UNIVERSIDAD CONTINENTAL

Vive tu propósito

MATEMÁTICA II

GUÍA DE TRABAJO

VISIÓN

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

MISIÓN

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental
Material publicado con fines de estudio
Código: UC0565
2016

PRESENTACIÓN

La asignatura de Matemática II, está diseñada para desarrollar en el estudiante habilidades y competencias básicas que le permitan interpretar diversos tipos de información para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral.

Los contenidos en las siguientes guías de aprendizaje se dividen en cuatro unidades didácticas.

- Límites y continuidad
- Diferenciación
- Temas adicionales de diferenciación
- Trazado de curvas

El éxito en el manejo de este material exige primero la comprensión plena de conceptos definiciones y terminología desarrollada en las clases teóricas. Se recomienda revisar anticipadamente los ejercicios y problemas ya que son el suministro para la elaboración de prácticas calificadas y pruebas de desarrollo. El trabajo cooperativo, la formación de círculos de estudio, la revisión de información en la plataforma virtual, la comunicación constante, fluidos y sinceros con el docente son aspectos importantes que un estudiante realmente comprometido no debe descuidar.

Los compiladores

ÍNDICE

Contenido Página

PRIMERA UNIDAD

LÍMITES Y CONTINUIDAD

RESULTADO DE APRENDIZAJE:

Al finalizar la unidad, el estudiante estará en condiciones resolver ejercicios y problemas, mediante la utilización de los teoremas sobre límites y continuidad de funciones, de acuerdo a su carrera.

NOCIONES PRELIMINARES

Debes tener en cuenta las siguientes propiedades de productos notables:

PRODUCTO NOTABLE	RESULTADO	PROPIEDAD
$(a+b)^2$ El cuadrado de una suma	$a^2+2ab+b^2$ Ejemplo: $(x+3)^2=x^2+6x+9$ $(x+2)^2=x^2+4x+4$ $(2x+3)^2=4x^2+12x+9$ $(4x+1)^2=16x^2+8x+1$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$(a-b)^2$ El cuadrado de una diferencia	$a^2+2ab+b^2$ Ejemplo: $(x-1)^2=x^2-2x+1$ $(x-4)^2=x^2-8x+16$ $(3x-1)^2=9x^2-6x+1$ $(5x-3)^2=25x^2-30x+9$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
$(a+b)^3$ El cubo de una suma	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ Ejemplo: $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$ $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$ $(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
$(a-b)^3$ El cubo de una diferencia	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ Ejemplo: $(x-4)^3=x^3-12x^2+48x-64$ $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$ $(x-5)^3=x^3-15x^2+75x-125$	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
a^2-b^2 Diferencia de cuadrados	$(a+b)(a-b)$ Ejemplo: $x^2-4=(x+2)(x-2)$ $x^2-9=(x+3)(x-3)$ $x^2-16=(x+4)(x-4)$ $x^2-6=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$ $1-x^2=(1+x)(1-x)$ $25-x^2=(5+x)(5-x)$ $5-x^2=(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)$	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
a^3-b^3 Diferencia de cubos	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$ Ejemplo: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
a^3+b^3 suma de cubos	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ Ejemplo: $x^3+64=(x+4)(x^2-4x+16)$ $x^3+2=(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}x+2)$ $x^3+7=(x+\sqrt[3]{7})(x^2-\sqrt[3]{7}x+7)$	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

<table>
<tr>
<td>Resolver la siguiente ecuación cuadrática
$x^2 - 5x - 6 = 0$
<u>Resolución:</u>
$x^2 - 5x - 6 = 0$
$x \quad +1$
$x \quad -6$
Verificando, se tiene:
$-6x + x = -5x$
Luego: $(x+1)(x-6) = 0$
$Si: a.b = 0 \quad entonces \quad a = 0 \vee b = 0$
$x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 6 = 0$
$x = -1 \quad \vee \quad x = 6$</td>
<td>Resolver la siguiente ecuación cuadrática
$x^2 - 5x + 6 = 0$
<u>Resolución:</u>
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$x \quad -2$
$x \quad -3$
Verificando, se tiene:
$-3x - 2x = -5x$
Luego: $(x-2)(x-3) = 0$
$Si: a.b = 0 \quad entonces \quad a = 0 \vee b = 0$
$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$
$x = 2 \quad \vee \quad x = 3$</td>
</tr>
<tr>
<td>Resolver la siguiente ecuación cuadrática
$3x^2 - 5x - 12 = 0$
<u>Resolución:</u>
$3x^2 - 5x - 12 = 0$
$3x \quad +4$
$x \quad -3$
Verificando, se tiene:
$-9x + 4x = -5x$
Luego: $(3x+4)(x-3) = 0$
$Si: a.b = 0 \quad entonces \quad a = 0 \vee b = 0$
$3x + 4 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$
$x = \frac{-4}{3} \quad \vee \quad x = 3$</td>
<td>Resolver la siguiente ecuación cuadrática
$2x^2 + 3x - 20 = 0$
<u>Resolución:</u>
$2x^2 + 3x - 20 = 0$
$2x \quad -5$
$x \quad +4$
Verificando, se tiene:
$+8x - 5x = +3x$
Luego: $(2x-5)(x+4) = 0$
$Si: a.b = 0 \quad entonces \quad a = 0 \vee b = 0$
$2x - 5 = 0 \quad \vee \quad x + 4 = 0$
$x = \frac{5}{2} \quad \vee \quad x = -4$</td>
</tr>
</table>

TAREA DOMICILIARIA

1. Resolver: $(x+2)^2 + (x+3)^2 = 5$

2. Resolver: $(x-2)^2 - (x-3)^2 = 15$

3. Resolver: $(x-2a)^2 - (x+2a)^2 = 1$

4. Resolver: $(x-2)^3 - (x-3)^3 = 1$

5. Resolver: $(x-2)^3 - (x+2)^3 = -208$

SEMANA 01:

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Quizá usted ha estado en un estacionamiento en el que puede “aproximarse” al automóvil de enfrente, pero no quiere golpearlo ni siquiera rozarlo. Esta noción de estar cada vez más cerca de algo, pero sin tocarlo, es muy importante en matemática y está implícita el concepto de límite. Básicamente se hará que una variable “se aproxime” a un valor particular y se examinará en efecto que tiene sobre los valores de una función.

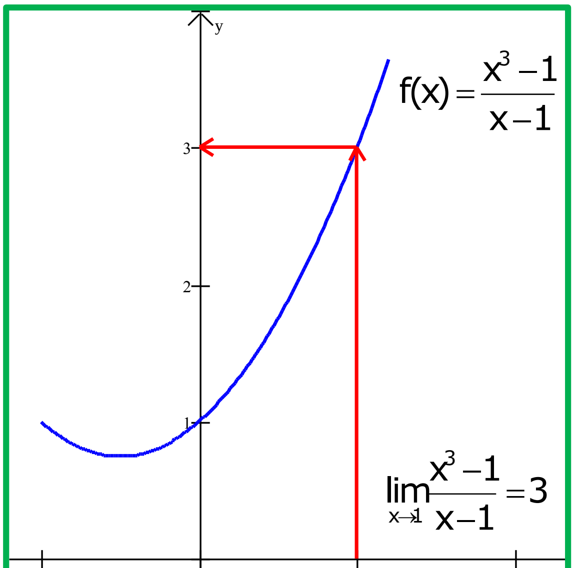


FIGURA 1.1

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$$

Aunque esta función no está definida en x=1, podría ser interesante observar que el comportamiento de los valores de la función cuando x se acerca mucho a 1. **En la tabla 1.1** se dan algunos valores de x. Observe que, a medida que x asume valores más y más próximos a 1, por la izquierda (x<1) o por la derecha (x>1) los valores de f(x) se acerca cada vez más al número 3. **En la figura 1.1** Observe que aunque la función no está definida en x=1 (como lo indica el pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan cada vez más a 3 conforme x se acerca más y más a 1.

Para expresar esto, se dice que el límite de f(x) cuando x se aproxima a 1 es igual a 3 y se escribe, así:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

Se puede hacer f(x) tan cercana a 3 como se desee, y mantenla así de cerca, al seleccionar un valor de x lo suficientemente cercano a 1, pero diferente de 1. El límite existe en 1, aunque 1 no se encuentre en el dominio de f.

Tabla 1.1

X<1		X>1	
X	**f(x)**	**X**	**f(x)**
0.800	2.440000	1.200	3.640000
0.900	2.710000	1.100	3.310000
0.950	2.852500	1.050	3.152500
0.990	2.970100	1.010	3.030100
0.995	2.985025	1.005	3.015025
0.999	2.997001	1.001	3.003001

Definición:

El límite de f(x) cuando “x” se aproxima a “a” es el número L, lo que se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

Siempre y cuando los valores de f(x) puedan volverse tan cercanos a L como se desee, y mantenerse así de cercanos, al asumir una x lo suficientemente cercana pero diferente de “a”. Si tal número no existe, se dice que el límite de f(x) no existe.

Debe enfatizarse que cuando es necesario encontrar un límite, no estamos interesados en lo que pasa con f(x) cuando “x” es igual a “a”, sino solamente en lo que le sucede a f(x) cuando “x” es cercana a “a”. De hecho, aun cuando el valor f(a) existiera, la definición anterior lo elimina de manera explícita. Además, un límite debe ser independiente de la manera en que “x” se aproxima a “a”. Esto es, el límite debe ser el mismo ya sea que “x” se acerque a “a” por la izquierda o por la derecha (para x<a o x>a, respectivamente).

EJEMPLO 01:
Traza la gráfica de la siguiente función:

$$y = \mathrm{f(x)} = \frac{\cos(3x - \frac{\pi}{2})}{x}$$

Luego, calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x - \frac{\pi}{2})}{x}$$

Resolución:

Se traza la gráfica de la función dada y además se realiza una tabulación para algunos valores aproximados a cero, obteniéndose lo siguiente:

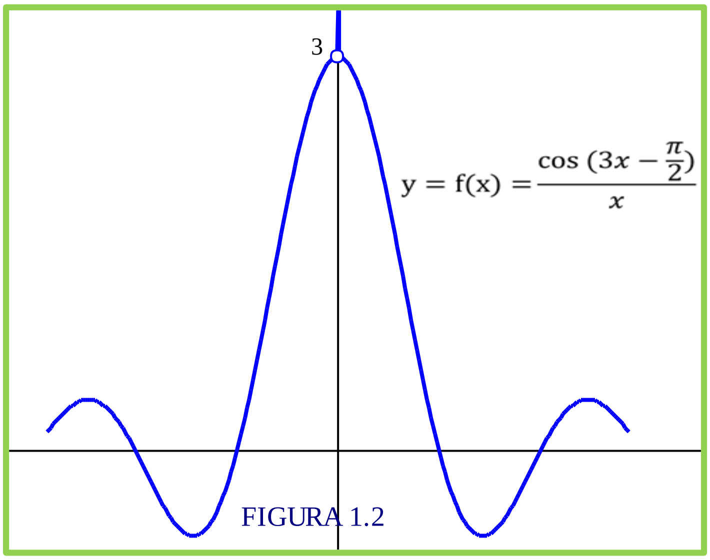


FIGURA 1.2

Tabla 1.2

x	y
-0.42000	2.26688
-0.36000	2.44988
-0.30000	2.61109
-0.24000	2.74744
-0.18000	2.85631
-0.12000	2.93562
-0.06000	2.98383
0.00000	Indefinido
0.06000	2.98383
0.12000	2.93562
0.18000	2.85631
0.24000	2.74744
0.30000	2.61109
0.36000	2.44988
0.42000	2.26688

Si observamos en la **figura 1.2** y la **tabla 1.2**, cada vez que el valor de “x” se aproxima por la izquierda y por la derecha a cero, el valor de “y” se acerca a 3, a pesar que no está definida para x = 0, entonces se tiene que:

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x - \frac{\pi}{2})}{x} = 3$$

EJEMPLO 02:
Traza la gráfica de la siguiente función:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10}$$

Luego, calcular:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10}$$

Resolución:
Se traza la grafica y se tabula para algunos valores de "x" y se obtiene:

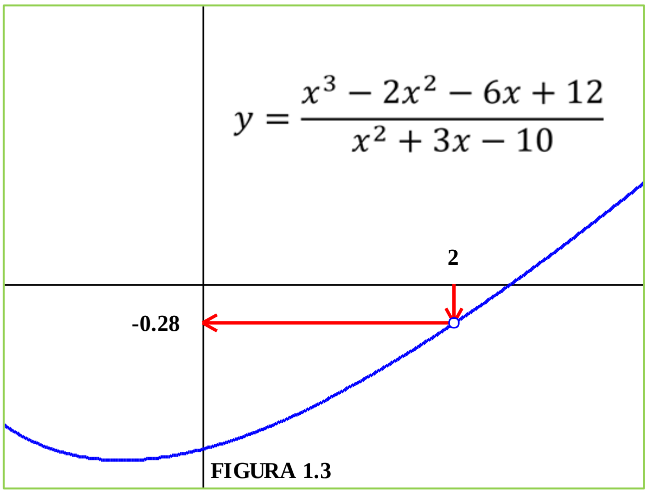


FIGURA 1.3

x	y
1.90000	-0.34638
1.92000	-0.33434
1.94000	-0.32225
1.96000	-0.31011
1.98000	-0.29794
2.00000	indefinido
2.02000	-0.27345
2.04000	-0.26114
2.06000	-0.24878
2.08000	-0.23638
2.10000	-0.22394

Tabla 1.3

Observando la **figura 1.3** y la **tabla 1.3** podemos concluir que:

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = -0{,}28$$

EJEMPLO 03: Limite que no existe

Estime $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si es que existe.

Resolución:

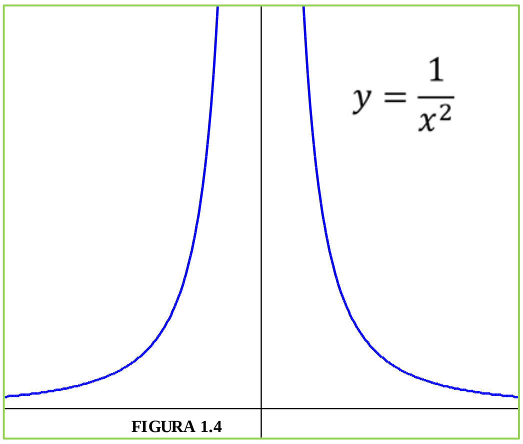


FIGURA 1.4

Tabla 1.4

x	y
-0.10000	100.00000
-0.08000	156.25000
-0.06000	277.77778
-0.04000	625.00000
-0.02000	2500.00000
0.00000	indefinido
0.02000	2500.00000
0.04000	625.00000
0.06000	277.77778
0.08000	156.25000
0.10000	100.00000

Sea y= $1/x^2$. La tabla 1.4 y la figura 1.4. Proporciona los valores de "y" para algunos valores de "x" cercanos a 0. Cuando "x" se acerca más y más a 0, los valores de "y" se hacen cada vez más grandes sin cota alguna. Como los valores de "y" no se acerca a ningún número cuando "x" se aproxima a 0, se concluye que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \text{ , no existe}$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Para determinar límites, no siempre deseamos calcular los valores de la función o hacer el bosquejo de una gráfica de manera alternativa, existen también varias propiedades razonables:

1. Si: f(x)=c, es una función constante entonces: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to 0} x^n = a^n$, para cualquier entero positivo n

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 01: Encuentre el límite de:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+8}{x+2}\right)$$

Resolución:

Si pretendiéramos aplicar el límite directamente, nos daría la forma $\frac{(-2)^3+8}{-2+2} = \frac{0}{0}$; por lo que, se debe factorizar y luego simplificar la expresión antes de poder reemplazar.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x^2-2x+4) = (-2)^2-2(-2)+4 = 4+4+4 = 12$$

$$\therefore \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+8}{x+2}\right) = 12$$

Ejemplo 02: Encuentre el límite de:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

Resolución:

No se puede aplicar el límite directamente, daría la forma indeterminada 0/0; no obstante, luego de multiplicar tanto el numerador como el denominador por la conjugada del numerador y luego reduciendo y simplificando, se puede aplicar el teorema de límite para calcular su valor.
Recuerda que la conjugada de $(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$ es $(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}^2-\sqrt{2}^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

GUÍA DE PRÁCTICA N° 01: LÍMITES DE UNA FUNCIÓN

01. Encuentre los límites en los siguientes ejercicios:

- $\lim\limits_{x\to 0} 16$
- $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5)$
- $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{t^3-4t+3}$
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$

02. Encuentre los límites en los siguientes ejercicios:

a. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^2-5z-4}{z^2+1}$

b. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4}$

c. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^4-81}{x^2+8x+15}$

d. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$

03. Encuentre: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2+7(x+h)-3x^2-7x}{h}$ considere a "x" como una constante.

04. Encuentre la constante c tal que $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x+c}{x^2-5x+6}$ exista. Para ese valor de c, determine el límite. (sug: Encuentre el valor de c para el cual (x – 3) es un factor del numerador).

05. **Función de utilidad** La función de utilidad para cierto negocio está dada por $p(x)=225x-3.2x^2-700$. grafique esta función en su calculadora y use la función de evaluación para determinar. $\lim\limits_{x\to 40.2} P(x)$, Utilice la regla acerca del límite de una función polinomial.

06. Utilice una calculadora graficadora para representar las funciones y luego estime los límites. Redondee sus respuestas a dos decimales.

a. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-2x^3+2x^2-2x-3}{x^2-9}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

c. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-10\sqrt{x}+21}{3-\sqrt{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$

PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 01: LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

01. Encuentre los límites de los siguientes ejercicios:

a. $\lim\limits_{x\to -2}(3x^3-4x^2+2x-3)$

b. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+6}{x-6}$

c. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{x}$

e. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2+5x-14}$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-2^2}{x}$

02. Encuentre $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ trate a x como una constante.

03. En los siguientes ejercicios, encuentre: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

a. $f(x)=5+2x$

b. $f(x)=x^2+x+1$

c. $f(x)=x^3-4x^2$

d. $f(x)=2-5x+x^2$

04. Encuentre el $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ (sugerencia: primero racionalice el numerador al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{x-2}+2$

SEMANA 02:

LÍMITES LATERALES INFINITOS Y AL INFINITO

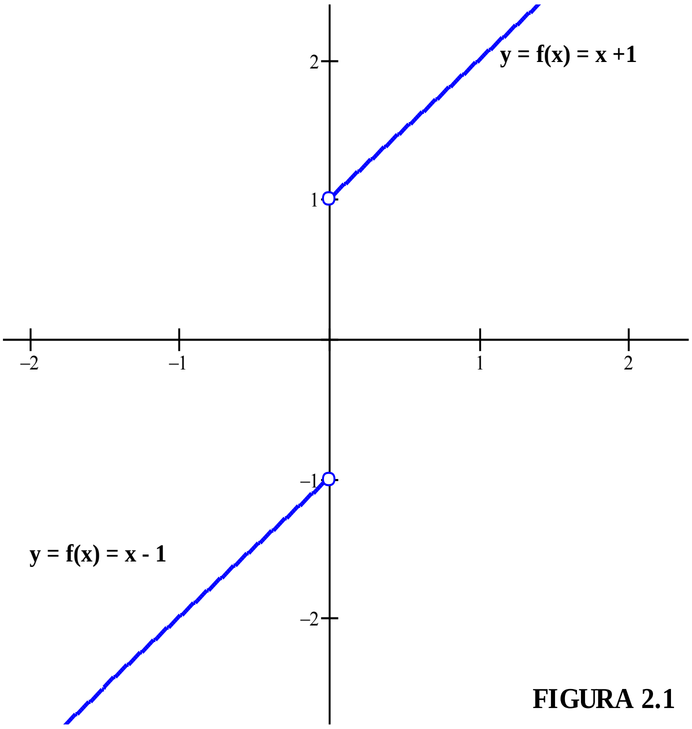


FIGURA 2.1

En la **figura 2.1** se muestra la gráfica de una función f. Observe que f(x) no está definida cuando x=0. Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, f(x) se aproxima a 1. Esto se escribe como:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1}$$

Por otra parte, cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, f(x) se aproxima a -1 y se escribe:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1}$$

Los límites de este tipo se conocen como limites unilaterales. El límite de una función a medida que $x \to a$ es independiente del modo en que x se aproxima a "a". Por lo tanto, el límite existirá si y solo si ambos limites existen y son iguales. Entonces se concluye que:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ no existe ,

LÍMITES INFINITOS

En la sección anterior se consideraron límites de la forma 0/0 esto es, límite en los que el numerador y denominador se aproximan a 0. Ahora se examinaran límites en los cuales el denominador se aproxima a 0, pero el numerador se aproxima a un número deferente de 0. Por ejemplo. Considere:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

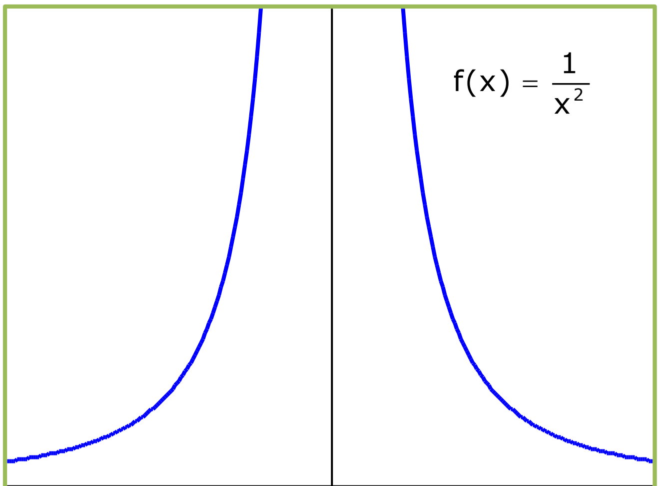


FIGURA 2.2

Tabla 2.1

x	y
-0.10000	100.00000
-0.08000	156.25000
-0.06000	277.77778
-0.04000	625.00000
-0.02000	2500.00000
0.00000	indefinido
0.02000	2500.00000
0.04000	625.00000
0.06000	277.77778
0.08000	156.25000
0.10000	100.00000

Aquí, cuando x se aproxima a 0, el denominador se aproxima a 0 y el numerador se aproxima a 1. A continuación se investigara el comportamiento de $f(x)=\frac{1}{x^2}$ cuando x es cercana a 0. El número x^2 es positivo y también cercano a 0. Por lo tanto, al dividir 1 entre tal número da como resultado un número muy grande. De hecho entre más cercana a 0 este x, mayor es el valor de f(x). Por ejemplo, vea la **tabla 2.1** y la **figura 2.2**, la cual también muestra la gráfica de f. Es claro que cuando $x \to 0$ tanto por la izquierda como por la derecha, f(x) aumenta indefinidamente. De aquí que no exista el límite en 0. Se dice que cuando $x \to 0$, f(x) se vuelve infinito positivamente y en forma simbólica, se expresa esta "limite infinito" al escribir

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty=\infty$$

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe, es posible que la razón no sea que los valores de f(x) se vuelvan arbitrariamente grandes cuando "x" se acerca a "a". Por ejemplo, vea de nuevo la situación. Aquí se tiene que

$$\lim_{x\to -2} f(x)\text{, no existe pero } \lim_{x\to -2} f(x)\neq\infty$$

LIMITES AL INFINITO

Ahora se examinará la función $f(x)=\frac{1}{x}$

Cuando x se vuelve infinito, primero en sentido positivo y después en sentido negativo. En la **tabla 2.2** puede verse que cuando "x" aumenta indefinidamente al tomar valores positivos, los valores de f(x) se aproximan a 0. De la misma forma cuando "x" disminuye indefinidamente al tomar valores negativos, los valores de f(x) se aproximan a 0. En forma simbólica se escribe

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Estos límites se conocen como límites al infinito:

Tabla 2.2 comportamiento de f(x) cuando $x\to\pm\infty$

x	f(x)	x	f(x)
1000	0.001	-1000	-0.001
10000	0.0001	-10000	-0.0001
100000	0.00001	-100000	-0.00001
1000000	0.000001	-1000000	-0.000001

EJEMPLO 01:

Encuentre el límite (si existe) en: $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x-5)^3}$

<u>Resolución:</u>

Cuando x se vuelve muy grande, también se incrementa (x – 5). Como el cubo de un numero grande también es grande, $(x-5)^3\to\infty$, Al dividir 4 entre números muy grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-5)^3}=0$$

EJEMPLO 02:

Encuentre el límite (si existe) en: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$

Resolución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

EJEMPLO 03:

Encuentre el límite de: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(3x-1)^2}$

Resolución:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(3x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2-6x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{9x}=\frac{1}{9}.\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{9}(0)$$

EJEMPLO 04:

Encuentre el límite de:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+x+2}{x^3+4x^2+4}$$

Resolución:

La intención del ejercicio es buscar el grado mayor en cualquiera de los dos términos de la fracción, y luego dividirla entre ese factor a cada termino.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+x+2}{x^3+4x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^3}}$$

$$=\frac{3+0+0+0}{1+0+0}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+x+2}{x^3+4x^2+4}=3$$

GUIA DE PRÁCTICA N° 02: LÍMITES LATERALES, INFINITOS Y AL INFINITO

01. Encuentre el límite, Si el límite no existe indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

a. $\lim\limits_{x\to -1^+}(1-x^2)$

b. $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-2)$

c. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7}{x-1}$

d. $\lim\limits_{x\to -\infty} 5x$

e. $\lim\limits_{x\to 1^+}(4\sqrt{x-1})$

f. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-4}{3-2x}$

g. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2}{3x^3-x^2+2}$

h. $\lim\limits_{x\to 1}|x-1|$

i. $\lim\limits_{x\to 3}(-\dfrac{7}{x-3})$

02. Encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado. $f(x)=\begin{cases}2 & si: x\le 2\\ 1 & si: x>2\end{cases}$

a. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

e. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

03. **Costo promedio** Si "c" es el costo total de producir "q" unidades de cierto artículo, entonces el costo promedio por unidad para una producción de "q" unidades está dada por $\bar{c}=\dfrac{c}{q}$. Por lo tanto, si la ecuación de costo total es c=5000+6q, entonces $\bar{c}=\dfrac{5000}{q}+6$
Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es de \$5030 y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es de \$1006. Por medio de la determinación de $\lim\limits_{q\to\infty}\bar{c}$ demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

04. **Costo promedio** Repita el problema 3, considerando que el costo fijo es de \$12000 y que el costo variable está dado por la función cv=7q.

05. **Población** se pronostica que dentro de "t" años la población de cierta ciudad pequeña será: $N=40000-\dfrac{5000}{t+3}$

Determine la población a largo plazo, esto es, determine. $\lim\limits_{t\to\infty} N$

PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 02: LÍMITES LATERALES, INFINITOS Y AL INFINITO

01. Encuentre el límite, Si el límite no existe indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o - ∞ donde sea apropiado

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$

b. $\lim\limits_{h\to1^+} \sqrt{h-1}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-6}{5x\sqrt[3]{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3+4x-3}$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-x^2}{x^2+19x-64}$

f. $\lim\limits_{x\to2^-}(2-\dfrac{1}{x-2})$

g. $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x}{\sqrt{16-x^4}}$

h. $\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{1}{x}\right|$

i. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2x^2}{x^2+1})$

02. Encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o - ∞ donde sea apropiado. $f(x)=\begin{cases}2-x & si: x\le3\\ -1+3x-x^2 & si: x>3\end{cases}$

a. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$

c. $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

03. **Relación huésped-parasito** Para una relación particular huésped-parasito, se determinó que cuando la densidad del huésped (número de huésped por unidad de área) es x, el número de huéspedes parasitados en cierto periodo es: $y=\dfrac{900X}{10+45X}$

Si la densidad del huésped aumenta indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y?

04. $Si: f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x} & si: x<2\\ x^3+k(x+1) & si: x\ge2\end{cases}$ determine el valor de la constante k para lo cual existe $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

05. Grafique $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}$, Utilice la gráfica para estimar $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$ si existe. Utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ cuando sea apropiado.

