



Universidad  
Continental

# Matemática II

---

## Guía de Trabajo

---



## **Visión**

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

## **Misión**

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

**Universidad Continental**

Material publicado con fines de estudio

Código: UC0565

2017



## Presentación

La asignatura de Matemática II, está diseñada para desarrollar en el estudiante habilidades y competencias básicas que le permitan interpretar diversos tipos de información para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral.

Los contenidos en las siguientes guías de aprendizaje se dividen en cuatro unidades didácticas.

- Límites y continuidad
- Diferenciación
- Temas adicionales de diferenciación
- Trazado de curvas

El éxito en el manejo de este material exige primero la comprensión plena de conceptos definiciones y terminología desarrollada en las clases teóricas. Se recomienda revisar anticipadamente los ejercicios y problemas ya que son el suministro para la elaboración de prácticas calificadas y pruebas de desarrollo. El trabajo cooperativo, la formación de círculos de estudio, la revisión de información en la plataforma virtual, la comunicación constante, fluidos y sinceros con el docente son aspectos importantes que un estudiante realmente comprometido no debe descuidar.

*Los autores*



## ÍNDICE

Contenido	Página
VISIÓN .....	2
MISIÓN .....	2
PRESENTACIÓN.....	3
ÍNDICE.....	4
<b>PRIMERA UNIDAD: Límites y continuidad</b>	
Guía de práctica 1: Límites de una función, propiedades de los límites y cálculo de límites.....	6
Guía de práctica 2: Límites laterales, límites infinitos, asíntotas verticales, límites al infinito y asíntotas horizontales .....	10
Guía de práctica 3: Continuidad de una función, propiedades de la continuidad de una función .....	15
<b>SEGUNDA UNIDAD: Diferenciación</b>	
Guía de práctica 5: La derivada y su interpretación geométrica .....	19
Guía de práctica 6: Reglas para la diferenciación y la derivada como razón de cambio .....	22
Guía de práctica 7: Regla del producto y regla del cociente .....	26
Guía de práctica 8: Regla de la cadena.....	27
<b>TERCERA UNIDAD: Temas adicionales de diferenciación</b>	
Guía de práctica 9: Derivada de las funciones logarítmicas y derivada de funciones exponenciales .....	35
Guía de práctica 10: Elasticidad de la demanda y diferenciación implícita .....	39
Guía de práctica 11: Diferenciación logarítmica .....	44
<b>CUARTA UNIDAD: Trazado de curvas</b>	
Guía de práctica 12: Derivada de orden superior.....	46
Guía de práctica 13: Extremos relativos, extremos absolutos en intervalo cerrado .....	48
Guía de práctica 14: Concavidad .....	51
Guía de práctica 16: Aplicaciones de máximos y mínimos.....	53
Referencias bibliográficas .....	57



## **PRIMERA UNIDAD**

### **LÍMITES Y CONTINUIDAD**

#### *RESULTADO DE APRENDIZAJE*

Al finalizar la unidad, el estudiante estará en condiciones resolver ejercicios y problemas, mediante la utilización de los teoremas sobre límites y continuidad de funciones, de acuerdo a su carrera

Práctica N° 1: Límites

Práctica N° 2: Límites (Continuación)

Práctica N° 3: Límites laterales

Práctica N° 4: Límites infinitos y asíntotas verticales

Práctica N° 5: Límites al infinito y asíntotas horizontales

Práctica N° 6: Continuidad de una función



SEMANA N° 01

SESIÓN N° 01

TEMA: PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA Y EVALUACIÓN

SESIÓN N° 02

TEMA: LÍMITES

01. Encuentra el límite (Si existe)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1), \text{ por los tres métodos}$$

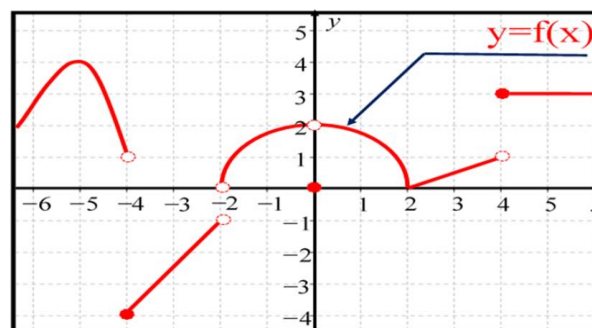
02. Encuentra el límite (Si existe)

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1), \text{ por los tres métodos}$$

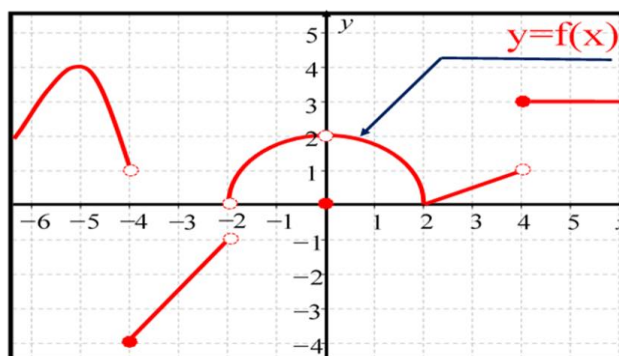
03. Encuentra el límite (Si existe)

$$\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} + 1), \text{ por los tres métodos}$$

04. Encuentre el límite (si existe) de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $-4$ .



05. Encuentre el límite (si existe) de  $f(x)$ , cuando  $x$  tiende a 4





SEMANA N° 02

SESIÓN N° 03  
TEMA: LÍMITES (PROPIEDADES)

Determine los siguientes límites

1)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}$  Rpta: 4

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$  Rpta:  $-\frac{1}{3}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$  Rpta: 2

4)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 7x + 6}$  Rpta:  $\frac{6}{5}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$  Rpta: 4

6)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{\sqrt{x} - 3}$  Rpta: -6

7)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{81 - x^2}$  Rpta:  $-\frac{1}{108}$

8)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$  Rpta: -3

9)  $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^3 + 1}{t^2 - 1}$  Rpta:  $-\frac{3}{2}$

10)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x^2}$  Rpta:  $-\frac{3}{2}$

11)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^3 - 64}$  Rpta:  $\frac{1}{192}$



12)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^3 - 729}{3 - \sqrt{x}}$  Rpta: -1458

13)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$  Rpta:  $\frac{1}{12}$

14)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2}$  Rpta: 4

15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$  Rpta:  $\frac{3}{2}$

16)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt{x+7} - \sqrt{8}}$  Rpta:  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

17)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$  Rpta:  $\frac{1}{12}$

18)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2}$  Rpta: 4

19)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$  Rpta:  $\frac{3}{2}$

01. Encuentre los límites en los siguientes ejercicios:

•  $\lim_{x \rightarrow 0} 16$

•  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5)$

•  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^3 - 4t + 3}$

•  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

•  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{x}$

02. Encuentre los límites en los siguientes ejercicios:

a.  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 5z - 4}{z^2 + 1}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 3x - 4}$

c.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 81}{x^2 + 8x + 15}$

d.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$

03. Encuentre:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 7(x+h) - 3x^2 - 7x}{h}$

considere a "x" como una constante.

04. Encuentre la constante c tal que

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + c}{x^2 - 5x + 6}$  exista. Para ese valor

de c, determine el límite. (sug: Encuentre el valor de c para el cual (x - 3) es un factor del numerador).





**05. Función de utilidad** La función de utilidad para cierto negocio está dada por  $p(x) = 225x - 3.2x^2 - 700$ . grafique esta función en su calculadora y use la función de evaluación para determinar.  $\lim_{x \rightarrow 40.2} P(x)$ , Utilice la regla acerca del límite de una función polinomial.

**06.** Encuentre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$  trate a  $x$  como una constante.

**07.** En los siguientes ejercicios, encuentre:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

**a.**  $f(x) = 5 + 2x$

**c.**  $f(x) = x^3 - 4x^2$

**b.**  $f(x) = x^2 + x + 1$

**d.**  $f(x) = 2 - 5x + x^2$



SEMANA N° 02

SESIÓN N° 04  
TEMA: LÍMITES LATERALES

Determine los siguientes límites

1)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & x \leq 3 \\ \frac{12-2x}{3} & x > 3 \end{cases}$

Rpta:  $\frac{5}{2}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+3)|x-2|}{x-2}$  Rpta: 5

3)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 5x - 24}{|x+3|}$  Rpta: 11

01. Encuentre el límite, Si el límite no existe indíquelo así o utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  donde sea apropiado.

a.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - x^2)$

f.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 4}{3 - 2x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2)$

g.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{3x^3 - x^2 + 2}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{x - 1}$

h.  $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|$

d.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x$

e.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4\sqrt{x-1})$

i.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{7}{x-3}\right)$

02. Encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo  $\infty$

o  $-\infty$  donde sea apropiado.  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } : x \leq 2 \\ 1 & \text{si } : x > 2 \end{cases}$

a.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

e.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



- 03. Costo promedio** Si "c" es el costo total de producir "q" unidades de cierto artículo, entonces el costo promedio por unidad para una producción de "q" unidades está dada por  $\bar{c} = \frac{c}{q}$ . Por lo tanto, si la ecuación de costo total es  $c=5000+6q$ , entonces  $\bar{c} = \frac{5000}{q} + 6$

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es de \$5030 y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es de \$1006. Por medio de la determinación de  $\lim_{q \rightarrow \infty} \bar{c}$  demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

- 04. Costo promedio** Repita el problema 3, considerando que el costo fijo es de \$12000 y que el costo variable está dado por la función  $cv=7q$ .

- 05. Población** se pronostica que dentro de "t" años la población de cierta ciudad pequeña será:  $N = 40000 - \frac{5000}{t+3}$

Determine la población a largo plazo, esto es, determine.  $\lim_{t \rightarrow \infty} N$



SEMANA N° 03

SESIÓN N° 05  
TEMA: LÍMITES INFINITOS Y ASÍNTOTAS VERTICALES

Determine los siguientes límites:

1)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2}{x^2 - 9}$  Rpta:  $-\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4x}{9 - x^2}$  Rpta:  $-\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 + 4x + 4}$  Rpta:  $-\infty$

4)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x - 5}$  Rpta:  $\infty$

5)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1}$  Rpta:  $-\infty$

6)  $\lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{6 - 35x - 6x^2}{x^2 + 12x + 36}$  Rpta:  $\infty$

7)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{5 - \sqrt{x^2 + 9}}{x^2 - 8x + 16}$  Rpta:  $-\infty$

01. Encuentre el límite, Si el límite no existe indíquelo así o utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  donde sea apropiado

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$

b.  $\lim_{h \rightarrow 1^+} \sqrt{h - 1}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{5x\sqrt[3]{x}}$

d.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x - 3}$

e.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^2}{x^2 + 19x - 64}$

f.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2 - \frac{1}{x - 2})$

g.  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{\sqrt{16 - x^4}}$

h.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right|$

i.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{x} - \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right)$



02. Encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  donde sea apropiado.  $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si: } x \leq 3 \\ -1 + 3x - x^2 & \text{si: } x > 3 \end{cases}$

a.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

e.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

03. **Relación huésped-parasito** Para una relación particular huésped-parasito, se determinó que cuando la densidad del huésped (número de huésped por unidad de área) es  $x$ , el número de huéspedes parasitados en cierto periodo es:  $y = \frac{900x}{10 + 45x}$   
Si la densidad del huésped aumenta indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría  $y$ ?

