión de la figura pesa 18 000 lb.

(a) Si está en reposo y $\alpha = 10^\circ$, ¿cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre él por el camino inclinado?

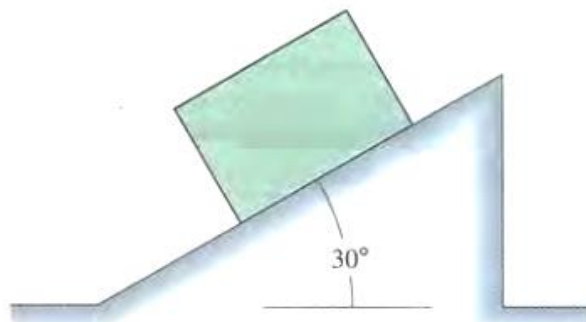
(b) Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos del camión y el camino es $\mu_s = 0.6$, ¿cuál es el valor máximo del ángulo α en el que el camión puede permanecer en reposo?



2. La caja de 50 N mostrada está en reposo.

(a) ¿Cuál es la fuerza de fricción sobre la caja?

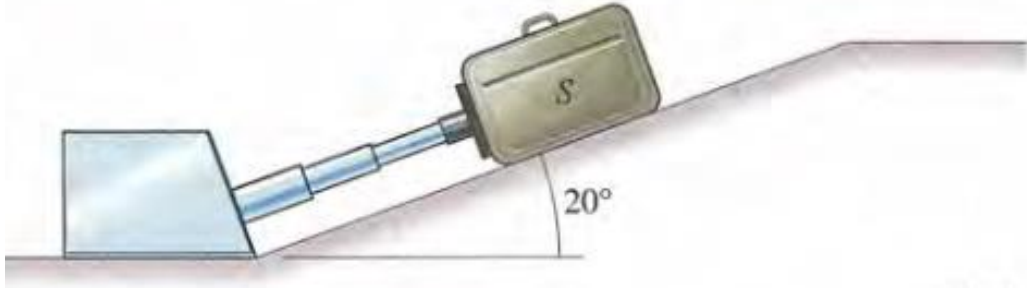
(b) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de fricción estática que permite que la caja permanezca en reposo?



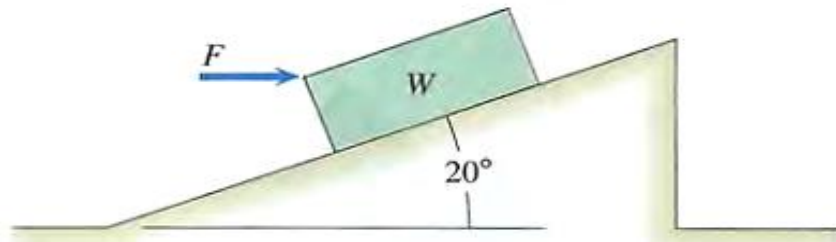
3. El mecanismo mostrado está diseñado para colocar maletas sobre una rampa. La maleta S pesa 20 lb. El mecanismo ejerce sobre la maleta una fuerza en dirección paralela a la rampa. Los coeficientes de fricción entre la maleta y la rampa son $\mu_s = 0.20$ $\mu_k = 0.18$.



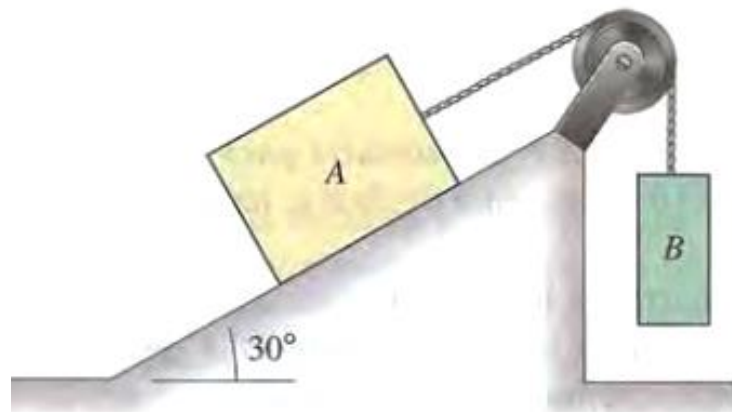
- (a) ¿Permanecerá la maleta en reposo sobre la rampa cuando el mecanismo no ejerza fuerza sobre ella?
- (b) Determine la fuerza que el mecanismo debe ejercer sobre la maleta para que ésta empiece a moverse hacia arriba.



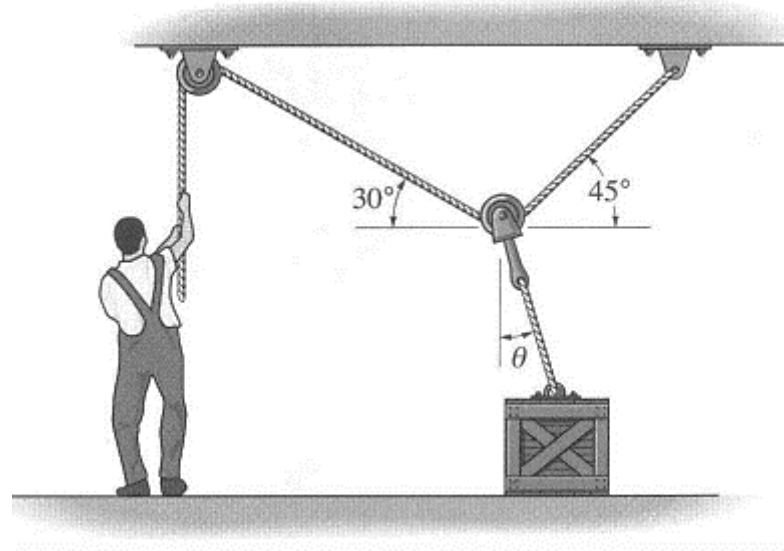
4. El peso de la caja mostrada es de 30 N. La fuerza F es horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la superficie inclinada es $\mu_s = 0.2$. ¿Para qué intervalo de valores de F permanecerá la caja en reposo?



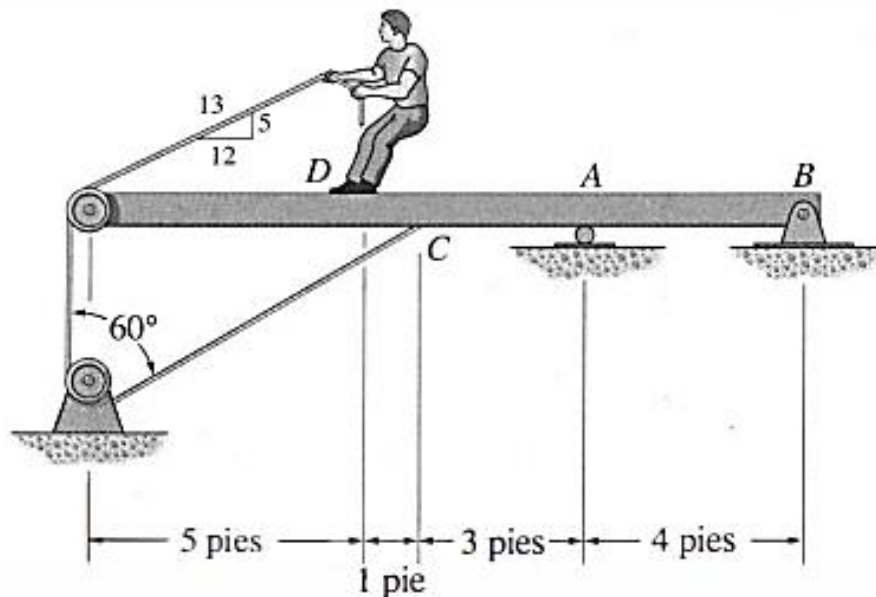
5. En la figura la caja A pesa 100 lb y la caja B 30 lb. Los coeficientes de fricción entre la caja A y la rampa son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.28$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre la caja A por la rampa?



6. Determine la fuerza más pequeña que el hombre debe ejercer sobre la cuerda para mover la caja de 80 kg. ¿Cuál es el ángulo θ en este momento? El coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es $\mu_s = 0.3$.



7. El joven de 80 lb está de pie sobre la viga y jala con una fuerza de 40 lb. Siendo $(u_s)_D = 0.4$, determine la fuerza de fricción entre sus zapatos y la viga y las reacciones en A y B. La viga es uniforme y pesa 100 lb. Ignore el tamaño de las poleas y el espesor de la viga.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

CUARTA UNIDAD

"FUERZAS EN VIGAS Y CABLES, MOMENTOS DE INERCIA Y MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL"

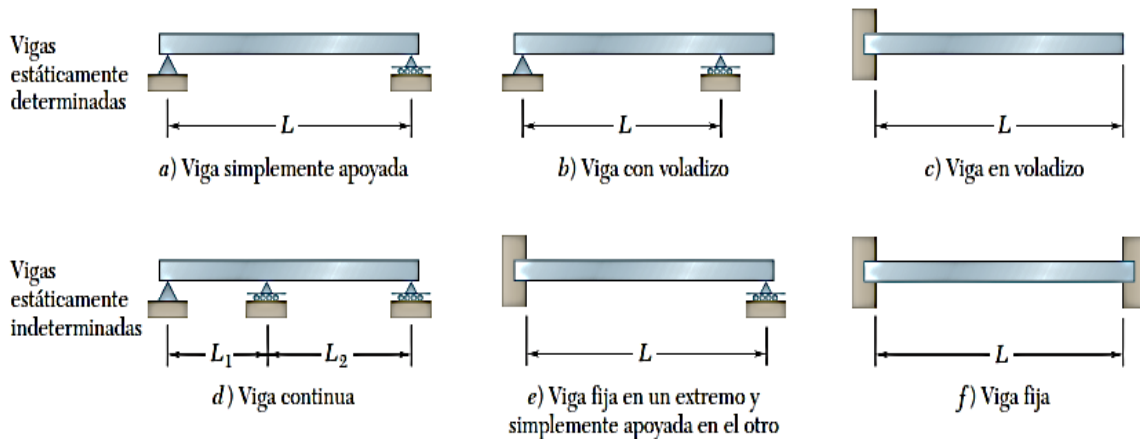
TEMA Nº 13: FUERZAS EN VIGAS



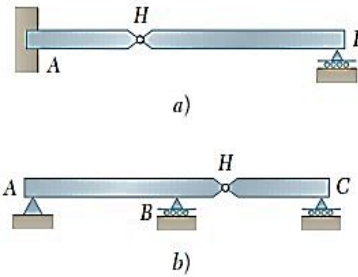
Con la finalidad de que un elemento estructural no falle (se rompa o desplome) debido a las fuerzas y los momentos que actúan sobre él, el ingeniero proyectista debe conocer no sólo las cargas y reacciones externas, sino también las fuerzas y los momentos que actúan *dentro* del elemento.

Viga: Es una barra de un material que soporta cargas laterales, es decir, cargas perpendiculares al eje de la barra.

A continuación, se muestran algunos tipos comunes de vigas.

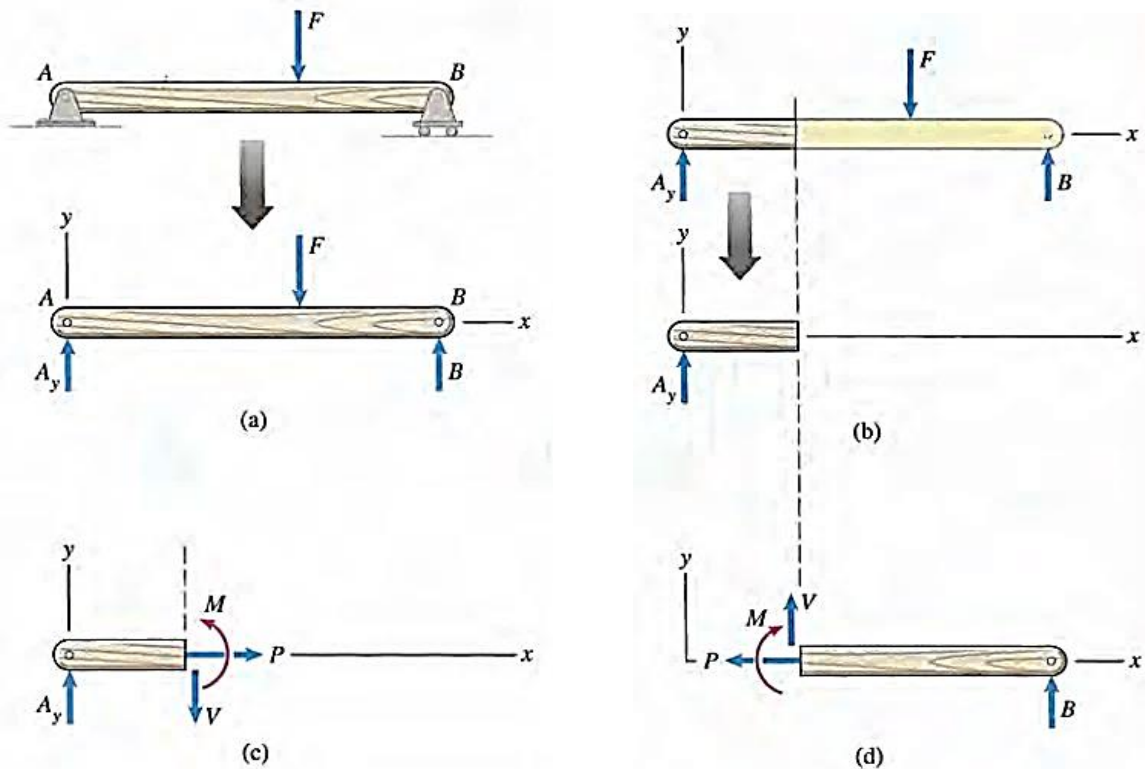


Vigas con rótula:



13.1. Fuerzas y momentos internos en una viga

Consideremos una viga sometida a una carga externa y a reacciones (Figura a). ¿Cómo podemos determinar las fuerzas y los momentos dentro de la viga? En la figura b, "cortamos" la viga con un plano en una sección transversal arbitraria y aislamos parte de ella. La parte aislada no puede estar en equilibrio a menos que esté sometida a cierto sistema de fuerzas y momentos en el plano en que se une a la otra parte de la viga. Éstas son las fuerzas y momentos internos que buscamos. Se sabe que *cualquier* sistema de fuerzas y momentos se puede representar por un sistema equivalente que consiste en una fuerza y un par. Si el sistema de cargas externas y reacciones sobre una viga es bidimensional, podemos representar las fuerzas y el momento internos con un sistema equivalente que consiste en dos componentes de fuerza y un par (Figura c).