06. Grafique, $si: f(x)=\begin{cases}2x^2+3 & si: x<2\\ 2x+5 & si: x\ge2\end{cases}$ Utilice la gráfica para estimar cada uno de los limites siguientes, si existen.

a. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

c. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

SEMANA 03:

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Muchas funciones tienen la propiedad de que no presentan "pausa" alguna en sus gráficas. Por ejemplo compare las funciones:

$$f(x) = x \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Realizamos la gráfica de cada una de las funciones y se obtiene que:

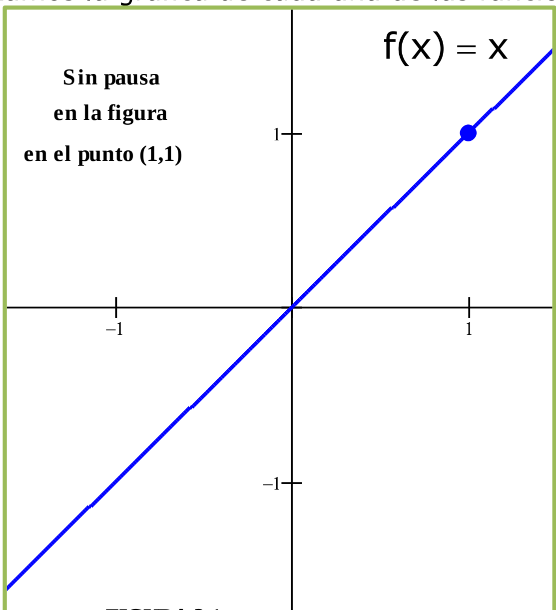


FIGURA 3.1

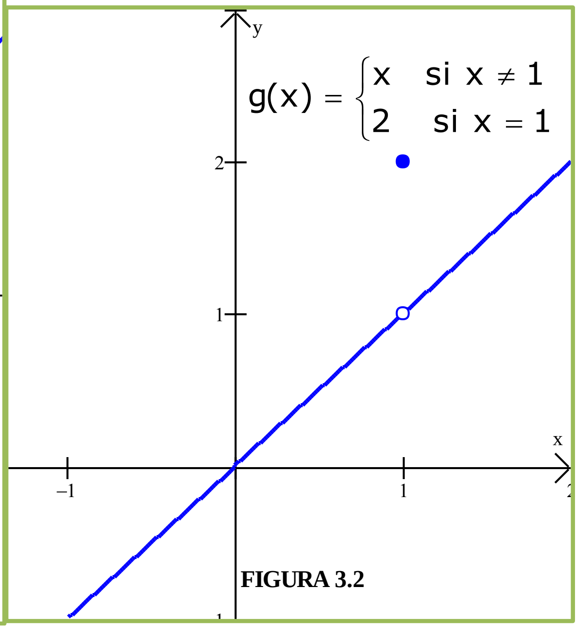


FIGURA 3.2

Observando la **figura 3.1** y la **figura 3.2** la gráfica de "f" no tiene pausa, pero la gráfica de "g" tiene una pausa en x=1. Dicho de otra forma, si usted tuviera que trazar ambas graficas con un lápiz, tendría que levantar el lápiz del papel en la gráfica de "g" cuando x=1, pero no tendría que despegarlo en la gráfica de "f". Estas situaciones pueden expresarse mediante límites. Compare el límite de cada función con el valor de la función en x=1 cuando x se aproxima a 1:

DEFINICIÓN

Una función f es continua en "a" sí y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. f(a) existe.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si f no es continua en "a", entonces se dice que f es discontinua en "a" y "a" se denomina punto de discontinuidad de f.

Por lo tanto la función f es continua en x=1; mientras que la función g es discontinua en x=1.

EJEMPLO 01: Aplicación de la definición de continuidad.
Demuestre que $g(x) = x^2 - 3$ es continua en -4.
Resolución:

La función "g" está definida en x=−4; reemplazando se obtiene que: g(−4)=13.
También, $\lim_{x \to -4} g(x) = \lim_{x \to -4} (x^2 - 3) = 13 = g(-4)$

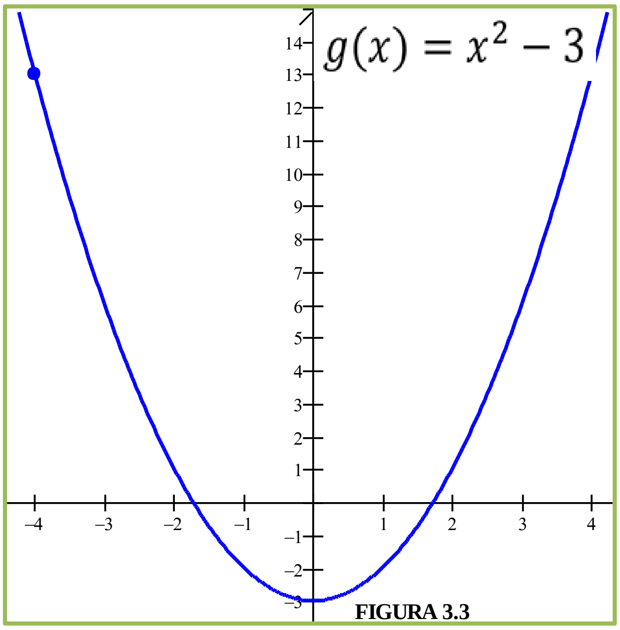


FIGURA 3.3

Tabla 3.3

x	g(x)
-4	13
-3	6
-2	1
-1	-2
0	-3
1	-2
2	1
3	6
4	13

Por lo tanto, "g" es continua en −4. (Figura 3.3).

DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCION RACIONAL

Una función racional es discontinua en los puntos donde el denominador es 0 y es continua en cualquier otra parte. Así, una función racional es continua en su dominio.

EJEMPLO 01:

En la siguiente función, encuentre todos los puntos de discontinuidad: $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$

Resolución:
Para poder averiguar la discontinuidad, basta con igualar a cero el denominador:

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2) = 0$$

Aplicando la propiedad $Si: a.b = 0 \quad entonces \quad a = 0 \ \vee b = 0$

Se obtiene que: x=−4 o x=2
Por lo tanto la función racional es discontinua en −4 y 2.

EJEMPLO 02:

En la siguiente función encuentre todos los puntos de discontinuidad: $h(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 4}$

Resolución:
Para esta función racional, el denominador nunca es 0. (Siempre es positivo). De este modo, h(x) no tiene discontinuidad.

GUIA DE PRÁCTICA N° 03: CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

01. En los problemas utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

a. $f(x) = x^3 - 5x; \quad x = 2$

b. $f(x) = \dfrac{x-3}{5x}; \quad x = -3$

c. $g(x) = \sqrt{2-3x} \quad x = 0$

02. En los ejercicios mostrados, determine si la función es continua en los puntos dados.

a. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}; \quad -2, 0$

b. $h(x) = \dfrac{3}{x^2+9} \quad 3, -3$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad 0, -1$

03. **Tarifas telefónicas** Suponga que la tarifa telefónica de larga distancia para una llamada hecha desde Hazleton, Pennsylvania, a Los Ángeles, California, es de \$0.08 por el primer minuto o fracción y de \$0.04 por cada minuto o fracción adicional .Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de "t" minutos de duración, bosqueje la gráfica de f para $0 < t \leq 3\frac{1}{2}$.Utilice esta grafica para determinar los valores de t en los cuales ocurren discontinuidades, donde $0 < t \leq 3\frac{1}{2}$.

04. **Inventario** Bosqueja la gráfica de:

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600 & \text{si: } 0 \leq x < 5 \\ -100x + 1100 & \text{si: } 5 \leq x < 10 \\ -100x + 1600 & \text{si: } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

Una función como la anterior podría describir el inventario y de una compañía en el instante x; ¿f es continua en 2?, ¿en 5?, ¿en 10?

05. Encuentre todos los puntos de discontinuidad:

a. $f(x) = 3x^2 - 3$

b. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}: x \geq 0 \\ -1 & \text{si}: x < 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x^2+2x-15}$

PRÁCTICA DOMICILIARIA N°03: CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

01. En los ejercicios utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

a. $f(x) = \frac{x}{8}; \quad x = 2$

b. $h(x) = \frac{x+3}{x-3}; \quad x = -3$

c. $f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x = -1$

02. En los ejercicios mostrados, determine si la función es continua en los puntos dados.

a. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} : x \geq 2 \\ x^2 & \text{si} : x < 2 \end{cases}$ en $2, 0$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{6}$ en $2, -2$

c. $g(x) = \frac{x-3}{x^2 - 9}$ en $3, -3$

03. La función mayor entero, $f(x) = [\![x]\!]$ está definida como el entero más grande que es menor o igual a x, donde x es cualquier número real. Por ejemplo: $[\![3]\!] = 3$; $[\![1{,}99]\!] = 1$; $[\![0{,}125]\!] = 0$; $[\![-4{,}5]\!] = -5$. Bosqueje la gráfica de esta función para $-3.5 \leq x \leq 3.5$. Utilice su bosquejo para determinar los valores de "x" en los cuales ocurren discontinuidades.

04. Grafique $g(x) = e^{-1/x^2}$. Debido a que "g" no está definida en x=0, "g" es discontinua en 0. Con base en la gráfica de g,

$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} : x \neq 0 \\ 0 & \text{si} : x = 0 \end{cases}$ ¿Es continua en 0?

05. Encuentre todos los puntos de discontinuidad:

a. $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x^2 - 9}$

b. $f(x) = \frac{2x - 3}{3 - 2x}$

c. $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si} : x > 2 \\ 3 - 2x & \text{si} : x < 2 \end{cases}$

SEMANA 04:
CONTINUIDAD APLICADA A DESIGUALDADES

Ahora se verá cómo puede aplicarse la noción de continuidad para resolver una desigualdad no lineal, como $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$. Esta habilidad será importante en nuestro estudio sobre el cálculo.

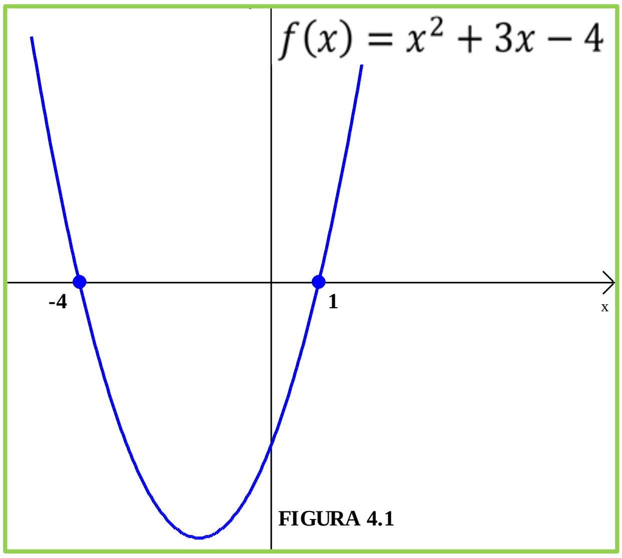


FIGURA 4.1

Para resolver $x^2 + 3x - 4 > 0$, se hace

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$$

Las raíces de f(x)=0 son -4 y 1; de modo que la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x en los puntos (-4,0) y (1,0). (Vea la figura 4.1) además las raíces determinan tres intervalos sobre el eje x: $< -\infty; -4 >$; $< -4; 1 >$; $< 1; \infty >$

Considere el intervalo $< -\infty; -4 >$ Como f es continua en este intervalo, se afirma que f(x)>0 o bien, f(x) <0 en todo el intervalo. Podemos contrastar esta idea con la siguiente tabla 4.1

Tabla 4.1

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	36	24	14	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14	24	36

Observando la **figura 4.1** y la **tabla 4.1** se concluye que en el intervalo $< -\infty; -4 >$ siempre la función f es positiva; mientras que en el intervalo $< -4; 1 >$ la función f resulta ser negativa y en el intervalo $< 1; \infty >$ también es positiva.
De modo que se ha resuelto la desigualdad. Estos resultados son obvios a partir de la gráfica de la figura 4.1 y la tabla 4.1. La grafica está por arriba del eje "x", esto significa que f(x)>0 en $< -\infty; -4 >$ y en $< 1; \infty >$.

En ejemplos más complicados, será útil explotar la naturaleza multiplicativa de los signos. Se observa que $f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$. Cada uno de los términos (x + 4) y (x – 1) tiene un diagrama de signos más simples que la función $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Considere el diagrama de signos de la figura 4.2. Igual que antes, se colocaron las raíces de f(x)=0 en orden ascendente de izquierda a derecha, con el fin de subdividir el eje "x" en tres intervalos abiertos. Esto forma la línea superior de la tabla. Directamente debajo de la línea superior se determinaron los signos de (x + 4) y (x – 1) en los tres sub intervalos, estos signos se obtiene reemplazando algunos valores que pertenece al intervalo.

	$-\infty$	-4	1 $\quad\infty$
(x + 4)	-	+	+
(x – 1)	-	-	+
f(x)= (x+4)(x–1)	+	-	+

FIGURA 4.2

Ahora se obtiene el reglón inferior tomando, para cada componente, el producto de las entradas previas. Por lo tanto en el primer intervalo se tiene que (–)(–)=+; además en el segundo intervalo es (+)(–)=–; mientras que en el tercer intervalo se tiene (+)(+)=+. Los diagramas de signos de este tipo son útiles siempre que la función continua se pueda expresar como un producto de varias funciones continuas más simples, cada una de las cuales tiene un diagrama de signos simple.

EJEMPLO 01: Resolución de una desigualdad cuadrática

Resuelva la siguiente desigualdad: $x^2 - 3x - 10 > 0$

Resolución:

Si f(x)= $x^2 - 3x - 10$, entonces "f" es una función cuadrática por lo tanto es continua en todos los intervalos. Para encontrar las raíces reales de f(x)=0, se tiene:

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x+2)(x-5) = 0.$

Aplicando la propiedad $Si: a.b = 0 \quad entonces \quad a = 0 \vee b = 0$

x = -2 x = 5

Las raíces -2 y 5 determinan tres intervalos: $< -\infty; -2 >; < -2; 5 >; < 5; \infty >$

Se construye un diagrama de signos y se obtiene que:

	$-\infty$ a -2	-2 a 5	5 a ∞
(x+2)	-	+	+
(x – 5)	-	-	+
f(x)=(x+2)(x−5)	+	-	+

Por lo tanto queda resuelta que la función f(x)>0 en los intervalos $< -\infty; -2 >$ y $< 5; \infty >$

EJEMPLO 02:

Resuelva la siguiente desigualdad: $x^2 + 1 < 0$

Resolución:

La expresión $(x^2 + 1)$ siempre es positiva, de modo que $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución, lo cual significa que el conjunto de soluciones es $\varnothing$, el conjunto vacío.

GUIA DE PRÁCTICA N° 04: CONTINUIDAD APLICADA A LAS DESIGUALDADES

01. Resuelva las desigualdades por medio de la técnica estudiada en esta sección.

a. $15-2x-x^2 \geq 0$

b. $x^2+4<0$

c. $(x+5)(x+2)(x-7) \leq 0$

d. $x^3+4x \geq 0$

e. $x^3+6x^2+9x<0$

f. $\dfrac{3}{x+1} \geq 0$

g. $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x+2} \leq 0$

h. $x^2+2x \geq 2$

02. **Ingresos.** Suponga que los consumidores compran "q" unidades de un producto cuando el precio de cada unidad es de (28 – 0,2q) ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso sea al menos de $750?

03. **Participación en talleres.** Imperial education services (IES) ofrece un curso de procesamiento de datos al personal clave de la compañía zeta. El precio por persona es de $50 y la compañía zeta garantiza que al menos habrá 50 asistentes. Suponga que el IES ofrece reducir el costo para todos en $0.50 por cada persona que asista después de las primeras 50. ¿Cuál es el límite del tamaño del grupo que es el IES aceptara de modo que el ingreso total nunca sea menor que lo recibido por 50 personas?

04. Grafique e^{-x^2} ¿La función parece ser continua? ¿La conclusión puede confirmarse mediante la invocación de hechos sobre las funciones continuas? ¿En qué valor la función parece tener un máximo?

PRÁCTICA DOMICILIARIA N°04: CONTINUIDAD APLICADA A LAS DESIGUALDADES

01. Resuelva las desigualdades por medio de la técnica estudiada en esta sección.

a. $2x^2+11x+14<0$

b. $2x^2-x-2 \leq 0$

c. $-x(x-5)(x+4)>0$

d. $(x+3)^2(x^2-4)<0$

e. $\dfrac{x}{x^2-9}<0$

f. $\dfrac{3}{x^2-5x+6}>0$

g. $\dfrac{3}{x^2+6x+5} \leq 0$

h. $x^4-16 \geq 0$

02. **Administración forestal.** Una compañía maderera posee un bosque cuya forma es rectangular y mide 1x2 millas. La compañía quiere cortar una franja uniforme de árboles a lo largo de los lados externos del bosque. ¿Qué tan ancha debe ser la franja si se quiere conservar al menos $1\frac{5}{16}m^2$ de bosque?

03. **Diseño de contenedor.** Un fabricante de contenedores desea hacer una caja sin tapa y para ello corta un cuadrado de 3 por 3 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio y luego dobla hacia arriba los lados. La caja debe de contener al menos 192 $pulg^3$ Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda utilizarse.

04. Grafique $f(x)=x^3+7x^2-5x+4$ Utilice la gráfica para determinar la solución de $x^3+7x^2-5x+4 \leq 0$

05. Grafique $x\ln x - x$. ¿La función parece ser continua? ¿apoya la gráfica las conclusiones del ejemplo? ¿En qué valor la función parece tener un mínimo?

SEGUNDA UNIDAD

DIFERENCIACIÓN

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante estará en condiciones de identificar y resolver problemas, aplicando los teoremas, las reglas, las propiedades de las derivadas y la regla de la cadena, relacionados a su carrera.

SABERES PREVIOS

EXPONENTE NEGATIVO $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ La base debe ser diferente de cero. Ejemplos: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ $4^{-1}=\frac{1}{4^1}=\frac{1}{4}$	EXPONENTE NEGATIVO $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n}$ La base debe ser diferente de cero. Ejemplos: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$ $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{5}$	EXPONENTE FRACCIONARIO $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a}^{\,m}$ La base debe ser diferente de cero. Ejemplos: $3^{1/2}=\sqrt[2]{3^1}=\sqrt{3}$ $4^{2/3}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{4}^{\,2}=\sqrt[3]{16}$
PRODUCTO DE BASES IGUALES $a^m.a^n=a^{m+n}$ Ejemplos: $2^3.2^5=2^{3+5}=2^8=512$ $3^5.3^{-2}=3^{5+(-2)}=3^3=27$	COCIENTE DE BASES IGUALES $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ Ejemplos: $\frac{5^4}{5^2}=5^{4-2}=5^2=25$ $\frac{3^4}{3^{-2}}=3^{4-(-2)}=3^6=729$	PROPIEDAD DISTRIBUTIVA $a(b+c+d)=ab+ac+ad$ Ejemplos: $2x(2x^2+x-4)=4x^3+2x^2-8x$ $2x^2(2x^2+4)=4x^4+8x^2$

Sea los puntos A(1,2) y B(3,5)

Calcular la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

Resolución:

Calculamos la pendiente, utilizando la propiedad de: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$m=\frac{5-2}{3-1}=\frac{3}{2}$$

Recordemos la forma punto–pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$

Elegimos a cualquiera de los dos puntos dados como $(x_0;y_0)$=(1,2) y reemplazamos en la forma.

$$y-2=\frac{3}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{3}{2}(x-1)+2$$

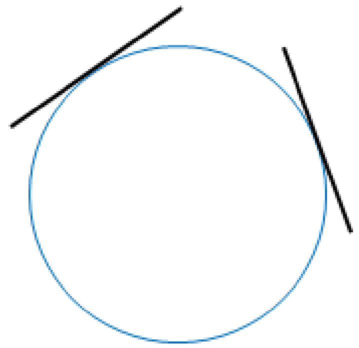
$$y=\frac{3x-3}{2}+2$$

$$y=\frac{3x-3+4}{2}$$

$$\therefore y=\frac{3x+1}{2}$$

SEMANA 05:

LA DERIVADA, SU INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y REGLAS PARA LA DIFERENCIACIÓN



Rectas tangentes a un círculo
FIGURA 5.1

El problema principal del cálculo diferencial consiste en encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto situado sobre una curva. Quizá en la clase de geometría usted vio que una recta tangente, a un círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto exacto (figura 5.1). Sin embargo, esta idea de una tangente no es muy útil en otras clases de curvas. Por ejemplo, en la figura 5.2 las rectas L_1 y L_2 intersecan a la curva en exactamente un solo punto P. Aunque L_2 no se vería como la tangente en este punto, parece natural que L_1 si lo sea. En la figura 5.3 se podría considerar de manera intuitiva que L_3 es la tangente en punto P, aunque L_3 interseca a la curva en otros puntos.

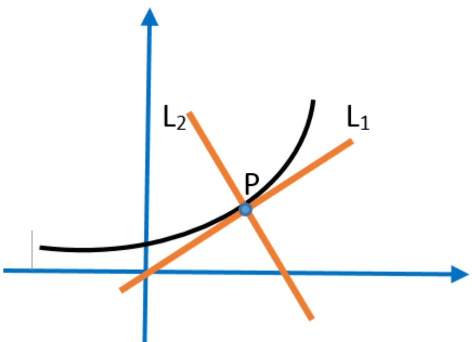


FIGURA 5.2

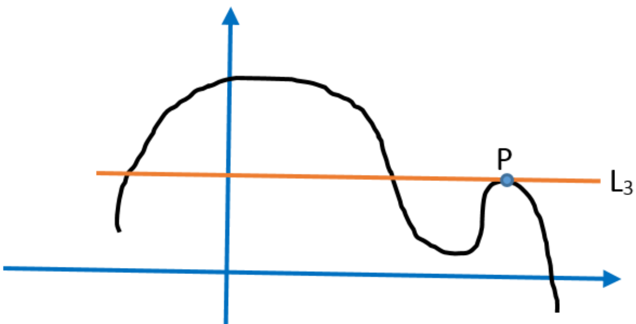


FIGURA 5.3

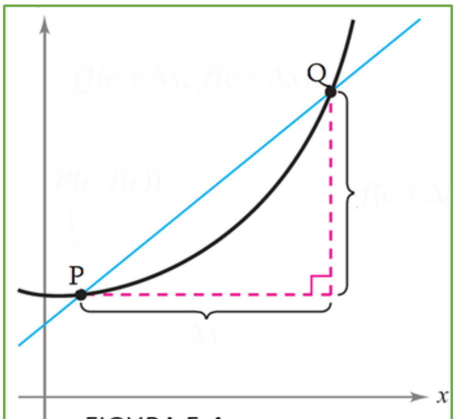


FIGURA 5.4

En los ejemplos anteriores, pueden verse que la idea de que una tangente es simplemente una línea que interseca una curva en solo un punto resulta inadecuada. Para obtener una definición conveniente de recta tangente, se utiliza el concepto de límite y la noción geométrica de una recta secante. **Una recta secante** es una línea que interseca una curva en dos o más puntos.

Observe la gráfica en la figura 5.4 se desea definir la recta tangente en el punto P. si Q es un punto diferente sobre la curva, la línea PQ es una recta secante. Si Q se desplaza a lo largo de la curva y se acerca a P por la derecha (vea la figura 5.5), PQ', PQ''. etc. Son rectas secantes características.

Si Q se acerca a P por la izquierda, PQ_1, PQ_2, etc., son las secantes. En ambos casos, las rectas secantes se acercan a la misma posición límite. Esta posición límite común de las rectas secantes se define como la recta tangente a la curva en P esta definición parece razonable y se aplica a las curvas en general, no solo a los círculos.

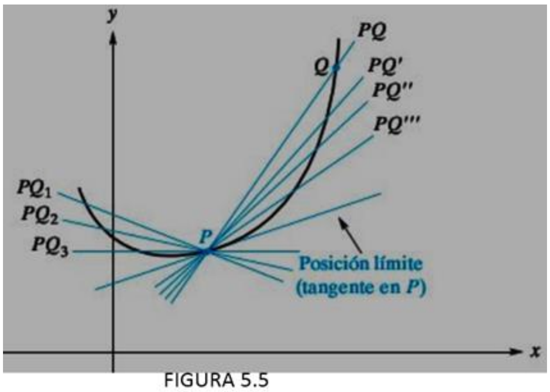


FIGURA 5.5

Ahora que se tiene una definición conveniente de la tangente a una curva en un punto, puede definirse la pendiente de una curva en un punto.

Definición:
La pendiente de una curva en un punto P. Es la pendiente (en caso de que exista) de la recta tangente en el punto P.

Como la tangente en P es una posición límite de las rectas secantes PQ, consideremos ahora la pendiente de la tangente como el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme Q se aproxima a P. Por ejemplo, considere la curva $f(x) = x^2$; y las pendientes de algunas rectas secantes PQ, donde P=(1,1). Para el punto Q=(2.5;6.25), la pendiente de PQ (vea la figura 5.6) es

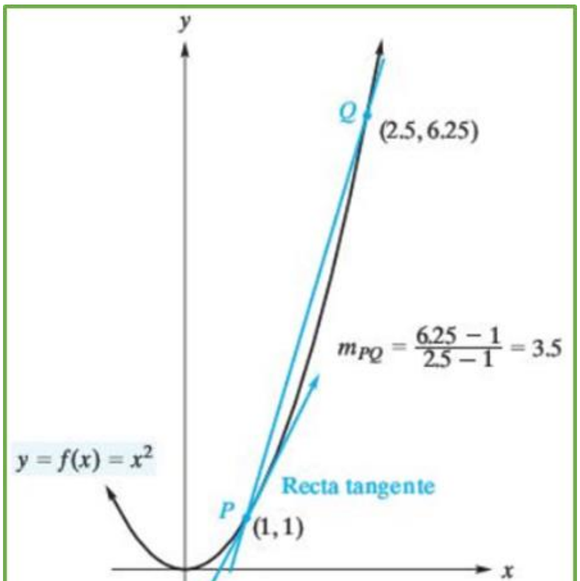


FIGURA 5.6

$$m_{PQ} = \frac{\text{elevacion}}{\text{desplazamiento}} = \frac{6.25-1}{2.5-1} = 3.5$$

En la tabla 5.1 se incluyen otros puntos Q situados sobre la curva, así como las correspondientes pendientes de PQ. Observe que conforme Q se aproxima a P, las pendientes de las rectas secantes parecen aproximarse al valor 2. Entonces, puede esperarse que la pendiente de la recta tangente indicada en (1,1) sea 2. Generalizando el procedimiento.

Tabla 5.1 Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x) = x^2$

P	Q	Pendiente de PQ
(1;1)	(2.5; 6.25)	$\frac{6.25-1}{2.5-1} = 3.5$
(1;1)	(2; 4)	$\frac{4-1}{2-1} = 3$
(1;1)	(1.5; 2.25)	$\frac{2.25-1}{1.5-1} = 2.5$
(1;1)	(1.25; 1.5625)	$\frac{1.5625-1}{1.25-1} = 2.25$
(1;1)	(1.1; 1.21)	$\frac{1.21-1}{1.1-1} = 2.1$
(1;1)	(1.01; 1.0201)	$\frac{1.0201-1}{1.01-1} = 2.01$

Para la curva y=f(x) de la figura 5.7, se encontrara un expresión para la pendiente en el punto P=(a,f(a)). Si Q=(z, f(z)), la pendiente de la recta secante PQ es:

$$m_{PQ} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

Si le llamamos "h" a la diferencia (z – a), entonces podemos escribir "z" como (a + h). Aquí se debe tener $h \neq 0$, porque si h=0, entonces z=a y no existirá recta secante. De acuerdo con esto

$$m_{PQ} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

¿Cuál de estas dos formas sea la más conveniente para expresar la pendiente de la recta PQ? Depende de la naturaleza de la función f. Conforme Q se desplaza a lo largo de la curva hacia P, "z" se aproxima a "a". Esto significa que "h" se aproxima a cero. El valor límite de la pendiente de las rectas secantes es:

$$m_{tan} = \lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

De nuevo, cuál de estas dos formas sea la más conveniente- cuál de los limites es más fácil de determinar- depende de la naturaleza de la función f.