04. Si:  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si: } x < 2 \\ x^3 + k(x+1) & \text{si: } x \geq 2 \end{cases}$  determine el valor de la constante  $k$  para lo cual existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

05. Grafique  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x + 3}$ , Utilice la gráfica para estimar  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  si existe. Utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  cuando sea apropiado.

06. Grafique, si:  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{si: } x < 2 \\ 2x + 5 & \text{si: } x \geq 2 \end{cases}$  Utilice la gráfica para estimar cada uno de los límites siguientes, si existen.

a.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$



SEMANA N° 03

SESIÓN N° 06  
TEMA: LÍMITES AL INFINITOS Y ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Determine los siguientes límites

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$  Rpta: 2

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 5}{x^3 + 2x + 1}$  Rpta: 0

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x^2}{3x - 1}$  Rpta:  $\infty$

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$  Rpta: 2

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{3x^2 - x}}$  Rpta:  $-\frac{1}{3}$

6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1})$  Rpta: 0

7)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x} \right)$  Rpta: -1



SEMANA N° 04

SESIÓN N° 07  
TEMA: PRUEBA DE DESARROLLO 04

SESIÓN N° 08  
TEMA: CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Encuentre los valores de  $m$  y  $n$  de manera que la función sea continua:

1)  $f_{(x)} = \begin{cases} 1-3x & ; x < 4 \\ mx^2 + 2x - 3 & ; x \geq 4 \end{cases}$  Rpta:  $m = -1$

2)  $f_{(x)} = \begin{cases} nx + 3 & ; x \geq 1 \\ 3 - nx & ; x < 1 \end{cases}$  Rpta:  $n = 0$

3)  $f_{(x)} = \begin{cases} mx - n & ; x < 1 \\ 5 & ; x = 1 \\ 2mx + n & ; x > 1 \end{cases}$  Rpta:  $m = \frac{10}{3}$  y  $n = \frac{-5}{3}$

4)  $f_{(x)} = \begin{cases} x + 2m & ; x < -2 \\ 3mx + n & ; -2 \leq x \leq 1 \\ 6x - 2n & ; x > 1 \end{cases}$  Rpta:  $m = \frac{4}{9}$  y  $n = \frac{14}{9}$



**06.** En los problemas utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

a.  $f(x) = x^3 - 5x; \quad x = 2$

b.  $f(x) = \frac{x-3}{5x}; \quad x = -3$

c.  $g(x) = \sqrt{2-3x} \quad x = 0$

**07.** En los ejercicios mostrados, determine si la función es continua en los puntos dados.

a.  $f(x) = \frac{x+4}{x-2}; \quad -2, 0$

b.  $h(x) = \frac{3}{x^2+9} \quad 3, -3$

c.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad 0, -1$

**08. Tarifas telefónicas** Suponga que la tarifa telefónica de larga distancia para una llamada hecha desde Hazleton, Pennsylvania, a Los Ángeles, California, es de \$0.08 por el primer minuto o fracción y de \$0.04 por cada minuto o fracción adicional. Si  $y = f(t)$  es una función que indica el cargo total y por una llamada de " $t$ " minutos de duración, bosqueje la gráfica de  $f$  para  $0 < t \leq 3\frac{1}{2}$ . Utilice esta gráfica para determinar los valores de  $t$  en los cuales ocurren discontinuidades, donde  $0 < t \leq 3\frac{1}{2}$ .

**09. Inventario** Bosqueje la gráfica de:

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600 & \text{si: } 0 \leq x < 5 \\ -100x + 1100 & \text{si: } 5 \leq x < 10 \\ -100x + 1600 & \text{si: } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

Una función como la anterior podría describir el inventario y de una compañía en el instante  $x$ ; ¿ $f$  es continua en 2?, ¿en 5?, ¿en 10?

**10.** Encuentre todos los puntos de discontinuidad:

a.  $f(x) = 3x^2 - 3$

b.  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si: } x \geq 0 \\ -1 & \text{si: } x < 0 \end{cases}$

c.  $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 2x - 15}$





**11.** En los ejercicios utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

a.  $f(x) = \frac{x}{8}; \quad x = 2$

b.  $h(x) = \frac{x+3}{x-3}; \quad x = -3$

c.  $f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x = -1$

**12.** En los ejercicios mostrados, determine si la función es continua en los puntos dados.

a.  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si: } x \geq 2 \\ x^2 & \text{si: } x < 2 \end{cases}$  en  $2, 0$

b.  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{6}$  en  $2, -2$

c.  $g(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$  en  $3, -3$

**13.** La función mayor entero,  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$  está definida como el entero más grande que es menor o igual a  $x$ , donde  $x$  es cualquier número real. Por ejemplo:  $\llbracket 3 \rrbracket = 3$ ;  $\llbracket 1,99 \rrbracket = 1$ ;  $\llbracket 0,125 \rrbracket = 0$ ;  $\llbracket -4,5 \rrbracket = -5$ . Bosqueje la gráfica de esta función para  $-3.5 \leq x \leq 3.5$ . Utilice su bosquejo para determinar los valores de "x" en los cuales ocurren discontinuidades.

**14.** Grafique  $g(x) = e^{-1/x^2}$ . Debido a que "g" no está definida en  $x=0$ , "g" es discontinua en 0. Con base en la gráfica de g,

$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si: } x \neq 0 \\ 0 & \text{si: } x = 0 \end{cases}$  ¿Es continua en 0?

**15.** Encuentre todos los puntos de discontinuidad:

a.  $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x^2 - 9}$

b.  $f(x) = \frac{2x - 3}{3 - 2x}$

c.  $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si: } x > 2 \\ 3 - 2x & \text{si: } x < 2 \end{cases}$



## SEGUNDA UNIDAD

### DIFERENCIACIÓN

***RESULTADO DE APRENDIZAJE***

Al finalizar la unidad, el estudiante estará en condiciones de identificar y resolver problemas, aplicando los teoremas, las reglas, las propiedades de las derivadas y la regla de la cadena, relacionados a su carrera.

Práctica N° 07: La derivada y su interpretación geométrica

Práctica N° 08: Reglas de diferenciación

Práctica N° 09: La derivada como una razón de cambio

Práctica N° 10: Regla del producto y regla del cociente (Problemas de aplicación)

Práctica N° 11: Regla de la cadena y regla de la potencia



SEMANA N° 05

SESIÓN N° 09

TEMA: LA DERIVADA Y SU INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

**GUIA DE PRÁCTICA N° 05: LA DERIVADA, SU INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y REGLAS PARA LA DIFERENCIACIÓN**

- 01.** En los siguientes ejercicios emplear la definición de la derivada.
- a.** si:  $f(x) = x$ ; calcular  $f'(x)$
- b.** si:  $y = -5x$  calcular  $\frac{dy}{dx}$
- c.** si:  $f(x) = 3$  calcular  $f'(x)$
- d.** si:  $y = x^2 + 3x + 2$  calcular  $y'$
- e.** si:  $H(x) = \frac{3}{x-2}$  calcular  $H'(x)$
- 02.** Encuentre la pendiente de la curva  $y = x^2 + 4$  en el punto  $(-2,8)$ .
- 03.** Encuentre la pendiente de la curva  $y = 1 - x^2$  en el punto  $(1,0)$ .
- 04.** En los ejercicios mostrados, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.
- a.**  $y = x + 4$ ;  $(3,7)$
- b.**  $y = 3x^2 - 4$ ;  $(1,-1)$
- c.**  $y = x^2 + 2x + 3$ ;  $(1,6)$
- 05.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x) = x^2 + x$  en el punto  $(-2,2)$ . Grafique la curva y la recta tangente. Observe que la recta tangente es una buena aproximación a la curva cerca del punto de tangencia.
- 06.** Diferencie las funciones
- a.**  $y = x^{80}$
- b.**  $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$
- c.**  $y = x^{3/4} + 2x^{5/3}$
- d.**  $f(x) = (2x^3)(4x^2)$
- e.**  $f(q) = \frac{3q^2 + 4q - 2}{q}$
- f.**  $f(x) = \frac{7x^3 + x}{6\sqrt{x}}$
- 07.** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = X^3 - 2X + 1$  en el punto  $(1,0)$ . Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla.
- 08.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $Y = \sqrt[3]{X}$  en el punto  $(-8,-2)$ . Grafique la función y en la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por  $(-8,-2)$  y parece ser tangente a la curva.



SEMANA N° 05

SESIÓN N° 10  
TEMA: REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

Calcule la derivada de las siguientes funciones:

1)  $f_{(x)} = \sqrt[4]{x^3}$  Rpta:  $\frac{3}{4 \sqrt[4]{x}}$

2)  $y = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$  Rpta:  $6x^2 - 2x + 3$

3)  $f_{(x)} = \frac{2}{3x^2}$  Rpta:  $-\frac{4}{3x^3}$

4)  $y = \frac{2}{(2x)^3}$  Rpta:  $-\frac{3}{4x^4}$

5)  $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$  Rpta:  $-\frac{4}{3 \sqrt[3]{x^5}}$