- ✓ La componente P paralela al eje de la viga se llama **fuerza axial**.
- ✓ La componente V normal al eje de la viga se llama **fuerza cortante**.
- ✓ El par M se llama **momento flector**.

En la figura (d) se muestran la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flector en el diagrama de cuerpo libre de la otra parte de la viga.

Procedimiento para determinar las fuerzas y momentos internos en una sección transversal particular de una viga:

1. *Determinar las fuerzas y los momentos externos.*

Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga y determine las reacciones en los soportes. Si la viga forma parte de una estructura, debe analizar la estructura.

2. *Dibujar el diagrama de cuerpo libre de una parte de la viga.*

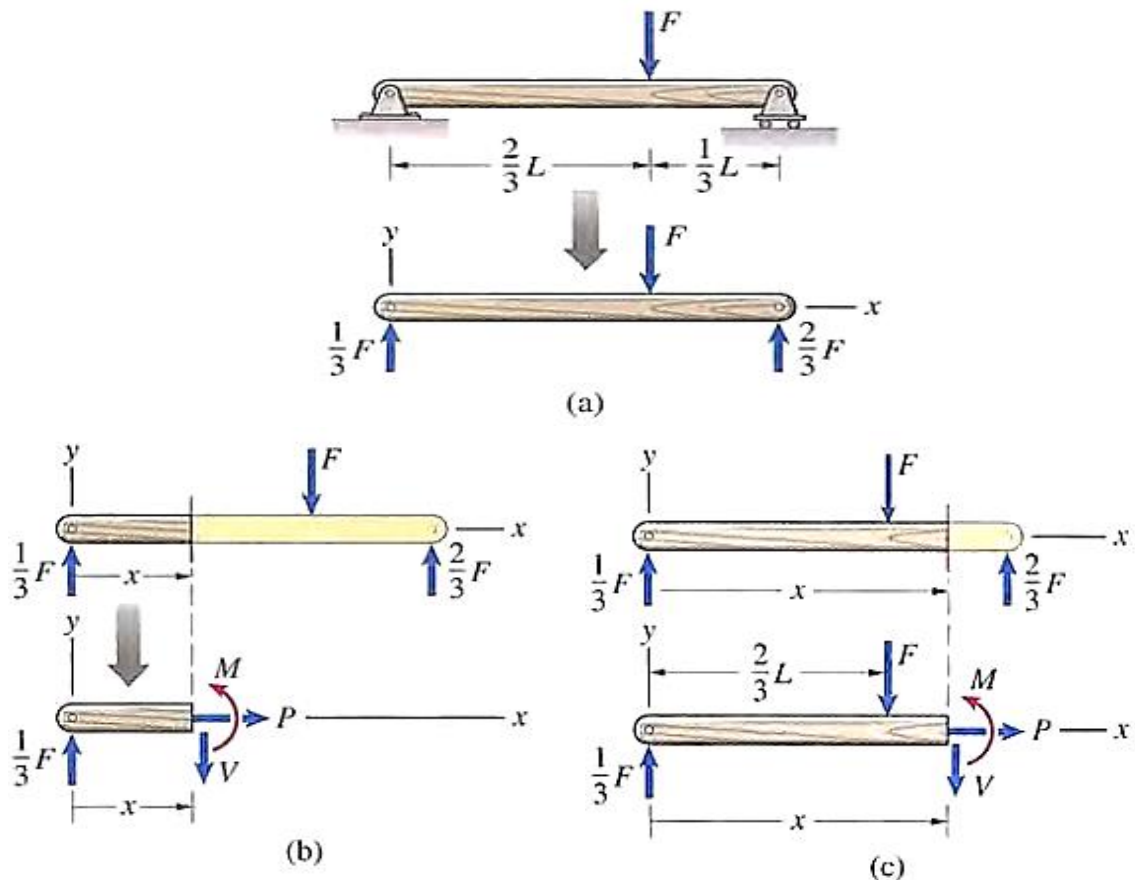
Corte la viga en el punto en que desee determinar las fuerzas internas y el momento, y dibuje el diagrama de cuerpo libre de una de las partes resultantes. Se puede escoger la parte con el diagrama de cuerpo libre más sencillo. Si el corte divide una carga distribuida, no represente la carga distribuida por medio de una fuerza equivalente hasta haber obtenido el diagrama de cuerpo libre.

3. *Aplicar las ecuaciones de equilibrio.*

Use las ecuaciones de equilibrio para determinar P , V y M .

13.2. Diagramas de Fuerza cortante y momento flector

El diseño de una viga requiere conocer las fuerzas y los momentos internos en ella. Son muy importantes los valores máximo y mínimo de la fuerza cortante y del momento flector, y las posiciones en que se presentan, por ello veremos cómo determinar los valores de P , V y M en función de x y presentaremos los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Sea una viga simplemente soportada y cargada con una fuerza F (Figura a). En vez de cortarla en una sección específica para hallar las fuerzas y el momento internos, la cortamos en una posición arbitraria x entre el extremo izquierdo y la carga F (Figura b).



Los diagramas de fuerza cortante y de momento flector son simplemente las gráficas de V y M , respectivamente, en función de x , y nos permiten ver los cambios en la fuerza cortante y en el momento flector a lo largo de la viga, así como sus valores, máximo (menor cota de la fuerza o el momento) y mínimo (mayor cota inferior).

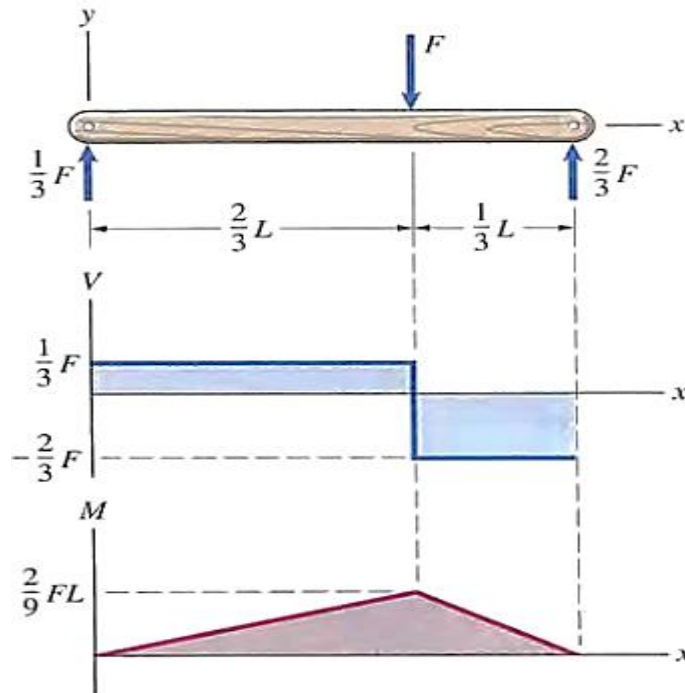


Se puede determinar las distribuciones de las fuerzas y del momento internos en una viga considerando un plano a una distancia arbitraria x del extremo y estableciendo P , V y M como funciones de x . Según la complejidad de la carga, deberán dibujarse varios diagramas de cuerpo libre para determinar las distribuciones sobre la longitud total.

Procedimiento para analizar las distribuciones de las fuerzas y del momento internos en una viga y graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector:

- 1º Dibujar el **DCL de la viga completa**. Determinar reacciones en los apoyos.
- 2º Cortar la viga en una posición arbitraria x , y dibujar el **DCL de la sección** elegida mostrando las cargas externas, las fuerzas internas y el momento flector (*escoja la parte más sencilla*).
- 3º Escribir **ecuaciones en función de x** para la porción elegida de la viga, registrando los valores de **V y M** .
- 4º Se dibuja los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.

Luego los diagramas del ejemplo anterior son:



Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento flector:

La fuerza cortante y el momento flector en una viga sometida a una carga distribuida se rigen por ecuaciones diferenciales simples. Se deducen esas ecuaciones y mostraremos que son una manera interesante e instructiva de obtener los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, y que también son útiles para determinar deflexiones en vigas.

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad \frac{dM}{dx} = V$$



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 13

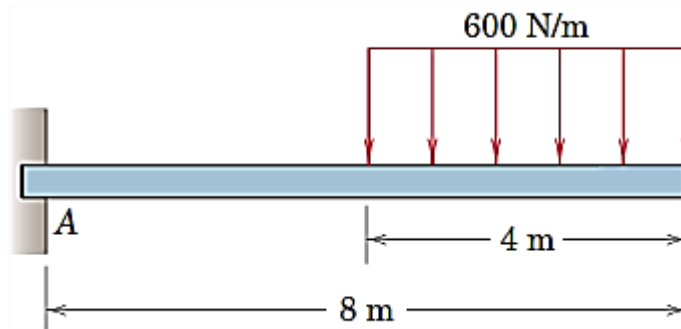
Tema: Fuerzas en Vigas

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

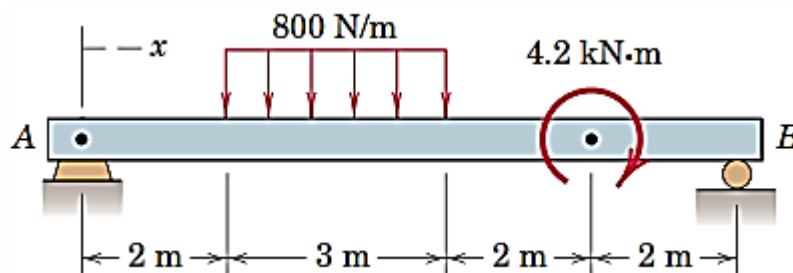
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../.....
Duración : Indicar el tiempo

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio en grupo de 5 integrantes considerando su diagrama y proceso. Evite borradores. El orden influirá en su calificación.

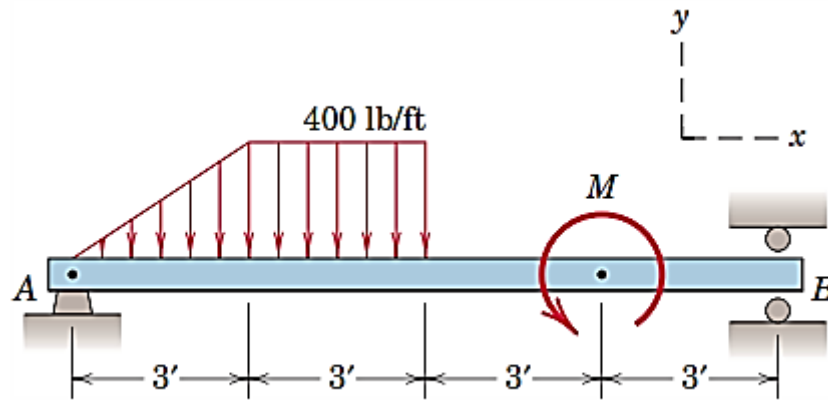
1. Grafique el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector para la viga con carga mostrada.



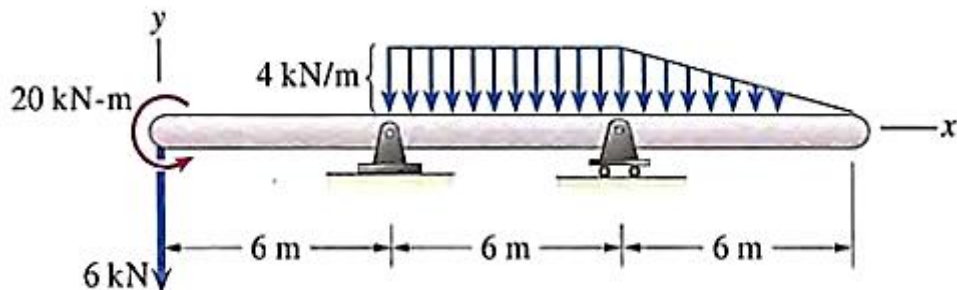
2. Grafique el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector para la viga con carga mostrada.