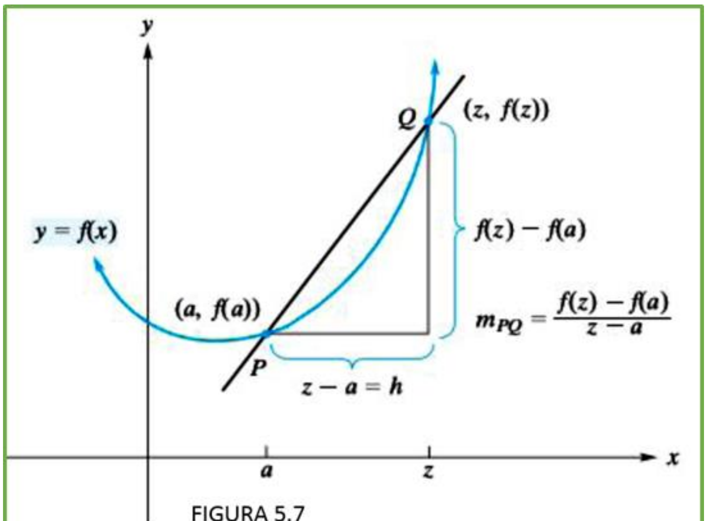


FIGURA 5.7

DEFINICION

La **derivada** de una función f es la función denotada como f' (se lee "f prima") y definida por

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Siempre que este límite exista. Si f'(a) puede encontrarse (quizá no todas las f'(x) puedan encontrarse), se dice que f es diferenciable en "a" y f'(a) se la llama derivada de f en "a" o derivada de f con respecto a "x" en "a". El proceso de encontrar la derivada se llama diferenciación.

En la definición de la derivada la expresión

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Donde: z = x + h, se llama **cociente de diferencias.** Así, f'(x) es el límite de un cociente de diferencias.

EJEMPLO 01: Uso de la definición para encontrar la derivada

Si: $f(x) = x^2$, encuentre la derivada de f

Resolución:

Al aplicar la definición de una derivada se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

$$\therefore f'(x) = 2x$$

EJEMPLO 02: Determinación de una ecuación de una recta tangente

Sea la función cuadrática definida como $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto (1;7)

Resolución:

Primero se determinará la pendiente de la recta tangente calculando la primera derivada y evaluándola en x=1. Mediante el uso de este resultado y el punto (1,7) en la forma punto-pendiente se obtiene una ecuación de la recta tangente.

Calculando la primera derivada se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[2(x + h)^2 + 2(x + h) + 3\right] - \left(2x^2 + 2x + 3\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 3 - 2x^2 - 2x - 3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (4x + 2h + 2)$$

Por lo que: $f'(x) = 4x + 2$

Evaluamos para x = 1, y el resultado es la pendiente de la recta tangente: $f'(1) = 4(1) + 2 = 6$

Por lo tanto: m = 6

Recuerda que la propiedad de la ecuación de la recta en la forma punto – pendiente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Así, la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto (1,7) tiene una pendiente de 6. Su ecuación reemplazando en la propiedad es:

$$y - 7 = 6(x-1)$$

Además esta ecuación de la recta tangente puede expresarse en forma pendiente-intersección, como:

$$y = 6x+1$$

REGLAS PARA LA DIFERENCIACION.

La diferenciación es una función mediante el uso directo de la definición de la derivada. Sin embargo, si una función está construida a partir de funciones más simples, entonces la derivada de la función más complicada puede ser construida a partir de las derivadas de funciones más simples. Por ejemplo, si las funciones f y g tienen derivadas de f' y g', respectivamente, entonces (f + g) tienen una derivada dada por (f + g)'=f' + g'. Sin embargo algunas reglas son menos intuitivas. Por ejemplo, si (f.g) denota la función cuyo valor en "x" está dado por (f.g)(x)=f(x).g(x), entonces (f.g)'=f'.g + f.g'.

Primero se mostrará que la derivada de una función constante es cero. La cual tiene pendiente nula en todo punto. Esto significa que si f(x)=c entonces f'(x)=0:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$f'(x) = 0$$

REGLA BASICA 0: Derivada de una constante

Si "c" es una constante, entonces $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Ejemplos:

Si: f(x) = 10, entonces $\frac{d(10)}{d(x)} = 0$

Si: f(x) = -2016, entonces $\frac{d(-2016)}{d(x)} = 0$

REGLA BASICA DERIVADA DE x^a

Sí "a" es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$$

Ejemplos:

Si: $f(x) = x^4$ entonces $\frac{d(x^4)}{d(x)} = 4x^3$

Si: $y = x^{2016}$ entonces $y' = 2016x^{2015}$

Si: $y = x^{-20}$ entonces $y' = -20x^{-21}$

Si: $y = 4x^6$ entonces $y' = 24x^5$

EJEMPLO 01: Diferenciación de una suma de funciones
Diferencie la siguiente función

$$F(x) = 3x^5 + \sqrt{x}$$

Resolución:

Aquí la función F(x) es la suma de las funciones $3x^5$ y $\sqrt{x}$. Por lo tanto, solo es encontrar la derivada de cada función, y se tiene así:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^5\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right)$$

$$F'(x) = 3\frac{d}{dx}\left(x^5\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right)$$

$$F'(x) = 3\left(5x^4\right) + \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$F'(x) = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

EJEMPLO 02: Diferenciación de una diferencia de funciones

Diferencie la siguiente función

$$f(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{5}{z^{1/3}}$$

Resolución:

Para aplicar las reglas básicas, se reescribe f(z) en la forma $f(z) = \frac{1}{4}z^4 - 5z^{-1/3}$.

Como la función f(x) es la diferencia de dos funciones, derivamos cada función por separado.

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4}z^4\right) - \frac{d}{dz}\left(5z^{-1/3}\right)$$

$$f'(z) = \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z^4) - 5\frac{d}{dz}\left(z^{-1/3}\right)$$

$$f'(z) = \frac{1}{4}(4z^3) - 5\left(-\frac{1}{3}z^{-4/3}\right)$$

$$f'(z) = z^3 + \frac{5}{3}z^{-4/3}$$

$$\therefore f'(z) = z^3 + \frac{4}{3\sqrt[3]{z^4}}$$

EJEMPLO 03: Diferenciación de una función polinomial

Diferencie la siguiente función

$$y = 6x^3 - 2x^2 + 7x - 8$$

Resolución:

Como la función y esta expresada en función a cuatro expresiones algebraicas entonces basta derivar cada una de estas expresiones, y se obtiene así:

$$y' = \frac{d}{dx}\left(6x^3\right) - \frac{d}{dx}\left(2x^2\right) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$y' = 6\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 2\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 7\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$y' = 6\left(3x^2\right) - 2(2x) + 7(1) - 0$$

$$\therefore y' = 18x^2 - 4x + 7$$

EJEMPLO 04: Determinación de una derivada.

Encuentre la derivada de $f(x) = 2x(x^2 - 5x + 2)$ cuando x=2.

Resolución:

Aplicamos la propiedad distributiva y después se diferencia cada término:

$$f(x) = (2x)(x^2) - (2x)(5x) + (2x)(2)$$
$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 2(3x^2) - 10(2x) + 4(1)$$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 20x + 4$$

Reemplazamos x = 2 en la derivada encontrada, y se tiene que:

$$f'(2) = 6(2)^2 - 20(2) + 4 = -12$$

EJEMPLO 05: Determinación de una derivada.

Encuentre la derivada de $y = 2x^3(3x^2 + 2)$ cuando x=-1.

Resolución:

Aplicamos la propiedad distributiva y después se diferencia cada término:

$$y = (2x^3)(3x^2) + (2x^3)(2)$$
$$y = 6x^5 + 4x^3$$
$$y' = 30x^4 + 12x^2$$

Reemplazamos x = -1 en la derivada encontrada, y se tiene que:

$$y' = 30(-1)^4 + 12(-1)^2$$
$$y' = 30 + 12$$
$$y' = 42$$

GUIA DE PRÁCTICA N° 05: LA DERIVADA, SU INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y REGLAS PARA LA DIFERENCIACIÓN

01. En los siguientes ejercicios emplear la definición de la derivada.

a. si: $f(x)=x$; calcular $f'(x)$

b. si: $y=-5x$ calcular $\frac{dy}{dx}$

c. si: $f(x)=3$ calcular $f'(x)$

d. si: $y=x^2+3x+2$ calcular y'

e. si: $H(x)=\frac{3}{x-2}$ calcular $H'(x)$

02. Encuentre la pendiente de la curva $y=x^2+4$ en el punto (-2,8).

03. Encuentre la pendiente de la curva $y=1-x^2$ en el punto (1,0).

04. En los ejercicios mostrados, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

a. $y=x+4;\ (3,7)$

b. $y=3x^2-4;\ (1,-1)$

c. $y=x^2+2x+3;\ (1,6)$

05. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2+x$ en el punto (-2,2). Grafique la curva y la recta tangente. Observe que la recta tangente es una buena aproximación a la curva cerca del punto de tangencia.

06. Diferencie las funciones

a. $y=x^{80}$

b. $f(x)=4x^2-2x+3$

c. $y=x^{3/4}+2x^{5/3}$

d. $f(x)=\left(2x^3\right)\left(4x^2\right)$

e. $f(q)=\frac{3q^2+4q-2}{q}$

f. $f(x)=\frac{7x^3+x}{6\sqrt{x}}$

07. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=x^3-2x+1$ en el punto (1,0). Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla.

08. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=\sqrt[3]{x}$ en el punto (-8,-2). Grafique la función y en la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por (-8,-2) y parece ser tangente a la curva.

PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 05: LA DERIVADA, SU INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y REGLAS PARA LA DIFERENCIACIÓN

01. En los ejercicios mostrados emplee la definición de la derivada para encontrarla en cada caso.

a. $\frac{d}{dx}(3-2x)$

b. $\frac{d}{dx}(1-\frac{x}{2})$

c. $\frac{d}{dx}(x^2+4x-8)$

d. si : $p=3q^2+2q+1$ calcular $\frac{dp}{dq}$

e. si : $C=7+2q-3q^2$ calcular $\frac{dC}{dq}$

f. si : $f(x)=\sqrt{2x}$ calcular $f'(x)$

02. Encuentre la pendiente de la curva $y=4x^2-5$ cuando x=0.

03. Encuentre la pendiente de la curva $y=\sqrt{2x}$ cuando x=18

04. En los ejercicios, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

a. $y=\frac{4}{x+1}$; $(3,1)$

b. $y=\frac{4}{1-3x}$; $(2,-1)$

05. La derivada $f(x)=x^3-x+2$ es $f'(x)=3x^3-1$ .Grafique f y su derivada f'.Observe que hay dos puntos sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal. Para los valores x de esos puntos, ¿Cuáles son los valores correspondientes de $f'(x)$? ¿Por qué se esperan esos resultados? Observe los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva. Note que las rectas tangentes a la gráfica de f tiene pendientes positivas en estos intervalos. Observe el intervalo donde $f'(x)$ es negativa. Note que las rectas tangentes a la gráfica de f tiene pendientes negativas en este intervalo

06. Diferencia las funciones:

a. $f(x)=x+3$.

b. $f(x)=-9x^{1/3}+5x^{-2/5}$

c. $f(x)=x(3x^2-10x+7)$

d. $s(x)=\sqrt{x}(\sqrt[5]{x}+7x+2)$

e. $f(q)=\frac{3q^2+4q-2}{q}$

f. $f(w)=\frac{w-5}{w^5}$

g. $f(x)=x^2(x-2)(x+4)$

h. $w(x)=\frac{x^2+x^3}{x^2}$

i. $f(x)=\frac{7x^3+x}{x^2}$

07. Encuentre todos los puntos sobre la curva $y=x^2-5x+3$, en los que la pendiente es 1.

08. Si: $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, evalué la expresión $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}=-f'(x)$

SEMANA 06:
LA DERIVADA COMO UNA RAZON DE CAMBIO

Se ha dado una interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Históricamente, una aplicación importante de la derivada implica el movimiento de un objeto que viaja en línea recta. Esto proporciona una manera conveniente de interpretar la derivada como una razón de cambio.

Para denotar el cambio en una variable como x, comúnmente se usa el símbolo Δx (Se lee "delta x"). Por ejemplo, si "x" cambia de 1 a 3, entonces el cambio en "x" es Δx =3-1=2.
El nuevo valor de (x=3) es el valor previo más el cambio, que es $1+\Delta x$ de manera similar, si t se incrementa en Δt, el nuevo valor es t + Δt.
Suponga que un objeto se desplaza a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación $f(t)=t^2$ donde "s" es la posición del objeto en el tiempo "t". Esta ecuación se llama ecuación de movimiento y f se denomina función de posición. Suponga que "t" esta es segundos y "s" en metros.
En t=1, la posición es: $s=f(1)=1^2=1$ mientras que en t=3 la posición es: $s=f(3)=3^2=9$. En este intervalo de 2 segundos el objeto tuvo un cambio de posición, o desplazamiento, de 9-1=8 metros y la velocidad promedio del objeto de define como

$$v_{prom} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{longitud del intervalo de tiempo}} = \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}$$

Decir que la velocidad promedio es de 4 m/s desde t=1 hasta t=3 significa que, en promedio, la posición del objeto cambia 4m hacia la derecha cada segundo durante ese intervalo de tiempo.
Sean Δs y Δt los cambios en los valores s y t, respectivamente. Entonces la velocidad promedio está dada por $v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4m/s$ (para el intervalo de t=1 a t=3)
La razón $\Delta s/\Delta t$ se llama también **razón de cambio promedio de s con respecto a t** en el intervalo de t=1 a t=3.
Ahora, consideremos que el intervalo de tiempo es de solo 1 segundo, (esto es $\Delta t=1$).
Entonces, para el intervalo más corto de t=1 a t=1+Δt=2, se tiene $f(2)=2^2=4$ por lo que

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2)-f(1)}{\Delta t} = \frac{4-1}{1} = 3 \text{ m/s}$$

Tabla 6.1

Duración del intervalo	Intervalo de tiempo	
Δt	t=1 a t=1+ Δt	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t}$
0.1	t=1 a t=1.1	2.1 m/s
0.07	t=1 a t=1.07	2.07 m/s
0.05	t=1 a t=1.05	2.05 m/s
0.03	t=1 a t=1.03	2.03 m/s
0.01	t=1 a t=1.01	2.01 m/s
0.001	t=1 a t=1.001	2.001 m/s

De manera más general, en el intervalo de t=1 a t=1+Δt, el objeto se desplaza a partir de la posición, f (1) hasta la posición f(1+Δt). Entonces, su desplazamiento es:

$$\Delta s = f(1+\Delta t) - f(1)$$

Como el intervalo de tiempo tiene una duración Δt, la velocidad promedio del objeto está dada por:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t}$$

Si Δt se volviera cada vez más pequeño, la velocidad promedio en el intervalo de t=1 a t=1+ Δt sería cercana a lo que podría llamarse velocidad instantáneas en el tiempo t=1; esto es, la velocidad registrada en un punto en el tiempo (t=1), en oposición a la velocidad registrada en un intervalo de tiempo. Para algunos valores representativos de Δt entre 0.1 y 0.001, se obtuvieron las velocidades promedio mostradas en la tabla 6.1, las cuales usted puede verificar. La tabla sugiere que conforme la duración del intervalo de tiempo se aproxima a 0, la velocidad promedio tiende al valor de 2m/s. En otra palabras, cuando Δt tiende a $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ se aproxima a 2m/s. El límite de la velocidad promedio, cuando $\Delta s \to 0$, se define como la **velocidad instantánea**, (o simplemente la velocidad), y, en el tiempo t=1. A este límite se le llama también la **razón de cambio instantánea** de s con respecto a t en t=1:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} Vprom = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t}$$

$\frac{ds}{dt} = 2t$, la velocidad en t=1 es $y = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = 2(1) = 2m/s$ Lo cual confirma la conclusión previa.

En resumen, si s= f (t) es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, entonces la velocidad promedio del objeto en el intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$ está dada por

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

y la velocidad en el tiempo t está dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

En forma selectiva, al combinar las ecuaciones para v se tiene $\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, que proporciona la explicación para la notación de Leibniz, la cual sin esta justificación podría parecer extraña. (Después de todo, Δ es la letra griega (mayúscula) correspondiente a d).

EJEMPLO 01: Estimación de Δy mediante el uso de dy/dx

Suponga que y=f(x) y $\frac{dy}{dx}$=8 cuando x=3. Estime el cambio en y si x cambia de 3 a 3.5.

<u>Resolución:</u>

Se tiene $\frac{dy}{dx}$=8 y $\Delta x = 3.5 - 3 = 0.5$

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0.5) = 4$$

Se destaca que, como $\Delta y = f(3.5) - f(3)$, se tiene $f(3.5) = f(3) + \Delta y$. Por ejemplo, si f(3)=5, entonces f(3.5) puede estimarse como 5+4=9

EJEMPLO 02: Determinación de una razón de cambio
Encuentre la razón de cambio de $y = x^4$ con respecto a "x" luego evalúela cuando x=2 y cuando x=-1. Interprete los resultados.

Resolución:

La razón de cambio es: $\frac{dy}{dx} = 4x^3$

Cuando x=2, $\frac{dy}{dx} = 4(2)^3 = 32$
Esto significa que si "x" aumenta a partir de 2 en una cantidad pequeña, entonces "y" aumenta aproximadamente 32 veces esa cantidad. En forma más sencilla, se dice que cuando x=2, "y" está creciendo 32 veces más rápido que "x".

Cuando x=-1, $\frac{dy}{dx} = 4(-1)^3 = -4$
El significado del signo menos en 4 es que, cuando x=-1, "y" está decreciendo a un ritmo 4 veces más rápido que el aumento de "x".

APLICACIONES DE LA RAZON DE CAMBIO A LA ECONOMIA

La función de costo total de un fabricante, c= f (q), proporciona el costo total de "c" de producir y comerciar "q" unidades de un producto. La razón de cambio de "c" con respecto a "q" se llama costo marginal. Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

Por ejemplo, suponga que $c = f(q) = 0.1q^2 + 3$ es una función de costo, donde está en dólares y q en libras. Entonces.

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es $\frac{dc}{dq}$, evaluando cuando q=4:

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 libra, desde 4 hasta 5 libras, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de $0.80. Es decir, la libra adicional cuesta así para cualquier función f de siempre se puede ver a f'(q) y f(q+1)-f(q) como aproximaciones una de la otra. En economía, este último puede verse como el valor exacto del costo (o de la utilidad, dependiendo de la función) del (q+1)-enésimo articulo cuando se produce q.
Con frecuencia la derivada es más fácil de calcular que el valor exacto. En el caso estudiado aquí, el costo real de producir una libra después de 4 libras es $f(5) - f(4) = 5.5 - 4.6 = \$0.90$.
Si c es el costo total de producir "q" unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad $\bar{c}$ es

$$\bar{c} = \frac{c}{q}$$

Por ejemplo, si el costo total de 29 unidades es de $100, entonces el costo promedio por unidad es $\bar{c} = \frac{100}{20} = \$5$.

EJEMPLO 01: Ingreso marginal

Suponga que un fabricante vende un producto a \$2 por unidad. Si se vende "q" unidades, el ingreso total está dado por

$$r=2q$$

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq}=\frac{d}{dq}(2q)=2$$

Que es una función constante. Entonces, el ingreso marginal es igual a 2 sin importar el número de unidades vendidas. Esto es lo que se esperaría, puesto que el fabricante recibe \$2 por cada unidad vendida.

EJEMPLO 02: Razones de cambio relativa y porcentual

Determine las razones de cambio relativa y porcentual de: $y=f(x)=3x^2-5x+25$, cuando x=5.

Resolución:

Calculando la derivada de la función se tiene que: $f'(x)=6x-5$

Reemplazamos x = 5 en la función y en la derivada y se obtiene que:

$$f(5)=3(5)^2-5(5)+25=75$$
$$f'(5)=6(5)-5=25$$

La razón de cambio relativa de "y" cuando x=5 es

$$\frac{f'(5)}{f(5)}=\frac{25}{75}\approx 0.333$$

Al multiplicar 0.333 por 100% se obtiene la razón de cambio porcentual:
(0.333)(100%)=33.3%

GUIA DE PRÁCTICA N° 06: LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

01. Si: $y = f(x) = \sqrt{2x+5}$ encuentre la razón de cambio promedio de "y" con respecto a "x" en el intervalo $\langle 3;3+\Delta x\rangle$, donde Δx está dado en la tabla siguiente:

Δx	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta y / \Delta x$						

Con base en sus resultados, estime la razón de cambio de "y" con respecto a "x" cuando x=3

02. **Ingreso-educación** los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el número de años de educación en miembros de un grupo urbano particular. Encontraron que una persona con "x" años de educación, antes de buscar empleo regular puede esperar recibir un ingreso anual medio y anual, donde $y = 5x^{5/2} + 5900$; $4 \le x \le 16$
Encuentre la razón de cambio del ingreso con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando x=9.

03. Encuentre la razón de cambio del volumen V de una pelota, con respecto a su radio r, cuando r=1.5m El volumen V de una pelota como una función de su radio está dado por $V = V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

04. **Fábrica de calcetas** La función de costo total de una fábrica de calcetas es estimada por Dean como $c = -10484.69 + 6.750q - 0.000328q^2$ donde q es la producción en docenas de pares y c el costo total. Encuentre la función de costo marginal y evalué cuando q=2000.

05. **Planta de luz y energía.** La función de costo total para una planta de luz y energía eléctrica es estimada por Nordin como $c = 32.07 - 0.79q + 0.02142q^2 - 0.0001q^3$ $20 \le q \le 90$ donde "q" es la producción total en ocho horas (como porcentaje de la capacidad) y c el costo monetario total del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalué cuando q=70.

06. **Concentración urbana** Suponga que las 100 unidades más grandes en estados unidos e1920 se clasificaron de acuerdo con su extensión (área de cada cuidad). Según Lotkan, la siguiente relación se cumple de manera aproximada: $PR^{0.93} = 5000000$ aquí P es la población de la ciudad con la clasificación R respectiva. Esta relación se llama "ley de la concentración urbana" para 1920. Despeje P en términos de R y liego encuentre que tan rápido cambia la población con respecto a la clasificación.

07. **Depreciación** Según el método de depreciación lineal, el valor v de cierta maquina después de t años está dada por V=120 000-15 500t donde $0 \le t \le 6$. ¿qué tan rápido cambia v con respecto a t cuando t=2? ¿En cualquier momento?

08. **Polilla de invierno.** En Nueva Escocia se realizó un estudio sobre la polilla de invierno (adaptado de Embree).Las larvas de la polilla caen al pie de los arboles huésped. A una distancia de x pies de la base del árbol, la densidad de larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de y donde $y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2$; $1 \le x \le 9$

(a) ¿Con que rapidez cambia la densidad de larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando x=6?

(b) ¿Para qué valor de x disminuye la densidad de larvas a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?

09. **función de costo** Para la función de costo $c = 0.3q^2 + 3.5q + 9$. ¿Qué tan rápido cambia c con respecto a q cuando q=10?. Determine la razón de cambio porcentual de c con respecto a q cuando q =10.

PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 06: LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

01. **Temperatura de la piel.** La temperatura aproximada T de la piel en términos de la temperatura T_e del medio ambiente está dada por $T = 32.8 + 0.27(T_e - 20)$ donde T y T_e están en grados Celsius. Encuentre la razón de cambio de T con respecto a T_e.

02. **Materia orgánica /diversidad de especies.** En estudio reciente sobre los mares de aguas poco profundos. Odum afirma que en tales aguas la materia orgánica total y (en miligramos por litro) es una función de la diversidad x de las especies (en número de especies por cada mil individuos). Si y = 100/x, ¿con que rapidez estará cambiando la materia orgánica total con respecto a la diversidad de especies cuando x=10? ¿Cuáles la razón de cambio porcentual cuando x=10?

03. **Ingreso.** Para cierto fabricante el ingreso obtenido al vender q unidades de un producto está dado por $r = 30q - 0.3q^2$

(a) ¿Qué tan rápido cambia r con respecto a q? cuando q=10
(b) Encuentre la razón de cambio relativo de r y
(c) Encuentre la razón de cambio porcentual de r, redondeada al punto porcentual más cercano.

04. **Ingreso.** Repita el problema 3 para la función de ingreso dada por $r = 10q - 0.2q^2$; $q = 25$

05. **Peso de una rama.** El peso de una rama de un árbol está dado por $w = 2t^{0.432}$ donde t es el tiempo. Encuentre la razón de cambio relativa de w con respecto a t.

06. **Costo.** Un fabricante de bicicletas de montaña determino que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de $200 y el costo marginal de $150. Con base en esta información determine el costo total en producir 21 bicicletas por día.

07. **Costo marginal y promedio.** Suponga que la función de costo para cierto producto es $c = f(q)$.si la razón de cambio relativa de c (con respecto a q) es $\frac{1}{q}$, demuestre que la función de costo marginal y la función de costo promedio son iguales.

En los problemas 8 y 9, utilice la capacidad de su calculadora grafica para derivar de manera numérica.

08. Si la función de costo total para un fabricante está dada por $c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2+3}} + 5000$ donde c representa el costo, encuentre el costo marginal cuando se producen 10 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

09. La población de una ciudad dentro de t años está dada por $P = 205000e^{0.04t}$ Encuentre la razón de cambio de la población con respecto al tiempo t dentro de tres años. Redondee su respuesta al entero más cercano

SEMANA 07:
REGLA DEL PRODUCTO Y REGLA DEL COCIENTE

La ecuación $F(x)=(x^2+3x)(4x+5)$ expresa F(x) como un producto de dos funciones (x^2+3x) y $(4x+5)$

Para encontrar $F'(x)$ usando sólo las reglas previas, se multiplican primero las funciones. Después se diferencia el resultado término por término:

$$F(x)=(x^2+3x)(4x+5)=4x^3+17x^2+15x$$
$$F'(x)=12x^2+34x+15$$

Sin embargo, en muchos problemas que implican diferenciar un producto de funciones, la multiplicación no es tan sencilla como en este caso. En ocasiones, ni siquiera resulta práctico intentarlo. Por fortuna, existe una regla para diferenciar un producto que evita tener que efectuar tales multiplicaciones. Como la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas, podría pensarse en una regla para diferenciar un producto que evita tener que efectuar tales multiplicaciones.