6)  $f_{(x)} = (2x^2 - 3x)(4x^2 + 4x - 5)$

Rpta:  $32x^3 - 12x^2 - 44x + 15$

7)  $y = \frac{3 - 2x - x^2}{x^2 - 1}$  Rpta:  $\frac{2}{(x+1)^2}$

8)  $f_{(x)} = \frac{x^2 - 4}{x - 3}$  Rpta:  $\frac{x^2 - 6x + 4}{(x - 3)^2}$

01. En los ejercicios mostrados emplee la definición de la derivada para encontrarla en cada caso.

a.  $\frac{d}{dx}(3 - 2x)$

b.  $\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

c.  $\frac{d}{dx}(x^2 + 4x - 8)$

d. si:  $p = 3q^2 + 2q + 1$  calcular  $\frac{dp}{dq}$

e. si:  $C = 7 + 2q - 3q^2$  calcular  $\frac{dC}{dq}$

f. si:  $f(x) = \sqrt{2x}$  calcular  $f'(x)$

02. Encuentre la pendiente de la curva  $y = 4x^2 - 5$  cuando  $x=0$ .

03. Encuentre la pendiente de la curva  $y = \sqrt{2x}$  cuando  $x=18$



- 04.** En los ejercicios, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.
- a.**  $y = \frac{4}{x+1}; (3,1)$
- b.**  $y = \frac{4}{1-3x}; (2,-1)$
- 05.** La derivada  $f(x) = x^3 - x + 2$  es  $f'(x) = 3x^2 - 1$ . Grafique  $f$  y su derivada  $f'$ . Observe que hay dos puntos sobre la gráfica de  $f$  donde la recta tangente es horizontal. Para los valores  $x$  de esos puntos, ¿Cuáles son los valores correspondientes de  $f'(x)$ ? ¿Por qué se esperan esos resultados? Observe los intervalos en los que  $f'(x)$  es positiva. Note que las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  tiene pendientes positivas en estos intervalos. Observe el intervalo donde  $f'(x)$  es negativa. Note que las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  tiene pendientes negativas en este intervalo
- 06.** Diferencia las funciones:
- a.**  $f(x) = x + 3$ .
- b.**  $f(x) = -9x^{1/3} + 5x^{-2/5}$
- c.**  $f(x) = x(3x^2 - 10x + 7)$
- d.**  $s(x) = \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 7x + 2)$
- e.**  $f(q) = \frac{3q^2 + 4q - 2}{q}$
- f.**  $f(w) = \frac{w-5}{w^5}$
- g.**  $f(x) = x^2(x-2)(x+4)$
- h.**  $w(x) = \frac{x^2 + x^3}{x^2}$
- i.**  $f(x) = \frac{7x^3 + x}{x^2}$
- 07.** Encuentre todos los puntos sobre la curva  $y = x^2 - 5x + 3$ , en los que la pendiente es 1.
- 08.** Si:  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ , evalúe la expresión  $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}} = -f'(x)$



SEMANA N° 06

SESIÓN N° 11  
TEMA: LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

01. Si:  $y = f(x) = \sqrt{2x+5}$  encuentre la razón de cambio promedio de "y" con respecto a "x" en el intervalo  $\langle 3; 3 + \Delta x \rangle$ , donde  $\Delta x$  está dado en la tabla siguiente:

$\Delta x$	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta y / \Delta x$						

Con base en sus resultados, estime la razón de cambio de "y" con respecto a "x" cuando  $x=3$

02. **Ingreso-educación** los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el número de años de educación en miembros de un grupo urbano particular. Encontraron que una persona con "x" años de educación, antes de buscar empleo regular puede esperar recibir un ingreso anual medio y anual, donde  $y = 5x^{5/2} + 5900$ ;  $4 \leq x \leq 16$   
Encuentre la razón de cambio del ingreso con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando  $x=9$ .
03. Encuentre la razón de cambio del volumen V de una pelota, con respecto a su radio r, cuando  $r=1.5m$  El volumen V de una pelota como una función de su radio está dado por  $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
04. **Fábrica de calcetas** La función de costo total de una fábrica de calcetas es estimada por Dean como  $c = -10484.69 + 6.750q - 0.000328q^2$  donde q es la producción en docenas de pares y c el costo total. Encuentre la función de costo marginal y evalúe cuando  $q=2000$ .
05. **Planta de luz y energía.** La función de costo total para una planta de luz y energía eléctrica es estimada por Nordin como  $c = 32.07 - 0.79q + 0.02142q^2 - 0.0001q^3$   $20 \leq q \leq 90$  donde "q" es la producción total en ocho horas (como porcentaje de la capacidad) y c el costo monetario total del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalúe cuando  $q=70$ .
06. **Concentración urbana** Suponga que las 100 unidades más grandes en estados unidos e1920 se clasificaron de acuerdo con su extensión (área de cada ciudad). Según Lotkan, la siguiente relación se cumple de manera aproximada:  $PR^{0.93} = 5000000$  aquí P es la población de la ciudad con la clasificación R respectiva. Esta relación se llama "ley de la concentración urbana" para 1920. Despeje P en términos de R y luego encuentre que tan rápido cambia la población con respecto a la clasificación.



- 07. Depreciación** Según el método de depreciación lineal, el valor  $v$  de cierta maquina después de  $t$  años está dada por  $V=120\,000-15\,500t$  donde  $0 \leq t \leq 6$ . ¿qué tan rápido cambia  $v$  con respecto a  $t$  cuando  $t=2$ ? ¿En cualquier momento?
- 08. Polilla de invierno.** En Nueva Escocia se realizó un estudio sobre la polilla de invierno (adaptado de Embree). Las larvas de la polilla caen al pie de los árboles huéspedes. A una distancia de  $x$  pies de la base del árbol, la densidad de larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de  $y$  donde  $y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2$ ;  $1 \leq x \leq 9$
- (a) ¿Con que rapidez cambia la densidad de larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando  $x=6$ ?
- (b) ¿Para qué valor de  $x$  disminuye la densidad de larvas a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?
- 09. función de costo** Para la función de costo  $c = 0.3q^2 + 3.5q + 9$ . ¿Qué tan rápido cambia  $c$  con respecto a  $q$  cuando  $q=10$ ?. Determine la razón de cambio porcentual de  $c$  con respecto a  $q$  cuando  $q = 10$ .

### PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 06: LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

- 01. Temperatura de la piel.** La temperatura aproximada  $T$  de la piel en términos de la temperatura  $T_e$  del medio ambiente está dada por  $T = 32.8 + 0.27(T_e - 20)$  donde  $T$  y  $T_e$  están en grados Celsius. Encuentre la razón de cambio de  $T$  con respecto a  $T_e$ .
- 02. Materia orgánica /diversidad de especies.** En estudio reciente sobre los mares de aguas poco profundos. Odum afirma que en tales aguas la materia orgánica total  $y$  (en miligramos por litro) es una función de la diversidad  $x$  de las especies (en número de especies por cada mil individuos). Si  $y = 100/x$ , ¿con que rapidez estará cambiando la materia orgánica total con respecto a la diversidad de especies cuando  $x=10$ ? ¿Cuáles la razón de cambio porcentual cuando  $x=10$ ?
- 03. Ingreso.** Para cierto fabricante el ingreso obtenido al vender  $q$  unidades de un producto está dado por  $r = 30q - 0.3q^2$
- (a) ¿Qué tan rápido cambia  $r$  con respecto a  $q$ ? cuando  $q=10$
- (b) Encuentre la razón de cambio relativo de  $r$  y
- (c) Encuentre la razón de cambio porcentual de  $r$ , redondeada al punto porcentual más cercano.
- 04. Ingreso.** Repita el problema 3 para la función de ingreso dada por  $r = 10q - 0.2q^2$ ;  $q = 25$
- 05. Peso de una rama.** El peso de una rama de un árbol está dado por  $w = 2t^{0.432}$  donde  $t$  es el tiempo. Encuentre la razón de cambio relativa de  $w$  con respecto a  $t$ .
- 06. Costo.** Un fabricante de bicicletas de montaña determino que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de \$200 y el costo marginal de \$150. Con base en esta información determine el costo total en producir 21 bicicletas por día.
- 07. Costo marginal y promedio.** Suponga que la función de costo para cierto producto es  $c = f(q)$ . si la razón de cambio relativa de  $c$  (con respecto a  $q$ ) es  $\frac{1}{q}$ , demuestre que la función de costo marginal y la función de costo promedio son iguales.  
En los problemas 8 y 9, utilice la capacidad de su calculadora grafica para derivar de manera numérica.



- 08.** Si la función de costo total para un fabricante está dada por  $C = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000$  donde  $c$  representa el costo, encuentre el costo marginal cuando se producen 10 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.
- 09.** La población de una ciudad dentro de  $t$  años está dada por  $P = 205000e^{0.04t}$  Encuentre la razón de cambio de la población con respecto al tiempo  $t$  dentro de tres años. Redondee su respuesta al entero más cercano





SEMANA N° 06

SESIÓN N° 12

TEMA: REGLA DEL PRODUCTO Y REGLA DEL COCIENTE (PROBLEMAS DE APLICACIÓN)

01. Diferencie las funciones:

a.  $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2)$

b.  $g(x) = (\sqrt{x} + 5x - 2)(\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x})$

c.  $h(z) = \frac{6 - 2z}{z^2 - 4}$

d.  $y = 1 - \frac{5}{2x + 5} + \frac{2x}{3x + 1}$

e.  $y = \frac{(9x - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$

f.  $y = 3x - \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1}}{x-2}$

02. Encuentre la pendiente de la curva  $y = (2x^2 - x + 3)(x^3 + x + 1)$  en  $(1, 12)$ .

03. **Función de consumo.** Para Estados Unidos (1922-1942), la función de consumo se estima por medio de la ecuación  $c = 0.6721I + 113.1$  Encuentre la propensión marginal del consumo.

04. **Función de consumo** Suponga que la función de consumo de un país está dada por  $c = \frac{9\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.3I}{\sqrt{I}}$  donde C e I se expresan en miles de millones.

- (a) Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de \$25 000 millones.
- (b) Determine la razón de cambio relativa de C con respecto a I cuando el ingreso es de \$ 25 000 millones.

05. **Propensiones marginales a consumir y ahorrar.** Suponga que la función de ahorro de un país es  $s = \frac{I - 2\sqrt{I} - 8}{\sqrt{I} + 2}$  donde el ingreso nacional (I) y el ahorro nacional(S) se mide en miles de millones. Encuentre la propensión marginal del país a consumir y su propensión marginal al ahorro cuando el ingreso nacional es de \$150 000 millones. (Sugerencia: pueden ser útil factor izar primero el numerador).

06. **Costo marginal.** si la función de costo total de un fabricante esta dad por  $c = \frac{6q^2}{q+2} + 6000$  encuentre la función de costo marginal.

07. **Costo marginal y costo promedio.** Dada la función de costo  $c = f(q)$  demuestre que si  $\frac{d}{dq}(\bar{c}) = 0$  entonces la función de costo marginal y la de costo promedio son iguales.

08. **Relación huésped- parásito.** Para un relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes que tienen parásitos es y, donde  $y = \frac{900x}{10 + 45x}$

¿A qué razón está cambiando el número de huéspedes que tienen parásitos con respecto a la densidad de huésped cuando  $x=2$ ?



## PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 06: REGLA DEL PRODUCTO Y REGLA DEL COCIENTE

01. Diferencie las funciones:

a.  $f(w) = (w^2 + 3w - 7)(2w^3 - 4)$

b.  $y = (5x + 3)(2x - 5)(7x + 9)$

c.  $z = \frac{2x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 5x + 3}$

d.  $q(x) = 2x^3 + \frac{5x + 1}{3x - 5} - \frac{2}{x^3}$

e.  $s(t) = \frac{t^2 + 3t}{(t^2 - 1)(t^3 + 7)}$

f.  $y = 3 - 12x^3 + \frac{1 - \frac{5}{x^2}}{x^2 + 5}$

02. Encuentre la pendiente de la curva  $y = \frac{x^3}{x^4 + 1}$  en  $(-1, -\frac{1}{2})$ .

03. **Acústica.** La persistencia del sonido en un recinto después de que la fuente del sonido se ha apagado se llama reverberación. El tiempo de reverberación RT del recinto es el periodo necesario para que el nivel de intensidad del sonido caiga a 60 decibeles. En el diseño acústico de un auditorio, puede utilizarse la formula siguiente para calcular el RT del recinto:  $RT = \frac{0.05v}{A + xv}$  Aquí v es el volumen del recinto, A la absorción total este y X el coeficiente de absorción del aire. Suponiendo que A y x son constantes positivas, demuestre que la razón de cambio de RT con respecto a V siempre es positiva: Si el volumen total del recinto se incrementa en una unidad. ¿Aumenta o disminuye el tiempo de reverberación?