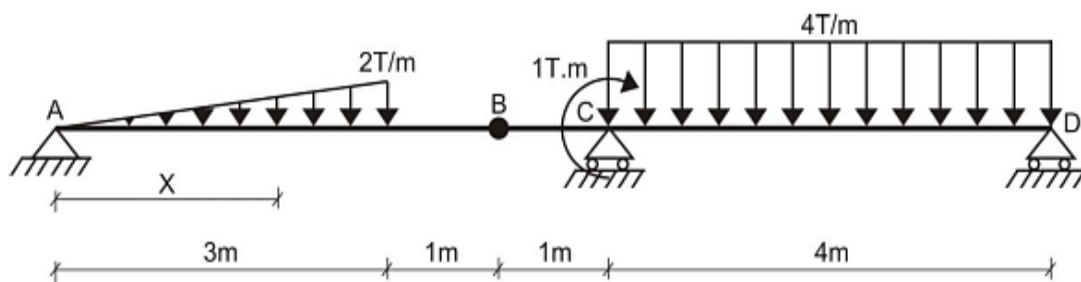
3. Grafique el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector para la viga con carga mostrada.



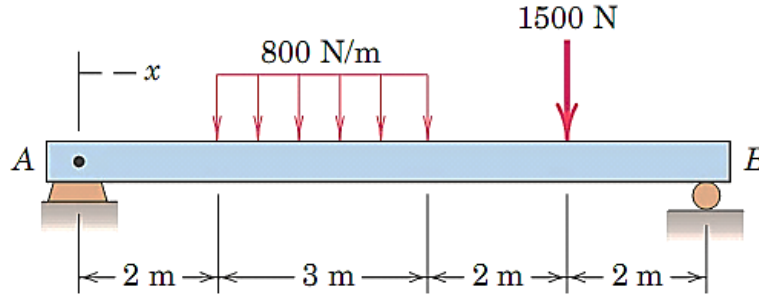
4. Para la carga mostrada realice el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.



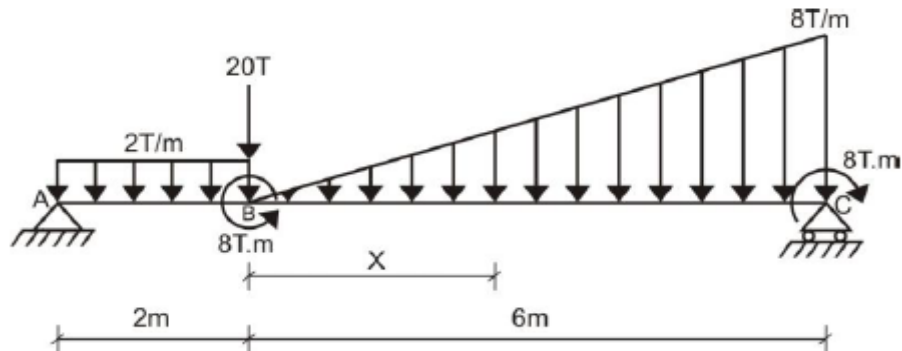
5. Para la carga mostrada realice el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.



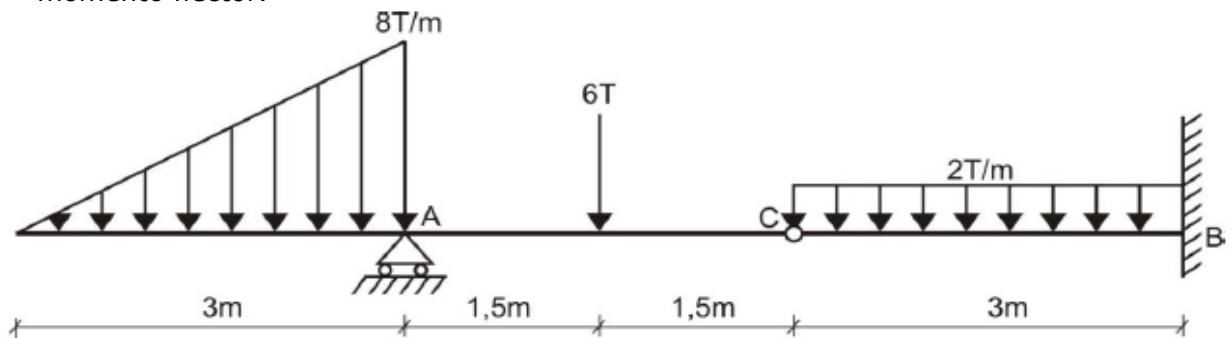
6. Para la viga mostrada:
- Determine las ecuaciones de momentos y fuerzas cortantes para los intervalos: $\langle 0; 2 \rangle$, $\langle 2; 5 \rangle$, $\langle 5; 7 \rangle$ y $\langle 7; 9 \rangle$ (m).
 - ¿Cuál es el valor de la fuerza cortante y momento flector en $x = 6$ m?
 - Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flector.
 - ¿Cuál es el valor del momento flector máximo?
 - Si se reemplaza la fuerza puntual por un par de 4200 Nm en sentido horario en su misma ubicación, repita los ítems a), b), c) y d)



7. Para la carga mostrada realice el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.



8. Para la carga mostrada realice el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA Nº 14: FUERZAS EN CABLES

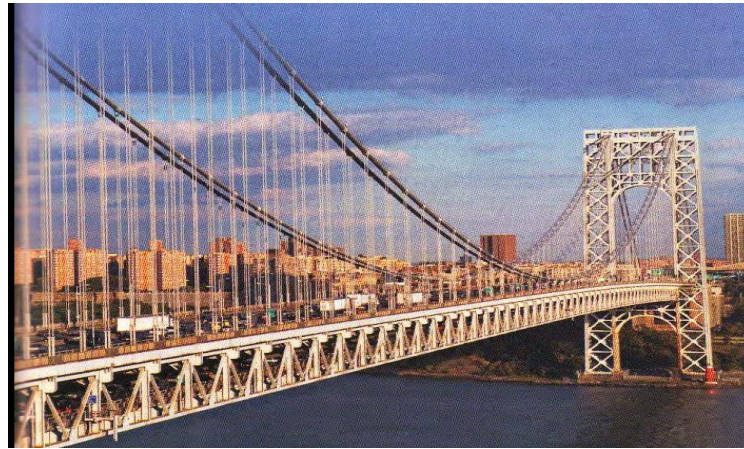


Figura 1. Puente Middle Bridge - Massachusetts.
Fuente: Tecnología de estructuras. MacHannon (2013)

En este tema comprenderemos en primer término que, por su combinación única de resistencia, poco peso y flexibilidad, las cuerdas y cables se utilizan a menudo para soportar cargas y transmitir fuerzas en estructuras, máquinas y vehículos. Los grandes puentes colgantes están soportados por enormes cables de acero. Los ingenieros utilizan cables para crear estructuras estéticas con espacios interiores abiertos como estadios. Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería como puentes colgantes, líneas de transmisión, teleféricos, contravientos para torres altas, etc. Los cables pueden dividirse en dos categorías de acuerdo con las cargas que actúan sobre ellos: 1) cables que soportan cargas concentradas y 2) cables que soportan cargas distribuidas.

1. CABLES CON CARGA CONCENTRADA

Para el estudio de estos cables consideremos un cable unido a dos puntos fijos A y B que soportan cargas concentradas verticales P_1, P_2, \dots, P_n (figura 1a). Se supone que el cable es *flexible*, esto es, que su resistencia a la flexión es pequeña y se puede despreciar. Además, también se supone que el *peso del cable es susceptible de ser ignorado* en comparación con las cargas que soporta. Por tanto, cualquier porción del cable entre dos cargas consecutivas se puede considerar como un elemento sujeto a dos fuerzas y, por consiguiente, las fuerzas internas en cualquier punto del cable se reducen a una *fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable*. (Beer, 2013 p 385)

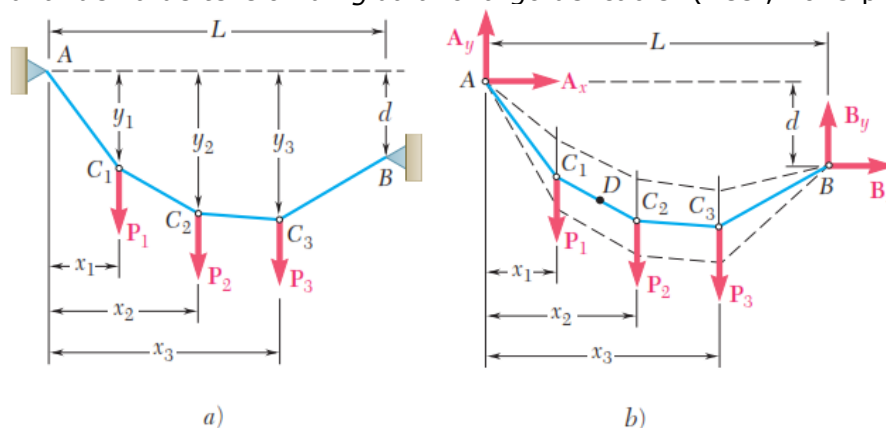


Figura 2. Cables con carga concentrada.
Fuente: Beer. (2013)

También debemos suponer que cada una de las cargas se encuentra en una línea vertical dada, esto es, que la distancia horizontal desde el apoyo A hasta cada una de las cargas es conocida; además, también se supone que se conocen las distancias horizontal y vertical entre los apoyos. Se busca determinar la forma del cable, esto es, la distancia vertical desde el apoyo A hasta cada uno de los puntos C_1, C_2, \dots, C_n , y también se desea encontrar la tensión T en cada uno de los segmentos del cable. (Beer, 2013 p 385)

Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre para todo el cable (figura 2b). Como la pendiente de las porciones del cable unidas en A y B no se conoce, cada una de las reacciones en A y B deben representarse con dos componentes. Por tanto, están involucradas cuatro incógnitas y las tres ecuaciones de equilibrio que se tienen disponibles no son suficientes para determinar las reacciones en A y B. De esta manera, se debe obtener una ecuación adicional considerando el equilibrio de una porción del cable. Lo anterior es posible si se conocen las coordenadas x y y de un punto D del cable. Dibujando el diagrama de cuerpo libre del segmento AD del cable (figura 3a) y escribiendo $\sum M_D = 0$, se obtiene una relación adicional entre las componentes escalares A_x y A_y y se pueden determinar las reacciones en A y B. Sin embargo, el problema continuaría siendo indeterminado si no se conocieran las coordenadas de D, a menos que se proporcionara otra relación entre A_x y A_y (o entre B_x y B_y). Como se indica por medio de las líneas discontinuas en la figura 2b, el cable podría colgar en varias formas posibles.

Una vez que se han determinado A_x y A_y se puede encontrar fácilmente la distancia vertical desde A hasta cualquier punto del cable. Por ejemplo, considerando el punto C2 se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción AC2 del cable (figura 2b). Si se escribe $\sum M_{C_2} = 0$, se obtiene una ecuación que se puede resolver para y_2 .

Al escribir $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza T que representa la tensión en la porción del cable que está a la derecha de C_2 . Se observa que $T \cos \theta = A_x$; por tanto, la componente horizontal de la fuerza de tensión siempre es la misma en cualquier punto del cable. Se concluye que la tensión T es máxima cuando $\cos \theta$ es mínimo, esto es, en la porción del cable que tiene el mayor ángulo de inclinación. Obviamente, dicha porción del cable debe ser adyacente a uno de los apoyos del cable.

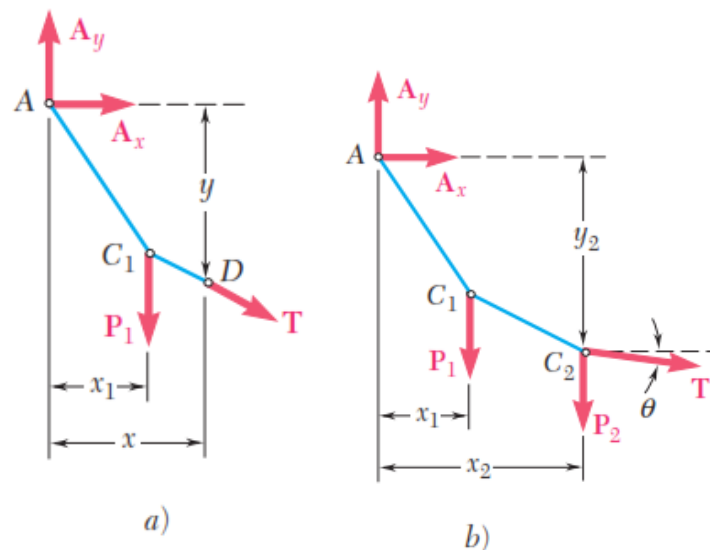


Figura 3. Cables con carga concentrada.
Fuente: Beer. (2013)

2. CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS A LO LARGO DE UNA LÍNEA HORIZONTAL

El cable principal de un puente colgante es un ejemplo de cable sometido a una carga distribuida en una línea horizontal (Fig. 3). El peso del puente está (en forma aproximada) uniformemente distribuido en la horizontal. La carga transmitida al cable principal por los cables verticales se puede representar como una carga distribuida. Aquí veremos la forma y la variación de la tensión en un cable como éste. (Bedford, 2010 p 405)

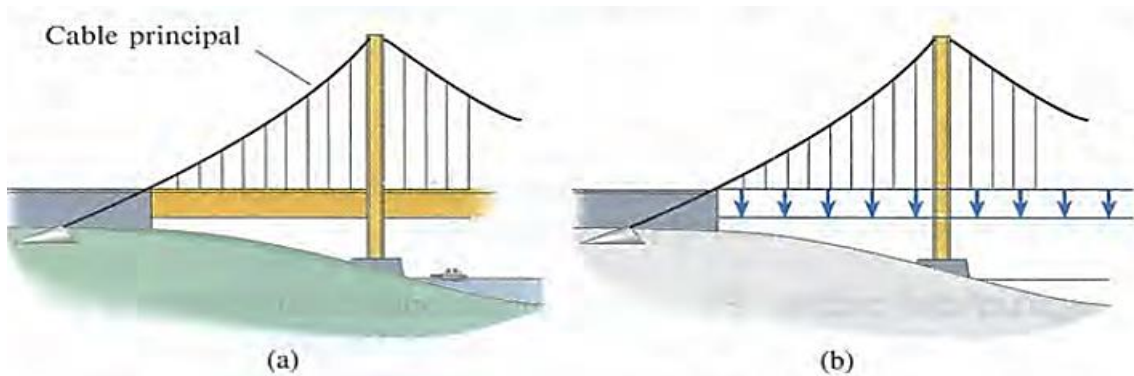


Figura 4. Cables con cargas uniformemente distribuidas.
Fuente: Bedford. (2007)

Consideremos un cable suspendido sometido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de una línea horizontal (Fig. 3a). Ignoramos el peso del cable. El origen del sistema coordenada está en el punto más bajo del cable. Sea $y(x)$ la curva descrita por el cable en el plano x - y . Nuestro objetivo es determinar la curva $y(x)$ y la tensión en el cable.