REGLA COMBINADA 3: LA REGLA DEL PRODUCTO

Si f y g son funciones diferenciables, entonces el producto fg es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

Dicho de otro modo, seria:

$$\frac{d}{dx}(\text{producto})=(\text{derivada de la primera})(\text{segunda})+(\text{primera})(\text{derivada de la segunda})$$

Demostración

Si: F(x)=f(x).g(x), entonces, por la definición de la derivada de F,

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}$$

Ahora se emplea un truco. Sumando y restando f(x).g(x + h) en el numerador, se tiene

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)+f(x).g(x+h)-f(x).g(x+h)}{h}$$

Reagrupando se obtiene

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x+h)+f(x).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right].g(x+h)+f(x).\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right].g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x).\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x))}{h}$$

Como se ha supuesto que f y g son diferenciables,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \qquad y \qquad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

La diferenciabilidad de g implica que g es continua, por lo que,

$$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$$

Entonces queda demostrada que:

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

EJEMPLO 01: Aplicación de la regla del producto

Si: $F(x)=\left(x^2+3x\right)\left(4x+5\right)$, encuentre $F'(x)$

Resolución:

Se considera a F como un producto de dos funciones:

$$F(x)=\underbrace{\left(x^2+3x\right)}_{f(x)}\underbrace{\left(4x+5\right)}_{g(x)}$$

Por lo tanto, es posible aplicar la regla del producto:

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$F'(x)=\underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^2+3x\right)}_{\text{derivada de la primera}}\underbrace{\left(4x+5\right)}_{\text{segunda}}+\underbrace{\left(x^2+3x\right)}_{\text{primera}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(4x+5\right)}_{\text{Derivada de la segunda}}$$

$$F'(x)=\left(2x+3\right)\left(4x+5\right)+\left(x^2+3x\right)\left(4\right)$$

$$\therefore F'(x)=12x^2+34x+15$$

De manera alternativa, se podría haber encontrado la derivada sin la regla del producto al determinar primero el producto $\left(x^2+3x\right)\left(4x+5\right)$ para después diferenciar el resultado término por término, y se tiene que:

$$F(x)=\left(x^2+3x\right)\left(4x+5\right)$$

$$F(x)=4x^3+17x^2+15x$$

Aplicando la regla básica de las derivadas a funciones polinomiales se tiene que:

$$\therefore F'(x)=12x^2+34x+15$$

Como podemos observar llegamos al mismo resultado.

EJEMPLO 02: Aplicaciones de la regla del producto

Si: $y=(x^{2/3}+3)(x^{-1/3}+5x)$, encuentre $\frac{dy}{dx}$

Resolución:

Al aplicar la regla del producto se obtiene.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{2/3}+3)(x^{-1/3}+5x)+(x^{2/3}+3)\frac{d}{dx}(x^{-1/3}+5x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)(x^{-1/3}+5x)+(x^{2/3}+3)\left(\frac{-1}{3}x^{-4/3}+5\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{25}{3}x^{2/3}+\frac{1}{3}x^{-2/3}-x^{-4/3}+15$$

REGLA COMBINADA 4: LA REGLA DEL COCIENTE

Si f y g son funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Dicho de otro modo, seria:

$$\frac{d}{dx}(\text{cociente})=\frac{(\text{derivada del numerador})(\text{deno min ador})-(\text{numerador})(\text{derivada del deno min ador})}{(\text{deno min ador})^2}$$

EJEMPLO 01: Aplicación de la regla del cociente

Si: $f(x)=\dfrac{(x^2+3x)}{(4x+5)}$ encuentre $f'(x)$

Resolución:

La función f(x)=y, tiene la forma de un cociente, entonces:

PROPIEDAD: Si: $y=\frac{u}{v}$ entonces $y'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$

Si: $u=x^2+3x$ entonces $u'=2x+3$

Si: $v=4x+5$ entonces $v'=4$

Reemplazando en la propiedad se tiene:

$$y'=\frac{(2x+3)(4x+5)-(x^2+3x)(4)}{(4x+5)^2}$$

$$\therefore y'=\frac{4x^2+10x+15}{(4x+5)^2}$$

EJEMPLO 02: Aplicación de la regla del cociente

Si: $y=\dfrac{(3x^2-4x+1)}{(x^2+5x-1)}$ encuentre y'

Resolución:

La función "y" tiene la forma de un cociente, entonces:

PROPIEDAD: Si: $y=\frac{u}{v}$ entonces $y'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$

Si: $u=3x^2-4x+1$ entonces $u'=6x-4$

Si: $v=x^2+5x-1$ entonces $v'=2x+5$

Reemplazando en la propiedad se tiene:

$$y'=\frac{(6x-4)(x^2+5x-1)-(3x^2-4x+1)(2x-5)}{(x^2+5x-1)^2}$$

$$\therefore y'=\frac{(41x^2-40x+9)}{(x^2+5x-1)^2}$$

FUNCIÓN DE CONSUMO

Una función que desempeña un papel importante en el análisis económico es la **función de consumo**. Esta función, C=f(I), expresa una relación entre el ingreso nacional total, I, y el consumo nacional total, C. Por lo general, tanto I como C se expresan en miles de millones e I se restringe a cierto intervalo. La propensión marginal al consumo se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso. Es simplemente la derivada de C con respecto a I

Propensión marginal al consumo= $\frac{dC}{dI}$

Si asumimos que la diferencia entre el ingreso I y el consumo C es el ahorro S, entonces

$$S = I - C$$

Al diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto a **I** se obtiene

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}$$

Se define dS/dI como la **propensión marginal al ahorro.** Así, La propensión marginal al ahorro indica que tan rápido cambia el ahorro con respecto al ingreso, y

Propensión marginal al ahorro	=	1	-	Propensión marginal al consumo

EJEMPLO 01: Determinación de las propensiones marginales al consumo y al ahorro
Si la función de consumo está dada por:

$$C = \frac{5\left(2\sqrt{I^3}+3\right)}{I+10}$$

Determine la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando I=100.

<u>Resolución:</u>
Calculamos la derivada por la regla del cociente:

$$\frac{dC}{dI} = 5\left(\frac{(I+10)\frac{d}{dI}\left(2I^{3/2}+3\right)-\left(2\sqrt{I^3}+3\right)\frac{d}{dI}(I+10)}{(I+10)^2}\right)$$

$$\frac{dC}{dI} = 5\left(\frac{(I+10)\left(3I^{1/2}\right)-\left(2\sqrt{I^3}+3\right)(1)}{(I+10)^2}\right)$$

Cuando I=100, la propensión marginal al consumo es

$$\left.\frac{dC}{dI}\right|_{I=100} = 5\left(\frac{1297}{12100}\right) \approx 0.536$$

La propensión marginal al ahorro cuando I=100 es 1-0.536=0.464. Esto significa que si un ingreso actual de \$100000 millones aumenta en \$1000 millones, la nación consume aproximadamente el 53.6%(536/1000) y ahorra 46.4 % (464/1000) de ese incremento.

GUIA DE PRÁCTICA N° 07: REGLA DEL PRODUCTO Y REGLA DEL COCIENTE

01. Diferencie las funciones:

a. $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2)$

b. $g(x) = (\sqrt{x} + 5x - 2)(\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x})$

c. $h(z) = \dfrac{6 - 2z}{z^2 - 4}$

d. $y = 1 - \dfrac{5}{2x + 5} + \dfrac{2x}{3x + 1}$

e. $y = \dfrac{(9x - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$

f. $y = 3x - \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x - 1}}{x - 2}$

02. Encuentre la pendiente de la curva $y = (2x^2 - x + 3)(x^3 + x + 1)$ en (1,12).

03. **Función de consumo.** Para Estados Unidos (1922-1942), la función de consumo se estima por medio de la ecuación $c = 0.6721 + 113.1$ Encuentre la propensión marginal del consumo.

04. **Función de consumo** Suponga que la función de consumo de un país está dada por $c = \dfrac{9\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.3I}{\sqrt{I}}$ donde C e I se expresan en miles de millones.

(a) Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de $25 000 millones.

(b) Determine la razón de cambio relativa de C con respecto a I cuando el ingreso es de $ 25 000 millones.

05. **Propensiones marginales a consumir y ahorrar.** Suponga que la función de ahorro de un país es $s = \dfrac{I - 2\sqrt{I} - 8}{\sqrt{I} + 2}$ donde el ingreso nacional (I) y el ahorro nacional(S) se mide en miles de millones. Encuentre la preposición marginal del país a consumir y su preposición marginal al ahorro cuando el ingreso nacional es de $150 000 millones. (Sugerencia: pueden ser útil factor izar primero el numerador).

06. **Costo marginal.** si la función de costo total de un fabricante esta dad por $c = \dfrac{6q^2}{q + 2} + 6000$ encuentre la función de costo marginal.

07. **Costo marginal y costo promedio.** Dada la función de costo $c = f(q)$ demuestre que si $\dfrac{d}{dq}(\bar{c}) = 0$ entonces la función de costo marginal y la de costo promedio son iguales.

08. **Relación huésped- parasito.** Para un relación particular huésped-parasito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes que tienen parásitos es y, donde $y = \dfrac{900x}{10 + 45x}$

¿A qué razón está cambiando el número de huéspedes que tienen parásitos con respecto a la densidad de huésped cuando x=2?

PRÁCTICA DOMICIARIA N° 07: REGLA DEL PRODUCTO Y REGLA DEL COCIENTE

01. Diferencie las funciones:

a. $f(w) = (w^2 + 3w - 7)\left(2w^3 - 4\right)$

b. $y = (5x + 3)(2x - 5)(7x + 9)$

c. $z = \dfrac{2x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 5x + 3}$

d. $q(x) = 2x^3 + \dfrac{5x + 1}{3x - 5} - \dfrac{2}{x^3}$

e. $s(t) = \dfrac{t^2 + 3t}{(t^2 - 1)(t^3 + 7)}$

f. $y = 3 - 12x^3 + \dfrac{1 - \frac{5}{x^2}}{x^2 + 5}$

02. Encuentre la pendiente de la curva $y = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}$ en $(-1, -\frac{1}{2})$.

03. **Acústica.** La persistencia del sonido en un recinto después de que la fuente del sonido se ha apagado se llama reverberación. El tiempo de reverberación RT del recinto es el periodo necesario para que el nivel de intensidad del sonido caiga a 60 decibeles. En el diseño acústico de un auditorio, puede utilizarse la formula siguiente para calcular el RT del recinto: $RT = \dfrac{0.05v}{A + xv}$ Aquí v es el volumen del recinto, A la absorción total este y X el coeficiente de absorción del aire. Suponiendo que A y x son constantes positivas, demuestre que la razón de cambio de RT con respecto a V siempre es positiva: Si el volumen total del recinto se incrementa en una unidad. ¿Aumenta o disminuye el tiempo de reverberación?

04. **Depredador-presa.** En un experimento que estudio la relación depredador-presa, se determinó de manera estadística que el número de presas consumidas, y, por un depredador individual es una función de la densidad x de presas (el número de presas por unidad de área), donde $y = \dfrac{0.7355x}{1 + 0.02744x}$ determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

05. **Beneficios de seguridad social.** En un estudio sobre los beneficios de la seguridad social, Feldstein diferencia una función de la forma $f(x) = \dfrac{a(1 + x) - b(2 + n)x}{a(2 + n)(1 + x) - b(2 + n)x}$ donde a, b y n son constantes. Feldstein determina que $f(x) = \dfrac{-1(1 + n)ab}{(a(1 + x) - bx)^2(2 + n)}$

Verifique esto. (Sugerencias: por conveniencia haga 2+n=c) después observe que la función f de Feldstein tiene la forma $g(x) = \dfrac{A + Bx}{C + Dx}$ donde A, B, C, y D son constantes. Demuestre que g’(x) es una constante dividida entre una función no negativa de x. ¿Qué significa esto?

06. **Negocios** El fabricante de un producto encontró que cuando se producen 20 unidades por día, el costo promedio es de 4125. ¿Cuál es la razón de cambio relativa del costo promedio con respecto a la cantidad cuando q=20?

07. Utilice el resultado $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ para encontrar y’

Si: $y = (3x + 1)(2x - 1)(x - 4)$

SEMANA 08:
REGLA DE LA CADENA

La siguiente regla de la cadena, es una de las más importantes para obtener derivadas. Implica una situación en la que "y" es una función de la variable "u"; pero "u" es una función de "x" y se desea encontrar la derivada de "y" con respecto a "x".

Por ejemplo, las ecuaciones $y = u^2; \quad u = 2x + 1$

Para encontrar $\frac{dy}{dx}$, bastara reemplazar la segunda ecuación en la primera y luego desarrollar con la propiedad de binomio al cuadrado, y se obtiene que:

$$y = u^2$$
$$y = (2x + 1)^2$$
$$y = 4x^2 + 4x + 1$$

Luego: $\frac{dy}{dx} = 8x + 4$

Por ejemplo si se hubiera tenido $y = u^{100}$ en vez de $y = u^2$ ni siquiera se intentaría efectuar la sustitución. Por fortuna la regla de la cadena permite manejar tales situaciones con facilidad.

REGLA COMBINADA 5: Regla de la cadena

Si y es una función diferenciable de "u" y "u" es una función diferenciable de "x", entonces "y" es una función diferenciable.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Se puede mostrar por qué la regla de la cadena es razonable considerando razones de cambio. Suponga $y = 8u + 5$ y $u = 2x - 3$

Si "x" cambia en una unidad. ¿Cómo cambia "u"? Para responder esta pregunta se deriva y se encuentra que du/dx=2. Pero cada cambio de una unidad en "u" hay un cambio en "y" de dy/du=8. Por lo tanto ¿Cuál es el cambio en "y" si "x" cambia en una unidad?; esto es ¿Qué valor tienen dy/dx? La respuesta es 8.2=16, que es $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Así $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ahora se utilizará la regla de la cadena para volver a resolver el problema planteado al principio de esta sección.

Si: $y = u^2 \quad ; \quad u = 2x + 1$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}(u^2) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 1)$$
$$\frac{dy}{dx} = (2u)2$$
$$\frac{dy}{dx} = 4u$$

Al reemplazar u por 2x+1 se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x + 1)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 8x + 4$$

Lo cual concuerda con el resultado previo.

EJEMPLO 01: Uso de la regla de la cadena

Si $y = 2u^2 - 3u - 2;\quad u = x^2 + 4$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$

Resolución:

Aplicando la regla de la cadena, se obtiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}\left(2u^2 - 3u - 2\right).\frac{d}{dx}\left(x^2 + 4\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = (4u - 3)(2x)$$

Se puede escribir la respuesta sólo en términos de x reemplazando "u" por $x^2 + 4$.

$$\frac{dy}{dx} = \left[4\left(x^2 + 4\right) - 3\right](2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[4x^2 + 13\right](2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 26x$$

EJEMPLO 02: Uso de la regla de la cadena

Si $y = \sqrt{w}$ y $w = 7 - t^3$, encuentre $\dfrac{dy}{dt}$

Resolución:

Aquí, "y" es una función de "w" y "w" es una función de "t", por lo que se puede considerar a "y" como una función de "t". Por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw}.\frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dw}\left(\sqrt{w}\right).\frac{d}{dt}\left(7 - t^3\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)\left(-3t^2\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{w}}\left(-3t^2\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{7 - t^3}}$$

EJEMPLO 03: Uso de la regla de la potencia

Si $y = \left(x^3 - 1\right)^7$, encuentre y'

Resolución:

Como "y" es una potencia de una función de x, es aplicable la regla de la potencia.

PROPIEDAD: Dada $y = u^a \rightarrow y' = a(u)^{a-1}.u'$

Realizamos la sustitución de $x^3 - 1 = u;\quad a = 7$

$$y' = a(u)^{a-1}u'$$

$$y' = 7(x^3 - 1)^{7-1}\frac{d}{dx}\left(x^3 - 1\right)$$

$$y' = 7\left(x^3 - 1\right)^6(3x^2)$$

$$y' = 21x^2(x^3 - 1)^6$$

PRODUCTO DEL INGRESO MARGINAL

Suponga que un fabricante emplea "m" personas para producir un total de "q" unidades de cierto articulo por día. Se puede pensar que "q" es una función de "m". Si "r" es el ingreso total que el fabricante recibe al vender esas unidades, entonces "r" también puede considerarse una función de "m". Así podemos ver $\frac{dr}{dm}$ se llama producto del ingreso marginal.

EJEMPLO 01: Producto del ingreso marginal

Un fabricante determina que m empleados producirán un total de "q" unidades de cierto articulo por día, donde: $q=\frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}$. Si la ecuación de demanda para el producto es $p=\frac{900}{q+9}$, determine el producto del ingreso marginal cuando m=9

Resolución:

Es necesario encontrar $\frac{dr}{dm}$, donde "r" es el ingreso. Observe que por la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dm}=\frac{dr}{dq}.\frac{dq}{dm}$$

Así, se debe encontrar $\frac{dr}{dq}$ y $\frac{dq}{dm}$ cuando m=9. Se comienza con $\frac{dr}{dq}$. La función de ingreso está dada por

$$r=pq$$

$$r=\left(\frac{900}{q+9}\right)q$$

$$r=\frac{900q}{q+9}$$

Por lo que, a partir de la regla del cociente,

$$\frac{dr}{dq}=\frac{(q+9)(900)-900q(1)}{(q+9)^2}$$

$$\frac{dr}{dq}=\frac{8100}{(q+9)^2}$$

Para evaluar esta expresión cuando m=9, se utiliza primero la ecuación $q=\frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}$ para encontrar el valor correspondiente de q:

$$q=\frac{10(9)^2}{\sqrt{9^2+19}}=81$$

De modo que

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{m=9}=\left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=81}=\frac{8100}{(81+9)^2}=1$$

Ahora se calcula $\frac{dq}{dm}$. A partir de las reglas del cociente y la potencia se tiene

$$\frac{dq}{dm}=\frac{d}{dm}\left(\frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}\right)$$

$$\frac{dq}{dm}=\frac{(m^2+19)^{1/2}\frac{d}{dm}(10m^2)-(10m^2)\frac{d}{dm}\left[(m^2+19)^{1/2}\right]}{((m^2+19)^{\frac{1}{2}})^2}$$

Por lo que: =10.71

Entonces, por la regla de la cadena, esto significa que al emplear a un décimo trabajador, el ingreso aumentará en aproximadamente \$10.71 por día.

GUÍA DE PRÁCTICA N° 08: REGLA DE LA CADENA

01. Encuentre y’ en:

a. $y = (x^2 - 4)^4$

b. $y = \sqrt{5x^2 - x}$

c. $y = x(x+4)^4$

d. $y = \left(\dfrac{2x}{x+2}\right)^4$

e. $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-5}}$

f. $y = \dfrac{(4x-2)^4}{3x^2+7}$

g. $y = 8t + \dfrac{t-1}{t+4} - \left(\dfrac{8t-7}{4}\right)^2$

02. Encuentre la pendiente de la curva $y = (x^2 - 7x - 8)^3$ en el punto (8,0).

03. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

a. $y = \sqrt[3]{(x^2-8)^2}\,;(3,1)$

b. $y = (x+3)^3\,;(-1,8)$

04. **Ecuación de demanda.** Suponga que $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.
a. Encuentre la razón de cambio de p con respecto a q.
b. Calcule la razón de cambio relativa de p con respecto a q.
c. Determine la función de ingreso marginal.

05. **Producto de ingreso marginal.** Si p=k/q, donde k es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante y q=f (m) define una función que da el número total de unidades producidas al día por m empleados, demuestre que el producto del ingreso marginal es siempre igual a 0.

06. **Función de costo** El costo c de producir q unidades de un producto está dado por $c = 5500 + 12q + 0.2q^2$ si el precio p unidades está dado por la ecuación q=900-1.5p Utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando p=85.

07. **Atlas de hospital** Una dependencia gubernamental de salud examinó los registros de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados por una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dada de alta al final de t días de hospitalización estaba dada por $f(t) = 1 - \left(\dfrac{250}{250+t}\right)^3$ encuentre $f'(100)$ e interprete su respuesta.

08. **Costo marginal** Si la función de costo total para un fabricante está dada por $c = \dfrac{4q^2}{\sqrt{q^2+2}} + 6000$ encuentre la función de costo marginal.

PRÁCTICA DOMICILIARIA N°08: REGLA DE LA CADENA

01. Encuentre y’ en:

a. $y=\left(3+2x^3\right)^5$

b. $y=\sqrt{3x^2-7}$

c. $y=4x^2\sqrt{5x+1}$

d. $y=\sqrt[3]{\dfrac{8x^2-3}{x^2+2}}$

e. $y=\dfrac{(8x-1)^5}{(3x-1)^3}$

f. $y=\dfrac{\left(2x^3+6\right)(7x-5)}{(2x+4)^2}$

02. Encuentre la pendiente de la curva $y=\sqrt{x+2}$ en el punto (7,3).

03. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

a. $y=\dfrac{\sqrt{7x+2}}{x+1}$; $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

b. $y=\dfrac{-3}{(3x^2+1)^3}$; $(0,-3)$

04. **Salario y educación.** Para cierta población, si E es el número de años de educación de una persona y S representa el salario anual promedio, entonces para $E\geq 7$, $s=340E^2-4360E+42800$

(a) ¿Qué tan rápido estará cambiando el salario con respecto a la educación cuando E=16?

(b) ¿A qué nivel educativo la tasa del cambio del salario e igual a $5000 por año de educación?

05. **Biología.** El volumen de una célula esférica está dado por $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio.

En un tiempo de t segundos, el radio (en centímetros) está dado por $r=10^{-8}t^2+10^{-7}t$ Use la regla de la cadena para encontrar dV/dt cuando t=10.

06. **Presión en tejidos vivos.** Bajo ciertas condiciones, la presión p desarrollada en los tejidos vivos por la radiación ultrasónica está dada como una función de la intensidad de la radiación mediante la ecuación $p=(2\rho VI)^{1/2}$ Donde ρ (letra griega que se lee “ro”) es la densidad del tejido afectado y V la velocidad de propagación de la radiación .Aquí ρ y V son constantes.

a. Encuentre la razón de cambio de ρ con respecto a I.

b. Encuentre la razón de cambio relativa de ρ con respecto a I.

07. **Demografía.** Suponga que para cierto grupo de 20000 nacimientos, el número de personas que alcanzan a vivir “x” años es:

$$I_x=-0.000354x^4+0.00452x^3+0.848x^2-34.9x+20000;\ 0\leq x\leq 95.2$$

a. Encuentre la razón de cambio de I_x con respecto a x y evalué su respuesta para x=65.

b. Encuentra la razón de cambio relativa y la razón de cambio porcentual de I_x cuando x=65 redondee su respuesta a tres decimales.

08. **Contracción muscular** Un músculo tiene la capacidad de contraerse al estar sometido a una carga impuesta, por ejemplo, un peso. La ecuación $(P+a)(v+b)=k$ se llama “ecuación fundamental de la contracción muscular” Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v es la velocidad de contracción de las fibras musculares y a, b y k son constantes positivas. Exprese v como una función de P. Utilice su resultado para encontrar dv/dP.

09. **Economía** Suponga que pq=100 es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante. Sea c el costo total y suponga que el costo marginal es 0.01 cuando q =200. Utilice la regla de la cadena para encontrar dc/dp cuando q=200.

10. **Producto de ingreso marginal** Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que ellos producen $q = 2m\left(2m+1\right)^{3/2}$ unidades de cierto artículo diariamente. El ingreso total r está dado por $r = \dfrac{50q}{\sqrt{1000+3q}}$

a. ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo más cercano) cuando hay 12 trabajadores?
b. Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores
c. Determine el producto de ingreso marginal cuando m=12.

11. Suponga que $y = f(x)$ donde $x = g(t)$ Dado que $g(2) = 3,\ g'(2) = 4,\ f(2) = 5,\ f'(2) = 6,$ $g(3) = 7,\ g'(3) = 8,\ f(3) = 9,\ f'(3) = 10$, determine el valor de $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=2}$

12. **Negocios** Un fabricante determinó que, para su producto, el costo promedio diario (en cientos) está dado por $\bar{c} = \dfrac{324}{\sqrt{q^2+35}} + \dfrac{5}{q} + \dfrac{19}{18}$

a. Conforme la producción diaria crece, el costo promedio se aproxima a una cantidad constante. ¿Cuál es esta cantidad?
b. Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.
c. El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementaran a 18 unidades diarias el ingreso crecería a $275. ¿Deberá realizar este aumento? ¿Por qué?

TERCERA UNIDAD

TEMAS ADICIONALES DIFERENCIACIÓN

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante estará en condiciones de resolver ejercicios y problemas, mediante el cálculo y la aplicación de derivadas exponenciales, logarítmicas, elasticidad de demanda, diferenciación implícita, método de newton y derivadas de orden superior relacionadas a su carrera.

SEMANA 09:
DERIVADA DE LAS FUNCIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES

Hasta el momento, las únicas derivadas que se han podido calcular pertenecen a funciones construidas a partir de funciones de potencias utilizando la multiplicación por una constante, operaciones aritméticas y la composición. Las funciones logarítmicas $\log_b x$ y las funciones exponenciales b^x no se pueden construir a partir de funciones de potencias utilizando la multiplicación por una constante, operaciones aritméticas y la composición. De ello se desprende la necesidad de contar por lo menos con otra fórmula de diferenciación verdaderamente básica.

En esta sección, se desarrollan fórmulas para la diferenciación de funciones logarítmicas. Se iniciará con la derivada de Ln x y se hará más comentarios sobre los pasos numerados al final del cálculo.

Paso 01: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{Ln}(x+h)-\operatorname{Ln}x}{h}$ Definición de derivada

Paso 02: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{Ln}\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h}$ Puesto que $LnA - LnB = Ln\frac{A}{B}$

Paso 03: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{h}.\operatorname{Ln}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)\right)$ Algebra

Paso 04: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{x}.\dfrac{x}{h}\operatorname{Ln}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)\right)$ Al escribir $\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{x}.\dfrac{x}{h}$

Paso 05: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{x}.\operatorname{Ln}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{x/h}\right)$ Puesto que $nLnA = LnA^n$

Paso 06: $\dfrac{1}{x}\lim\limits_{h\to 0}\left(\operatorname{Ln}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{x/h}\right)$ Por la propiedad de límite

Paso 07: $\dfrac{1}{x}.\operatorname{Ln}(\lim\limits_{h\to 0}(1+\dfrac{h}{x})^{x/h}$ Ln es continua

Paso 08: $\dfrac{1}{x}.\operatorname{Ln}(\lim\limits_{h/x\to 0}(1+\dfrac{h}{x})^{x/h}$ Para x>0 fija

Paso 09: $\frac{1}{x}.\text{Ln}(\lim\limits_{k\to 0}(1+k)^{1/k}$ al establecer $k=\frac{h}{x}$

Paso 10: $\frac{1}{x}.\text{Ln}(e)$

Paso 11: $\frac{1}{x}$ Puesto que ln e=1

Después de todos los pasos mostrados se concluye, que:

$$Si:\ y = Lnx \quad entonces \quad y' = \frac{1}{x}$$

El cálculo es largo pero cuando se sigue paso a paso permite revisar muchas ideas importantes, un truco cuyo descubrimiento requiere experiencia. Tome en cuenta que necesariamente $x \neq 0$, puesto que "x" está en el dominio de Ln, que es $\langle 0,\infty\rangle$. Para entender la justificación del paso (6), se debe observar que x y, por ende, $\frac{1}{x}$ son constantes con respecto a la variable límite. Ya se ha comentado que las funciones logarítmicas son continuas y esto es lo que permite intercambiar los procesos de aplicación de la función Ln y tener un límite en (7). En (8), el punto es que, para x>0 fija, $\frac{h}{x}$ tiende a 0 y, de manera inversa, h tiende a 0 cuando $\frac{h}{x}$ tiende a 0. Por lo tanto, $\frac{h}{x}$ se puede considerar como una nueva variable límite, K, y esto se hace en el paso (9).

REGLA BÁSICA 2: Derivada de Ln x

$$\frac{d}{dx}(\text{Ln}\,x) = \frac{1}{x} \quad \text{para,}\ \ x>0$$

Se requiere tener cierto cuidado con esta regla porque mientras el lado izquierdo está definido solo para x>0, el lado derecho está definido para toda $x \neq 0$. Para x<0, el Ln(-x) está definido y, por la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\text{Ln}(-x)) = \frac{1}{-x}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \quad ,\ \text{para}\ x<0$$

Las dos últimas ecuaciones se pueden combinar usando la función absoluta para obtener

$$\frac{d}{dx}(\text{Ln}|x|) = \frac{1}{x} \quad ,\ \text{para}\ \ x \neq 0$$

EJEMPLO 01: Diferenciación de funciones que contienen Lnx

Diferencie f(x)=5lnx.