04. **Depredador-presa.** En un experimento que estudio la relación depredador-presa, se determinó de manera estadística que el número de presas consumidas, y, por un depredador individual es una función de la densidad x de presas (el número de presas por unidad de área), donde  $y = \frac{0.7355x}{1 + 0.02744x}$  determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

05. **Beneficios de seguridad social.** En un estudio sobre los beneficios de la seguridad social, Feldstein diferencia una función de la forma  $f(x) = \frac{a(1+x) - b(2+n)x}{a(2+n)(1+x) - b(2+n)x}$  donde a, b y n son constantes. Feldstein determina que  $f(x) = \frac{-1(1+n)ab}{(a(1+x) - bx)^2(2+n)}$  Verifique esto. (Sugerencias: por conveniencia haga  $2+n=c$ ) después observe que la función f de Feldstein tiene la forma  $g(x) = \frac{A+Bx}{C+Dx}$  donde A, B, C, y D son constantes. Demuestre que  $g'(x)$  es una constante dividida entre una función no negativa de x. ¿Qué significa esto?

06. **Negocios** El fabricante de un producto encontró que cuando se producen 20 unidades por día, el costo promedio es de 4125. ¿Cuál es la razón de cambio relativa del costo promedio con respecto a la cantidad cuando  $q=20$ ?

07. Utilice el resultado  $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$  para encontrar  $y'$   
Si:  $y = (3x + 1)(2x - 1)(x - 4)$



SEMANA N° 07

SESIÓN N° 13  
TEMA: REGLA DE LA CADENA Y REGLA DE LA POTENCIA

SESIÓN N° 14  
TEMA: PRUEBA DE DESARROLLO 02

GUÍA DE PRÁCTICA N° 07: REGLA DE LA CADENA Y REGLA DE LA POTENCIA

1)  $f_{(x)} = \frac{x^2 - 4}{x - 3}$       Rpta:  $\frac{x^2 - 6x + 4}{(x - 3)^2}$

2)  $f_{(x)} = 3(4x^2 - 3)^5$       Rpta:  $120x(4x^2 - 3)^4$

3)  $y = 2(3x^3 + 2x)^8$   
Rpta:  $(144x^2 + 32)(3x^3 + 2x)^7$

4)  $f_{(x)} = 3x^2(4x^2 - 5)^6$   
Rpta:  $6x(28x^2 - 5)(4x^2 - 5)^5$

5)  $y = (x^2 + 2)(3x^2 - 5)^9$   
Rpta:  $2x(30x^2 + 49)(3x^2 - 5)^8$

6)  $f_{(x)} = (2x - 7)(4x^2 - 6)^7$   
Rpta:  $2(60x^2 - 196x - 6)(4x^2 - 6)^6$

7)  $g_{(x)} = \frac{3}{(4 - 9x)^4}$       Rpta:  $\frac{108}{(4 - 9x)^5}$

8)  $y = \frac{6}{(3x^3 - 5)^7}$       Rpta:  $-\frac{378x^2}{(3x^3 - 5)^8}$

20)  $f_{(x)} = \frac{4x^2}{(3x - 5)^6}$       Rpta:  $\frac{8x(-6x - 5)}{(3x - 5)^7}$

21)  $y = \frac{5x^3}{(2x + 3)^5}$       Rpta:  $\frac{5x^2(9 - 4x)}{(2x + 3)^6}$



22)  $f_{(x)} = 3 \sqrt[3]{9x^2 + 4}$  Rpta:  $\frac{18x}{\sqrt[3]{(9x^2 + 4)^2}}$

23)  $y = \frac{2}{\sqrt[4]{4 - x^2}}$  Rpta:  $\frac{x}{\sqrt[4]{(4 - x^2)^5}}$

24)  $f_{(x)} = 3x^2 \sqrt{4x - 7}$  Rpta:  $\frac{30x^2 - 42x}{\sqrt{4x - 7}}$

25)  $y = \frac{1}{2} x^2 \sqrt{16 - x^2}$  Rpta:  $\frac{32x - 3x^3}{2\sqrt{16 - x^2}}$

26)  $f_{(x)} = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 4}}$  Rpta:  $\frac{-2x^4 + 8}{\sqrt{(x^4 + 4)^3}}$

27)  $f_{(x)} = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$  Rpta:  $\frac{4x^3 - 12x^2}{\sqrt{(x^2 - 2x)^3}}$

28)  $y = \frac{4x^3}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$  Rpta:  $\frac{24x^4 - 20x^3}{\sqrt{(3x^2 - 2x)^3}}$

29)  $y = 6x^2 \sqrt{2x^2 - 3x}$  Rpta:  $\frac{36x^3 - 45x^2}{\sqrt{2x^2 - 3x}}$

30)  $f_{(x)} = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$  ;  $x = 4$

Rpta:  $x - 4y + 20 = 0$

31)  $y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$  ; en el punto (1 ; 2)

Rpta:  $3x + 2y - 7 = 0$

32)  $f_{(x)} = \frac{16x}{x^2 + 16}$  ;  $x = -2$

Rpta:  $12x - 25y - 16 = 0$

33)  $s_{(t)} = \sqrt{t^2 + 2t + 8}$  ; en el punto (2 ; 4)

Rpta:  $3x - 4y + 10 = 0$

34)  $f_{(x)} = \sqrt[3]{(9 - x^2)^2}$  ;  $x = 1$

Rpta:  $2x + 3y - 14 = 0$



35)  $f_{(x)} = \frac{6x^2}{\sqrt{x^2 - 64}}$  cuando  $x = 10$

Rpta:  $70x + 9y - 1600 = 0$

36) Determinar los puntos donde la gráfica de  $f_{(x)} = \frac{4x-2}{x^2}$  tiene recta tangente

horizontal.

Rpta: (1 ; 2)

37) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de  $f_{(x)} = \frac{x+1}{x-1}$

paralelas a la recta  $2y + x = 6$

Rpta:  $x + 2y - 7 = 0$  ;  $x + 2y + 1 = 0$

38) Si:  $f(x) = x^2 + 2$ , encuentre:

- Aplicando la definición de derivada de  $f(x)$
- La ecuación de la recta tangente en el punto (2,6)
- La ecuación de la recta normal en el punto (2,6)
- La gráfica de la función  $f(x)$ , la recta tangente del inciso (b) y la recta normal del inciso (c).

**77) Ecuación de demanda.** suponga que  $p = 250 - \sqrt{q^2 + 50}$ , es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.

- Encuentre la razón de cambio de  $p$  con respecto a  $q$
- Calcule la razón de cambio relativo de  $p$  con respecto a  $q$
- Determine la función de ingreso marginal.

Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de  $f_{(x)} = x^2 + x + 1$ ,

01. Encuentre  $y'$  en:

a.  $y = (x^2 - 4)^4$

b.  $y = \sqrt{5x^2 - x}$

c.  $y = x(x + 4)^4$

d.  $y = \left(\frac{2x}{x+2}\right)^4$

e.  $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-5}}$

f.  $y = \frac{(4x-2)^4}{3x^2+7}$

g.  $y = 8t + \frac{t-1}{t+4} - \left(\frac{8t-7}{4}\right)^2$



- 02.** Encuentre la pendiente de la curva  $y = (x^2 - 7x - 8)^3$  en el punto (8,0).
- 03.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.
- a.**  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}; (3, 1)$
- b.**  $y = (x + 3)^3; (-1, 8)$
- 04. Ecuación de demanda.** Suponga que  $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$  es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.
- a. Encuentre la razón de cambio de p con respecto a q.  
b. Calcule la razón de cambio relativa de p con respecto a q.  
c. Determine la función de ingreso marginal.
- 05. Producto de ingreso marginal.** Si  $p=k/q$ , donde k es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante y  $q=f(m)$  define una función que da el número total de unidades producidas al día por m empleados, demuestre que el producto del ingreso marginal es siempre igual a 0.
- 06. Función de costo** El costo c de producir q unidades de un producto está dado por  $c = 5500 + 12q + 0.2q^2$  si el precio p unidades está dado por la ecuación  $q=900-1.5p$  Utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando  $p=85$ .
- 07. Atlas de hospital** Una dependencia gubernamental de salud examinó los registros de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados por una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dada de alta al final de t días de hospitalización estaba dada por  $f(t) = 1 - \left(\frac{250}{250 + t}\right)^3$  encuentre  $f'(100)$  e interprete su respuesta.
- 08. Costo marginal** Si la función de costo total para un fabricante está dada por  $c = \frac{4q^2}{\sqrt{q^2 + 2}} + 6000$  encuentre la función de costo marginal.



SEMANA N° 08

SESIÓN N° 15  
TEMA: REPASO GENERAL

SESIÓN N° 16  
TEMA: REPASO GENERAL

PRÁCTICA DOMICILIARIA N°07: REGLA DE LA CADENA Y REGLA DE LA POTENCIA

01. Encuentre  $y'$  en:

a.  $y = (3 + 2x^3)^5$

b.  $y = \sqrt{3x^2 - 7}$

c.  $y = 4x^2 \sqrt{5x + 1}$

d.  $y = \sqrt[3]{\frac{8x^2 - 3}{x^2 + 2}}$

e.  $y = \frac{(8x - 1)^5}{(3x - 1)^3}$

f.  $y = \frac{(2x^3 + 6)(7x - 5)}{(2x + 4)^2}$

02. Encuentre la pendiente de la curva  $y = \sqrt{x+2}$  en el punto  $(7,3)$ .

03. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

a.  $y = \frac{\sqrt{7x+2}}{x+1}; \left(1, \frac{3}{2}\right)$

b.  $y = \frac{-3}{(3x^2 + 1)^3}; (0, -3)$



## SEMANA N° 08

### SESIÓN N° 16

#### TEMA: REPASO GENERAL

**01. Salario y educación.** Para cierta población, si  $E$  es el número de años de educación de una persona y  $S$  representa el salario anual promedio, entonces para  $E \geq 7$ ,

$$s = 340E^2 - 4360E + 42800$$

- (a) ¿Qué tan rápido estará cambiando el salario con respecto a la educación cuando  $E=16$ ?
- (b) ¿A qué nivel educativo la tasa del cambio del salario es igual a \$5000 por año de educación?