Forma del cable: Obtenemos un diagrama de cuerpo libre cortando el cable en su punto más bajo y en una posición arbitraria x (Figura 3b). El término T_0 es la tensión en el punto más bajo del cable, y T es la tensión en x . La fuerza hacia abajo ejercida por la carga distribuida es $w x$. De este diagrama obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$T \cos \theta = T_0 \quad (1)$$

$$T \sin \theta = w x \quad (2)$$

Eliminamos la tensión T dividiendo la segunda ecuación entre la primera, para obtener:

$$\tan \theta = \frac{w}{T_0} x = a x \quad (3)$$

donde definimos la constante $a = w/T_0$. La pendiente del cable en x es $dy/dx = \tan \theta$, por lo que obtenemos una ecuación diferencial que define la curva descrita por el cable:

$$\frac{dy}{dx} = a x \quad (4)$$

Hemos escogido el sistema coordenado de manera que integrando la ecuación anterior se obtiene:

$$\int_0^y dy = \int_0^x a x dx \quad (5)$$

encontramos que la curva descrita por el cable es la parábola:

$$y = \frac{1}{2} a x^2 \quad (6)$$

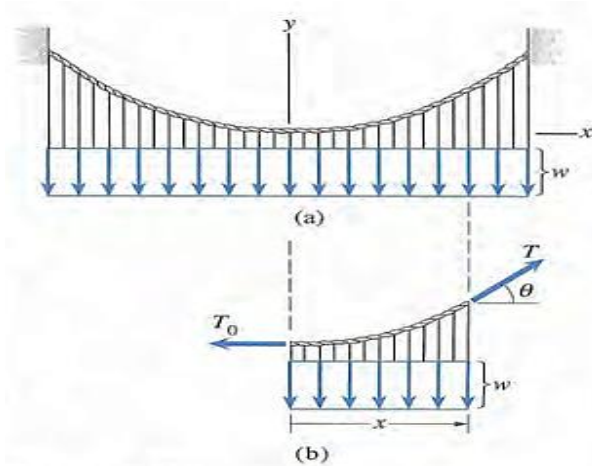


Figura 5. Cables con cargas uniformemente distribuidas.
Fuente: Bedford. (2007)

Tensión en el cable: Para determinar la distribución de la tensión, elevamos al cuadrado ambos lados de las ecuaciones (1) y (2) y las sumamos:

$$T = T_0 \sqrt{1 + a^2 x^2} \quad (7)$$

La tensión es mínima en el punto más bajo del cable y crece mono tónicamente con su distancia al punto más bajo.

Longitud del cable: En algunas aplicaciones es útil tener una expresión para la longitud del cable en función de x . Podemos escribir la relación $ds^2 = dx^2 + dy^2$, donde ds es un elemento de longitud del cable en la forma:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (8)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en esta expresión e integrando, obtenemos una ecuación para la longitud del cable en el intervalo horizontal de 0 a x :

$$s = \frac{1}{2} \left\{ x \sqrt{1 + a^2 x^2} + \frac{1}{a} \ln[ax + \sqrt{1 + a^2 x^2}] \right\} \quad (9)$$

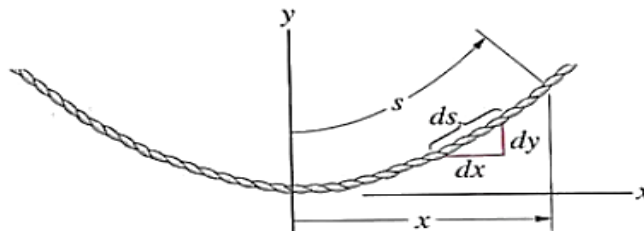


Figura 6. Longitud s del cable en el intervalo horizontal de 0 a x .
Fuente: Bedford. (2007)

3. CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS EN EL CABLE

El peso de un cable lo somete a una carga uniformemente distribuida en toda su longitud. Si un cable se somete a fuerzas iguales paralelas espaciadas uniformemente, la carga sobre el cable suele representarse uniformemente distribuida en toda su longitud. Aquí veremos la forma asumida por el cable y la variación de su tensión. Supongamos que sobre un cable actúa una carga distribuida que somete cada elemento ds de su longitud a una fuerza $w ds$, donde w es constante. La figura 7 es el diagrama

de cuerpo libre obtenido al cortar el cable en su punto más bajo y en un punto a una distancia s . T_0 Y T son las tensiones en el punto más bajo en s , respectivamente. La carga distribuida ejerce una fuerza ws hacia abajo. El origen del sistema se halla en el punto más bajo. Sea la función x) la curva descrita por el cable en el plano x - y . El objetivo es determinar $y(x)$ y T .

Forma del cable Del diagrama de cuerpo libre de la figura 5, obtenemos las ecuaciones de equilibrio:

$$T \sin \theta = ws \quad (10)$$

$$T \cos \theta = T_0 \quad (11)$$

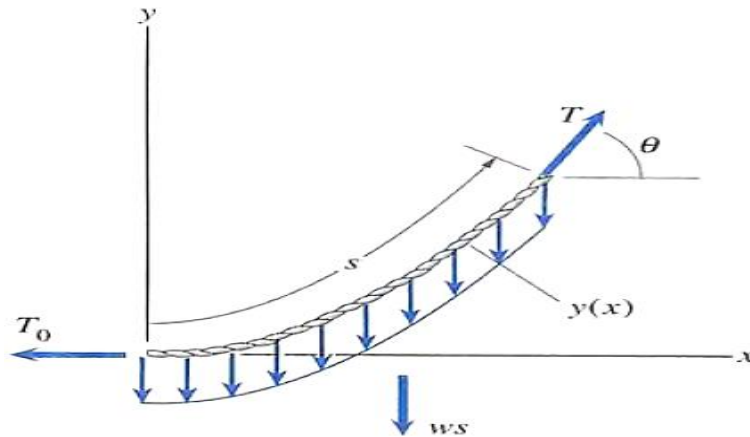


Figura 7. Cargas uniformemente distribuidas en el cable.
Fuente: Bedford. (2007)

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, obtenemos

$$\tan \theta = \frac{w}{T_0} s = as \quad (12)$$

donde definimos la constante $a = w/T_0$, la pendiente del cable $dy/dx = \tan \theta$ por lo que:

$$\frac{dy}{dx} = as \quad (13)$$

La derivada de esta ecuación con respecto a x es:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = a \frac{ds}{dx} \quad (14)$$

Por la relación:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

podemos escribir la derivada de s con respecto a x como:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \sqrt{1 + \sigma^2} \quad (15)$$

donde definimos σ como la pendiente:

$$\sigma = \frac{dy}{dx}$$

Con la ecuación (15) escribimos la ecuación (14) como:

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} = a dx$$



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 14

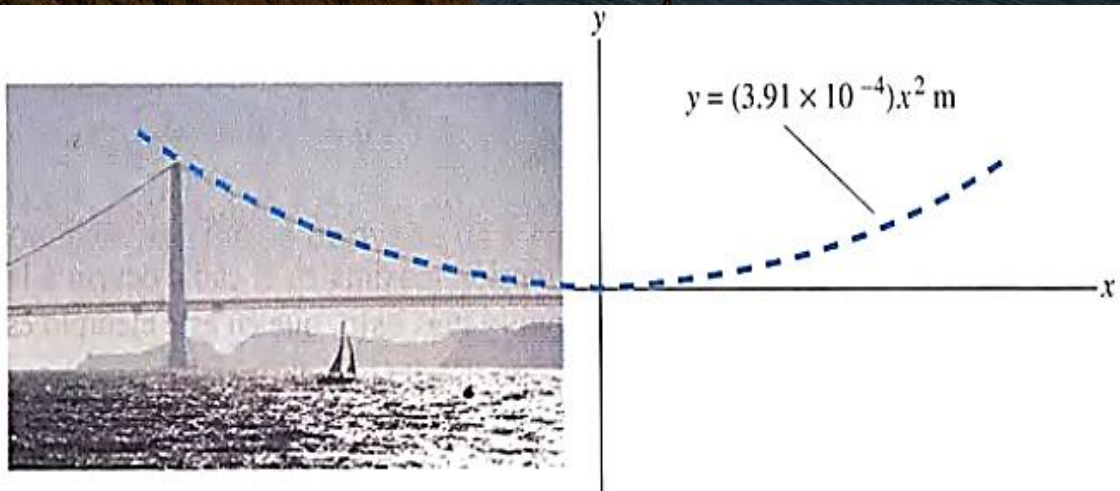
Tema: Fuerzas en Cables

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../.....
Duración : Indicar el tiempo

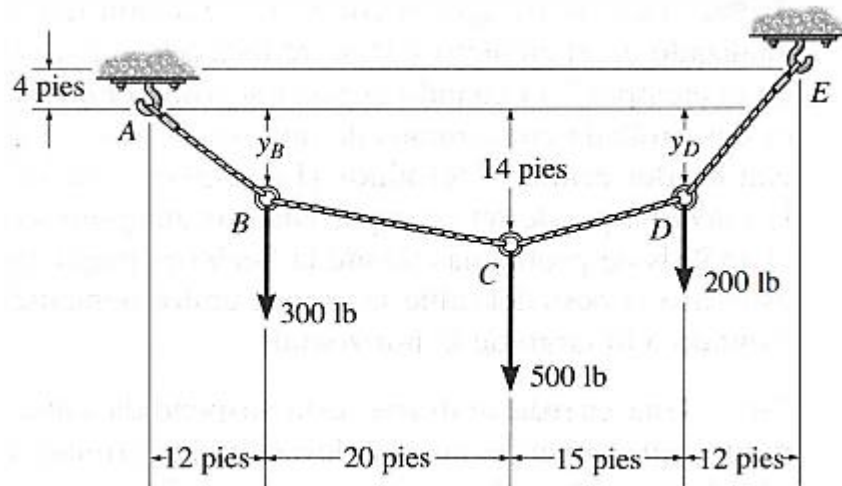
INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio en grupo de 5 integrantes considerando su diagrama y proceso. Evite borrones. El orden influirá en su calificación.

1. La distancia horizontal entre las torres de soporte del puente Golden Gate de San Francisco, California, es de 1280m, como se muestra en la fotografía. Las cúspides de las torres están a 160 m sobre el punto más bajo de los cables de soporte principales. Obtenga la ecuación de la curva descrita por los cables.

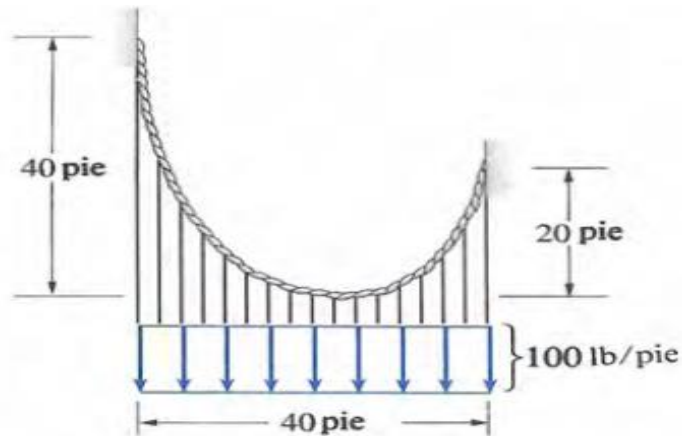




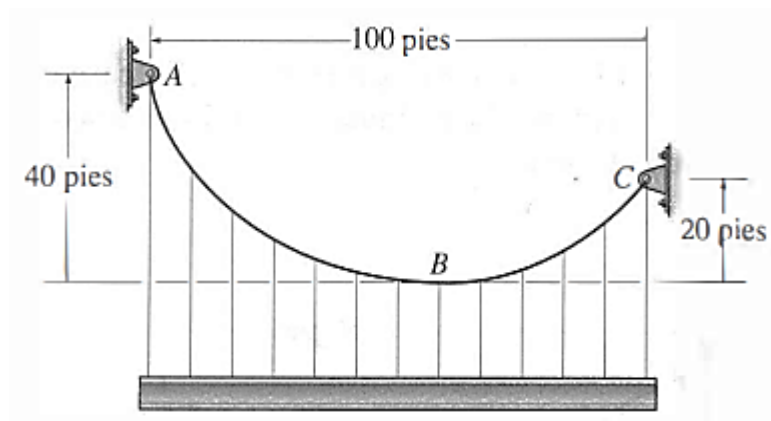
2. El cable soporta las tres cargas mostradas. Determine las flechas y_B y y_D de los puntos B y D y la tensión en cada segmento del cable.