<u>Resolución:</u>

Aquí f es una función que resulta de multiplicarse una constante (5) y otra función (Ln x); así que, por la regla básica, se tiene para x>0:

$$f'(x) = 5\frac{d}{dx}(\text{Ln}\,x) = 5.\frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{5}{x}$$

EJEMPLO 02: Diferenciación de funciones que contienen Lnx

Diferencie $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Resolución:

Por la regla del cociente y la regla básica 2

$$y' = \frac{x^2 \frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}\,x) - (\mathrm{Ln}\,x)\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2(\frac{1}{x}) - (\mathrm{Ln}\,x)(2x)}{x^4}$$

$$y' = \frac{x - 2x\mathrm{Ln}\,x}{x^4}$$

$$\therefore y' = \frac{1 - 2\mathrm{Ln}\,x}{x^3}$$

EJEMPLO 03: Diferenciación de funciones que contienen logaritmos

Encuentre f'(w) si: $f(w)=\mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{1+w^2}{w^2-1}}$.

Resolución:

Se simplifica usando las propiedades de los logaritmos y luego se diferencia:

$$f(w) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Ln}(1+w^2) - \mathrm{Ln}(w^2-1)\right]$$

$$f'(w) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+w^2}(2w) - \frac{1}{w^2-1}(2w)\right]$$

$$f'(w) = \frac{w}{1+w^2} - \frac{w}{w^2-1}$$

$$\therefore f'(w) = -\frac{2w}{w^4-1}$$

EJEMPLO 04: Diferenciación de funciones que contienen logaritmos

Encuentre f'(x) si f(x)= $\ln^3(2x+5)$

Resolución:

El exponente 3 se refiere al cubo de ln(2x+5). Esto es,

$$f(x) = \ln^3(2x+5) = \left[\ln(2x+5)\right]^3$$

Por la regla de la potencia,

$$f'(x) = 3\left[\ln(2x+5)\right]^2 \frac{d}{dx}\left[\ln(2x+5)\right]$$

$$f'(x) = 3\left[\ln(2x+5)\right]^2 \left[\frac{1}{2x+5}(2)\right]$$

$$\therefore f'(x) = \frac{6}{2x+5}\left[\ln(2x+5)\right]^2$$

EJEMPLO 05: Diferenciación de una función logarítmica con basen 10

Si $y = \log(2x+1)$, encuentre la razón de cambio de "y" con respecto a "x".

Resolución:

La razón de cambio es $\frac{dy}{dx}$ y la base implicada es 10. Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\log(2x+1)\right]$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(2x+1)}{\ln 10}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{2x+1}(2)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\ln 10(2x+1)}$$

DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Tal como señalamos, las funciones exponenciales no se pueden construir a partir de funciones de potencias utilizando la multiplicación por una constante, operaciones aritméticas y la composición. Sin embargo, las funciones b^x, para b>0 y $b \neq 0$, son inversas a las funciones $\log_b(x)$ y, si una función invertible f es diferenciable. La idea clave es que la gráfica de la inversa de una función se obtiene mediante la reflexión de la gráfica de la función original en la recta y=x. Este proceso de reflexión conserva la suavidad de modo que si la gráfica de una función invertible es suave, entonces también lo es la gráfica de su inversa. Al diferenciar

$$\frac{d}{dx}\left[f(f^{-1}(x)\right] = \frac{d}{dx}(x)$$
$$f'\left[f^{-1}(x)\right]\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(x)\right] = 1$$
$$\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

REGLA COMBINADA 6: Regla de la función inversa

Si f es una función invertible y diferenciable, entonces f^{-1} es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Igual de la regla de la cadena, la notación de Leibniz es muy adecuada para las funciones inversas. De hecho si $y = f^{-1}(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f^{-1}(x))$ y ya que, f(y)=x, $f'(y) = \frac{dx}{dy}$.Cuando se sustituyen estas ecuaciones en la regla combinada 6, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

De modo que la regla combinada 6, se puede reescribir como $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

En el caso inmediato de interés, con $y = e^x$ tal que x= ln y dx/dy=1/y= $\frac{1}{e^x}$, se tiene

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x \text{ lo cual se registra como}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Cuando u es una función diferenciable de x, una aplicación de la regla de la cadena da:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

EJEMPLO 01: Diferenciación de funciones que contienen e^x

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si : $y = 3e^x$

Resolución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3e^x)$$
$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}(e^x)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3e^x$$

EJEMPLO 02: Diferenciación de funciones que contienen e^x

Si y= $\frac{x}{e^x}$, encuentre $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN:

Reescribir la función como $y = xe^{-x}$ y usar la regla del producto.

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(e^{-x})$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}(1) + x(e^{-x})(-1)$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}(1-x)$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{e^x}$$

EJEMPLO 03: Diferenciación de funciones que contienen e^x

Si: $y = e^2 + e^x + \ln 3$ encuentre y'.

Resolución:

Como e^2 y ln3 son constantes, entonces sus derivadas son ceros y solo se tendrá que derivar e^x, luego se tiene:
y'=0+ e^x +0
y'= e^x

EJEMPLO 04: Diferenciación de funciones que contienen e^u

Encuentre $\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x})$

Resolución:

La función tiene la forma e^u con $u = x^3 + 3x$.

$$y' = \frac{d}{dx}(e^{x^3+3x})$$

$$y' = e^{x^3+3x}\frac{d}{dx}(x^3 + 3x)$$

$$y' = e^{x^3+3x}(3x^2 + 3)$$

$$\therefore y' = 3(x^2 + 1)e^{x^3+3x}$$

EJEMPLO 05: Diferenciación de funciones que contienen e^u

Encuentre $\frac{d}{dx}\left[e^{x+1}\ln(x^2 + 1)\right]$

Resolución:

De acuerdo con la regla del producto,

$$y' = \frac{d}{dx}\left[e^{x+1}\ln(x^2 + 1)\right]$$

$$y' = e^{x+1}\frac{d}{dx}\left[\ln(x^2 + 1)\right]\frac{d}{dx}(e^{x+1})$$

$$y' = e^{x+1}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)(2x) + \left[\ln(x^2 + 1)\right]e^{x+1}(1)$$

$$\therefore y' = e^{x+1}\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1)\right)$$

GUIA DE PRÁCTICA N° 09: DERIVADA DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

01. Diferencie las funciones:

a. $y = \frac{5\ln x}{9}$

b. $y = \ln(-x^2 + 6x)$

c. $y = (ax+b)^3 \ln(ax+b)$

d. $y = \ln\left[(5x+2)^4 (8x-3)^6\right]$

e. $y = (x^2+1)\ln(2x+1)$

f. $y = \ln(x^3 \sqrt[4]{2x+1})$

02. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 - 3x - 3)$ cuando x=4

03. Ingreso marginal. Encuentre la función de ingreso marginal si la función de demanda es $p = \frac{25}{\ln(q+2)}$

04. Costo marginal. Una función de costo total está dada por $c = 25\ln(q+1) + 12$ encuentre el costo marginal cuando q=6

05. Costo marginal. La función de costo promedio de un fabricante está dada por $\bar{c} = \frac{500}{\ln(q+20)}$ Encuentre el costo marginal (redondeado a dos decimales) cuando q=50

06. Diferencie las funciones:

a. $y = \frac{ae^x}{b}$

b. $y = x^2 e^{-x^2}$

c. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

d. $y = (e^{2x}+1)^3$

e. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

f. $y = e^{-x}\ln x$

07. Calcule la razón de cambio relativa de $f(x) = 10^{-x} + \ln(8+x) + 0.01e^{x-2}$ cuando x=2 Redondee su respuesta a cuatro decimales.

08. Finanzas. Después de t años, el valor S de un capital P que se invierte a una tasa anual r compuesta continuamente está dada por $S = Pe^{rt}$. Demuestre que la razón de cambio relativa de S con respecto a t es r.

09. Ahorro y consumo. El ahorro S de un país (en miles de millones) Está relacionado con el ingreso nacional (en miles de millones) mediante la ecuación $S = \ln\frac{3}{2+e^{-I}}$

a. Encuentre la propensión marginal al consumo como una función del ingreso.
b. Al millón más cercano, ¿Cuál es el ingreso nacional cuando la propensión marginal al ahorro es de 1/7?

10. En los problemas a y b, utilice las reglas de diferenciación para encontrar f'(x). Luego use su calculadora grafica para encontrar todas las raíces reales de f'(x). redondee su respuesta a dos decimales.

a. $f(x) = e^{2x^3+x^2-3x}$

b. $f(x) = x + e^{-x}$

PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 09: DERIVADA DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

01. Diferencie las funciones:

a. $y = \ln(3x-7)$

b. $f(x) = \ln\left(4x^6 + 2x^3\right)$

c. $y = \log_3(8x-1)$

d. $y = \ln x^3 + \ln^3 x$

e. $y = \ln^2(2x+11)$

f. $y = \sqrt{4+3\ln x}$

02. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\ln x - x$ en el punto donde x=1

03. **Cambio en la oferta** la oferta de q unidades de un producto al precio p por unidad está dada por $q(p) = 27 + 11\ln(2p+1)$. Encuentre la tasa de cambio de la oferta respecto al precio, $\frac{dq}{dp}$.

04. **Percepción de sonido.** El nivel de un sonido L, medido en decibeles, percibido por el oído humano depende de los nivel de intensidad I de acuerdo con $L = 10\log\frac{1}{I_0}$, donde I_0 es el umbral de audibilidad estándar. Si I_0 =17, Encuentre $\frac{dL}{dI}$, la razón de cambio del nivel del sonido con respecto a la intensidad.

05. **Biología.** En cierto experimento con bacterias, se observó que la actividad relativa de una colonia particular de bacterias está descrita por $A = 6\ln\left(\frac{T}{a-T} - a\right)$ donde a es una constante y T es la temperatura del medio ambiente. Encuentre la razón de cambio de A con respecto T.

06. Diferencie las funciones

a. $y = e^{2x^2+3}$

b. $y = xe^{ax}$

c. $y = 5^{2x^3}$

d. $y = x^5 - 5^x$

e. $y = e^{2x}(x+6)$

f. $y = x^x$

07. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva y= e^x en el punto (1, e). Demuestre que esta recta tangente pasa por (0,0) y que es la única recta tangente a y = e^x que pasa por (0,0).

08. **Población.** La población en millones, del área más grande de Seatlle dentro de t años, contados a partir de 1970, se estima por medio de $p = 1.92e^{0.0176t}$. Demuestre que dP/dT=kP donde k es una constante. Esto significa que, en cualquier momento, la razón de cambio de la población es proporcional a la población existente en dicho momento.

SEMANA 10:
ELASTICIDAD DE LA DEMANDA Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

La elasticidad de la demanda es un medio por el cual los economistas miden como afecta su cambio en el precio de un producto la cantidad demandada. Esto es, se refiere a la respuesta del consumidor frente al cambio de precio. En términos informales, la elasticidad de la demanda es la razón del cambio porcentual en la cantidad demandada que resulta en un cambio porcentual dado en un precio:

$$\frac{\text{Cambio porcentual en la cantidad}}{\text{Cambio porcentual en el precio}}$$

Por ejemplo, si para un incremento de 5% en el precio la cantidad demandada disminuye en 2%, se podría decir que la elasticidad de la demanda es -2/5.
En forma más general, suponga que p=f(q) es la función de demanda para un producto. Los consumidores demandaran q unidades a un precio de f(q) por unidad y demandaran (q + h) unidades a un precio de f(q + h) por unidad (figura 10.1). El cambio porcentual en la cantidad demandada a partir de (q + h) es:

$$\frac{(q+h)-q}{q}.100\% = \frac{h}{q}.100\%$$

El cambio porcentual correspondiente en el precio por unidad es: $\dfrac{f(q+h)-f(q)}{f(q)}.100\%$

La razón de estos cambios porcentuales es:

$$\frac{\frac{h}{q}.100\%}{\frac{f(q+h)-f(q)}{f(q)}.100\%} = \frac{h}{q}.\frac{f(q)}{f(q+h)-f(q)} = \frac{\frac{f(q)}{q}}{\frac{f(q+h)-f(q)}{h}}$$

Si f es diferenciable, entonces cuando $h \to 0$, el límite de $\dfrac{[f(q+h)-f(q)]}{h}$ es

$f'(q) = \dfrac{dp}{dq}$. Así, el límite de (1) es:

$$\frac{\frac{f(q)}{q}}{f'(q)} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}$$ Puesto que p =f (p)

La cual se llama elasticidad puntual de la demanda.

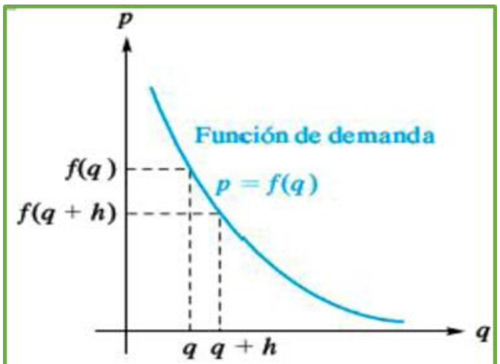


FIGURA 10.1

Definición
Si p=f(q) es una función de demanda diferenciable, la **elasticidad puntual de la demanda**, denotada por la letra griega η (eta), en (q, p) está dada por:

$$\eta = \eta(q) = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}$$

EJEMPLO 01: Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determine la elasticidad puntual de la ecuación de demanda:

$p = \frac{k}{q}$, donde k>0 y q>0

Resolución:
A partir de la definición, se tiene

$$n = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{pd}{pq}} = \frac{\frac{k}{q^2}}{\frac{-k}{q^2}} = -1$$

Así, la demanda tiene elasticidad unitaria para toda q>0. La grafica de $p = \frac{k}{q}$ se llama hipérbola equilátera y suele encontrarse en textos de economía en los análisis de elasticidad.
Si se tiene p=f(q) para la ecuación de demanda, como en el análisis realizado hasta ahora, entonces casi siempre resulta directo calcular $\frac{dp}{dq}$=f'(q). Sin embargo cuando en lugar de esto se tiene q como una función de p, entonces se tendrá q= $f^{-1}(p)$
Se deduce que:

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

Lo que proporciona otra expresión útil para η. Observe también que si =g (p), entonces:

$$\eta = \eta(p) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{g(p)} . g'(p) = p. \frac{g'(p)}{g(p)}$$

Y, por lo tanto.
Elasticidad = precio. Razón de cambio relativa de la cantidad como una función del precio.

ELASTICIDAD E INGRESO

Pasando a una situación diferente, se puede establecer cómo afecta la elasticidad de la demanda a los cambios en el ingreso (ingreso marginal) si p=f(q) es la función de demanda de un fabricante, El ingreso total está dada por:

r=pq

Para encontrar el ingreso marginal, dr/dq, se, diferenciar r usando la regla del producto:

$$\frac{dr}{dq} = p + q\frac{dp}{dq} \quad ....(5)$$

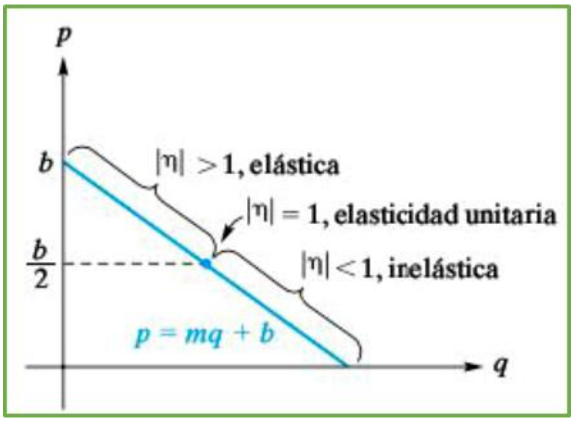
Al factorizar el lado derecho de la ecuación (5), se tiene: $\frac{dr}{dq} = p(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq})$

Pero: $\frac{q}{p}\frac{dp}{dq} = \frac{\frac{dp}{dq}}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\eta}$

Por lo que: $\frac{dr}{dq} = p\left(1+\frac{1}{\eta}\right)$ …………..(6)

Si la demanda es elástica $\eta < -1$, por lo que $1+\frac{1}{\eta} > 0$. Si la demanda es inelástica, entonces $\eta > -1$, por lo que $1+\frac{1}{\eta} < 0$. Suponga que p>0. De la ecuación (6) se puede concluir que $\frac{dr}{dq} > 0$ en los intervalos donde la demanda es elástica. Tal como se verá pronto, una función es creciente e intervalos para los cuales su derivada es positiva y es decreciente en los intervalos donde su derivada es negativa. Por lo tanto, el ingreso total r es creciente en los intervalos donde la demanda es elástica y es decreciente en los intervalos donde la demanda es inelástica. Así, del análisis anterior se concluye que entre más unidades se vendan, el ingreso total de un fabricante crece si la demanda es elástica, pero disminuye si la demanda es inelástica. Esto es, si la demanda es elástica, un precio menor aumentará el ingreso, ello significa que un precio menor ocasionará un incremento lo suficientemente grande en la demanda como para hacer crecer el ingreso. Si la demanda es inelástica, un precio menor hará disminuir el ingreso. Para una elasticidad unitaria, un precio menor deja sin cambio el ingreso total.
Si se resuelve la ecuación de la demanda para obtener la forma q=g (p), en vez de p=f (q), entonces un análisis similar da: $\frac{dr}{dp} = q(1+\eta)$

Y las conclusiones del último párrafo se deducen de manera aún más directa.



DIFERENCIACION IMPLÍCITA

La diferenciación implícita es una técnica utilizada para diferenciar funciones que no están dadas en la forma usual y=f(x) (ni en la forma x=g(y)). Para introducir esta técnica se encontrará la pendiente de una recta tangente a un círculo. Considere el círculo de radio 2 cuyo centro está en el origen, su ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

El punto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ se encuentra sobre el círculo. Para encontrar la pendiente en este punto es necesario encontrar $\frac{dy}{dx}$ ahí. Hasta ahora, se ha tenido a "y" en forma explícita (directa) en términos de "x" antes de determinar y'; esto es, en la forma y=f(x) (o en la forma x=g(y)). En la ecuación (1) de esta sección, esto no es así. Se dice que la ecuación (1) tiene la forma F(x, y)=0, donde F(x, y) denota una función de dos variables. Parece obvio que debe despejarse y de la ecuación (1) en términos de x:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{4-x^2}$$

Procedimiento de diferenciación implícita

Para una ecuación que supuestamente define a "y" de manera implícita como una función diferenciable de x, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede encontrarse como sigue:

1. Diferencie ambos lados de la ecuación respecto a x
2. Agrupe todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ en un lado de la ecuación y agrupe los demás términos en el otro lado.
3. Obtenga $\frac{dy}{dx}$ como factor común en el lado que contenga los términos $\frac{dy}{dx}$
4. Despeje $\frac{dy}{dx}$, tomando en cuenta cualesquiera restricciones.

EJEMPLO 01: Diferenciación Implícita

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por diferenciación implícita si: $y + y^3 - x = 7$

Resolución:

Aquí "y" no está dada como función explicita de x (esto es, no está en la forma y=f(x)). Por lo anterior, se supone que "y" es una función implícita (diferenciable) de "x" y se aplica el procedimiento previo de cuatro pasos:

1. Al diferenciar ambos lados con respecto a x, se tiene

$$\frac{d}{dx}(y + y^3 - x) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(7)$$

Ahora, $\frac{d}{dx}(y)$ puede escribirse como $\frac{dy}{dx}$; mientras que $\frac{d}{dx}(x)=1$.

Por la regla de la potencia: $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\frac{dy}{dx}$

Por consiguiente, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

2. Al agrupar todos los términos $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo y los demás en el lado derecho resulta

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

3. Al factorizar $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo, se tiene

$$\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) = 1$$

4. Se despeja $\frac{dy}{dx}$ dividiendo ambos lados entre $1 + 3y^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + 3y^2}$$

Debido a que frecuentemente el paso 4 del proceso implica la división entre una expresión que contiene a las variables, la respuesta obtenida debe restringirse para excluir aquellos valores de las variables que harían al denominador igual a cero. Aquí, el denominador siempre es mayor o igual que 1, de manera que no hay restricción.

EJEMPLO 02: Diferenciación implícita

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si: $x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$

Resolución:
Como "y" no está dada de manera explícita en términos de x, se utiliza el método de diferenciación implícita:

1. Al suponer que "y" es una función de x y diferenciar ambos lados con respecto a x, resulta

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 4xy^2 - 27) = \frac{d}{dx}(y^4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + 4\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(27) = \frac{d}{dx}(y^4)$$

Para encontrar $\frac{d}{dx}(xy^2)$, se utiliza la regla del producto:

$$3x^2 + 4\left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x)\right] - 0 = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 4\left[x(2y\frac{dy}{dx}) + y^2(1)\right] = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

2. Al agrupar los términos $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo y los términos en el lado derecho, se obtiene

$$8xy\frac{dy}{dx} - 4y^3\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 4y^2$$

3. Factorizando $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo resulta

$$\frac{dy}{dx}(8xy - 4y^3) = -3x^2 - 4y^2$$

4. Al despejar $\frac{dy}{dx}$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 4y^2}{8xy - 4y^3} = \frac{3x^2 + 4y^2}{4y^3 - 8xy}$$

Lo cual da el de $\frac{dy}{dx}$ en los puntos (x, y) para el cual $4y^3 - 8xy \neq 0$

GUIA DE PRÁCTICA N° 10: ELASTICIDAD DE DEMANDA Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

01. Encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de q o p y determine si la demanda es elástica, inelástica o tiene elasticidad unitaria.

a. $p = 10 - 0.04q \quad q = 100$

b. $p = \dfrac{500}{q+2} \quad q = 104$

c. $q = \sqrt{500 - p} \quad p = 400$

d. $q = (p - 50)^2 \,; p = 10$

02. Para la ecuación de demanda lineal p=13-0.05q, verifique si la demanda es elástica cuando p=10, inelástica cuando p=3 y si tiene elasticidad unitaria cuando p=6.50.

03. ¿Para qué valor (o valores) de q las siguientes ecuaciones de demanda tienen elasticidad unitaria?

a. $p = 336 - 0.25q$

b. $p = 300 - q^2$

04. La ecuación de demanda para un producto es $q = 500 - 40p + p^2$ Donde p es el precio por unidad y q es la cantidad de unidades demandadas (en miles). Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando p=15, Si este precio de 15 se incrementa en ½%, ¿Cuál es el cambio aproximado en la demanda?

05. La ecuación de la demanda para cierto producto es $q = \sqrt{3000 - p^2}$ Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando p=40 y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda si el precio de $ 40 (dólares estadounidense) aumenta en 7 por ciento.

06. Para la ecuación de demanda p=500-2q, verifique si la demanda es elástica y el ingreso total es creciente para $0 < q < 125$ .Compruebe que la demanda es inelástica y el ingreso total es decreciente para $125 < q < 250$.

07. Encuentre dy/dx, mediante diferenciación implícita

a. $3x + 6y^2 = 1$

b. $xy - y - 11x = 5$

c. $5x^3y^4 - x + y^2 = 25$

d. $\left(1 + e^{3x}\right)^2 = 3 + \ln(x + y)$

08. Encuentre la pendiente de la curva $4x^2 + 9y^2 = 1$ en el punto $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$; en el punto (x_0, y_0).

09. Encuentre ecuaciones de la rectas tangentes a la curva $x^3 + xy + y^3 = -1$ en los siguientes puntos (-1,-1), (-1,0) y (-1,1).

10. **Propensión marginal al consumo.** Los ahorros de S de un país se define implícitamente en términos de su ingreso nacional I por medio de la ecuación $S^2 + \dfrac{1}{4}t^2 = SI + I$ donde S e I están en miles de millones. Encuentre la preposición marginal al consumo cuando I=16 y S=12.

PRÁCTICA DOMICILIARIA N°10: ELASTICIDAD DE DEMANDA Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

01. Encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de q o p y determine si la demanda es elástica, inelástica o tiene elasticidad unitaria.

a. $p = \dfrac{3000}{q}$; $q = 300$

b. $p = \dfrac{800}{2q+1}$; $q = 24$

c. $q = \sqrt{2500 - p^2}$; $p = 20$

d. $q = p^2 - 50p + 850$; $p = 20$

02. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es $q = a\sqrt{b - cp^2}$ donde a, b y c son constantes positivas.
(a) Demuestre que la elasticidad no depende de a.
(b) Determine el intervalo de precios para el que la demanda es elástica.
(c) ¿Para qué precio existe elasticidad unitaria?

03. Dada la ecuación de demanda $q^2(1+p)^2 = p$, determine la elasticidad puntual de la demanda cuando p=9.

04. La ecuación de demanda para un producto es $q = \dfrac{60}{p} + \ln(65 - p^3)$
(a) Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando p=4 y clasifique la demanda como elástica, inelástica o de elasticidad unitaria a este nivel de precio.
(b) Si el precio disminuye en 2% (de $ 4.00 a $3.92), use la respuesta al inciso (a) para estimar el cambio porcentual correspondiente en la cantidad vendida.
(c) ¿Resultarán los cambios del inciso (b) en un incremento o en una disminución en el ingreso? Explique su respuesta.

05. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es $p = 50(151 - q)^{0.02\sqrt{q+19}}$
(a) Encuentre el valor de dp/dq cuando se demanda 150 unidades.
(b) Con el resultado del inciso (a), determine la elasticidad puntual de la demanda cuando se demandan 150 unidades a este nivel. ¿Es la demanda elástica, inelástica o de elasticidad unitaria?
(c) Use el resultado del inciso (b) para estimar el precio por unidad si la demanda disminuye de 150 a 140 unidades.
(d) Si la demanda actual es de 150 unidades, ¿Debe el fabricante aumentar o disminuir el precio para incrementar su ingreso? (justifique su respuesta).

06. Un fabricante de puertas de aluminio puede vender actualmente 500 puertas por semana a un precio de $80 por unidad. Si el precio se reduce a $75 por unidad, podrían venderse 50 puertas adicionales por semana. Estime la elasticidad actual de la demanda para las puertas y también el valor actual de la función de ingresos marginal del fabricante.

07. Dada la ecuación de demanda $p = 2000 - q^2$ donde $5 \le q \le 40$ ¿Para qué valor de q es $|\eta|$ en un máximo? ¿Para qué valor es un mínimo?

08. Encuentre dy/dx, mediante diferenciación implícita

a. $2y^3 - 7x^2 = 5$

b. $x^3 - y^3 = 3x^{2y} - 3xy^2$

c. $y^2 + y = \ln x$

d. $e^{x-y} = \ln(x - y)$

09. Encuentre la pendiente de la curva $\left(x^2+y^2\right)^2=4y^2$ en el punto (0,2).

10. Encuentre la razón de cambio de q con respecto a p.

a. $p=\dfrac{20}{(q+5)^2}$

b. $p=\dfrac{3}{q^2+1}$

11. **Escala física.** La relación entre la velocidad (v), la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) de cualquier onda esta dad por $v=f\lambda$ Encuentre $\dfrac{df}{d\lambda}$ por diferenciación implícita. (Trate a v como una constante). Luego demuestre que se obtiene el mismo resultado si primero se despeja f y en seguida se diferencia con respecto a λ.

12. **Sustitución tecnológica.** Con frecuencia las tecnologías o productos nuevos tienden a reemplazar a los viejos equipamientos. Por ejemplo, la mayoría de las aerolíneas comerciales usan actualmente motores a chorros en vez de motores de propulsión. En su análisis de pronóstico de la sustitución tecnológica, Hurter y Rubenstein se refieren a la ecuación $\ln\dfrac{f(t)}{1-f(t)}+\sigma\dfrac{1}{1-f(t)}=c_1+c_2t$ Donde f(t) es la participación en el mercado de un artículo sustituto en un tiempo t y c_1, c_2 y σ (sigma) son consonantes. Verifique la afirmación de que la razón de sustitución es $f'(t)=\dfrac{c_2f(t)\left[1-f(t)\right]^2}{\sigma f(t)+\left[1-f(t)\right]}$.