**02. Biología.** El volumen de una célula esférica está dado por  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , donde  $r$  es el radio. En un tiempo de  $t$  segundos, el radio (en centímetros) está dado por  $r = 10^{-8}t^2 + 10^{-7}t$ . Use la regla de la cadena para encontrar  $dV/dt$  cuando  $t=10$ .

**03. Presión en tejidos vivos.** Bajo ciertas condiciones, la presión  $p$  desarrollada en los tejidos vivos por la radiación ultrasónica está dada como una función de la intensidad de la radiación mediante la ecuación  $p = (2\rho VI)^{1/2}$ . Donde  $\rho$  (letra griega que se lee "ro") es la densidad del tejido afectado y  $V$  la velocidad de propagación de la radiación. Aquí  $\rho$  y  $V$  son constantes.

- a. Encuentre la razón de cambio de  $p$  con respecto a  $I$ .
- b. Encuentre la razón de cambio relativa de  $p$  con respecto a  $I$ .

**04. Demografía.** Suponga que para cierto grupo de 20000 nacimientos, el número de personas que alcanzan a vivir " $x$ " años es:

$$I_x = -0.000354x^4 + 0.00452x^3 + 0.848x^2 - 34.9x + 20000; 0 \leq x \leq 95.2$$

- a. Encuentre la razón de cambio de  $I_x$  con respecto a  $x$  y evalúe su respuesta para  $x=65$ .
- b. Encuentra la razón de cambio relativa y la razón de cambio porcentual de  $I_x$  cuando  $x=65$  redondee su respuesta a tres decimales.

**05. Contracción muscular** Un músculo tiene la capacidad de contraerse al estar sometido a una carga impuesta, por ejemplo, un peso. La ecuación  $(P + a)(v + b) = k$  se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular". Aquí,  $P$  es la carga impuesta al músculo,  $v$  es la velocidad de contracción de las fibras musculares y  $a$ ,  $b$  y  $k$  son constantes positivas. Expresé  $v$  como una función de  $P$ . Utilice su resultado para encontrar  $dv/dP$ .

**06. Economía** Suponga que  $pq=100$  es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante. Sea  $c$  el costo total y suponga que el costo marginal es 0.01 cuando  $q = 200$ . Utilice la regla de la cadena para encontrar  $dc/dp$  cuando  $q=200$ .

**07. Producto de ingreso marginal** Un empresario que emplea  $m$  trabajadores encuentra que ellos producen  $q = 2m(2m + 1)^{3/2}$  unidades de cierto artículo diariamente. El ingreso total  $r$  está dado por  $r = \frac{50q}{\sqrt{1000 + 3q}}$





- ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo más cercano) cuando hay 12 trabajadores?
- Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores
- Determine el producto de ingreso marginal cuando  $m=12$ .

**08.** Suponga que  $y = f(x)$  donde  $x = g(t)$  Dado que  $g(2) = 3$ ,  $g'(2) = 4$ ,  $f(2) = 5$ ,  $f'(2) = 6$ ,  $g(3) = 7$ ,  $g'(3) = 8$ ,  $f(3) = 9$ ,  $f'(3) = 10$ , determine el valor de  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2}$

**09. Negocios** Un fabricante determinó que, para su producto, el costo promedio diario (en cientos) está dado por  $\bar{C} = \frac{324}{\sqrt{q^2 + 35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}$

- Conforme la producción diaria crece, el costo promedio se aproxima a una cantidad constante. ¿Cuál es esta cantidad?
- Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.
- El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementaran a 18 unidades diarias el ingreso crecería a \$275. ¿Deberá realizar este aumento? ¿Por qué?



## TERCERA UNIDAD

### TEMAS ADICIONALES DE DIFERENCIACIÓN

#### *RESULTADO DE APRENDIZAJE*

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas, mediante el cálculo y la aplicación de derivadas exponenciales, logarítmicas, elasticidad de demanda, diferenciación implícita, método de newton y derivadas de orden superior relacionadas a su carrera.

Práctica N° 10: Derivada de las funciones logarítmicas

Práctica N° 11: Derivada de las funciones exponenciales

Práctica N° 12: Elasticidad de la demanda

Práctica N° 10: Diferenciación implícita

Práctica N° 11: Diferenciación logarítmica



SEMANA N° 10

SESIÓN N° 19

TEMA: DERIVADA DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS

01. Diferencie las funciones:

a.  $y = \frac{5 \ln x}{9}$

b.  $y = \ln(-x^2 + 6x)$

c.  $y = (ax + b)^3 \ln(ax + b)$

d.  $y = \ln[(5x + 2)^4 (8x - 3)^6]$

e.  $y = (x^2 + 1) \ln(2x + 1)$

f.  $y = \ln(x^3 \sqrt[4]{2x + 1})$

02. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \ln(x^2 - 3x - 3)$  cuando  $x=4$

03. **Ingreso marginal.** Encuentre la función de ingreso marginal si la función de demanda es  $p = \frac{25}{\ln(q + 2)}$

04. **Costo marginal.** Una función de costo total está dada por  $c = 25 \ln(q + 1) + 12$  encuentre el costo marginal cuando  $q=6$

05. **Costo marginal.** La función de costo promedio de un fabricante está dada por  $\bar{c} = \frac{500}{\ln(q + 20)}$  Encuentre el costo marginal (redondeado a dos decimales) cuando  $q=50$

06. Diferencie las funciones:

a.  $y = \ln(3x - 7)$

b.  $f(x) = \ln(4x^6 + 2x^3)$

c.  $y = \log_3(8x - 1)$

d.  $y = \ln x^3 + \ln^3 x$

e.  $y = \ln^2(2x + 11)$

f.  $y = \sqrt{4 + 3 \ln x}$

07. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x \ln x - x$  en el punto donde  $x=1$



- 08. Cambio en la oferta** la oferta de  $q$  unidades de un producto al precio  $p$  por unidad está dada por  $q(p) = 27 + 11\ln(2p + 1)$ . Encuentre la tasa de cambio de la oferta respecto al precio,  $\frac{dq}{dp}$ .
- 09. Percepción de sonido.** El nivel de un sonido  $L$ , medido en decibeles, percibido por el oído humano depende de los nivel de intensidad  $I$  de acuerdo con  $L = 10\log\frac{1}{I_0}$ , donde  $I_0$  es el umbral de audibilidad estándar. Si  $I_0 = 17$ , Encuentre  $\frac{dL}{dI}$ , la razón de cambio del nivel del sonido con respecto a la intensidad.
- 10. Biología.** En cierto experimento con bacterias, se observó que la actividad relativa de una colonia particular de bacterias está descrita por  $A = 6\ln\left(\frac{T}{a - T} - a\right)$  donde  $a$  es una constante y  $T$  es la temperatura del medio ambiente. Encuentre la razón de cambio de  $A$  con respecto  $T$ .



SEMANA N° 10

SESIÓN N° 20

TEMA: DERIVADA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

01. Diferencie las funciones:

a.  $y = \frac{ae^x}{b}$

b.  $y = x^2 e^{-x^2}$

c.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

d.  $y = (e^{2x} + 1)^3$

e.  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

f.  $y = e^{-x} \ln x$

02. Calcule la razón de cambio relativa de  $f(x) = 10^{-x} + \ln(8+x) + 0.01e^{x-2}$  cuando  $x=2$ . Redondee su respuesta a cuatro decimales.

03. **Finanzas.** Después de  $t$  años, el valor  $S$  de un capital  $P$  que se invierte a una tasa anual  $r$  compuesta continuamente está dada por  $S = Pe^{rt}$ . Demuestre que la razón de cambio relativa de  $S$  con respecto a  $t$  es  $r$ .

04. **Ahorro y consumo.** El ahorro  $S$  de un país (en miles de millones) está relacionado con el ingreso nacional (en miles de millones) mediante la ecuación  $S = \ln \frac{3}{2 + e^{-I}}$

a. Encuentre la propensión marginal al consumo como una función del ingreso.

b. Al millón más cercano, ¿Cuál es el ingreso nacional cuando la propensión marginal al ahorro es de  $1/7$ ?

05. En los problemas a y b, utilice las reglas de diferenciación para encontrar  $f'(x)$ . Luego use su calculadora gráfica para encontrar todas las raíces reales de  $f'(x)$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

a.  $f(x) = e^{2x^3 + x^2 - 3x}$

b.  $f(x) = x + e^{-x}$

06. Diferencie las funciones

a.  $y = e^{2x^2 + 3}$

b.  $y = xe^{ax}$

c.  $y = 5^{2x^3}$

d.  $y = x^5 - 5^x$

e.  $y = e^{2x}(x + 6)$

f.  $y = x^x$



- 07.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva  $y = e^x$  en el punto  $(1, e)$ . Demuestre que esta recta tangente pasa por  $(0,0)$  y que es la única recta tangente a  $y = e^x$  que pasa por  $(0,0)$ .

**Población.** La población en millones, del área más grande de Seattle dentro de  $t$  años, contados a partir de 1970, se estima por medio de  $p = 1.92e^{0.0176t}$ . Demuestre que  $dP/dT = kP$  donde  $k$  es una constante. Esto significa que, en cualquier momento, la razón de cambio de la población es proporcional a la población existente en dicho momento.

- 08.** Diferencie las funciones

**g.**  $y = e^{2x^2+3}$

**h.**  $y = xe^{ax}$

**i.**  $y = 5^{2x^3}$

**j.**  $y = x^5 - 5^x$

**k.**  $y = e^{2x}(x + 6)$

**l.**  $y = x^x$

- 09.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva  $y = e^x$  en el punto  $(1, e)$ . Demuestre que esta recta tangente pasa por  $(0,0)$  y que es la única recta tangente a  $y = e^x$  que pasa por  $(0,0)$ .

- 10. Población.** La población en millones, del área más grande de Seattle dentro de  $t$  años, contados a partir de 1970, se estima por medio de  $p = 1.92e^{0.0176t}$ . Demuestre que  $dP/dT = kP$  donde  $k$  es una constante. Esto significa que, en cualquier momento, la razón de cambio de la población es proporcional a la población existente en dicho momento.



## SEMANA N° 11

### SESIÓN N° 21

#### TEMA: ELASTICIDAD DE LA DEMANDA

#### GUIA DE PRÁCTICA N° 10: ELASTICIDAD DE DEMANDA Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

**01.** Encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de  $q$  o  $p$  y determine si la demanda es elástica, inelástica o tiene elasticidad unitaria.

**a.**  $p = 10 - 0.04q$      $q = 100$

**b.**  $p = \frac{500}{q+2}$      $q = 104$

**c.**  $q = \sqrt{500 - p}$      $p = 400$

**d.**  $q = (p - 50)^2$ ;  $p = 10$

**02.** Para la ecuación de demanda lineal  $p=13-0.05q$ , verifique si la demanda es elástica cuando  $p=10$ , inelástica cuando  $p=3$  y si tiene elasticidad unitaria cuando  $p=6.50$ .