3. El cable mostrado en la figura soporta una carga distribuida de 100 lb/pie. ¿Qué valor tiene la tensión máxima en el cable?

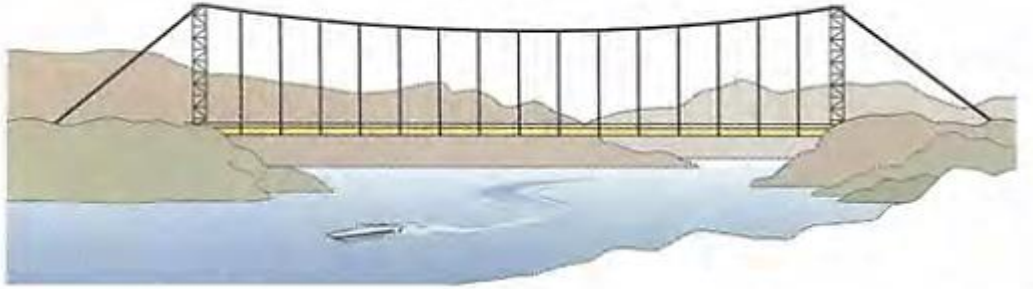


4. El cable soporta una trabe que pesa 850 lb/pie. Determine la tensión en el cable en los puntos A, B y C.

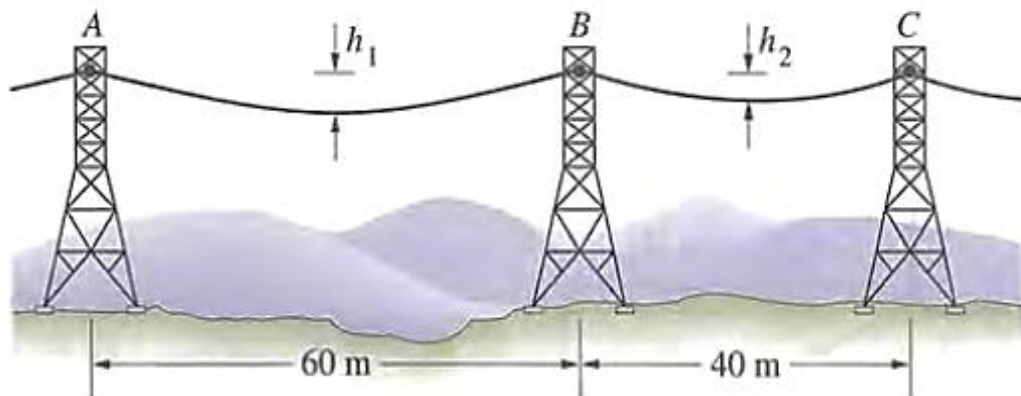




5. Unos ingenieros utilizan un cable para suspender una tubería sobre un río. La distancia entre las torres es de 120 pies y el punto más bajo del cable se encuentra 10 pies abajo de las cúspides de las torres. El peso total de la tubería suspendida es de 6000 lb.
- (a) Determine la tensión máxima en el cable suspendido.
- (b) Determine la longitud del cable suspendido.



6. El cable de la figura soporta un puente de ferrocarril entre dos túneles. La carga distribuida es $w = 1 \text{ MN/m}$ y $h = 40 \text{ m}$.
- (a) ¿Cuál es la tensión máxima en el cable?
- (b) ¿Cuál es la longitud del cable?



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

TEMA N° 15: MOMENTO DE INERCIA



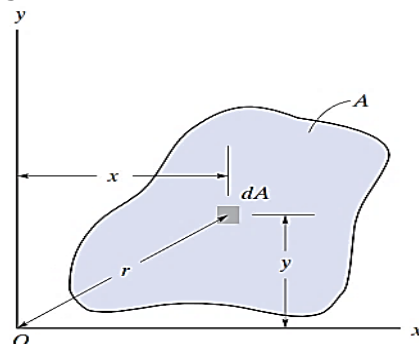
La cantidad denominada momento de inercia aparece con frecuencia en los análisis de problemas de ingeniería. Por ejemplo, los momentos de inercia de áreas se utilizan en el estudio de fuerzas distribuidas y en el cálculo de deflexiones de vigas. El momento ejercido por la presión sobre una placa plana sumergida se puede expresar en términos del momento de inercia del área de la placa. En dinámica, los momentos de inercia de masa se usan para calcular los movimientos rotatorios de objetos. Para estudiar estas aplicaciones, los momentos de inercia deben ser parte de nuestro "vocabulario" técnico. En este tema mostraremos cómo calcular los momentos de inercia de áreas simples o de cuerpos y luego usaremos resultados llamados teoremas de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia de áreas o cuerpos más complejos.

Para el caso de vigas con cargas laterales éstas hacen que la viga se flexione; por tanto, la viga debe ser resistente a la flexión para soportar cargas. La resistencia a la flexión depende directamente del momento de inercia del área de su sección transversal. A mayor momento de inercia la viga aumenta su resistencia. En condiciones reales, la forma de las secciones transversales de las vigas, como los pasos a desnivel carreteros, o de vías férreas, o de marcos de edificios están configurados para tener grandes momentos de inercia.

Momentos de Inercia de un área

La propiedad del área de una sección transversal que determina la resistencia a la flexión respecto a un eje particular de una viga se denomina *momento de inercia del área*.

Respecto a la figura se define:



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

I_x = Momento de inercia del área A respecto al eje x.



I_y = Momento de inercia del área A respecto al eje y.

Tener presente que los momentos de inercia son cantidades siempre positivas, no nulas, y sus unidades son m^4 (SI), pie^4 (sistema inglés).

Momento de inercia polar:

Además de los momentos de inercia respecto a los ejes anteriores, muy importante para rotación de placas se define respecto al polo O o eje z, donde r es la distancia perpendicular desde el polo hasta el elemento dA:

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Se verifica, dado que:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Radio de giro de un área:

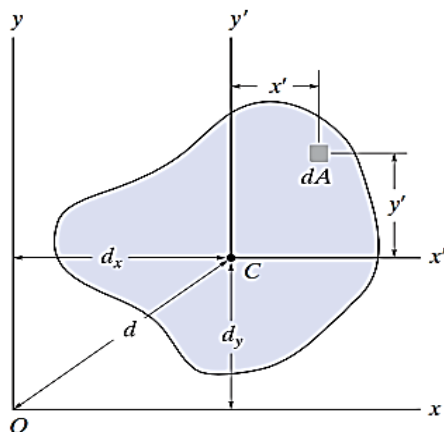
El radio de giro de un área respecto a un eje tiene unidades de longitud y es una cantidad que se usa a menudo en mecánica estructural para el diseño de columnas, se determinan así:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad k_z = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

Los radios de giro son cantidades siempre positivas, no nulas, y sus unidades son m (SI), pie (sistema inglés).

Teorema de los ejes paralelos para un área:

También llamado Teorema de Steiner. El *teorema de los ejes paralelos* puede usarse para determinar el momento de inercia de un área con respecto a *cualquier eje* que sea paralelo a un eje que pasa a través de su centroide y del cual se conozca el momento de inercia.



$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

Donde:

$$\bar{I}_{x'}, \quad \bar{I}_{y'}$$

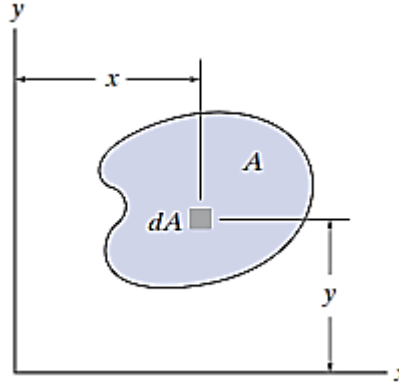
son los momentos de inercia del área A respecto a los ejes centroidales.

"El momento de inercia de un área con respecto a un eje es igual al momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo que pase a través del centroide del área, más el producto del área y el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes".

Producto de inercia:

La propiedad de un área, llamada el producto de inercia, es necesaria a fin de determinar los momentos de inercia *máximo* y *mínimo* para el área. Estos valores máximo y mínimo son propiedades importantes necesarias para diseñar elementos estructurales y mecánicos como vigas, columnas y flechas.

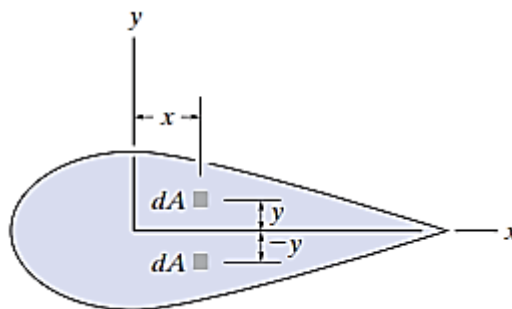
El *producto de inercia* del área de la figura siguiente con respecto a los ejes x y y se define como:



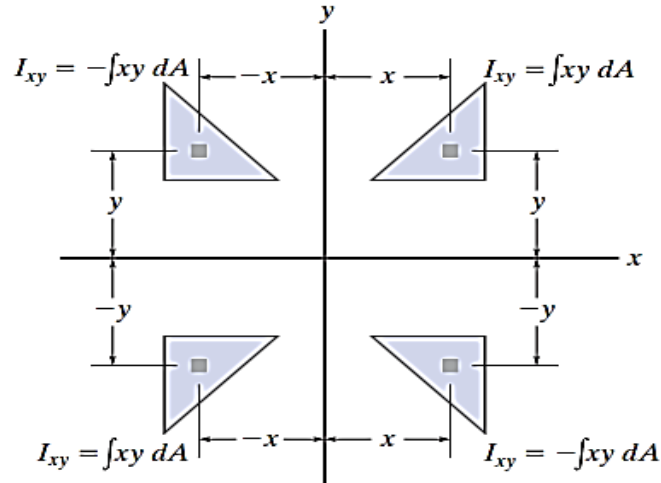
$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

- ✓ El producto de inercia tiene unidades de longitud a la cuarta potencia, por ejemplo, m^4 , mm^4 o $pies^4$, $pulg^4$. Sin embargo, como x o y pueden ser cantidades negativas.
- ✓ El producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de la ubicación y orientación de los ejes coordenados.

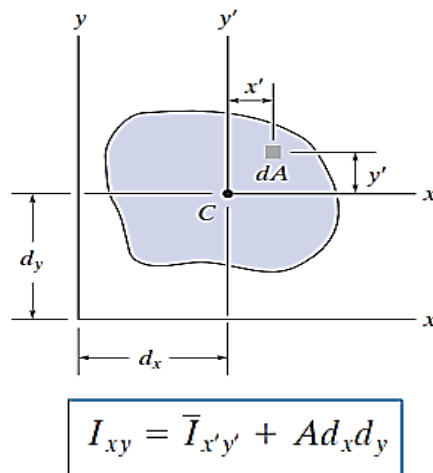
Por ejemplo, el producto de inercia I_{xy} para área será *cero* si el eje x , o el eje y , es un eje de *simetría* para el área, como en la figura mostrada a continuación. Aquí, cada elemento dA localizado en el punto (x, y) tiene un elemento dA correspondiente en $(x, -y)$. Como los productos de inercia para esos elementos son, respectivamente, $xy \, dA$ y $-xy \, dA$, la suma algebraica o integración de todos los elementos que se elijan de esta manera se cancelarán uno a uno. En consecuencia, el producto de inercia para el área total se convierte en cero.



De la definición también se infiere que el "signo" de esta cantidad depende del cuadrante donde se ubique el área. Como en el gráfico siguiente se muestra el, si el área se gira de un cuadrante a otro, el signo de I_{xy} cambiará.



Finalmente, a continuación, se tiene una expresión del *Teorema de los ejes paralelos aplicado al producto de inercia de un área*:



Tener cuidado, puesto que los *signos algebraicos* para dx y dy se mantengan al aplicar esta ecuación.

Momentos de Inercia de áreas compuestas:

Procedimiento:

1º *Partes simples componentes.*

- ✓ Con un croquis, divida el área en sus partes componentes, formas conocidas, e indique la distancia perpendicular desde el centroide de cada parte hasta el eje de referencia.

2º *Teorema de los ejes paralelos.*

- ✓ Si el eje centroidal para cada forma conocida no coincide con el eje de referencia, deberá usarse el teorema de los ejes paralelos, para determinar el momento de inercia de la parte con respecto al eje de referencia. Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje centroidal use tablas de fórmulas para regiones conocidas.

3º *Suma.*

- ✓ El momento de inercia de toda el área con respecto al eje solicitado se determina por la suma de los resultados de sus partes componentes con respecto a este eje.
- ✓ Si una parte componente tiene un "agujero", su momento de inercia se encuentra al "restar" el momento de inercia del agujero de la suma de momentos de inercia de las demás partes componentes que si conforman el área inicial.