SEMANA 11
DIFERENCIACION LOGARITMICA, MÉTODO DE NEWTON

Existe una técnica llamada **diferenciación logarítmica** que con frecuencia simplifica la diferenciación de y=f(x) cuando f(x) contiene productos, cociente o potencias. El procedimiento es como sigue:

DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA

Para diferenciar y=f(x).
1. Obtenga el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación. Esto resulta en: ln y =ln(f(x))
2. Simplifique ln (f(x)) usando las propiedades de los logaritmos.
3. Diferencie ambos lados con respecto a x.
4. Despeje dy/dx.
5. Exprese la respuesta sólo en términos de x. Esto requiere sustituir f(x) por y.

Existe un par de puntos útiles. Primero, independientemente de cualquier simplificación, el procedimiento produce: $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{Ln}(f(x)\right]$

De manera que: $\dfrac{dy}{dx}=y\dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{Ln}(f(x)\right]$

Es una fórmula que puede memorizarse, si usted lo prefiere. Segundo la cantidad $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ que resulta de diferenciar ln(f(x) es lo que se llama **taza relativa de cambio de f(x)**.

EJEMPLO 01: Diferenciación logarítmica

Encuentre y’ si: $y=\dfrac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$.

<u>Resolución:</u>

La diferenciación de esta función en la manera usual resulta engorrosa porque implica las reglas del cociente, de la potencia y del producto. La diferenciación logarítmica simplifica el trabajo.

1. Se obtiene el logaritmo natural en ambos lados

$$\mathrm{Ln}\,y=\mathrm{Ln}\frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}.$$

2. Al simplificar mediante las propiedades de los logaritmos, se tiene

$$\mathrm{Ln}\,y=\mathrm{Ln}(2x-5)^3-\mathrm{Ln}(x^2\sqrt[4]{x^2+1})$$

$$\mathrm{Ln}y=3\mathrm{Ln}(2x-5)-\left[\mathrm{Ln}\,x^2+\mathrm{Ln}(x^2+1)^{1/4}\right]$$

$$\mathrm{Ln}y=3\mathrm{Ln}(2x-5)-2\mathrm{Ln}\,x-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(x^2+1)$$

3. Al diferenciar con respecto a “x”, resulta

$$\frac{y'}{y}=3\left(\frac{1}{2x-5}\right)(2)-2\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{6}{2x-5}-\frac{2}{x}-\frac{x}{2(x^2+1)}$$

4. Al despejar y’ se obtiene

$$y'=y\left(\frac{6}{2x-5}-\frac{2}{x}-\frac{x}{2(x^2+1)}\right)$$

5. Al sustituir la expresión inicial para "y" se obtiene y' sólo en términos de x:

$$\therefore y' = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}\left(\frac{6}{2x-5}-\frac{2}{x}-\frac{x}{2(x^2+1)}\right)$$

EJEMPLO 02: Diferenciación de la forma u^v

Diferencie $y = x^x$ usando la diferenciación logarítmica

Resolución:

Este ejemplo es un buen candidato para aplicar la fórmula que aproxima la diferencia logarítmica.

$$y' = y\frac{d}{dx}(\ln x^x)$$

$$y' = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x)$$

$$y' = x^x\left((1)(\ln x)+(x)\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

Vale la pena mencionar que una técnica alternativa para diferenciar una función de la forma $y = u^v$ es convertirla en una función exponencial con base e. A manera de ilustración para la función de este ejemplo, se tiene:

$$y = x^x$$

$$y = (e^{\ln x})^x$$

$$y = e^{x\ln x}$$

$$y' = e^{x\ln x}\left(1\ln x + x.\frac{1}{x}\right)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

MÉTODO DE NEWTON

Es muy fácil resolver ecuaciones de la forma f(x)=0 cuando f es una función lineal o cuadrática. Sin embargo cuando f(x) tiene un grado mayor que 2 (o no es un polinomio). Puede resultar difícil incluso imposible encontrar soluciones (o raíces) de f(x)=0 por los métodos usuales. Es por ello que se recurre a soluciones aproximadas que pueden obtenerse de varias maneras. Por ejemplo pueden utilizarse una calculadora gráfica para estimar las raíces reales de f(x)=0, con tal fin. En esta sección se aprenderá como usar la derivada (siempre que f sea diferenciable). El procedimiento que se desarrollará, llamado método de Newton, es muy apropiado para usarse con una calculadora o computadora.

El método de Newton requiere que se haga una estimación inicial para una raíz de f(x)=0. Una manera de obtener esta valor inicial aproximado consiste en hacer un bosquejo de la gráfica de y= f(x) y estimar la raíz a partir de la gráfica. Un punto en la gráfica donde y=0 es una intersección x y el valor x de este punto es una raíz de f(X)=0. Otra manera de localizar una raíz se basa en el hecho siguiente:

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y f(a) y f (b) tiene signos opuestos, entonces la ecuación f(x)=0 tiene al menos una raíz real entre a y b.

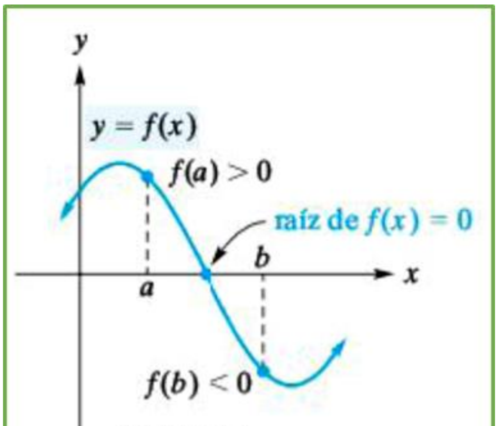


FIGURA 11.1

En la figura 11.1 se muestra esta situación. La intersección "x" entre a y b corresponde a una raíz de f(x)=0 y puede usarse a o b para aproximar esta raíz.

Al suponer que se tiene un valor estimado (pero incorrecto) para una raíz, se verá cómo obtener una mejor aproximación de este valor. En la figura 11.2 se puede ver que f(r)=0 por lo que r es una raíz de la ecuación f(x)=0. Suponga que x_1 es una aproximación inicial a r (una que sea cercana a r).

Observe que en (x_1 , f(x_1)), la recta tangente a la curva interseca al eje x en el punto (x_2 ,0) y que x_2 es una mejor aproximación a r que x_1 .

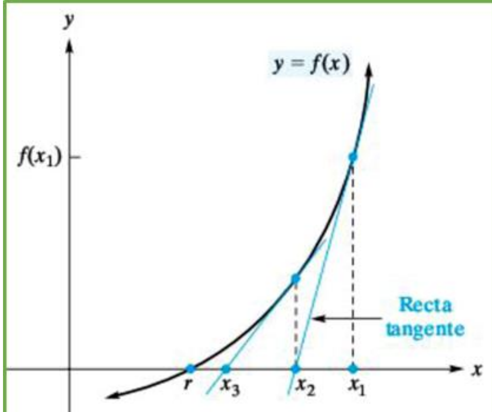


FIGURA 11.2

Se puede encontrar x_2 a partir de la ecuación de la recta tangente. La pendiente de la recta tangente es f'(x_1), entonces una forma punto-pendiente para esta recta es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \qquad (1)$$

Como $(x_2, 0)$ esta sobre la recta tangente, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1) esto da

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1 \quad \text{si } f'(x) \neq 0$$

Por lo que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (2)$$

Para obtener una mejor aproximación a r, se realiza de nuevo el procedimiento ya descrito, pero esta vez se usa x_2 como punto de partida. Esto da la aproximación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad (3)$$

Al repetir (o iterar) este proceso varia veces, se espera obtener mejores aproximaciones en el sentido de que la sucesión de valores $x_1, x_2, x_3 ...$

Aproximará a r. En la práctica el proceso termina cuando se alcanza cierto grado de exactitud deseado.

Si se analizan las ecuaciones (2) y (3), pude verse como se obtiene x_2 a partir de x_1 y como resulta x_3 partiendo de x_2 . en general, x_{n+1} se obtiene a partir de x_n utilizando la siguiente formula general, llamada **método de Newton:**

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 1,2,3....... \qquad (4)$$

Una fórmula como la ecuación (4), que indica la manera en que, en una secesión, se obtiene un número a partir del número precedente, se llama **fórmula recursiva** o ecuación iterativa.

EJEMPLO 01: Aproximación de una raíz por el método de Newton

Aproxime la raíz de $x^4 - 4x + 1 = 0$ que se encuentra entre 0 y 1. Continúe el proceso de aproximación hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.0001.

Resolución:

Si: f(x)= $x^4 - 4x + 1 = 0$, se tiene que:
f(0) = 0 – 0 + 1 = 1   y   f(1) = 1 – 4 + 1 = - 2

(Note el cambio de signo). Como f (0) es más cercana a 0 que f(1), se elige a 0 como la primera aproximación, x_1. Ahora, $f'(x) = 4x^3 - 4$

De modo que $f(x_n) = x_n^4 - 4x_n + 1$ y $f'(x_n) = 4x_n^3 - 4$
Al sustituir en la ecuación (4), se obtiene la formula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n + 1}{4x_n^3 - 4}$$

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^4 - 4x_n - x_n^4 + 4x_n - 1}{4x_n^3 - 4}$$

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^4 - 1}{4x_n^3 - 4}$$

Como $x_1 = 0$
Al hacer n=1 en la ecuación resulta

$$x_2 = \frac{3x_1^4 - 1}{4x_1^3 - 4}$$

$$x_2 = \frac{3(0)^4 - 1}{4(0)^3 - 4}$$

$$x_2 = 0.25$$

Al hacer n=2 en actuación resulta

$$x_3 = \frac{3x_2^4 - 1}{4x_2^3 - 4}$$

$$x_3 = \frac{3(0.25)^4 - 1}{4(0.25)^3 - 4}$$

$$x_3 = 0.25099$$

Al hacer n=3 en la ecuación resulta

$$x_4 = \frac{3x_3^4 - 1}{4x_3^3 - 4}$$

$$x_4 = \frac{3(0.25099)^4 - 1}{4(0.25099)^3 - 4}$$

$$x_4 \approx 0.25099$$

Como los valores de x_3 y x_4 difieren en menos de 0.0001, considera que la raíz es igual a 0.25099 (esto es, x_4)

EJEMPLO 02: Aproximación de una raíz por el método de Newton

Aproxime la raíz $x^3 = 3x + 1$ que se encuentra entre -1 y -2. Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.0001.

Resolución:

Al hacer f(x)= $x^3 - 3x + 1$ (es necesario tener la forma f(x)=0) resulta que

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$ y $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$

(Note el cambio en el signo).Como f(-2) es más cercana a 0 que f(-1), se elige a -2 como la primera aproximación, x_1. Ahora,

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

De modo que:

$$f(x_n) = x_n^3 - 3x_n + 1 \quad y \quad f'(x_n) = 3x_n^3 - 3$$

Al sustituir en la ecuación (4), se obtiene la formula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$\text{Así: } x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 3} \qquad (6)$$

Como x_1 =-2, al hacer n=1 en la ecuación (6) resulta

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 3}$$

$$x_2 = \frac{2(-2)^3 - 1}{3(-2)^2 - 3}$$

$$x_2 \approx -1.8889$$

Al hacer n=2 en la ecuación (6) resulta

$$x_3 = \frac{2x_2^3 - 1}{3x_2^2 - 3}$$

$$x_3 = \frac{2(-1.88889)^3 - 1}{3(-1.88889)^2 - 3}$$

$$x_3 \approx -1.87945$$

Al hacer n=2 en la ecuación (6) resulta

$$x_4 = \frac{2x_3^3 - 1}{3x_3^2 - 3}$$

$$x_4 = \frac{2(-1.87945)^3 - 1}{3(-1.87945)^2 - 3}$$

$$x_4 \approx -1.87939$$

Como los valores de x_3 y x_4 difieren en 0.00006, que es menor a 0.0001, se considera que la raíz es -1.87939 (esto es, x_4)

GUÍA DE PRÁCTICA N° 11: DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA, MÉTODO DE NEWTON

01. Encuentre y’ por medio de diferenciación logarítmica

a. $y = (3x+4)(8x-1)^2(3x^2+1)^4$

b. $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+1}$

c. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+5}{x+9}}$

d. $y = \sqrt{\dfrac{(x+3)(x-2)}{2x-1}}$

e. $y = (2x)^{\sqrt{x}}$

f. $y = (3x+1)^{2x}$

02. Encuentre una ecuación de la recta tangente a: $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^2$ en el punto donde x=0

03. Encuentre una ecuación a la recta tangente a la gráfica de $y = x^x$ en el punto donde x=e

04. Si: $y = (3x)^{-2x}$, determine el valor de x para el que la tasa de cambio porcentual de y con respecto a x es 60.

05. La ecuación de demanda para un disco compacto es $q = 500 - 40p + p^2$ si el precio de \$15 se incrementa en ½%, encuentre el cambio porcentual correspondiente en el ingreso.

06. Utilice el método de newton para estimar la raíz que se indica de la ecuación dada. Continúe el procedimiento hasta que la diferencia de dos aproximaciones sucesivas sea menor que 0.0001.

a. $x^3 - 5x + 1 = 0$ raíz entre 0 y 1

b. $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ raíz entre 0 y 1

c. $x^3 - x - 1 = 0$ raíz entre 1 y 2

07. Estime con precisión de tres decimales, la raíz cubica de 73. (sugerencia: demuestre que el problema es equivalente a encontrar una raíz de $f(x) = x^3 - 73 = 0$. Elija 4 como aproximación inicial. Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas, redondeadas a tres decimales, sean iguales.

08. **Cantidad de punto de equilibrio.** El costo de fabricar q toneladas de un producto está dado por $c = 250 + 2q - 0.1q^3$ Y el ingreso obtenido al vender las q toneladas está dado por r=3q. Aproxime, con precisión de dos decimales, la cantidad del punto de equilibrio. (Sugerencia: Aproxime un raíz de r-c=0, elija el 13 como su aproximación inicial).

09. **Equilibrio.** Dada la ecuación de oferta $p = 2q + 5$ y la ecuación de demanda $p = \dfrac{100}{q^2+1}$

Use el método de newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado. Escriba su respuesta con tres decimales de precisión.

10. **Equilibrio.** Dada la ecuación de oferta y la ecuación de demanda P=10-q, use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado y encuentre el precio de equilibrio correspondiente. Tome 5 como aproximación inicial para el valor requerido de q y escriba su respuesta con dos decimales de precisión.

PRÁCTICA DOMICILIARIA N°11: DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA MÉTODO DE NEWTON

01. Encuentre y' por medio de diferenciación logarítmica:

a. $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{8x^2-1}$

b. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}$

c. $y=\dfrac{x^2\left(1+x^2\right)}{\sqrt{x^2+4}}$

d. $y=x^{x^2+1}$

e. $y=\sqrt[3]{\dfrac{6\left(x^3+1\right)^2}{x^6e^{-4}}}$

02. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=x^x$ en punto donde x=1.

03. Si: $y=x^x$, encuentre la tasa relativa de cambio de y con respecto a x, cuando x=1.

04. Suponga que f(x) es una función positiva diferenciable, que g es un función diferenciable y que $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$ Utilice diferenciación logarítmica para demostrar que $\dfrac{dy}{dx}=\left[f(x)\right]^{g(x)}\left[f'(x)\dfrac{g(x)}{f(x)}+g'(x)\ln(f(x))\right]$

05. Utilice el método de newton para estimar la raíz que se indica de la ecuación dada. Continúe el procedimiento hasta que la diferencia de dos aproximaciones sucesivas sea menor que 0.0001.

a. $x^3-9x+6=0$ raíz entre 2, 3.

b. $x^3+x+1=0$ raíz entre -1 y 0.

c. $x^3=2x+6$ raíz entre 2 y 3.

06. Encuentre la precisión de dos decimales todas las soluciones reales de la ecuación $e^x=x+5$. (Sugerencia: con un bosquejo de las gráficas de $y=e^x$; y=x+5, debe ser claro cuantas soluciones existen. Use valores enteros cercanos para sus estimaciones iniciales.)

07. **Cantidad de punto de equilibrio.** El costo total de fabricar q cientos de lápices está dado por c, donde $c=50+4q+\dfrac{q^2}{1000}+\dfrac{1}{q}$ el ciento de lápices se vende a $8.

(a) demuestre que la cantidad del punto de equilibrio es una solución de la ecuación $f(q)=\dfrac{q^3}{1000}-4q^2+50q+1=0$

(b) utilice el método de newton para estimar la solución de f (q)=0 donde f(q) está dada en el inciso (a). Use 10 como aproximación inicial y escriba su respuesta con precisión de dos decimales.

08. **Equilibrio** Dada la ecuación de oferta p=2q+5 y la ecuación de demanda $p=\dfrac{100}{q^2+1}$, use el método de newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado. Escriba su respuesta con tres decimales de precisión.

09. Use el método de Newton para aproximar (con dos decimales de precisión) un valor crítico de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-5x+1$ en el intervalo $[3,4]$

SEMANA 12

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Se sabe que la derivada de una función y=f(x) en sí misma una función, f′(x). Cuando se diferencia f′(x), la función resultante se llama **segunda derivada** de f con respecto a x. Esta se denota como f′′(x), lo cual se lee como "f doble prima de x". De manera similar, la derivada de la segunda derivada se llama **tercera derivada** y se escribe f′′′(x). Continuando de esta manera, se obtiene derivadas de orden superior. En la tabla 12.1 aparece algunos de los símbolos utilizados para representarlas. Para evitar notaciones confusas, las primas no se usan para derivadas de orden superior al tercero.

Tabla 12.1

Primera derivada	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}(f(x))$	$D_x y$
Segunda derivada	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$D_x^2 y$
Tercera derivada	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$	$D_x^3 y$
Cuarta derivada	y^4	$f^4(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}(f(x))$	$D_x^4 y$

EJEMPLO 01: Determinación de derivadas de orden superior

Si: $f(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, encuentre todas sus derivadas de orden superior.

<u>Resolución:</u>

Al diferenciar f(x) resulta: $f'(x) = 18x^2 - 24x + 6$

Al diferenciar f′(x) se obtiene: $f''(x) = 36x - 24$

De manera similar, $f'''(x) = 36$

Finalmente, $f^{(4)} = 0$

Todas las derivadas subsecuentes también son iguales a 0
$f^{(5)}(x) = 0$, y así sucesivamente.

EJEMPLO 02: Determinación de una derivada de segundo orden

Si: $y = e^{x^2}$, encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$

<u>Resolución:</u>

Calculando la primera derivada, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(2x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$

Utilizamos la regla del producto para calcular la segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\left[x(e^{x^2})(2x) + e^{x^2}(1)\right]$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$$

EJEMPLO 03: Evaluación de una derivada de segundo orden

Si: $y=f(x)=\dfrac{16}{x+4}$, encuentre $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ y evalúela cuando x=4

SOLUCIÓN:

Reescribimos la función como $y = 16(x+4)^{-1}$, luego aplicando la regla de la potencia se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -16(x+4)^{-2}$$

Aplicamos la regla de la potencia para encontrar la segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 32(x+4)^{-3}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{32}{(x+4)^3}$$

Si se evalúa cuando x=4, resulta

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=4} = \frac{32}{8^3} = \frac{1}{16}$$

La segunda derivada que se evalúa en x=4 también de denota como f''(4) o y''(4).

GUÍA DE PRÁCTICA N°12: DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

01. Encuentre las derivadas que se indican:

a. $y = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2; \quad y'''$

b. $y = x^3 + e^x; \quad y^4$

c. $f(x) = x^3 \ln x; \quad f'''(x)$

d. $f(r) = \sqrt{9-r}; \quad f''(r)$

e. $y = (3x+7)^5; \quad y''$

f. $y = \ln\dfrac{(2x+5)(5x-2)}{x+1}; \quad y''$

02. Encuentre y''

a. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

b. $x^2 - y^2 = 16$

c. $y^2 = 4x$

d. $e^x + e^y = x^2 + y^2$

03. Si: $x^2 + 3x + y^2 = 4y$, encuentre $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ cuando x=0 ; y=0

04. Demuestre que la ecuación $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$ se satisface cuando $f(x) = (3x-5)e^{-2x}$

05. Encuentre la razón de cambio de $f'(x)$ si: $f(x) = (5x-3)^4$

06. **Costo marginal** si $c = 0.2q^2 + 2q + 500$ es una función de costo, ¿Que tan rápido está cambiando el costo marginal cuándo q=97.357?

07. **Ingreso marginal** si $p = 400 - 40q - q^2$ es una ecuación de demanda, ¿Que tan rápido está cambiando el ingreso marginal cuándo q=4?

08. Si: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$, determine los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$

09. Suponga que $e^y = y^2 e^x$

(a) Determine $\dfrac{dy}{dx}$ y exprese su respuesta solo en términos de y.

(b) Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ y exprese su respuesta solo en términos de y.

PRÁCTICA DOMICILIARIA N°12: DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

01. Encuentre las derivadas que se indican:

a. $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1; \quad y'''$

b. $y = x^3 + e^x; \quad y^{(4)}$

c. $y = \frac{1}{x}; \quad y'''$

d. $y = (3x+7)^5; \quad y''$

e. $y = \ln[x(x+a)]; \quad f''(y)$

f. Si: $y = e^{2\ln(x^2+1)}$, encuentre y'' cuando x=1

02. Encuentre la segunda derivada:

a. $9x^2 + 16y^2 = 25$

b. $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = c$

c. $y^2 - 6xy = 4$

d. $xy + y - x = 4$

e. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

f. $y = e^{x+y}$

03. Encuentre la razón de cambio $f''(x)$ si $f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{1}{6\sqrt{x}}$

04. Suponga que $e^y = y^2 e^x$

(a) Determine $\frac{dy}{dx}$ y exprese su respuesta solo en términos de y.

(b) Determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ y exprese su respuesta solo en termino de y.

05. Determine f''(x). Luego use su calculadora gráfica para encontrar todas las raíces reales de f''(x)=0. Redondee sus respuestas a sus dos decimales. $f(x) = 6e^x - x^3 - 15x^2$

06. Determine f''(x). Luego use su calculadora grafica para encontrar todas las raíces reales de f''(x)=0. Redondee sus respuestas a dos decimales. $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{12} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$

CUARTA UNIDAD

TRAZADO DE CURVAS

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante estará en condiciones de resolver ejercicios y problemas, formulando el modelo matemático de la función cuando es creciente o decreciente, determinando valores críticos, localizando máximos y mínimos relativos, estableciendo la prueba de la primera derivada, relacionados a su carrera.

SEMANA 13

EXTREMOS RELATIVOS, EXTREMOS ABSOLUTOS EN UN INTERVALO CERRADO

NATURALEZA CRECIENTE O DECRECIENTE DE UNA FUNCION

El análisis del comportamiento grafico de las funciones es una parte básica de las matemáticas y tiene aplicaciones en muchas áreas de estudio. Cuando se hace el bosquejo de una curva. Si solo se colocan puntos quizás no se obtenga información suficiente acerca de su forma. Por ejemplo, los puntos (-1,0), (0,-1) y (1,0) satisfacen la función dada por $(x+1)^3(x-1)$ Con base en estos puntos, podría concluirse a la ligera que la gráfica debe tener la forma que se muestra en la figura 13.1; pero de hecho, la forma verdadera es la que se ilustra en la figura 13.2. En este capítulo se explorara la gran utilidad de la diferenciación en el análisis de una función de manera que se pueda determinar su forma verdadera y el comportamiento de su gráfica.

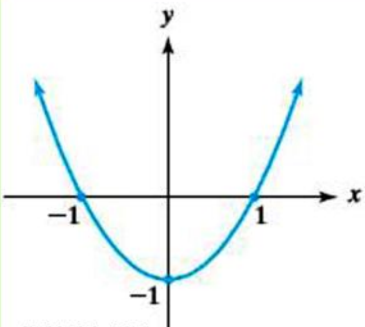


FIGURA 13.1

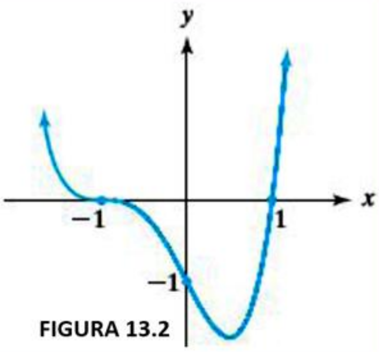


FIGURA 13.2

Se comenzará por analizar la gráfica de la función y=f(x) de la figura 13.2. Observe que conforme "x" aumenta (de izquierda a derecha) en el intervalo I_1, entre a y b, los valores de f(x) también aumentan y la curva asciende.

En otra forma matemática, esta observación significa que x_1, y, x_2 son dos puntos cualesquiera en I_1, tales que $x_1 < x_2$, entonces f(x_1)<f(x_2). Aquí se dice que f es una función creciente en I_1.

Por otra parte conforme "x" aumenta en el intervalo I_2, entre c y d, la curva desciende. En este intervalo $x_3 < x_4$ implica que f(x_3)> f(x_4) y se dice que f es una función decreciente en I_2.

Definición:

Se dice que una función f es creciente en el intervalo I cuando para cualesquiera de dos números x_1, x_2 incluidos en I, si $x_1 < x_2$ entonces f(x_1)<f(x_2). Una función f es decreciente en el intervalo I cuando, para cualesquiera dos números x_3, x_4 incluidos en I, si $x_3 < x_4$, entonces f(x_3)> f(x_4)

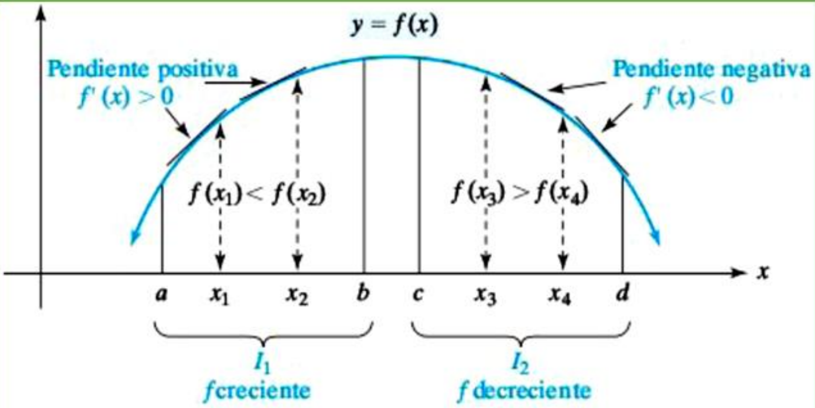


FIGURA 13.2

En términos de la gráfica de la función, f es creciente en I si la curva se eleva hacia la derecha y f es decreciente en I si la curva cae hacia la derecha. Recuerde que una línea recta con pendiente positiva se eleva hacia la derecha y una recta con pendiente negativa cae hacia la derecha.

De regreso a la figura 13.2 se nota que el intervalo I_1, las rectas tangentes a la curva tienen pendientes positivas, por lo que f'(x) debe ser positiva para toda x en I_1. Una derivada positiva implica que la curva está elevándose. En el intervalo I_2, las rectas tangentes tienen pendientes negativas, por lo que f'(x)<0 para toda x en I_2. La curva desciende donde la derivada es negativa. Así, que tiene la siguiente regla que permite usar la derivada para determinar cuándo una función es creciente o decreciente:

REGLA 1: Criterios para funciones crecientes o decrecientes

Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Si f'(x)>0 para toda x en (a, b), entonces f es creciente en (a, b). Si f'(x)<0, para toda "x" en (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).

Con el propósito de ilustrar estas ideas, se usaran la regla 1 para determinar los intervalos en donde $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$ es creciente y los intervalos en que "y" es decreciente. Haciendo y=f(x), debemos determinar cuándo f'(x) es positiva y cuando es negativa. Se tiene

$$y' = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x)$$

Empleando la técnica, es posible encontrar el signo de f'(x) probando los intervalos determinados por las raíces de 2(3+x)(3 – x)=0, esto es -3 y 3. Tales valores deben disponerse en orden creciente en la parte superior de un diagrama de signos para f' de manera que se divida el dominio en f intervalos. (Vea la tabla 13.1). En cada intervalo, el signo de f'(x) está determinado por los signos de sus factores:

Tabla 13.1

	$<-\infty;-3>$	$<-3;3>$	$<3;\infty>$
3 + x	–	+	+
3 – x	+	+	–
f'(x)=2(3 + x)(3 – x)	–	+	–

Si: x<-3, Entonces el signo (f'(x))=2(-)(+)=-, por lo que f es decreciente.
Si: -3<x<3, Entonces el signo (f'(x))=2(+)(+)=+,por lo que f es creciente.
Si: x<3, Entonces el signo (f'(x))=2(+)(-)=-, por lo que f es decreciente.