**03.** ¿Para qué valor (o valores) de  $q$  las siguientes ecuaciones de demanda tienen elasticidad unitaria?

**a.**  $p = 336 - 0.25q$

**b.**  $p = 300 - q^2$

**04.** La ecuación de demanda para un producto es  $q = 500 - 40p + p^2$  Donde  $p$  es el precio por unidad y  $q$  es la cantidad de unidades demandadas (en miles). Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p=15$ , Si este precio de 15 se incrementa en  $\frac{1}{2}\%$ , ¿Cuál es el cambio aproximado en la demanda?

**05.** La ecuación de la demanda para cierto producto es  $q = \sqrt{3000 - p^2}$  Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p=40$  y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda si el precio de \$ 40 (dólares estadounidense) aumenta en 7 por ciento.

**06.** Para la ecuación de demanda  $p=500-2q$ , verifique si la demanda es elástica y el ingreso total es creciente para  $0 < q < 125$  .Compruebe que la demanda es inelástica y el ingreso total es decreciente para  $125 < q < 250$  .

**07.** Encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de  $q$  o  $p$  y determine si la demanda es elástica, inelástica o tiene elasticidad unitaria.

**a.**  $p = \frac{3000}{q}$ ;  $q = 300$

**b.**  $p = \frac{800}{2q+1}$ ;  $q = 24$

**c.**  $q = \sqrt{2500 - p^2}$ ;  $p = 20$

**d.**  $q = p^2 - 50p + 850$ ;  $p = 20$

**08.** La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es  $q = a\sqrt{b - cp^2}$  donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes positivas.

(a) Demuestre que la elasticidad no depende de  $a$ .

(b) Determine el intervalo de precios para el que la demanda es elástica.

(c) ¿Para qué precio existe elasticidad unitaria?



- 09.** Dada la ecuación de demanda  $q^2(1+p)^2 = p$ , determine la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p=9$ .
- 10.** La ecuación de demanda para un producto es  $q = \frac{60}{p} + \ln(65 - p^3)$
- (a) Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p=4$  y clasifique la demanda como elástica, inelástica o de elasticidad unitaria a este nivel de precio.
  - (b) Si el precio disminuye en 2% (de \$ 4.00 a \$3.92), use la respuesta al inciso (a) para estimar el cambio porcentual correspondiente en la cantidad vendida.
  - (c) ¿Resultarán los cambios del inciso (b) en un incremento o en una disminución en el ingreso? Explique su respuesta.
- 11.** La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es  $p = 50(151 - q)^{0.02\sqrt{q+19}}$
- (a) Encuentre el valor de  $dp/dq$  cuando se demanda 150 unidades.
  - (b) Con el resultado del inciso (a), determine la elasticidad puntual de la demanda cuando se demandan 150 unidades a este nivel. ¿Es la demanda elástica, inelástica o de elasticidad unitaria?
  - (c) Use el resultado del inciso (b) para estimar el precio por unidad si la demanda disminuye de 150 a 140 unidades.
  - (d) Si la demanda actual es de 150 unidades, ¿Debe el fabricante aumentar o disminuir el precio para incrementar su ingreso? (justifique su respuesta).
- 12.** Un fabricante de puertas de aluminio puede vender actualmente 500 puertas por semana a un precio de \$80 por unidad. Si el precio se reduce a \$75 por unidad, podrían venderse 50 puertas adicionales por semana. Estime la elasticidad actual de la demanda para las puertas y también el valor actual de la función de ingresos marginal del fabricante.
- 13.** Dada la ecuación de demanda  $p = 2000 - q^2$  donde  $5 \leq q \leq 40$  ¿Para qué valor de  $q$  es  $|\eta|$  en un máximo? ¿Para qué valor es un mínimo?





SEMANA N° 11

SESIÓN N° 22

TEMA: DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

01. Encuentre  $dy/dx$ , mediante diferenciación implícita

a.  $3x + 6y^2 = 1$

b.  $xy - y - 11x = 5$

c.  $5x^3y^4 - x + y^2 = 25$

d.  $(1 + e^{3x})^2 = 3 + \ln(x + y)$

02. Encuentre la pendiente de la curva  $4x^2 + 9y^2 = 1$  en el punto  $(0, \frac{1}{3})$ ; en el punto  $(x_0, y_0)$ .

03. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva  $x^3 + xy + y^3 = -1$  en los siguientes puntos  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(-1, 1)$ .

04. **Propensión marginal al consumo.** Los ahorros de  $S$  de un país se define implícitamente en términos de su ingreso nacional  $I$  por medio de la ecuación  $S^2 + \frac{1}{4}t^2 = SI + I$  donde  $S$  e  $I$  están en miles de millones. Encuentre la propensión marginal al consumo cuando  $I=16$  y  $S=12$ .

05. Encuentre  $dy/dx$ , mediante diferenciación implícita

a.  $2y^3 - 7x^2 = 5$

b.  $x^3 - y^3 = 3x^{2y} - 3xy^2$

c.  $y^2 + y = \ln x$

d.  $e^{x-y} = \ln(x - y)$

06. Encuentre la pendiente de la curva  $(x^2 + y^2)^2 = 4y^2$  en el punto  $(0, 2)$ .

07. Encuentre la razón de cambio de  $q$  con respecto a  $p$ .

a.  $p = \frac{20}{(q+5)^2}$

b.  $p = \frac{3}{q^2 + 1}$

08. **Escala física.** La relación entre la velocidad ( $v$ ), la frecuencia ( $f$ ) y la longitud de onda ( $\lambda$ ) de cualquier onda esta dada por  $v = f\lambda$ . Encuentre  $\frac{df}{d\lambda}$  por diferenciación implícita. (Trate a  $v$  como una constante). Luego demuestre que se obtiene el mismo resultado si primero se despeja  $f$  y en seguida se diferencia con respecto a  $\lambda$ .



- 09. Sustitución tecnológica.** Con frecuencia las tecnologías o productos nuevos tienden a reemplazar a los viejos equipamientos. Por ejemplo, la mayoría de las aerolíneas comerciales usan actualmente motores a chorros en vez de motores de propulsión. En su análisis de pronóstico de la sustitución tecnológica, Hurter y Rubenstein se refieren a la ecuación  $\ln \frac{f(t)}{1-f(t)} + \sigma \frac{1}{1-f(t)} = c_1 + c_2 t$  Donde  $f(t)$  es la participación en el mercado de un artículo sustituto en un tiempo  $t$  y  $c_1, c_2$  y  $\sigma$  (sigma) son consonantes. Verifique la afirmación de que la razón de sustitución es  $f'(t) = \frac{c_2 f(t) [1-f(t)]^2}{\sigma f(t) + [1-f(t)]}$ .



**SEMANA N° 12**

**SESIÓN N° 23**

**TEMA: PRUEBA DE DESARROLLO N° 03**



SEMANA N° 12

SESIÓN N° 23

TEMA: DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA

01. Encuentre  $y'$  por medio de diferenciación logarítmica

a.  $y = (3x + 4)(8x - 1)^2 (3x^2 + 1)^4$

b.  $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+1}$

c.  $y = \sqrt{\frac{x^2+5}{x+9}}$

d.  $y = \sqrt{\frac{(x+3)(x-2)}{2x-1}}$

e.  $y = (2x)^{\sqrt{x}}$

f.  $y = (3x+1)^{2x}$

02. Encuentre una ecuación de la recta tangente a:  $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^2$  en el punto donde  $x=0$

03. Encuentre una ecuación a la recta tangente a la gráfica de  $Y = X^X$  en el punto donde  $x=e$

04. Si:  $y = (3x)^{-2x}$ , determine el valor de  $x$  para el que la tasa de cambio porcentual de  $y$  con respecto a  $x$  es 60.

05. La ecuación de demanda para un disco compacto es  $q = 500 - 40p + p^2$  si el precio de \$15 se incrementa en  $\frac{1}{2}\%$ , encuentre el cambio porcentual correspondiente en el ingreso.

01. Encuentre  $y'$  por medio de diferenciación logarítmica:

a.  $y = (2x^2 + 1)\sqrt{8x^2 - 1}$

b.  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}$

c.  $y = \frac{x^2(1+x^2)}{\sqrt{x^2+4}}$

d.  $y = x^{x^2+1}$

e.  $y = \sqrt[3]{\frac{6(x^3+1)^2}{x^6e^{-4}}}$

02. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $Y = X^X$  en punto donde  $x=1$ .

03. Si:  $Y = X^X$ , encuentre la tasa relativa de cambio de  $y$  con respecto a  $x$ , cuando  $x=1$ .

Suponga que  $f(x)$  es una función positiva diferenciable, que  $g$  es un función diferenciable

04.  $y$  que  $y = [f(x)]^{g(x)}$  Utilice diferenciación logarítmica para demostrar que

$$\frac{dy}{dx} = [f(x)]^{g(x)} \left[ f'(x) \frac{g(x)}{f(x)} + g'(x) \ln(f(x)) \right]$$



## CUARTA UNIDAD

### TRAZADO DE CURVAS

#### *RESULTADO DE APRENDIZAJE*

Al finalizar la unidad, el estudiante estará en condiciones de resolver ejercicios y problemas, formulando el modelo matemático de la función cuando es creciente o decreciente, determinando valores críticos, localizando máximos y mínimos relativos, estableciendo la prueba de la primera derivada, relacionados a su carrera.

Práctica N° 13: Derivadas de orden superior

Práctica N° 14: Extremos relativos

Práctica N° 15: Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Práctica N° 16: Concavidad y puntos de inflexión

Práctica N° 17: Aplicaciones de máximos y mínimos



SEMANA N° 13

SESIÓN N° 25

TEMA: DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

01. Encuentre las derivadas que se indican:

a.  $y = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2; \quad y'''$

b.  $y = x^3 + e^x; \quad y^4$

c.  $f(x) = x^3 \ln x; \quad f'''(x)$

d.  $f(r) = \sqrt{9-r}; \quad f''(r)$

e.  $y = (3x+7)^5; \quad y''$

f.  $y = \ln \frac{(2x+5)(5x-2)}{x+1}; \quad y''$

02. Encuentre  $y''$

a.  $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

b.  $x^2 - y^2 = 16$

c.  $y^2 = 4x$

d.  $e^x + e^y = x^2 + y^2$

03. Si:  $x^2 + 3x + y^2 = 4y$ , encuentre  $\frac{d^2y}{dx^2}$  cuando  $x=0$ ;  $y=0$

04. Demuestre que la ecuación  $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$  se satisface cuando  $f(x) = (3x-5)e^{-2x}$

05. Encuentre la razón de cambio de  $f'(x)$  si:  $f(x) = (5x-3)^4$

06. **Costo marginal** si  $C = 0.2q^2 + 2q + 500$  es una función de costo, ¿Que tan rápido está cambiando el costo marginal cuándo  $q=97.357$ ?