Propiedades de las figuras planas

FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
<p>Arco de Circunferencia</p>	$\bar{r} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	—
<p>Cuadrante y semicircunferencia</p>	$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	—
<p>Circulo</p>	—	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$
<p>Semicirculo</p>	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{4}$
<p>Cuarto de circulo</p>	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$
<p>Sector Circular</p>	$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	$I_x = \frac{r^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$ $I_y = \frac{r^4}{4} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$ $I_z = \frac{1}{2} r^4 \alpha$

FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
<p style="text-align: center;">Area Rectangular</p>	—	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
<p style="text-align: center;">Area Triangular</p>	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$
<p style="text-align: center;">Area de Cuadrante Elíptica</p>	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{16}, \quad \bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) ab^3$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}, \quad \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) a^3 b$ $I_z = \frac{\pi ab}{16}(a^2 + b^2)$
<p style="text-align: center;">Area Subparabólica</p>	$\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3b}{10}$	$I_x = \frac{ab^3}{21}$ $I_y = \frac{a^3 b}{5}$ $I_z = ab \left(\frac{a^3}{5} + \frac{b^2}{21} \right)$
<p style="text-align: center;">Area Parabólica</p>	$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3b}{5}$	$I_x = \frac{2ab^3}{7}$ $I_y = \frac{2a^3 b}{15}$ $I_z = 2ab \left(\frac{a^2}{15} + \frac{b^2}{7} \right)$



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 15

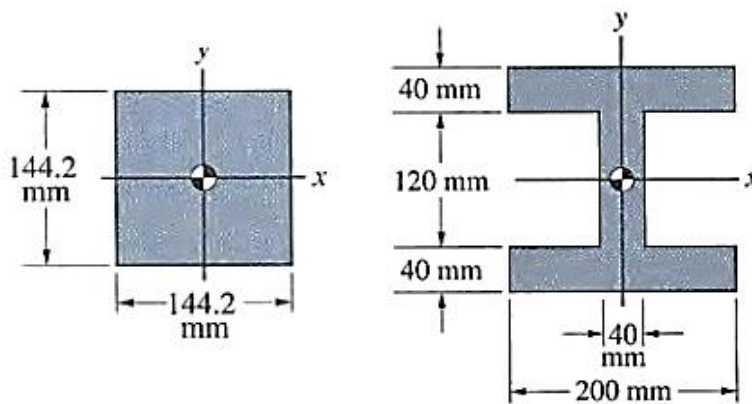
Tema: Momento de Inercia

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

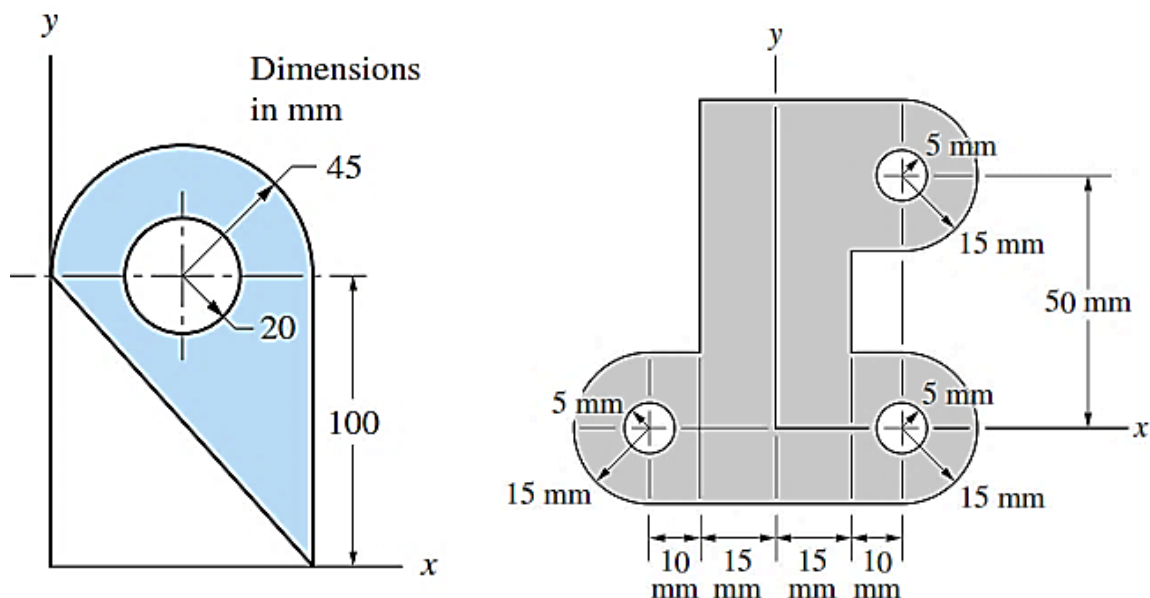
Apellidos :
Nombres :
Fecha :/...../2017 Duración: Indic. Tiempo
Tipo de Práctica: Individual () Grupal ()

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

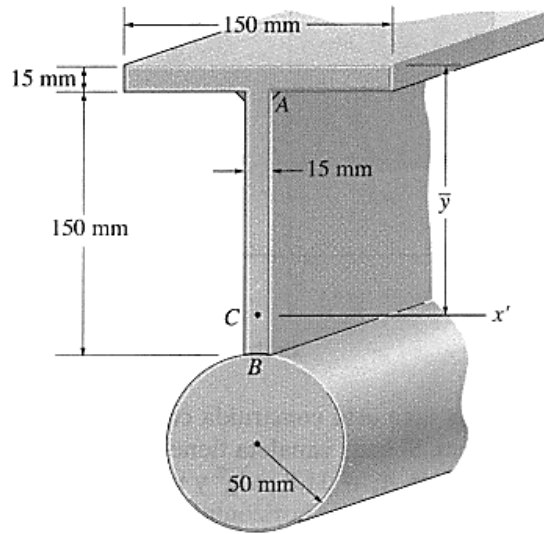
1. Para las secciones transversales de las vigas mostradas. ¿Cuál tiene mayor momento de inercia respecto al eje x ?



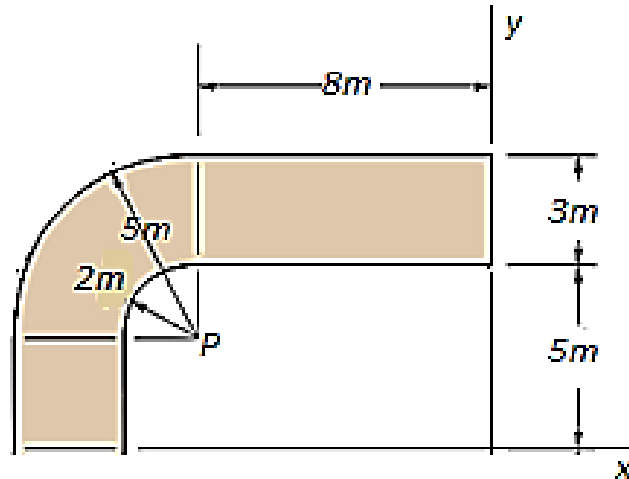
2. En cada caso, para el área sombreada determine el momento de inercia con respecto al eje x y al eje y , además el radio de giro para cada eje.



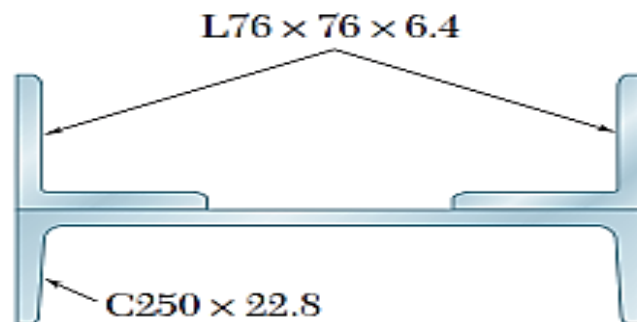
3. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje x . En los cálculos ignore el tamaño de las soldaduras de esquina situadas en A y B. $\bar{y} = 154.4$ mm.



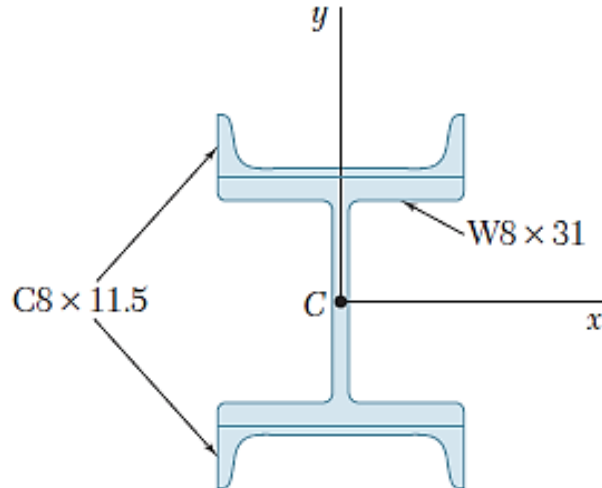
4. Determine el momento de inercia de la viga, cuya sección transversal es mostrada, respecto al eje y . Consigne sus datos en una tabla. 3p



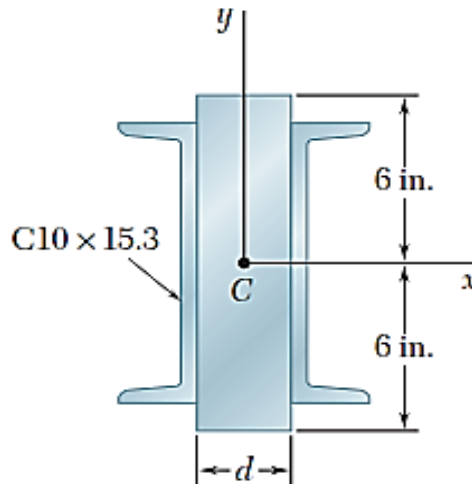
5. Como se muestra en la figura, dos ángulos de $L76 \times 76 \times 6.4$ mm se sueldan a un canal $C250 \times 22.8$. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al alma del canal, respectivamente.



6. Como se muestra en la figura, dos canales se sueldan a una sección W laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales x y y .



7. Dos canales se sueldan a una placa de acero de $d \times 12$ in., como se muestra en la figura. Determine el ancho d para el cual la relación de los momentos de inercia \bar{I}_x/\bar{I}_y de los momentos de inercia centroidales de la sección es 16.



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

TEMA N° 16: MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL



Figura 1. Fuerzas ejercidas por cilindros hidráulicos para posicionar un elevador.
Fuente: BEER, R. Mecánica vectorial para ingenieros (2013)

En el presente tema desarrollaremos una forma alternativa de analizar situaciones de equilibrio de un cuerpo rígido. Por ejemplo, cuando se estira un resorte, el trabajo que se efectúa se almacena en el resorte como energía potencial. Al elevar una plataforma extensible se incrementa su energía potencial gravitatoria. En este capítulo definimos el trabajo y la energía potencial y presentamos un poderoso método basado en el principio del trabajo virtual. En algunos casos, este principio se puede usar para analizar cuerpos y estructuras en equilibrio con mayor facilidad que dibujando diagramas de cuerpo libre y planteando las ecuaciones de equilibrio. (Bedford, 2010 p 578)

El principio del trabajo virtual se usa en gran medida en aplicaciones avanzadas de mecánica, especialmente en el análisis de elementos y estructuras deformables.

1. TRABAJO VIRTUAL

El principio del trabajo virtual es un enunciado sobre el trabajo efectuado por fuerzas y pares cuando un cuerpo o estructura está sometido a movimientos. Antes de estudiarlo, definamos el concepto de trabajo. (Bedford, 2010 p 579)

Trabajo Consideremos una fuerza que actúa sobre un cuerpo en un punto P (Fig. 1a). Supongamos que el cuerpo sufre un movimiento infinitesimal, de modo que P tiene un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ (Fig. 1b). El **trabajo** dU de F como resultado del desplazamiento $d\mathbf{r}$ se define como:

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

De la definición del producto punto, $dU = (|F| \cos\theta)|dr|$, donde θ es el ángulo entre F y $d\mathbf{r}$ (Fig. 1c). El trabajo es igual al producto de la componente de F en la dirección de $d\mathbf{r}$ y la magnitud de $d\mathbf{r}$. Note que, si la componente de F paralela a $d\mathbf{r}$ apunta en la dirección opuesta a $d\mathbf{r}$, el trabajo es negativo. También, si F es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo es nulo. Las dimensiones del trabajo son (fuerza) x (longitud). Consideremos ahora un par

que actúa sobre un cuerpo (Fig. 2a). El momento debido al par es $M = Fh$ en sentido antihorario. Si el cuerpo gira un ángulo $d\alpha$ infinitesimal antihorario (Fig. 1b), los puntos de aplicación de las fuerzas se desplazan distancias diferenciales $0.5hd\alpha$, Entonces, el trabajo total realizado es $dU = F(0.5h d\alpha) + F(0.5h d\alpha) = M d\alpha$. (Bedford, 2010 p 581) Vemos que cuando un cuerpo sobre el que actúa un par M gira un ángulo $d\alpha$ en el mismo sentido que el par (Fig. 2c), el trabajo resultante es

$$dU = M d\alpha \quad (2)$$

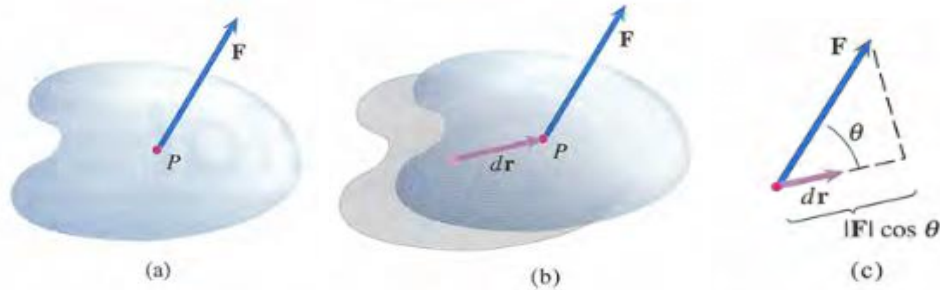


Figura 1.a) Fuerzas F actuando sobre un cuerpo; b) Desplazamiento dr de P ; c) Trabajo dU .
Fuente: Bedford (2007)

Si el sentido del par es opuesto al sentido de da , el trabajo es negativo.