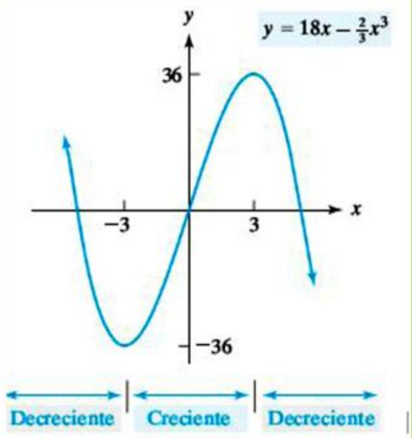


FIGURA 13.3

Estos resultados se indican en el diagrama de signos dado en la tabla 13.1 donde la línea inferior es una versión esquemática de lo que dicen los signos de f′ acerca de f. Observe que recta horizontal en el reglón inferior indican tangentes horizontales para f en -3 y en 3. Así, f es decreciente en $\langle -\infty, -3 \rangle$ y $\langle 3, \infty \rangle$ y es creciente en $\langle -3, 3 \rangle$. Esto corresponde a la naturaleza creciente y decreciente de la gráfica de f mostrada en la figura 13.3. De hecho, la utilidad de un diagrama de signos bien construido consiste en proporcionar un esquema para la construcción subsiguiente de la propia gráfica de una función.

EXTREMOS

Ahora vea la figura de y=f(x) en la figura 13.4. Pueden hacerse algunas observaciones. Primero, hay algo especial con respecto a los puntos P, Q y R. Observe que P es más alto que cualquier otro punto "cercano" sobre la curva, lo mismo puede decirse para R. El punto Q es más bajo que cualquier otro punto "cercano" sobre la curva. Como P, Q y R, puede no ser necesariamente los puntos más altos o más bajos en toda la curva, se dice que la gráfica
De f tiene un máximo relativo en a y en c y un mínimo relativo en b. La función f tiene valores máximos relativos de f(a) en a y f(c) en c y tiene un valor mínimo relativo de f (b) en b. También se dice que (a, f(a)) y (c, f(c)) son puntos máximos relativos y que (b, f (b)) es un punto mínimo relativo en la gráfica de f.

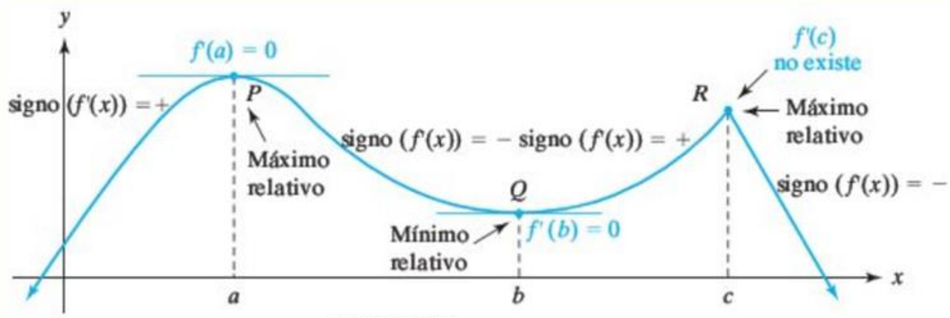


FIGURA 13.4

De regreso a la gráfica, se observa que hay un máximo absoluto (el punto más alto en toda la curva) en a, pero no un mínimo absoluto (el punto más bajo en toda la curva) porque se supone que la curva se prolonga de manera indefinida hacia abajo. De manera más precisa, estos nuevos términos se definen como sigue:

Definición:

Una función f tiene un **máximo relativo** en "a" si existe un intervalo abierto que contenga a "a" sobre el cual f(a)$\geq$ f(x) para toda "x" incluida en el intervalo. El valor máximo relativo es f(a). Una función f tiene un **mínimo relativo** en a si existe un intervalo abierto que contenga a "a" sobre el cual f(a)$\leq$ f(x) para toda x incluida en el intervalo. El valor mínimo relativo es f(a).

Definición:

Una función f tiene un **máximo absoluto** en a si f(a)$\geq$ f(x) para toda x en el dominio de f. El máximo absoluto es f(a). Una función f tiene un **mínimo absoluto** en a si f(a) $\leq$ f(x) para toda "x" incluida en el dominio de f. El valor mínimo absoluto es f(a).

EJEMPLO 01: Un extremo relativo donde f'(x) no existe
Pruebe $y = f(x) = x^{2/3}$ para los extremos relativos.

<u>Resolución:</u>

Se tiene: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Por lo tanto f'(0) no existe. Como f es continua en 0, a partir de la regla 3 se concluye que f tiene un mínimo relativo en 0 de f(0)=0 y que no existe otros extremos relativos.

EJEMPLO 02: Determinación de extremos relativos
Pruebe $y = f(x) = x^2e^x$ para los extremos relativos

<u>Resolución:</u>

Por la regla del producto, se tiene que:
$f'(x) = x^2e^x + e^x(2x) = xe^x(x+2)$

		-2		0	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
e^x	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

FIGURA 13.5

Después de observar que e^x siempre es positiva, se obtiene los valores críticos 0 y -2. A partir del diagrama de signos de f´(x) dado en la figura 13.5, se concluye que existe un máximo relativo cuando x=-2 y un mínimo relativo cuando x=0.

EXTREMOS ABSOLUTOS EN UN INTERVALO CERRADO

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, puede demostrarse que entre todos los valores de f(x) de la función de x en $[a, b]$, debe haber un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. Estos dos valores se llaman valores extremos de f en ese intervalo.
Esta importante propiedad de las funciones continuas se llama teorema del valor extremo.

Teorema del valor extremo

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función tiene tanto un valor máximo como un valor mínimo en ese intervalo.

Por ejemplo en La figura 13.6 cada función es continua en el intervalo cerrado $[1, 3]$. En forma geométrica, el teorema del valor extremo asegura que sobre ese intervalo cada gráfica tiene un punto de altura máxima y otro de altura mínima.

En el teorema del valor extremo, es importante que haya una situación en la que se tenga:

1. Un intervalo cerrado y
2. Una función continúa sobre ese intervalo.

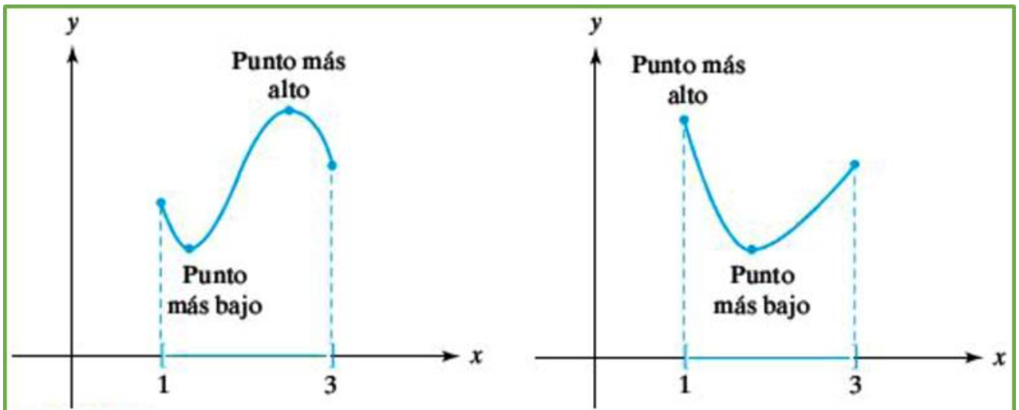


FIGURA 13.6

PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR LOS EXTREMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCION F QUE ES CONTINUA EN $[a, b]$

Paso 1: Encontrar los valores críticos de f.
Paso 2: Evaluar f(x) en los extremos a y b en los valores críticos (a, b).
Paso 3: El valor máximo de f es el mayor de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

EJEMPLO 01: Determinación de los valores extremos en un intervalo cerrado

Encuentre los extremos absolutos para $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$.

<u>Resolución:</u>

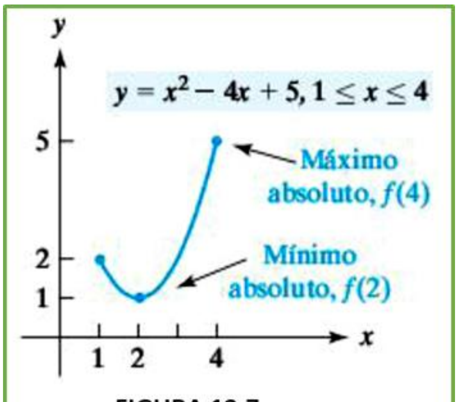


FIGURA 13.7

Como f es continua sobre $[1, 4]$, el procedimiento anterior es aplicable aquí,

Paso 1: Para encontrar los valores críticos de f, primero se encuentra f': f'(x) = 2x – 4 = 2(x – 2)
Esto da el valor critico x=2

Paso 2: Al evaluar f(x) en los puntos extremos 1 y 4 y en el valor critico 2, se tiene que:
f (1)=2
f (4)=5 valores de f en los extremos y
f (2)=1 valor de f en el valor crítico2 en (1,4)

Paso 3: A partir de los valores de la función evaluados en el paso 2, se concluye que el máximo es f (4)=5 y el mínimo es f (2)=1. (Vea la figura 13.7)

GUÍA DE PRÁCTICA N° 13: EXTREMOS RELATIVOS EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALO CERRADO

01. En los ejercicios mostrados, determine cuando la función es (a) creciente, (b) decreciente, (c) determine donde ocurren los extremos relativos. No trace la gráfica.

a. $y = -x^3 - 1$

b. $y = x^4 - 2x^2$

c. $y = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 22x + 1$

d. $y = -x^5 - 5x^4 + 200$

e. $y = \frac{5}{x-1}$

f. $y = e^x - e^{-x}$

g. $y = \left(x^2 + 1\right)e^{-x}$

02. En los problemas mostrados, determine los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, los extremos relativos, la simetría y aquellas intersecciones que se pueden obtener de manera conveniente. Después bosqueja la gráfica.

a. $y = x^2 - 3x - 10$

b. $y = x^4 - 16$

c. $y = x^4 - 2x^2$

d. $y = \sqrt{x}\left(x^2 - x - 2\right)$

03. **Costo promedio.** Si $c_f = 25000$ es una función de costo fijo, demuestre que la función de costo fijo promedio $\bar{c}f = cf / q$ es una función decreciente para q>0. Por lo que, cuando la producción q crece una unidad, se reduce la porción unitaria de costo fijo.

04. **Ingreso marginal.** Dada la función de demanda p=500-5q, Encuentre cuando es creciente el costo marginal.

05. **Función de costo.** Para la función de costo $c = \sqrt{q}$, demuestre que los costos marginal y promedio son siempre decreciente para $q > 0$.

06. **Ingreso.** Para el producto de un fabricante, la función de ingreso está dada por $r = 240q + 57q^2 - q^3$ .determine la producción necesaria para obtener un ingreso máximo

$y = \frac{e^x(3-x)}{7x^2 + 1}$

07. Sea: $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x + 2$ exhiba las gráficas de f y f'', en la misma pantalla. Note que es en f'(x)=0 donde ocurren los extremos relativos de f.

08. Encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado

a. $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad [0,3]$

b. $f(x) = -2x^2 - 6x + 5, \quad [-3,2]$

c. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1, \quad [-1,0]$

d. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2, \quad [0,1]$

e. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 50, \quad [0,5]$

f. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-8,8]$

PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 13: EXTREMOS RELATIVOS EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALO CERRADO

01. En los problemas mostrados, determine cuando la función es (a) creciente, (b) decreciente (c) determine donde ocurren los extremos relativos. No trace la gráfica.

a. $y = x^2 + 4x + 3$

b. $y = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$

c. $y = -3 + 12x - x^3$

d. $y = \frac{9}{5}x^5 - \frac{47}{3}x^3 + 10x$

e. $y = (1-x)^{2/3}$

f. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

02. En los problemas mostrados, determine los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, los extremos relativos, la simetría y aquellas intersecciones que se pueden obtener de manera conveniente. Después bosqueja la gráfica.

a. $y = 2x^2 + x - 10$

b. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

c. $y = x^6 - \frac{6}{5}x^5$

d. $y = 2\sqrt{x} - x$

03. **Costo marginal.** Si $c = 3q - 3q^2 + q^3$ es una función de costo, ¿Cuándo es creciente el costo marginal?

04. **Servicio telefónico.** En un análisis de precio del servicio telefónico local, Renshaw determina que el ingreso total r está dado por $r = 2F + \left(1 - \frac{a}{b}\right)p - p^2 + \frac{a^2}{b}$ donde p es un precio indexado por llamada y a, b y F son constantes. Determine el valor de p que maximiza el ingreso.

05. **Costo de almacenamiento y envió.** En su modelo de costos de almacenamiento y envió de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster obtiene la siguiente función de costo $C(K) = 100\left(100 + 9k + \frac{144}{k}\right)$; $1 \le k \le 100$;Donde C(K) es el costo total de almacenamiento y transporte para 100 días de operación sin una carga de k toneladas de material se traslada cada k días.

(a) Encuentre C(1)

(b) ¿Para qué valor de k tiene C(k) en un minuto?

(c) ¿Cuál es el valor mínimo?

06. Encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado

a. $f(x) = 3x^4 - x^6,\ [-1, 2]$

b. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x - 2,\ [0, 4]$

c. $f(x) = x^4 - 9x^2 + 2,\ [-1, 3]$

d. $f(x) = \frac{x}{x^2+1},\ [0, 2]$

e. $f(x) = (x-1)^{2/3},\ [-26, 28]$

f. $f(x) = 0.2x^3 - 3.6x^2 + 2x + 1,\ [-1, 2]$

07. Considere la función $f(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 9$, en el intervalo $[-4, 9]$.

(a) determine el o los valores (redondeados a dos decimales) de x en que f alcanza un valor mínimo.

(b) ¿Cuál es el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de f?

(c) Determine el o los valores de x en que f alcanza un valor máximo.

(d) ¿Cuál es el valor máximo de f?

SEMANA 14:
CONCAVIDAD

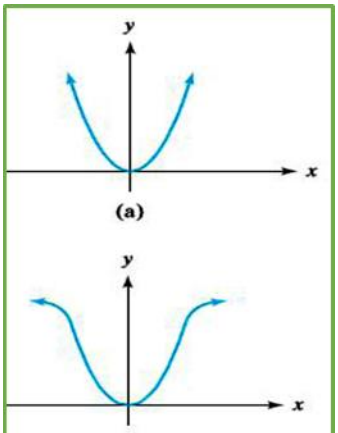


FIGURA 14.1

La primera derivada proporciona mucha información útil para el trazado de gráficas. Se usa para determinar cuándo es creciente o decreciente en una función y para la localización de máximos y mínimos relativos. Sin embargo para conocer la verdadera forma de una curva se necesita más información. Por ejemplo, considere la curva $y = f(x) = x^2$ como f'(x)=2x, x=0 es el valor crítico. Si x<0, entonces f'(x) <0 y f es decreciente; si x>0, entonces f'(x)>0 y f es creciente. Por lo tanto, se tiene un mínimo relativo cuando x=0. En la figura 14.1 ambas curvas satisfacen las condiciones anteriores. Pero ¿Cual grafica describe verdaderamente la curva $y = x^2$? Esta pregunta se contesta con facilidad usando la segunda derivada y la noción de concavidad.

En la figura 14.2 Observe que cada curva y=f(x) se flexiona (o abre) hacia arriba. Esto significa que si se trazan rectas tangentes a cada curva, las curvas quedaran por arriba de las tangentes. Además, las pendientes de las rectas tangentes crecen en valor al aumentar x; en la parte (a), las pendientes van de valores positivos pequeños a valores mayores; en la parte (b), son negativas y se acercan a 0 (por ende son crecientes), en la parte (c), pasan de valores negativos a positivos. Como f'(x) proporciona la pendiente en un punto, una pendiente creciente significa que f' debe ser un función creciente. Para describir esta propiedad, se dice que cada curva (o función) de la figura 14.2 es cóncava hacia arriba.

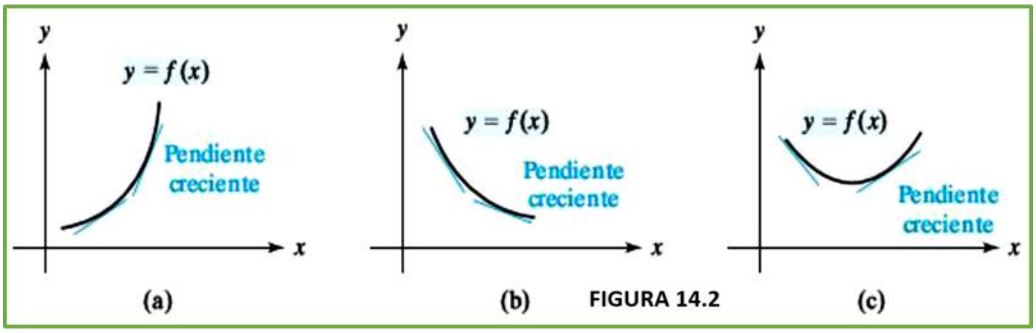


FIGURA 14.2

En la figura 14.3 puede observarse que cada curva se encuentra por debajo de las rectas tangentes y que las curvas se flexionan hacia abajo. Cuando x aumenta, las pendientes de las rectas tangentes don decrecientes. Entonces, aquí f' debe ser una función creciente y se dice que es cóncava hacia abajo.

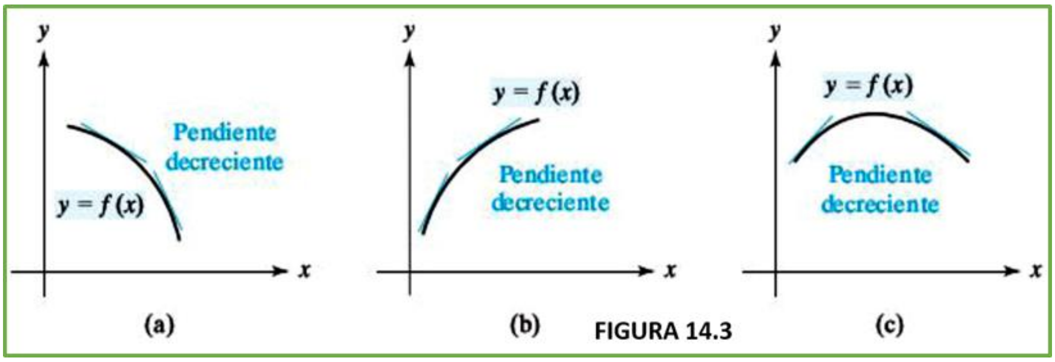


FIGURA 14.3

Definición:

Sea f diferenciable en el intervalo (a,b). Entonces se dice que f es **cóncava hacia arriba** (**cóncava hacia abajo**) en (a,b) si f′ es creciente (decreciente) sobre (a,b) (Tome en cuenta que en economía se acostumbra llamar funciones convexas a aquellas que son cóncavas hacia arriba y funciones cóncavas a las funciones que son cóncavas hacia abajo)

Recuerde; Si f es cóncava hacia arriba en un intervalo, entonces desde el punto de vista geométrico, ahí su grafica se flexiona hacia arriba, Si f es cóncava hacia abajo, su grafica se flexiona hacia abajo. Como f es creciente cuando su derivada f′(x) es positiva y f′ es decreciente cuando f′(x) es negativa, puede establecerse la regla siguiente:

Regla 1: Criterios de concavidad.

Sea f′ diferenciable en el intervalo (a,b). Si f′(x)>0 para toda x en (a,b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a,b). Si f′′(x)<0 para toda x en (a,b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a,b).

También se dice que una función es cóncava hacia arriba en un punto c si existe un intervalo abierto alrededor de c es la cual f es cóncava hacia arriba. De hecho, para las funciones que se consideran, si f′′(x)>0, entonces f es cóncava hacia arriba en c. En forma similar, f es cóncava hacia abajo en c si f′′(c) <0.

EJEMPLO 01: Prueba de la concavidad.

Determine donde es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo la función dada:

$$y = f(x) = (x-1)^3 + 1$$

<u>Resolución:</u>

Para aplicar la regla 1, se deben examinar los signos de y′′.
Ahora: $y' = 3(x-1)^2$
Por lo que: y′′=6(x-1)

Así f es cóncava hacia arriba cuando 6(x-1)>0; esto es, cuando x>1 y f es cóncava hacia abajo cuando 6(x-1) <0; esto es, cuando x<1.

A continuación se usa un diagrama de signos para f′′ (junto con un reglón de interpretación de f) con el fin de organizar las conclusiones a que hemos llegado. (Vea la figura 14.4).

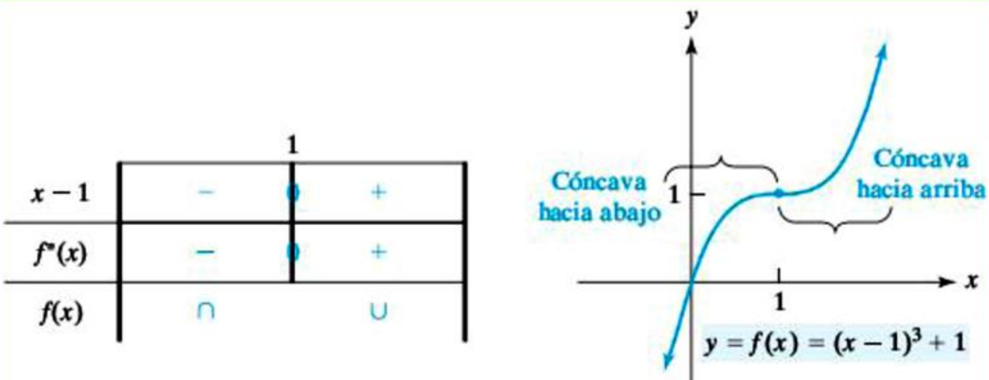


FIGURA 14.4

Definición

Una función f tiene un **punto de inflexión** en a si y sólo si es continua en a y f cambia de concavidad en a.

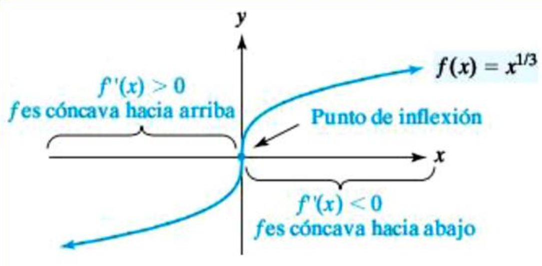


FIGURA 14.5

En breve, un candidato a punto de inflexión debe satisfacer dos condiciones.

01. F'' debe ser 0 o no existir en ese punto.

02. F debe ser continua en ese punto.

EJEMPLO 02: Cambio en la concavidad sin punto de inflexión

Analice la concavidad y encuentre todos los puntos de inflexión de $f(x)=\frac{1}{x}$

<u>Resolución:</u>

Dado que $f(x)=x^{-1}$ para $x \neq 0$

$f'(x)=-x^{-2}$ para $x \neq 0$

$f''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$ para $x \neq 0$

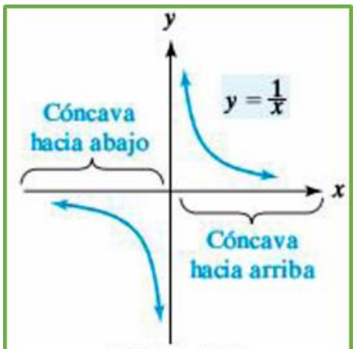


FIGURA 14.6

Se observa que f''(x) nunca es 0, pero no está definida en x=0. Como f no es continua en 0, se concluye que 0 no es un candidato a punto de inflexión. Así la función dada no tiene puntos de inflexión. Sin embargo, cero debe considerarse en el análisis de la concavidad. Observe que se ha trazado una línea vertical en 0 para indicar que no está en el dominio de f y no puede corresponder a un punto de inflexión. Si x>0, entonces f''(x)>0; si x<0, entonces f''(x)<0. Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en $\langle 0,\infty\rangle$ y cóncava hacia abajo en $\langle -\infty,0\rangle$. (vea la figura 14.6). Aunque la concavidad cambia alrededor de x=0, ahí no existe punto de inflexión porque f no es continua en 0 (ni está definida ahí).

GUÍA DE PRÁCTICA N° 14: CONCAVIDAD

01. En los problemas mostrados, se da una función y su segunda derivada. Determine la concavidad de f y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión.

a. $f(x)=x^4-3x^3-6x^2+6x+1;\quad f''(x)=6(2x+1)(x-2)$

b. $f(x)=\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{4}-2x^2;\quad f''(x)=(x-1)(x+2)^2$

c. $f(x)=\frac{2+x-x^2}{x^2-2x+1};\quad f''(x)=\frac{2(7-x)}{(x-1)^4}$

02. En los problemas d, determine la concavidad y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión. No trace las gráficas.

a. $y=-2x^2+4x$

b. $y=x^3-6x^2+9x+1$

c. $y=x^4-8x^2-6$

d. $y=2x^{1/5}$

e. $y=\frac{x+1}{x-1}$

f. $y=\frac{\ln x}{2x}$

03. En los problemas mostrados, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; los máximos y mínimos relativos; los puntos de inflexión; la simetría y las intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Después bosqueje la gráfica.

a. $y=x-x^2+2$

b. $y=\frac{x^3}{3}-5x$

c. $y=2x^3+\frac{5}{2}x^2+2x$

d. $y=(3+2x)^3$

e. $y=x^2(x-1)^2$

f. $y=(x-1)^2(x+2)^2$

g. $y=2x^{2/3}-x$

h. $y=5x^{2/3}-x^{5/3}$

04. Bosqueje la gráfica de una función continua f tal que f(2)=4, $f'(2)=0,\ f'(x)<0,$ si $x<2$ y $f''(x)>0,$ si $x>2$

05. Grafique: $y=-0.35x^3-4.1x^2+8.3x-7.4$, y con base en la gráfica, determine el número de:
(a) puntos máximos relativos
(b) puntos mínimos relativos
(c) puntos de inflexión.

06. Grafique $y=x^5(x-2.3)$, con base en la gráfica, determine el número de puntos de inflexión. Ahora, pruebe que para cualquier $a\neq 0$, la curva $y=x^5(x-a)$ tiene dos puntos de inflexión.

PRÁCTICA DOMICILIARIA N°14: CONCAVIDAD

01. En los problemas mostrados, se da una función y su segunda derivada. Determine la concavidad de f y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión.

a. $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$; $f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$

b. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$; $f''(x) = \frac{6(3x^2+2)}{(x^2-2)^3}$

c. $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2}$; $f''(x) = \frac{x(2x^2-3a^2)}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

02. En los problemas de mostrados, determine la concavidad y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión. No trace las gráficas.

a. $y = -74x^2 + 19x - 37$

b. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

c. $y = 2x^4 - 48x^2 + 7x + 3$

d. $y = \frac{a}{x^3}$

e. $y = 1 - \frac{1}{x^2}$

f. $y = \frac{x^2+1}{3e^x}$

03. En los problemas mostrados, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; los máximos y mínimos relativos; los puntos de inflexión; la simetría y las intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Después bosqueje la gráfica.

a. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$

b. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

c. $y = 4x^3 - 3x^4$

d. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$

e. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$

f. $y = x^{\frac{1}{3}}(x-8)$

04. Bosqueje la gráfica de una función continua f tal que:

$$f'(4) = 0, f''(x) < 0, \text{para}, x < 4, y, f''(x) > 0, \text{para}, x > 4$$

05. Grafique la curva $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ y también la recta tangente a la curva en x=2. ¿está la curva arriba o debajo de la recta tangente? Con la base de su apreciación, determine la concavidad en x=2.