07. **Ingreso marginal** si  $p = 400 - 40q - q^2$  es una ecuación de demanda, ¿Que tan rápido está cambiando el ingreso marginal cuándo  $q=4$ ?

08. Si:  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$ , determine los valores de  $x$  para los cuales  $f''(x) = 0$

09. Suponga que  $e^y = y^2 e^x$

(a) Determine  $\frac{dy}{dx}$  y exprese su respuesta solo en términos de  $y$ .

(b) Determine  $\frac{d^2y}{dx^2}$  y exprese su respuesta solo en términos de  $y$ .



10. Encuentre las derivadas que se indican:

- a.  $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1; \quad y''''$
- b.  $y = x^3 + e^x; \quad y^{(4)}$
- c.  $y = \frac{1}{x}; \quad y''''$
- d.  $y = (3x + 7)^5; \quad y''$
- e.  $y = \ln[x(x + a)]; \quad f''(y)$
- f. Si:  $y = e^{2\ln(x^2+1)}$ , encuentre  $y''$  cuando  $x=1$

11. Encuentre la segunda derivada:

- a.  $9x^2 + 16y^2 = 25$
- b.  $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = c$
- c.  $y^2 - 6xy = 4$
- d.  $xy + y - x = 4$
- e.  $x^2 + 2xy + y^2 = 1$
- f.  $y = e^{x+y}$

12. Encuentre la razón de cambio  $f''(x)$  si  $f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{1}{6\sqrt{x}}$

13. Suponga que  $e^y = y^2 e^x$

- (a) Determine  $\frac{dy}{dx}$  y exprese su respuesta solo en términos de  $y$ .
- (b) Determine  $\frac{d^2y}{dx^2}$  y exprese su respuesta solo en término de  $y$ .

14. Determine  $f''(x)$ . Luego use su calculadora gráfica para encontrar todas las raíces reales de  $f''(x)=0$ . Redondee sus respuestas a sus dos decimales.  $f(x) = 6e^x - x^3 - 15x^2$

15. Determine  $f''(x)$ . Luego use su calculadora grafica para encontrar todas las raíces reales de  $f''(x)=0$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.  $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{12} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$



SEMANA N° 13

SESIÓN N° 26

TEMA: EXTREMOS RELATIVOS

GUÍA DE PRÁCTICA N° 13: EXTREMOS RELATIVOS EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALO CERRADO

01. En los ejercicios mostrados, determine cuando la función es (a) creciente, (b) decreciente, (c) determine donde ocurren los extremos relativos. No trace la gráfica.

a.  $y = -x^3 - 1$

b.  $y = x^4 - 2x^2$

c.  $y = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 22x + 1$

d.  $y = -x^5 - 5x^4 + 200$

e.  $y = \frac{5}{x-1}$

f.  $y = e^x - e^{-x}$

g.  $y = (x^2 + 1)e^{-x}$

02. En los problemas mostrados, determine los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, los extremos relativos, la simetría y aquellas intersecciones que se pueden obtener de manera conveniente. Después bosqueja la gráfica.

a.  $y = x^2 - 3x - 10$

b.  $y = x^4 - 16$

c.  $y = x^4 - 2x^2$

d.  $y = \sqrt{x}(x^2 - x - 2)$

03. **Costo promedio.** Si  $c_f = 25000$  es una función de costo fijo, demuestre que la función de costo fijo promedio  $\bar{c}_f = c_f / q$  es una función decreciente para  $q > 0$ . Por lo que, cuando la producción  $q$  crece una unidad, se reduce la porción unitaria de costo fijo.

04. **Ingreso marginal.** Dada la función de demanda  $p = 500 - 5q$ , Encuentre cuando es creciente el costo marginal.

05. **Función de costo.** Para la función de costo  $C = \sqrt{q}$ , demuestre que los costos marginal y promedio son siempre decreciente para  $q > 0$ .

06. **Ingreso.** Para el producto de un fabricante, la función de ingreso está dada por  $r = 240q + 57q^2 - q^3$ . determine la producción necesaria para obtener un ingreso máximo

$$y = \frac{e^x(3-x)}{7x^2+1}$$

07. Sea:  $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x + 2$  exhiba las gráficas de  $f$  y  $f''$ , en la misma pantalla. Note que es en  $f'(x) = 0$  donde ocurren los extremos relativos de  $f$ .

08. En los problemas mostrados, determine cuando la función es (a) creciente, (b) decreciente (c) determine donde ocurren los extremos relativos. No trace la gráfica.

a.  $y = x^2 + 4x + 3$

b.  $y = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$

c.  $y = -3 + 12x - x^3$

d.  $y = \frac{9}{5}x^5 - \frac{47}{3}x^3 + 10x$

e.  $y = (1-x)^{2/3}$

f.  $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$







SEMANA N° 13

SESIÓN N° 27

TEMA: EXTREMOS ABSOLUTOS EN UN INTERVALO CERRADO

**01.** Encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado

a.  $f(x) = x^2 - 2x + 3, [0, 3]$

b.  $f(x) = -2x^2 - 6x + 5, [-3, 2]$

c.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1, [-1, 0]$

d.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2, [0, 1]$

e.  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 50, [0, 5]$

f.  $f(x) = x^{2/3}, [-8, 8]$

**02.** Encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado

a.  $f(x) = 3x^4 - x^6, [-1, 2]$

b.  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x - 2, [0, 4]$

c.  $f(x) = x^4 - 9x^2 + 2, [-1, 3]$

d.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, [0, 2]$

e.  $f(x) = (x - 1)^{2/3}, [-26, 28]$

f.  $f(x) = 0.2x^3 - 3.6x^2 + 2x + 1, [-1, 2]$

**03.** Considere la función  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 9$ , en el intervalo  $[-4, 9]$ .

(a) determine el o los valores (redondeados a dos decimales) de  $x$  en que  $f$  alcanza un valor mínimo.

(b) ¿Cuál es el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de  $f$ ?

(c) Determine el o los valores de  $x$  en que  $f$  alcanza un valor máximo.

(d) ¿Cuál es el valor máximo de  $f$ ?



SEMANA N° 14

SESIÓN N° 28

TEMA: CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

01. En los problemas mostrados, se da una función y su segunda derivada. Determine la concavidad de  $f$  y los valores de  $x$  en los que se presentan los puntos de inflexión.

a.  $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 1$ ;  $f''(x) = 6(2x + 1)(x - 2)$

b.  $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} - 2x^2$ ;  $f''(x) = (x - 1)(x + 2)^2$

c.  $f(x) = \frac{2 + x - x^2}{x^2 - 2x + 1}$ ;  $f''(x) = \frac{2(7 - x)}{(x - 1)^4}$

02. En los problemas d, determine la concavidad y los valores de  $x$  en los que se presentan los puntos de inflexión. No trace las gráficas.

a.  $y = -2x^2 + 4x$

b.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

c.  $y = x^4 - 8x^2 - 6$

d.  $y = 2x^{1/5}$

e.  $y = \frac{x + 1}{x - 1}$

f.  $y = \frac{\ln x}{2x}$

03. En los problemas mostrados, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; los máximos y mínimos relativos; los puntos de inflexión; la simetría y las intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Después bosqueje la gráfica.

a.  $y = x - x^2 + 2$

b.  $y = \frac{x^3}{3} - 5x$

c.  $y = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x$

d.  $y = (3 + 2x)^3$

e.  $y = x^2(x - 1)^2$

f.  $y = (x - 1)^2(x + 2)^2$

g.  $y = 2x^{2/3} - x$

h.  $y = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

04. Bosqueje la gráfica de una función continua  $f$  tal que  $f(2)=4$ ,  $f'(2) = 0$ ,  $f'(x) < 0$ , si  $x < 2$  y  $f''(x) > 0$ , si  $x > 2$

05. Grafique:  $y = -0.35x^3 - 4.1x^2 + 8.3x - 7.4$ , y con base en la gráfica, determine el número de:

(a) puntos máximos relativos

(b) puntos mínimos relativos

(c) puntos de inflexión.



**06.** Grafique  $y = x^5(x - 2.3)$ , con base en la gráfica, determine el número de puntos de inflexión. Ahora, pruebe que para cualquier  $a \neq 0$ , la curva  $y = x^5(x - a)$  tiene dos puntos de inflexión.

**07.** En los problemas mostrados, se da una función y su segunda derivada. Determine la concavidad de  $f$  y los valores de  $x$  en los que se presentan los puntos de inflexión.

a.  $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}; f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$

b.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}; f''(x) = \frac{6(3x^2+2)}{(x^2-2)^3}$

c.  $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2}; f''(x) = \frac{x(2x^2-3a^2)}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

**08.** En los problemas de mostrados, determine la concavidad y los valores de  $x$  en los que se presentan los puntos de inflexión. No trace las gráficas.

a.  $y = -74x^2 + 19x - 37$

e.  $y = 1 - \frac{1}{x^2}$

b.  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

c.  $y = 2x^4 - 48x^2 + 7x + 3$

f.  $y = \frac{x^2+1}{3e^x}$

d.  $y = \frac{a}{x^3}$

**09.** En los problemas mostrados, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; los máximos y mínimos relativos; los puntos de inflexión; la simetría y las intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Después bosqueje la gráfica.

a.  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$

e.  $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$

b.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

f.  $y = x^{\frac{1}{3}}(x - 8)$

c.  $y = 4x^3 - 3x^4$

d.  $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$

**10.** Bosqueje la gráfica de una función continua  $f$  tal que:

$$f'(4) = 0, f''(x) < 0, \text{ para } x < 4, \text{ y } f''(x) > 0, \text{ para } x > 4$$

**11.** Grafique la curva  $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$  y también la recta tangente a la curva en  $x=2$ . ¿está la curva arriba o debajo de la recta tangente? Con la base de su apreciación, determine la concavidad en  $x=2$ .

**12.** Si  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$  encuentre  $f'(x)$  y  $f''(x)$ . Observe que donde  $f'$  tiene un mínimo relativo,  $f$  cambia la dirección de su flexión (convexidad), ¿Por qué?

**13.** Si  $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 1$ , encuentre los valores (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de  $f$ .