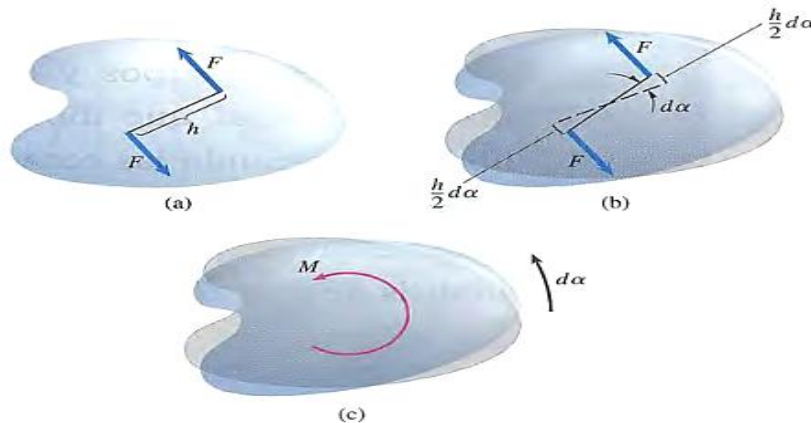


Figura 2. a) Par que actúa sobre un cuerpo; b) Giro infinitesimal del cuerpo; c) Un par M que actúa sobre un cuerpo que gira un ángulo $d\alpha$.
Fuente: Bedford. (2007)

2. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Ya que hemos definido el trabajo efectuado por fuerzas y pares, podemos establecer el principio del trabajo virtual. Pero antes analizaremos un ejemplo que facilite su comprensión. (Bedford, 2010 p 583)

La barra homogénea (a) está soportada por la pared y el soporte de pasador en A , y cargada por un momento par que llamaremos M . Luego, el DCL de la barra se observa en la figura (b). Las ecuaciones de equilibrio correspondientes son:

$$\sum F_x = A_x - N = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = A_y - W = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{punto A} = NL \text{ sen } \alpha - 0.5 WL \text{ cos } \alpha - M = 0 \quad (5)$$

A partir de estas tres ecuaciones podemos encontrar las reacciones A_x, A_y y N . Pese a ello, nuestro propósito es otro.

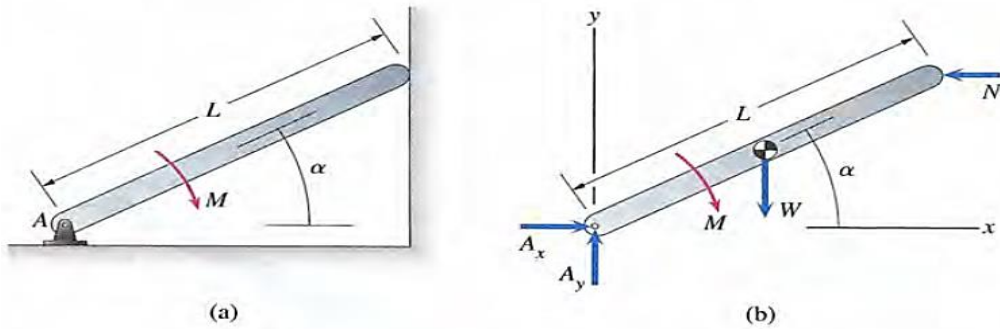


Figura 3. a) Barra sometida a un momento par M ; b) Diagrama de cuerpo libre de la barra.
Fuente: Bedford. (2007)

A partir de la figura 3, analizaremos con la siguiente pregunta: si las fuerzas y el par de la figura 3(b) actúan sobre la barra, y ésta se somete a una traslación infinitesimal *hipotética* en la dirección x , como se muestra en la figura 4, ¿qué trabajos efectúa? El desplazamiento hipotético se llama **desplazamiento virtual** de la barra, y el trabajo resultante δU se llama **trabajo virtual**. El soporte de pasador y la pared impiden que la barra se desplace en la dirección x ; el desplazamiento virtual es un artificio teórico. Nuestro objetivo es calcular el trabajo virtual resultante:

$$\delta U = A_x \delta x + (-N)\delta x = (A_x - N) \delta x \quad (6)$$

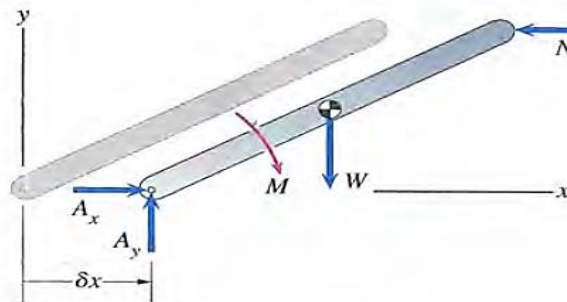


Figura 4. Desplazamiento virtual δx .
Fuente: Bedford. (2007)

Las fuerzas A_y y W no trabajan porque son perpendiculares a los desplazamientos de sus puntos de aplicación. El momento M tampoco trabaja porque la barra no gira. Comparando esta ecuación con la ecuación (3), encontramos que *el trabajo virtual es igual a cero*. A continuación, damos a la barra una traslación virtual en la dirección y (Fig. 5). El trabajo virtual resultante es:

$$\delta U = A_y \delta y + (-W)\delta y = (A_y - W) \delta y \quad (7)$$

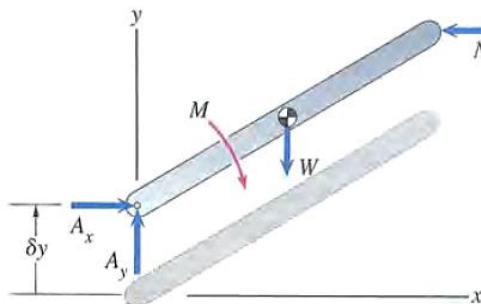


Figura 5. Desplazamiento virtual δy .
Fuente: Bedford. (2007)

Según la ecuación (4), de nuevo el trabajo virtual es igual a cero.

Finalmente, damos a la barra un giro virtual manteniendo el punto A fijo (6a). Las fuerzas A_x y A_y no trabajan porque sus puntos de aplicación no se desplazan. El trabajo efectuado por el par M es $-M \delta\alpha$ porque su sentido es opuesto al del giro. En la figura 6(b) se muestran los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas N y W , en la figura 6(c) aparecen las componentes de las fuerzas en la dirección de los desplazamientos. El trabajo efectuado por N es $(N \text{sen} \alpha)(L \delta\alpha)$, y el trabajo efectuado por W es $(-W \text{cos} \alpha)(\frac{1}{2} L \delta\alpha)$. Luego, el trabajo total es:

$$\delta U = (N \text{sen} \alpha)(L \delta\alpha) + (-W \text{cos} \alpha) \left(\frac{1}{2} L \delta\alpha \right) - M \delta\alpha$$

$$\delta U = (NL \text{sen} \alpha - \frac{1}{2} WL \text{cos} \alpha - M) \delta\alpha \quad (8)$$

De la ecuación (5), el trabajo virtual debido al giro virtual es también igual a cero.

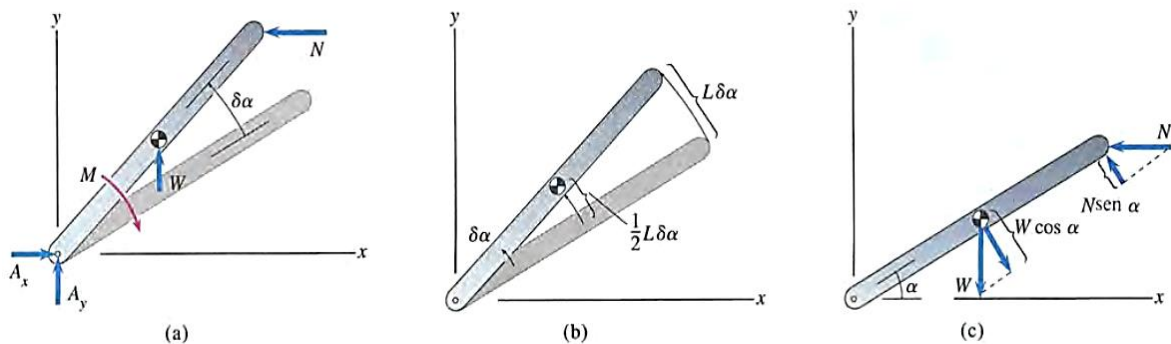


Figura 6. a) Giro virtual $\delta\alpha$; b) Desplazamientos de los puntos de aplicación N y W ;
c) Componentes de N y W en las direcciones de los desplazamientos.

Fuente: Bedford. (2007)

Por tanto, de lo anterior, se mostró que, para tres desplazamientos virtuales de la barra, el trabajo virtual es cero. Estos resultados son ejemplos de una forma del principio del trabajo virtual:

Si un cuerpo está en equilibrio, el trabajo virtual efectuado por las fuerzas y los pares externos que actúan sobre él es cero para cualquier traslación o giro virtual:
$$\delta U = 0$$

Como lo ilustra nuestro ejemplo, este principio se puede utilizar para deducir las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo. Sometiendo la barra a traslaciones virtuales δx y δy y a un giro virtual $\delta\alpha$, se obtienen las ecuaciones (6) - (8). Como el trabajo virtual debe ser igual a cero en cada caso, obtenemos las ecuaciones (3) - (5). Sin embargo, no obtenemos ninguna ventaja con este método, comparado con simplemente dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicarle las ecuaciones de equilibrio en la forma usual. Las ventajas del principio del trabajo virtual serán evidentes cuando consideremos estructuras.

3. APLICACIÓN A ESTRUCTURAS

Gracias al principio del trabajo virtual enunciado en la sección anterior tenemos aplicaciones al análisis de cada elemento de una estructura. Sometiendo ciertos tipos de estructuras en equilibrio a desplazamientos virtuales y calculando el trabajo virtual total, podemos determinar las reacciones desconocidas en sus soportes, así como las fuerzas internas en sus elementos. El procedimiento implica encontrar un

desplazamiento virtual que dé origen a la realización de trabajo virtual por parte de las cargas conocidas y por parte de una fuerza o un par desconocido. (Bedford, 2010 p 594)

Supongamos que queremos determinar la carga axial en la barra BD de la armadura de la figura 7(a). Las otras barras de la armadura están sometidas a la carga de 4 kN y a las fuerzas ejercidas sobre ellas por la barra BD (Fig. 7b). Si damos a la estructura un giro virtual $\delta\alpha$ como se muestra en la figura 7(c), entonces la fuerza T_{BD} que actúa en B y la carga de 4kN que actúa en C realizarán un trabajo virtual. Además, el trabajo virtual hecho por esas dos fuerzas es el trabajo virtual total hecho sobre los elementos de la estructura, porque el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas entre sí se cancela.