06. Si $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$. Observe que donde f' tiene un mínimo relativo, f cambia la dirección de su flexión (convexidad), ¿Por qué?

07. Si $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 1$, encuentre los valores (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de f.

08. Si $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, determine los valores (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de f.

SEMANA 15
PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA.

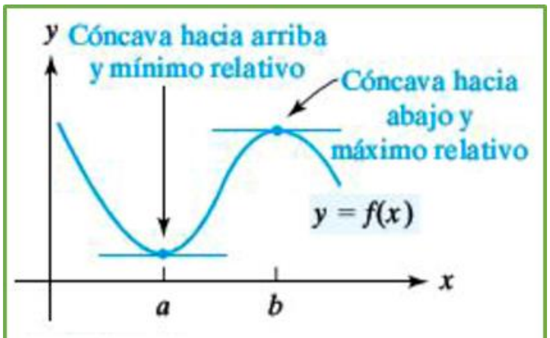


FIGURA 15.1

La segunda derivada puede usarse para probar si ciertos valores críticos corresponden a valores extremos relativos. En la figura 15.1, observe que se tiene una tangente horizontal en a; esto es, f'(a)=0. Además alrededor de a la función es cóncava hacia arriba (esto es, f''(a)>0. Lo anterior lleva a concluir que habrá un mínimo relativo en a. Por otra parte alrededor de b la función es cóncava hacia abajo (esto es, f''(b)<0). Como la recta tangente es horizontal en b, se concluye que ahí existe un máximo relativo. Esta técnica de examinar la segunda derivada un punto donde la primera derivada es 0 se llama prueba de la segunda derivada para extremos relativos.

Prueba de la segunda derivada para extremos relativos.
Suponga que f'(a)=0
Si: f''(a)<0, entonces f tiene un máximo relativo en "a".
Si: f''(a)>0, entonces f tiene un mínimo relativo en "a".

Se debe enfatizar que la prueba de la segunda derivada no es aplicable cuando f''(a)=0 Si tanto f'(a)=0 como f''(a)=0, entonces puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de estos en "a". En estos casos deben usarse la prueba de la primera derivada para analizar que está sucediendo en "a" (además, la prueba de la segunda derivada no es aplicable cuando f'(a) no existe).

EJEMPLO 01: Prueba de la segunda derivada
Analice la siguiente función en relación con sus máximos y mínimos relativos. De ser posible, utilice la prueba de la segunda derivada.

$$y = 18x - \frac{2}{3}x^3.$$

Resolución:

$y' = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x)$
y''=-4x
Al resolver y'=0 se obtienen los valores críticos $x = \pm 3$.
Si x=3, entonces y''=-4(3)=-12<0
Existe un máximo relativo cuando x=3
Si x=-3, entonces y''=-4(-3)=12>0.
Existe un mínimo relativo cuando x=-3.

EJEMPLO 02: Prueba de la segunda derivada
Analice la siguiente función en relación con sus máximos y mínimos relativos. De ser posible, utilice la prueba de la segunda derivada.

$$y = 6x^4 - 8x^3 + 1$$

Resolución:

$y' = 24x^3 - 24x^2 = 24x^2(x - 1)$
$y'' = 72x^2 - 48x$
Al resolver y'=0, se obtiene los valores críticos x=0, 1 .Se observa que
Si x=0, entonces y''=0 y
Si x=1, entonces y''>0
De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene un mínimo relativo en x=1.
No se puede aplicar la prueba cuando x=0 porque ahí y''=0. Para ver qué pasa en 0, es necesario realizar la prueba de la primera derivada:
Si x<0, entonces y'<0.
Si 0<x<1, entonces y'<0.

Por tanto, no existe máximo ni mínimo en x=0.

EJEMPLO 02: extremos absolutos

Si: $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, determine donde ocurren los extremos absolutos en el intervalo $\langle 0, \infty \rangle$.

Resolución:

Se tiene $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$= 3(x+1)(x-3)$$

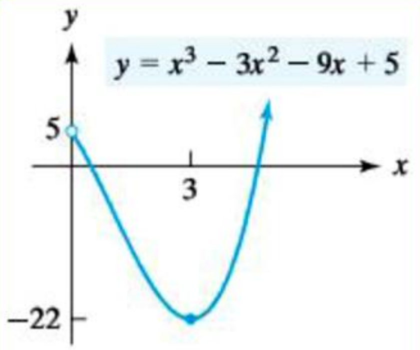


FIGURA 15.2

El único valor crítico existente en el intervalo $\langle 0, \infty \rangle$ es 3. Al aplicar la prueba de la segunda derivada en este punto, se obtiene que:

F''(x)=6x – 6

F'' (3)=6(3) – 6 =12>0

Así, existe un mínimo relativo en 3. Como este es el único extremo relativo en $\langle 0, \infty \rangle$ y f es continua ahí, se concluye a partir del análisis previo que, en realidad, hay un valor mínimo absoluto en 3; este valor es f(3)=-22. (Vea la figura 15.2)

ASINTOTAS

ASINTOTAS VERTICALES

En esta acción, se concluye el análisis de los procedimientos utilizados para el trazado de curvas mediante la investigación de las funciones que tienen asíntotas. Una asíntota es una recta a la que una curva se acerca cada vez más. (También existen asíntotas curvilíneas: Una asíntota curvilínea es una curva a la que la figura de una función se acerca cada vez más). Por ejemplo, en cada inciso de la figura 15.3, la línea punteada x=a es una asíntota.

Para dar más precisión a esto, es necesario hacer uso de los límites infinitos.

En la figura 15.3(a). Observe que cuando $x \to a^+$ f(x) se vuelve positivamente infinita.

$$\text{lím}_{x \to a} f(x) = \infty$$

En la figura 15.3(b), cuando $x \to a^+$ f(x) se vuelve negativamente infinita.

$$\text{lím}_{x \to a} f(x) = -\infty$$

En la figura 15.3(c) y (d), se tiene:

$$\text{lím}_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \text{lím}_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Respectivamente

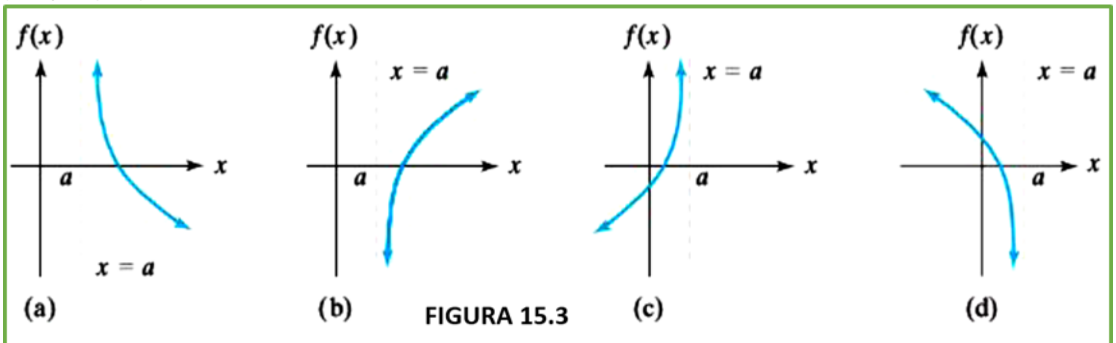


FIGURA 15.3

Hablando de manera informal se puede decir que cada grafica de la figura 15.3 tiene una explosión alrededor de la línea vertical punteada x=a, en el sentido de que el límite de f(x) desde alguno de sus lados ∞ o bien $-\infty$. La recta x=a se llama asíntota vertical d la gráfica. Una asíntota vertical no forma parte de la gráfica, pero es útil en el trazado de esta por qué parte de la gráfica se acerca a la asíntota. Debido a la explosión que ocurre alrededor de x=a, la función no es continua en a.

Definición:
La recta x=a es una **asíntota vertical.** Para la gráfica de la función sí y solo si se cumple al menos uno de los enunciados siguientes:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Regla de las asíntotas verticales para funciones racionales:

Suponga que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Donde P y Q son funciones polinomiales y el cociente está en los términos. La recta x=a es una asíntota vertical para la gráfica de f sí y solo si Q(a)=0 y $P(a) \neq 0$.

EJEMPLO 01: Determinación de asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales para la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$

Resolución:

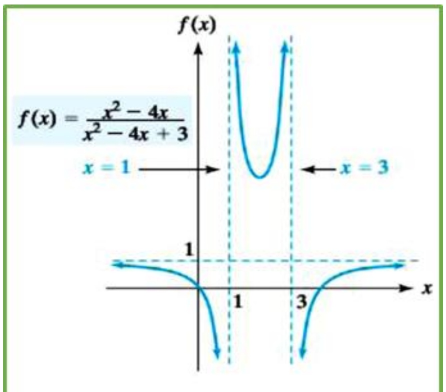


FIGURA 15.4

Como f es una función racional, aquí es aplicable la regla de las asíntotas verticales. Si se escribe:

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-3)(x-1)}$$

Resulta claro que el denominador es 0 cuando x es 3 o 1. Ninguno se esos valores hace que el numerador sea igual a 0. Así que las rectas x=3 y x=1 son asíntotas verticales. (Vea la figura 15.4)

ASINTOTAS HORIZONTALES

Una curva y=f(x) puede tener otro tipo de asíntota. En la figura 15.5(a), conforme x se incrementa sin límite $(x \to \infty)$, la gráfica se acerca a la recta horizontal y=b. Esto es,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

En la figura 15.5 (b), cuando x tiende a infinito negativamente, la gráfica se acerca a la recta horizontal y=b, Esto es:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

En cada caso la línea punteada y=b se llama asíntota horizontal de la gráfica. Esta es una recta horizontal hacia la cual tiende la gráfica cuando $(x \to \infty)$ o cuando $(x \to -\infty)$

(a) FIGURA 15.5 (b)

Definición:
Sea f una función no lineal. La recta y=b es una asíntota horizontal de la gráfica de f si y solo si, por lo menos, unos de los siguientes enunciados es cierto:

$$\text{lím}_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \text{lím}_{x\to -\infty} f(x) = b$$

EJEMPLO 01: Determinación de asíntotas horizontales

Encuentre las asíntotas horizontales para la gráfica de: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$

Resolución:

Se tiene: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$

Por lo tanto la recta y=1 es una asíntota horizontal. El mismo resultado se obtiene cuando "x" tiende al infinito.
Las asíntotas horizontales que surgen de límites como $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = b$, donde t significa tiempo, pueden ser importantes en aplicaciones de negocio como expresiones del comportamiento a largo plazo.

Definición

Sea f una función no lineal. La recta y=mx+b es una **asíntota oblicua** para la gráfica de f si y solo si al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$\lim_{t\to\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{t\to -\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0$$

GUÍA DE PRÁCTICA N° 15: PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA ASÍNTOTAS

01. Encuentre las asíntotas verticales y no verticales para las gráficas de las funciones. No trace su gráfica.

a. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 4}$

c. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 9x + 4}$

02. Determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; los máximos y mínimos relativos; los puntos de inflexión; la simetría; las asíntotas verticales y no verticales.

a. $y = \dfrac{x}{x - 1}$

b. $y = \dfrac{3x + 1}{(6x + 5)^2}$

c. $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

03. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$ tenga una asíntota horizontal y=1 para $x \to \pm\infty$, una asíntota vertical x=2, tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) < 0$ para x<2 y tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$ para x>2.

04. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$; tenga una asíntota horizontal y=0 para $x \to \pm\infty$, asíntotas verticales x=-1 y x=2, $f'(x) < 0$ para x<-1 y para -1<x<2, además de $f''(x) < 0$ para x>2 como un modelo matemático. Encuentre las asíntotas para su modelo.

05. **Mercado para un producto.** Para un producto nuevo, el número anual de miles de paquetes vendidos y después de t años contados a partir de su introducción al mercado, se estima que está dado por $y = f(t) = 250 - 83e^{-t}$ Demuestre que y=250 es una asíntota horizontal par la gráfica de esta ecuación. Lo cual revela que una vez que el producto se ha establecido entre los consumidores, el mercado tiende a ser constante.

06. Grafique $y = \dfrac{0.34e^{0.7x}}{4.2 + 0.71e^{0.7x}}$, donde, $x > 0$ .a partir de la gráfica, determine una ecuación de la asíntota horizontal examinado los valores de y cuando $x \to \infty$.Para confirmar esta ecuación de manera algebraica, encuentre el $lím_{x\to\infty}$ y dividiendo primero tanto el numerador como el denominador entre $e^{0.7x}$

PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 15: PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA ASÍNTOTAS

01. Encuentre las asíntotas verticales y no verticales para las gráficas de las funciones. No trace su gráfica.

a. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

b. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x - 6}$

c. $f(x) = \dfrac{3 - x^4}{x^3 + x^2}$

02. Determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; los máximos y mínimos relativos; los puntos de inflexión; la simetría; las asíntotas verticales y no verticales.

a. $y = \dfrac{x^2}{7x + 4}$

b. $y = \dfrac{x + 2}{3 - x}$

c. $y = 3x + 2 + 1\dfrac{1}{3x + 2}$

03. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = -4$ y $f(4) = -2$ tenga una asíntota horizontal y=-3 para $x \to \pm\infty$, una asíntota vertical x=2, tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) < 0$ para x<2 y tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$ para x>2.

04. Trace la gráfica de una función f tal que f(-2) = 2, f(0) = 0 y f(2) = 0, tenga una asíntota horizontal y=1 para $x \to \pm\infty$, asíntotas verticales x=-1 y x=1, $f''(x) > 0$ para x<-1 y $f'(x) < 0$ para -1<x<1 y $f''(x) < 0$ para 1<x.

05. Trace las gráficas de $y = 6 - 3e^{-x}$. Demuestre que son asíntotas a la misma recta. ¿Cuál es la ecuación de esta recta?

06. Grafique $y = \dfrac{\ln(x + 4)}{x^2 - 8x + 5}$ en la pantalla estándar. La gráfica sugiere que hay dos asíntotas verticales y de la forma x=k, donde k>0. También, parece que la gráfica "comienza" cerca de x=-4. cuando $x \to -4^+$, $\ln(x + 4) \to -\infty$, y, $x^2 - 8x + 5 \to 53$ Asi, $\lim_{x \to 4+} y = -\infty$. Esto proporciona la asíntota vertical x=-4. De modo que, en realidad, existen tres asíntotas verticales. Utilice la característica de acercamiento para hacer clara la asíntota X=-4 en la pantalla.

07. **Poder de compra** Al analizar el patrón temporal de compras mantell y Sing utilizan la curva $y = \dfrac{x}{a + bx}$ como un modelo matemático. Encuentre las asíntotas para su modelo.

SEMANA 16:
APLICACIÓN DE MÁXIMOS, MÍNIMOS y OPTIMIZACIÓN

Mediante el uso de los procedimientos vistos en este capítulo, es posible resolver problemas que impliquen maximizar o minimizar una unidad. Por ejemplo, se podría desear la minimización de una ganancia o minimización de un costo. La parte crucial consiste en expresar la cantidad que se debe maximizar o minimizar como función de alguna variable contenida en el problema. Luego se diferencia y se prueban los valores críticos resultantes.

Para esto, puede usarse las pruebas de la primera o de la segunda derivadas aunque, a partir de la naturaleza del problema puede ser obvio si un valor critico representa o no una respuesta apropiada. Como el interés estriba en los máximos y mínimos absolutos a veces será necesario examinar los puntos extremos del dominio de la función. (Con mucha frecuencia, la función usada para modelar la situación de un problema será la restricción a un intervalo cerrado de una función que tiene un dominio natural más grande. Tales limitaciones del mundo real tiende a generar puntos extremos).

EJEMPLO 01. Maximización del ingreso

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{80-q}{4} \qquad 0 \le q \le 80$$

Donde q es el número de unidades y p es el precio por unidad. ¿Para qué valor de q se tendrá un ingreso máximo?

<u>**Resolución:**</u>

Sea r el ingreso total, que es la cantidad a maximizar.
Como ingreso = (precio)(cantidad)
Se tiene:

$$r = pq$$

$$r = \frac{80-q}{4}.q$$

$$r = \frac{80q-q^2}{4}$$

Donde $0 \le q \le 80$. Al hacer $\frac{dr}{dq} = 0$, resulta:

$$\frac{dr}{dq} = \frac{80-2q}{4} = 0$$

$$80 - 2q=0$$

$$q=40$$

Así, 40 es el único valor crítico, ahora se verá si éste valor da un máximo. Examinando primera derivada para $0 \le q \le 40$, se tiene dr/dq>0, por lo que r es creciente. Dado que r es creciente a la izquierda de 40 y r es decreciente a la derecha de 40, se concluye que q=40 da el ingreso máximo absoluto, a saber:

$$r = \frac{(80)(40)-(40)^2}{4} = 400.$$

GUÍA DE PRÁCTICA N° 16: APLICACIONES DE MÁXIMOS, MÍNIMOS Y OPTIMIZACIÓN

1. **Costo promedio.** Un fabricante determine que el costo total, c, de producir un artículo está dado por la función de costo $c = 0.05q^2 + 5q + 500$ ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?

2. **Gastos de un automóvil.** El costo por hora de operar un automóvil está dado por $C = 0.12s - 0.0012s^2 + 0.08$, además: $0 \le s \le 60$. Donde s es la velocidad en millas por hora, ¿A qué velocidad es mínimo el costo por hora?

3. **Ingreso.** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = -5q + 30$ ¿a qué precio se maximizara el ingreso?

4. **Ingreso.** Suponga que la función de demanda para el producto de un monopolista es $q = Ae^{-Bp}$ Para constantes positivas A y B. En términos de A y B, encuentre el valor de p para el cual se obtiene el ingreso máximo. ¿Puede explicar por qué su respuesta no depende de A?

5. **Ganancia de peso.** Un grupo de biólogos estudio los efectos nutricionales producidos en ratas a las que se les administro una dieta que contiene 10% de proteína. La proteína consistió en levadura y harina de semilla de algodón. Al variar el porcentaje p de levadura en la mezcla de proteína, el grupo de biólogos encontró que el aumento de peso (promedio en gramos) de una rata en cierto periodo fue de $f(p) = 170 - p - \dfrac{1600}{p+15}$ $\quad 0 \le p \le 100$

   Encuentre
   (a) El aumento máximo de peso
   (b) El aumento mínimo de peso.

6. **Utilidad.** Para un monopolista, el costo por unidad de producir un artículo es de $3 y la ecuación de demanda es $p = \dfrac{10}{\sqrt{q}}$ ¿Qué precio dará la utilidad máxima?

7. **Utilidad.** Para el producto de un monopolista la ecuación de demanda es $p = 42 - 4q$ y la función de costo promedio es $\bar{c} = 2 + \dfrac{80}{q}$. Encuentre el precio que maximice la utilidad.

8. **Utilidad.** Para el producto de un monopolista la función de demanda es $p = \dfrac{50}{\sqrt{q}}$ y la función de costo promedio es $\bar{c} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2500}{q}$ encuentre el precio que maximice la utilidad.

9. **Utilidad.** Un fabricante puede producir cuando mucho 120 unidades de cierto articulo cada año. La ecuación de demanda para este producto es $p = q^2 - 100q + 3200$ Determine la producción q que maximiza la utilidad máxima correspondiente.

10. **Costo .**Un fabricante ha determinado que para cierto producto el costo unitario promedio está dado por $\bar{c} = 2q^2 - 42q + 228 + \dfrac{210}{q}$ donde $3 \le q \le 12$
    (a) ¿a qué nivel dentro del intervalo $[3,12]$ debe fijarse la producción para minimizar el costo total? ¿Cuál es el total costo mínimo?
    (b) Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo $[7,12]$, ¿Qué valor de q minimizaría el costo total?

PRÁCTICA DOMICILIARIA N° 16: APLICACIONES DE MÁXIMOS, MÍNIMOS Y OPTIMIZACIÓN.

01. Utilidad. Los costos totales fijos de la empresa XYZ son de $1200, los combinados de material y mano de obra son de $2 por unidad y la ecuación de demanda es $p=\frac{100}{\sqrt{q}}$ ¿Qué nivel de producción maximizara la utilidad? Demuestre que esto ocurrirá cuando el ingreso marginal sea igual al costo marginal. ¿Cuál es el precio cuando la utilidad es máxima?

02. Ingreso. Una empresa de bienes raíces posee 100 departamentos tipo jardín. Cada departamento puede rentarse a $400 por mes. Sin embargo. Por cada $10 mensuales de incremento habrá dos departamentos vacíos sin posibilidad de ser rentados. ¿Qué renta por departamento maximizara el ingreso mensual?

03. Ingreso. Una empresa de televisión por cable tiene 6400 suscriptores que pagan cada uno$24 mensuales y puede conseguir 160 suscriptores más por cada reducción de $0.50 en la cuota mensual. ¿Cuál será la cuota que maximice el ingreso y cual será este ingreso?

04. Utilidad. Un fabricante de cierto producto encuentra que para las primeras 600 unidades que produce y vende la utilidad es de $40 por unidad .La inutilidad por cada unidad producida más allá de 600 disminuye en $0.05 por cada unidad adicional. Por ejemplo la unidad total cuando produce y vende 602 unidades es 600(40)+2(39.90). ¿qué nivel de producción maximizara la utilidad?

05. Diseño de un recipiente. Un fabricante de recipientes está diseñado una caja rectangular sin tapa y con base cuadrada que debe tener un volumen de 32 $pies^3$ ¿Qué dimensiones debe tener la caja si se requiere utilizar la menor cantidad de material?

06. Diseño de un recipiente. Una caja sin tapa y de base cuadrada va a construirse con 192 $pies^2$ de material. Que dimensiones debe tener para que su volumen sea máximo?

07. Diseño de un recipiente. Una lata cilíndrica sin tapa va a fabricarse con una cantidad fija de material K Para que el volumen sea máximo, demuestre que el radio y la altura deben ser iguales a $\sqrt{K/(3\pi)}$

08. Utilidad. La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es p=600-2q Y la función de costo total es $c=0.2q^2+28q+200$ Encuentre la producción y el precio que maximizan la unidad y determina la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de $22 por unidad al fabricante, ¿Cuál sería entonces la producción y el precio que maximizan la utilidad? ¿Cuál sería entonces la utilidad?

09. Tamaño económico del lote. Un fabricante debe producir anualmente 3000 unidades de un producto que se vende a una razón uniforme durante el año. El costo de producción de cada unidad es de $12 y los costos por mantener inventarios (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales a 19.2% del valor promedio del inventario. Los gastos de operación por periodo de producción son de $54.Encuentre el tamaño económico del lote.

10. Utilidad. Para el producto de un monopolista, la función de costo es $c=0.004q^3+20q+5000$ y la función de demanda es $p=450-4q$ Encuentre la producción de maximizar la unidad.

11. Asistencia a un taller. La empresa imperial educational services (IES), está considerando ofrecer un taller sobre asignación de recursos a directivos de la compañía Acme. Para que el ofrecimiento sea económicamente factible, IES considera que por lo menos 30 personas deben inscribirse y cubrir un costo de $50 cada una Además, IES acepta reducir la cuota a todos en $1.25 por cada persona adicional a las primeras 30. ¿Cuantas personas deben inscribirse para el ingreso de IES sean máximos? Suponga que el número máximo de asistentes se limita a 40 personas.

12. **Costo de alquilar un motor.** La compañía Kiddie Toy planea alquilar un motor eléctrico el cual utilizara 80 000 caballos de fuerza- hora por año en subproceso de manufactura. Un caballo fuerza-hora es el trabajo hecho en un ahora por un motor de un caballo de fuerza. El costo anual de alquilar el motor es$200 más $0.40 por caballo de fuerza. El costo por caballo de fuerza. Hora de operar el motor es de $0.008/N, donde N es el número de caballos de fuerza. ¿Qué tamaño de motor en caballos de fuerza, debe alquilarse para minimizar el costo?

13. **Costo de transporte.** El costo de operar un camión sobre una autopista (excluyendo el salario del chofer) es $0.165+\frac{s}{200}$ por milla, donde s es la velocidad (estable) del camión en millas por hora. El salario del chofer es de $18 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar el chofer para que un viaje de 700 millas resulte lo más económico posible?

14. **Costo** Para un productor, el costo de fabricar un artículo es de $30 por mano de obra y de $10 por material; Los gastos indirectos son de $20 000 por semana, la mano de obra se eleva a $45 por artículo para las unidades que excedan de 5000. ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por artículo?

15. **Utilidad.** La señora Jones tiene una agencia de seguros pequeña que vende póliza para una gran compañía de seguros. Por cada póliza vendida, la señora jones, que no vende por si misma las pólizas. Recibe una comisión de $50 de líneas de seguros. De experiencias pasadas, la señora Jones ha determinado que cuando emplean M vendedores pueden vender $q = m^3 - 15m^2 + 92m$ pólizas por semana. Ella paga a cada uno de los vendedores un salario semanal de $1000 y sus gastos fijos por semana son $3000. Su oficina actual solo puede tener cabida para 8 vendedores. Determine el número de vendedores que la señora Jones debe contratar para maximizar su utilidad semanal. ¿Cuál es la utilidad máxima correspondiente?

16. **Utilidad** Una compañía manufacturera vende sacos de alta calidad a una cadena de tiendas. La ecuación de demanda para estos sacos es p=400-50q Donde p es el precio de venta por saco u q la demanda en miles de sacos Si la función de costo marginal de la compañía está dada por $\frac{dy}{dx}=\frac{800}{q+5}$ demuestre que existe una utilidad máxima y determine el número de sacos que deben venderse para obtener esta utilidad máxima.

17. **Tasa de rendimiento** Para construir un edificio de oficinas, los costos fijos son de $1.44) es $c=10x\left[120000+3000(x-1)\right]$ El ingreso por mes es de $60 000 por piso .¿Cuantos pisos darán una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión?(tasa de rendimiento= ingreso total/ costo total)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BÁSICA:

- HAEUSSLER Ernest, PAUL Richard S. y WOOD Richard J. *Matemáticas para administración y Economía*. 13a. ed. México: Pearson Educación. 2015.

COMPLEMENTARIA:

- SOO TANG Tan. *Matemáticas para Administración y economía*. 3ra.ed. México: Cengage Learning Latín américa. 2005.
- STEWART James, REDLIN Lothar and WATSON Saleem. *Pre cálculo: matemáticas para el cálculo*. 5ta. ed. México.D.F.: Cengage Learning Latinoamérica. 2011. ISBN-10: 111134082X. ISBN-13:
- DEMANA Franklin [et al]. *Pre cálculo: gráficas, numérico, algebraico*. 7ª ed. México: Editorial Pearson Educación. 2007
- LARSON Ronald y HOSTETLER Robert P. *Pre cálculo*. 7ª. Ed. China: Editorial Reverte. 2010
- PETERSON Jhon. *Matemáticas básicas: Algebra, Trigonometría Geometría analítica*. 3ª. Reimpresión. México: Editorial CECSA. 2006.
- ZILL Dennis y DEWAR Jacqueline. *Pre cálculo con avances de cálculo.* 4ª. Ed. Colombia: McGraw Hill. 2014.

RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES:

- FROESCHl P. Thomas Calculus, Tent Edition, Annotated Instructors Edition. The American Mathematical Monthly 2002; 109(7): 679 – 679.
  http://search, proquest. Com/docview/203738053?accountid=146219
- Heriberto ER, Héctor Torres – Silva. Matemática E. Ingeniería: Nuevas Conexiones/mathematics and Engineering: New Connections. Ingeniare: Revista Chilena de Ingeniería 2007 15(3):216 – 219.
  http://search, proquest. Com/docview/
- Cálculo diferencial.
  http://www.youtube.com/watch?v=igXtj49xxSY