**14.** Si  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ , determine los valores (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de  $f$



SEMANA N° 15

SESIÓN N° 29

TEMA: APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

GUÍA DE PRÁCTICA N° 16: APLICACIONES DE MÁXIMOS, MÍNIMOS Y OPTIMIZACIÓN

- Costo promedio.** Un fabricante determine que el costo total,  $c$ , de producir un artículo está dado por la función de costo  $c = 0.05q^2 + 5q + 500$  ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?
- Gastos de un automóvil.** El costo por hora de operar un automóvil está dado por  $C = 0.12s - 0.0012s^2 + 0.08$ , además:  $0 \leq s \leq 60$ . Donde  $s$  es la velocidad en millas por hora, ¿A qué velocidad es mínimo el costo por hora?
- Ingreso.** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es  $p = -5q + 30$  ¿a qué precio se maximizara el ingreso?
- Ingreso.** Suponga que la función de demanda para el producto de un monopolista es  $q = Ae^{-Bp}$  Para constantes positivas  $A$  y  $B$ . En términos de  $A$  y  $B$ , encuentre el valor de  $p$  para el cual se obtiene el ingreso máximo. ¿Puede explicar por qué su respuesta no depende de  $A$ ?
- Ganancia de peso.** Un grupo de biólogos estudio los efectos nutricionales producidos en ratas a las que se les administro una dieta que contiene 10% de proteína. La proteína consistió en levadura y harina de semilla de algodón. Al variar el porcentaje  $p$  de levadura en la mezcla de proteína, el grupo de biólogos encontró que el aumento de peso (promedio en gramos) de una rata en cierto periodo fue de  $f(p) = 170 - p - \frac{1600}{p+15}$   $0 \leq p \leq 10$   
Encuentre
  - El aumento máximo de peso
  - El aumento mínimo de peso.
- Utilidad.** Para un monopolista, el costo por unidad de producir un artículo es de \$3 y la ecuación de demanda es  $p = \frac{10}{\sqrt{q}}$  ¿Qué precio dará la utilidad máxima?
- Utilidad.** Para el producto de un monopolista la ecuación de demanda es  $p = 42 - 4q$  y la función de costo promedio es  $\bar{c} = 2 + \frac{80}{q}$ . Encuentre el precio que maximice la utilidad.
- Utilidad.** Para el producto de un monopolista la función de demanda es  $p = \frac{50}{\sqrt{q}}$  y la función de costo promedio es  $\bar{c} = \frac{1}{4} + \frac{2500}{q}$  encuentre el precio que maximice la utilidad.
- Utilidad.** Un fabricante puede producir cuando mucho 120 unidades de cierto articulo cada año. La ecuación de demanda para este producto es  $p = q^2 - 100q + 3200$  Determine la producción  $q$  que maximiza la utilidad máxima correspondiente.
- Costo** .Un fabricante ha determinado que para cierto producto el costo unitario promedio está dado por  $\bar{c} = 2q^2 - 42q + 228 + \frac{210}{q}$  donde  $3 \leq q \leq 12$ 
  - ¿a qué nivel dentro del intervalo  $[3, 12]$  debe fijarse la producción para minimizar el costo total? ¿Cuál es el total costo mínimo?
  - Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo  $[7, 12]$ , ¿Qué valor de  $q$  minimizaría el costo total?



**SEMANA N° 15**

**SESIÓN N° 30**

**TEMA: PRUEBA DE DESARROLLO N° 04**

**SEMANA N° 16**

**SESIÓN N° 31**

**TEMA: REPASO GENERAL**

- 01. Utilidad.** Los costos totales fijos de la empresa XYZ son de \$1200, los combinados de material y mano de obra son de \$2 por unidad y la ecuación de demanda es  $p = \frac{100}{\sqrt{q}}$  ¿Qué nivel de producción maximizara la utilidad? Demuestre que esto ocurrirá cuando el ingreso marginal sea igual al costo marginal. ¿Cuál es el precio cuando la utilidad es máxima?
- 02. Ingreso.** Una empresa de bienes raíces posee 100 departamentos tipo jardín. Cada departamento puede rentarse a \$400 por mes. Sin embargo. Por cada \$10 mensuales de incremento habrá dos departamentos vacíos sin posibilidad de ser rentados. ¿Qué renta por departamento maximizara el ingreso mensual?
- 03. Ingreso.** Una empresa de televisión por cable tiene 6400 suscriptores que pagan cada uno \$24 mensuales y puede conseguir 160 suscriptores más por cada reducción de \$0.50 en la cuota mensual. ¿Cuál será la cuota que maximice el ingreso y cual será este ingreso?
- 04. Utilidad.** Un fabricante de cierto producto encuentra que para las primeras 600 unidades que produce y vende la utilidad es de \$40 por unidad .La inutilidad por cada unidad producida más allá de 600 disminuye en \$0.05 por cada unidad adicional. Por ejemplo la utilidad total cuando produce y vende 602 unidades es  $600(40)+2(39.90)$ . ¿qué nivel de producción maximizara la utilidad?
- 05. Diseño de un recipiente.** Un fabricante de recipientes está diseñado una caja rectangular sin tapa y con base cuadrada que debe tener un volumen de  $32 \text{ pies}^3$  ¿Qué dimensiones debe tener la caja si se requiere utilizar la menor cantidad de material?
- 06. Diseño de un recipiente.** Una caja sin tapa y de base cuadrada va a construirse con  $192 \text{ pies}^2$  de material. Que dimensiones debe tener para que su volumen sea máximo?



**SEMANA N° 16**

**SESIÓN N° 32**

**TEMA: REPASO GENERAL**

- 01. Diseño de un recipiente.** Una lata cilíndrica sin tapa va a fabricarse con una cantidad fija de material  $K$  Para que el volumen sea máximo, demuestre que el radio y la altura deben ser iguales a  $\sqrt{K / (3\pi)}$
- 02. Utilidad.** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es  $p=600-2q$  Y la función de costo total es  $c = 0.2q^2 + 28q + 200$  Encuentre la producción y el precio que maximizan la utilidad y determina la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al fabricante, ¿Cuál sería entonces la producción y el precio que maximizan la utilidad? ¿Cuál sería entonces la utilidad?
- 03. Tamaño económico del lote.** Un fabricante debe producir anualmente 3000 unidades de un producto que se vende a una razón uniforme durante el año. El costo de producción de cada unidad es de \$12 y los costos por mantener inventarios (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales a 19.2% del valor promedio del inventario. Los gastos de operación por periodo de producción son de \$54. Encuentre el tamaño económico del lote.
- 04. Utilidad.** Para el producto de un monopolista, la función de costo es  $c = 0.004q^3 + 20q + 5000$  y la función de demanda es  $p = 450 - 4q$  Encuentre la producción de maximizar la utilidad.
- 05. Asistencia a un taller.** La empresa imperial educational services (IES), está considerando ofrecer un taller sobre asignación de recursos a directivos de la compañía Acme .Para que el ofrecimiento sea económicamente factible, IES considera que por lo menos 30 personas deben inscribirse y cubrir un costo de \$50 cada una Además, IES acepta reducir la cuota a todos en \$1.25 por cada persona adicional a las primeras 30. ¿Cuántas personas deben inscribirse para el ingreso de IES sean máximos? Suponga que el número máximo de asistentes se limita a 40 personas.
- 06. Costo de alquilar un motor.** La compañía Kiddie Toy planea alquilar un motor eléctrico el cual utilizara 80 000 caballos de fuerza- hora por año en subproceso de manufactura. Un caballo fuerza-hora es el trabajo hecho en un ahora por un motor de un caballo de fuerza. El costo anual de alquilar el motor es \$200 más \$0.40 por caballo de fuerza. El costo por caballo de fuerza. Hora de operar el motor es de \$0.008/N, donde N es el número de caballos de fuerza. ¿Qué tamaño de motor en caballos de fuerza, debe alquilarse para minimizar el costo?
- 07. Costo de transporte.** El costo de operar un camión sobre una autopista (excluyendo el salario del chofer) es  $0.165 + \frac{s}{200}$  por milla, donde  $s$  es la velocidad (estable) del camión en millas por hora. El salario del chofer es de \$18 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar el chofer para que un viaje de 700 millas resulte lo más económico posible?



- 08. Costo** Para un productor, el costo de fabricar un artículo es de \$30 por mano de obra y de \$10 por material; Los gastos indirectos son de \$20 000 por semana, la mano de obra se eleva a \$45 por artículo para las unidades que excedan de 5000. ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por artículo?
- 09. Utilidad.** La señora Jones tiene una agencia de seguros pequeña que vende póliza para una gran compañía de seguros. Por cada póliza vendida, la señora Jones, que no vende por sí misma las pólizas. Recibe una comisión de \$50 de líneas de seguros. De experiencias pasadas, la señora Jones ha determinado que cuando emplean  $M$  vendedores pueden vender  $q = m^3 - 15m^2 + 92m$  pólizas por semana. Ella paga a cada uno de los vendedores un salario semanal de \$1000 y sus gastos fijos por semana son \$3000. Su oficina actual solo puede tener cabida para 8 vendedores. Determine el número de vendedores que la señora Jones debe contratar para maximizar su utilidad semanal. ¿Cuál es la utilidad máxima correspondiente?
- 10. Utilidad** Una compañía manufacturera vende sacos de alta calidad a una cadena de tiendas. La ecuación de demanda para estos sacos es  $p=400-50q$  Donde  $p$  es el precio de venta por saco u  $q$  la demanda en miles de sacos Si la función de costo marginal de la compañía está dada por  $\frac{dy}{dx} = \frac{800}{q+5}$  demuestre que existe una utilidad máxima y determine el número de sacos que deben venderse para obtener esta utilidad máxima.
- 11. Tasa de rendimiento** Para construir un edificio de oficinas, los costos fijos son de \$1.44) es  $c = 10x[120000 + 3000(x-1)]$  El ingreso por mes es de \$60 000 por piso .¿Cuántos pisos darán una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión?(tasa de rendimiento= ingreso total/ costo total)





## Referencias bibliográficas

### BÁSICA:

- Haeussler, E. y Paul Richard, S. y Wood, R.J. (2015). *Matemáticas para administración y economía* (13ª ed.). México: Pearson Educación.

### COMPLEMENTARIA:

- Soo Tang, T. (2005). *Matemáticas para administración y economía* (3ª ed.). México: Cengage Learning Latín américa.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2011). *Pre cálculo: matemáticas para el cálculo* (5ª ed.). México.D.F.: Cengage Learning Latinoamérica. ISBN-10: 111134082X. ISBN-13:
- Demana, F. (2007). [et al]. *Pre cálculo: gráficas, numérico, algebraico* (7ª ed.). México: Editorial Pearson Educación.
- Larson, R. y Hosteler, R.P. (2010). *Pre cálculo* (7ª ed.). China: Editorial Reverte.
- Peterson, J. (2006). *Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica* (3ª reimpresión). México: Editorial CECSA.
- Zill, D. y Dewar, J. (2014). *Pre cálculo con avances de cálculo* (4ª ed.). Colombia: McGraw Hill.

### ENLACES RECOMENDADOS:

- Froeschi P., T. Calculus (10<sup>th</sup> ed.). Annotated instructors edition. The American Mathematical Monthly 2002; 109(7): 679 – 679.  
<http://search.proquest.Com/docview/203738053?accountid=146219>
- Heriberto, E.R., Torres, H. y Silva. Matemática E. Ingeniería: Nuevas Conexiones/mathematics and Engineering: New Connections. Ingeniare: Revista Chilena de Ingeniería 2007 15(3):216 – 219.  
<http://search.proquest.Com/docview/>
- Cálculo diferencial.  
<http://www.youtube.com/watch?v=igXtj49xxSY>