Por ejemplo, consideremos la junta (Fig. 7d). La fuerza T_{BC} es la carga axial en el elemento BC . El trabajo virtual realizado en C sobre el elemento BC es $T_{BC}(1.4\text{ m})\delta\alpha$. Cuando sumamos el trabajo virtual realizado sobre los elementos para obtener el trabajo virtual total sobre la estructura, el trabajo virtual debido a la fuerza interna T_{BC} se cancela. (Si los elementos ejercen un *par* interno entre sí en C ; por ejemplo, como resultado de la fricción en el soporte de pasador, el trabajo virtual no se cancelaría.) Por consiguiente, podemos ignorar las fuerzas internas al calcular el trabajo virtual total sobre la estructura. Obteniendo:

$$\delta U = (T_{BD}\cos\theta)(1.4\text{m})\delta\alpha + (4\text{kN})(1.4\text{m})\delta\alpha = 0$$

$$\text{El ángulo } \theta = \text{arc tan } (1.4/1) = 54.5^\circ$$

Finalmente, resolviendo la ecuación indicada obtenemos:

$$T_{BD} = -6.88 \text{ kN}$$

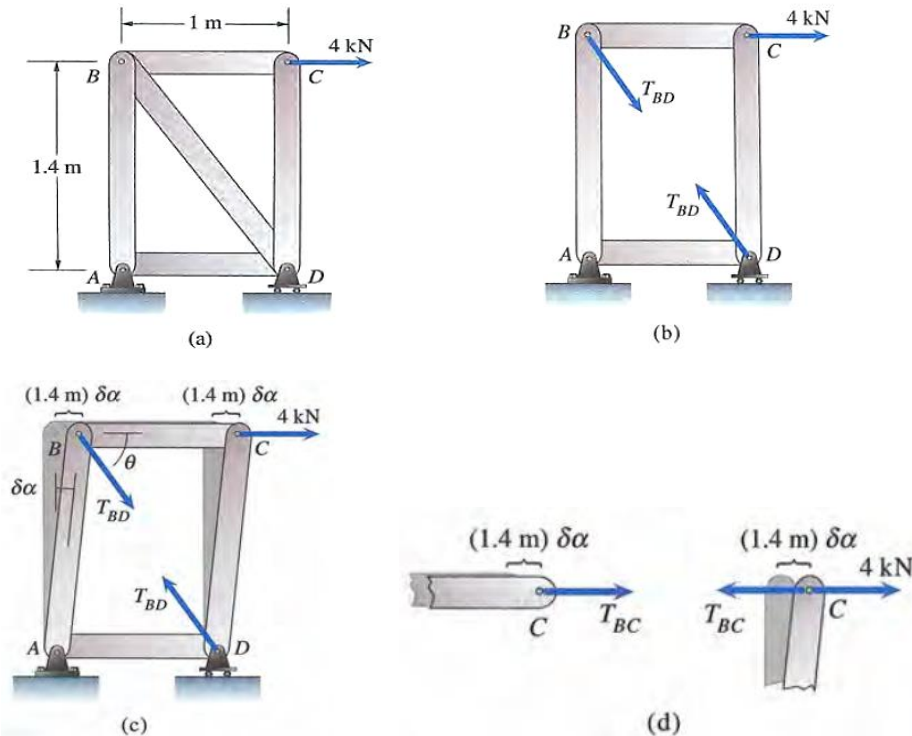


Figura 7. a) Armadura con carga; b) Fuerzas ejercidas por la barra BD ; Desplazamiento virtual de la estructura; d) Cálculo del trabajo virtual sobre las barras BC y CD en la junta C .

Fuente: Bedford. (2007)



PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 16

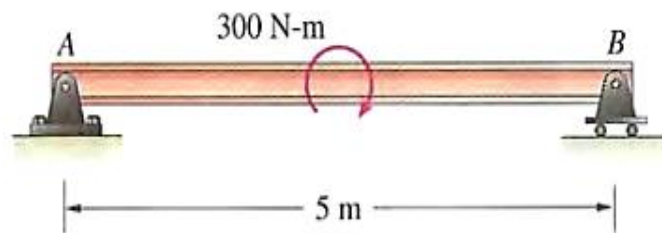
Tema: Método del trabajo virtual

Sección :
Docente : Escribir el nombre del docente
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

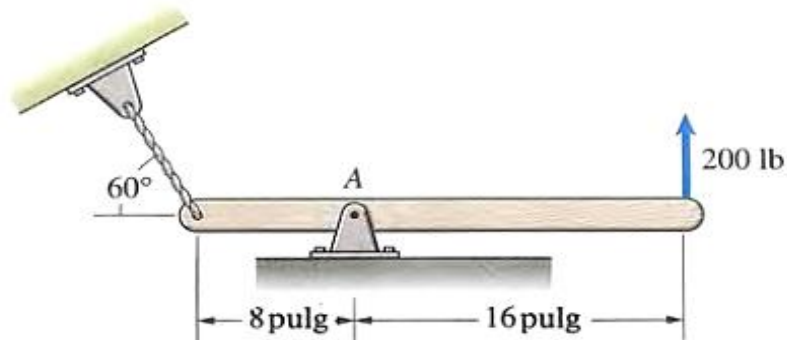
Apellidos :
Nombres :
Fecha : .../.../.....
Duración : Indicar el tiempo

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio en grupo de 5 integrantes considerando su diagrama y proceso. Evite borrones. El orden influirá en su calificación.

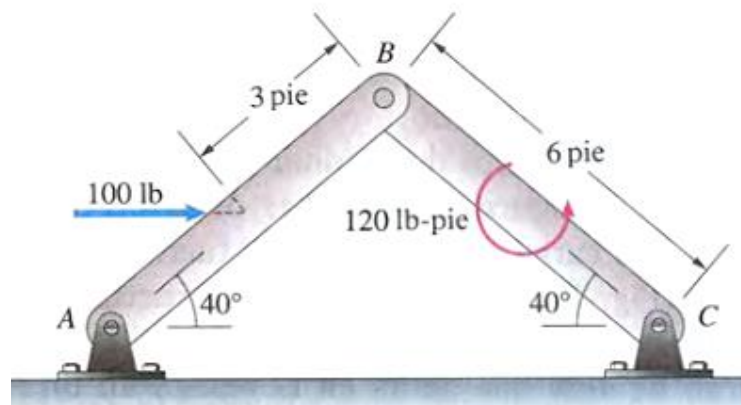
1. Determine la reacción en el punto B de la figura. *Estrategia:* Someta la viga a un giro virtual respecto al punto A .



2. Determine la tensión en el cable mostrado.

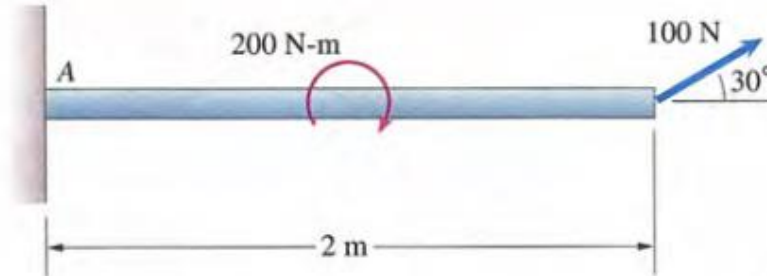


3. En la estructura de la figura, use el principio del trabajo virtual para determinar la reacción horizontal en C .

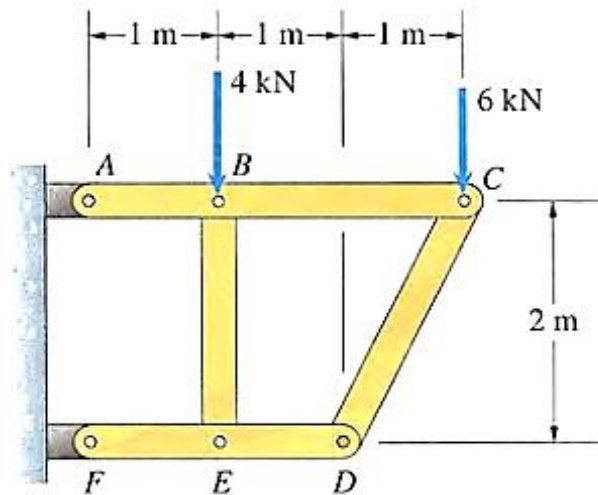




4. Para la estructura mostrada:
- (a) Determine el par ejercido sobre la viga en A.
 - (b) Determine la fuerza vertical ejercida sobre la viga en A.



5. El mecanismo mostrado está en equilibrio. Determine la fuerza R en función de F .



Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

Beer F., Jhonston R., (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

Hibbeler, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

Bedford Fowler. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

**ANEXOS****A. DERIVADAS E INTEGRALES.**

Tabla A.1 Derivadas de algunas funciones.

Nota: Las letras a y n son constantes.

$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$
$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax$	$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{a}{x}$
$\frac{d}{dx} \arcsen \frac{x}{a} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\frac{d}{dx} \arccos \frac{x}{a} = \frac{\mp 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\frac{d}{dx} \arctan \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc cot} \frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$
$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx}$

Tabla A.2 Algunas integrales indefinidas.

Nota: Las letras a , b , c y n son constantes.

Una constante arbitraria se debe sumar a cada una de estas integrales.

$\int dx = x$	$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} = -\arccos \frac{x}{a}$
$\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$	$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$



$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$	$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$
$\int a^x dx = \frac{a}{\log a}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} ax)$
$\int \ln ax dx = x \ln ax - x$	$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax)$
$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$	$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a+be^{cx})$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, a^2-x^2 > 0$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$
$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$	$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$
$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$	$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x$
$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$	$\int \operatorname{arcsin} ax dx = x \operatorname{arcsin} ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$
$\int x\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2-x^2)^{3/2}$	$\int \operatorname{arccos} ax dx = x \operatorname{arccos} ax - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$



B. CANTIDADES Y UNIDADES

Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . .	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	rad/s
Área	Metro cuadrado	. . .	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	kg/m^3
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	. . .	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3} m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

†Unidad suplementaria (1 revolución = 2π rad = 360°).

‡Unidad básica.



C. MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Repaso de geometría y trigonometría

Los ángulos θ en la figura A-1 son iguales entre la línea transversal y las dos líneas paralelas.

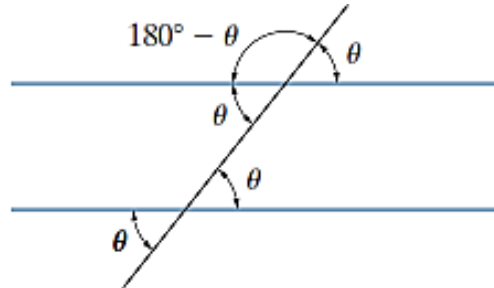
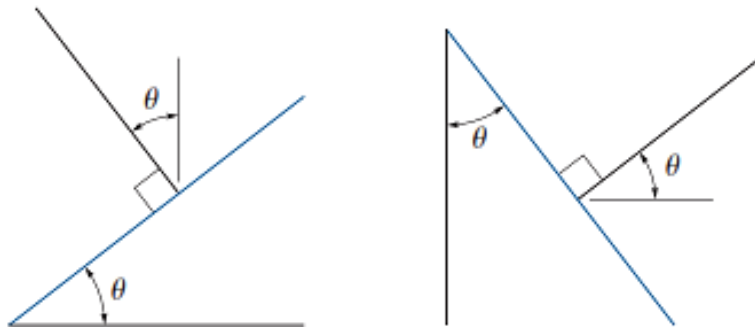


Fig. A-1

Para una línea y su normal, los ángulos θ de la figura A-2 son iguales.



Para el círculo de la figura A-3, $s = \theta r$, de manera que cuando $\theta = 360^\circ = 2\pi$ rad entonces la circunferencia es $s = 2\pi r$. Además, como $180^\circ = \pi$ rad, entonces θ (rad) = $(\pi/180^\circ)\theta^\circ$. El área del círculo es $A = \pi r^2$.

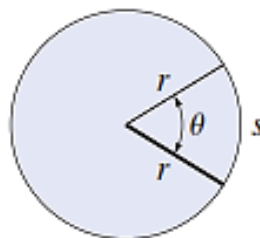


Fig. A-3



Los lados de un triángulo semejante se pueden obtener por proporción, como en la figura A-4, donde $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$.

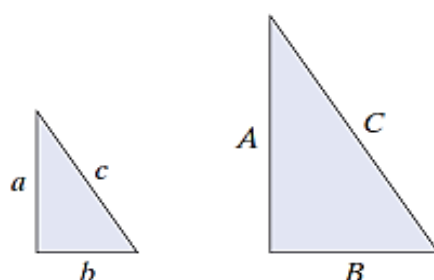


Fig. A-4

Para el triángulo rectángulo de la figura A-5, el teorema de Pitágoras es

$$h = \sqrt{(o)^2 + (a)^2}$$

Las funciones trigonométricas son

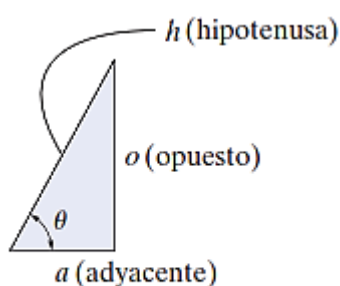


Fig. A-5

$$\text{sen } \theta = \frac{o}{h}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{a}{h}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{o}{a}$$

Lo anterior puede recordarse con facilidad como “soh, cah, toa”, es decir, el seno es el opuesto sobre la hipotenusa, etcétera. A partir de esto se obtienen las otras funciones trigonométricas.

$$\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{h}{o}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta} = \frac{h}{a}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{1}{\text{tan } \theta} = \frac{a}{o}$$



Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi \pm \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{cos}(\theta \pm \phi) = \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi \mp \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{cos} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 2\theta}{2}}, \operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 2\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta$$

Fórmula cuadrática

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BÁSICA

- Beer F., Johnston R., Eisenbenberg E., (2013). Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática. Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

COMPLEMENTARIA

- Hibbeler R. C. (2013). Ingeniería Mecánica. Estática. Décimo segunda edición. Pearson Educación de México, S.A. De C.V. México.
- Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). Mecánica para Ingenieros. Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté, S.A. España.
- Bedford A. y Fowler W. (1996). Mecánica para Ingenieros. Estática. Primera Edición. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.
- Riley W.F. y Sturges L.D. (1995). Ingeniería Mecánica. Estática. Primera edición. Editorial Reverté, S.A. España.
- Castillo Basurto J. L. (2006). Estática para Ingenieros y Arquitectos. Segunda Edición. Editorial Trillas, S.A. De C.V. México.
- Sandor B.I. Y Richter K.J. (1989). Ingeniería Mecánica. Estática. Segunda Edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México.

RECURSOS DIGITALES

BASES DE DATOS

- ProQuest - base de datos de información del mundo académico.
<http://formulario.continental.edu.pe/proquest/LoginForUser.as>

ENLACES DE INTERÉS

- Sistema de información científica REDALYC Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal.
<http://redalyc.uaemex.mx/>.