Universidad Continental

Cálculo II

Guía de Trabajo

Visión

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

Misión

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental
Material publicado con fines de estudio
Código: ASUC 00066

Presentación

La asignatura de Cálculo II corresponde al área de estudios específicos, es de naturaleza teórica-práctica. Tiene como propósito desarrollar en el estudiante la capacidad de solucionar problemas de cálculo integral.

Este material es una guía de prácticas y fue preparado con la finalidad de que sirva como material de apoyo para los alumnos, ya que contiene un balotario de ejercicios que servirá para reforzar y complementar todo lo visto en clase y prepararse también para los exámenes, recopilados de libro de Cálculo de **LARSON Ron y BRUCE Edwards.** Décima edición. 2017, el cuál se ha tomado como texto guía.

En general, los ejercicios propuestos de los contenidos en la guía de prácticas, se divide en cuatro unidades: Integral indefinida (Métodos de integración); Integral definida; Aplicaciones de la integral definida e Integrales múltiples.

Los autores

Índice

Unidad I

LA INTEGRAL INDEFINIDA

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de interpretar la solución de una integral Indefinida usando diferentes métodos de integración.

PRÁCTICA N° 1
Tema: PRIMITIVAS O ANTIDERIVADAS

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

Deduce las fórmulas de las Integrales indefinidas directas en la siguiente tabla:

1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int 1\, dx = x + C$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$	
4. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	
5. $\frac{d}{dx}sen\ x = \cos x$	
6. $\frac{d}{dx}\cos x = -sen\ x$	
7. $\frac{d}{dx}\tan x = sec^2 x$	
8. $\frac{d}{dx}\cot x = \ csc^2 x$	
9. $\frac{d}{dx}\sec x = secx\ \ tanx$	
10. $\frac{d}{dx}\csc x = -cscx\ \ cotx$	
11. $\frac{d}{dx}sen^{-1}x =$	
12. $\frac{d}{dx}cos^{-1}x =$	
13. $\frac{d}{dx}tan^{-1}x =$	
14. $\frac{d}{dx}cot^{-1}x =$	

15. $\frac{d}{dx}sec^{-1}x =$	
16. $\frac{d}{dx}csc^{-1}x =$	

Usando diferenciación y la regla de la cadena comprobar el resultado de la integración dada, es decir, verificar que:

$$\frac{\boldsymbol{d\,F(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{f(x)} \qquad \boldsymbol{cuando} \qquad \int \boldsymbol{f(x)dx = F(x)}$$

1. $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2} = \frac{1}{2ab}\ Ln\left(\frac{bx-a}{bx+a}\right) + C$

2. $\int \frac{dx}{b^2x^2+a^2} = \frac{1}{ab}\ arc\ tan\left(\frac{bx}{a}\right) + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\ arc\ sen\left(\frac{bx}{a}\right) + C$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\ arc\ sec\left(\frac{bx}{a}\right) + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2\pm a^2}} = \frac{1}{b}\ Ln\left(bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right) + C$

Bibliografía:

ZILL Dennis G. y WRIGTH Warren S. Cálculo de una variable. Transcendentes Tempranas. México. Editorial Mc Graw Hill. 2011. (515 Z77)

PRÁCTICA N° 2
Tema: INTEGRACIÓN DIRECTA

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 5, complete la tabla para encontrar la integral indefinida.

	Integral original	Reescribir	Integrar	simplificar
1.	$\int \sqrt[3]{x}\,dx$			
2.	$\int \frac{1}{4x^2}\,dx$			
3.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$			
4.	$\int \frac{1}{(3x)^2}\,dx$			
5.	$\int y^2\sqrt{y}\,dy$			

II Bloque

En los ejercicios 6 a 12 encuentre la integral indefinida y compruebe el resultado mediante derivación.

6. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})\,dx$

7. $\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right)dx$

8. $\int \frac{x+6}{\sqrt{x}}\,dx$

9. $\int (5\cos x + 4senx)\,dx$

10. $\int (\theta^2 + \sec^2\theta)\,d\theta$

11. $\int \sec y(\tan y - \sec y)\,dy$

12. $\int (\tan^2 y + 1)^2\,dy$

III Bloque

En los ejercicios 13 a 15, encuentre la solución particular que satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales.

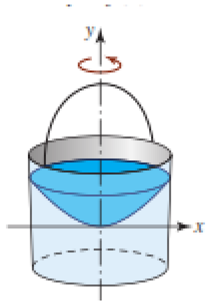
13. $g'(s) = 10s - 12s^3,\ g(3) = 2$

14. $f''(x) = x^{-3/2},\ f'(4) = 2,\ f(0) = 0$

15. $f''(x) = senx,\ f'(0) = 1,\ f(0) = 6$

16. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 12x^2 + 2$ para la cual la pendiente de la recta tangente a su gráfica en (1, 1) es 3.

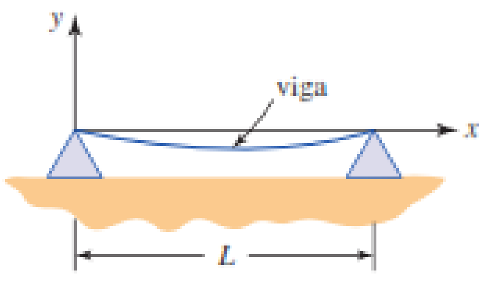
17. Un cubo que contiene un líquido gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular constante ω. La forma de la sección transversal del líquido giratorio en el plano xy está determinada por $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x$. Con ejes de coordenadas como se muestra en la figura. Encuentre $y = f(x)$



18. Los extremos de una viga de longitud L están sobre dos soportes como se muestra en la figura adjunta. Con una carga uniforme sobre la viga, su forma (o curva) elástica está determinada a partir

$$EIy'' = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2 ,$$

Donde E, I y q son constantes. Encuentre $y = f(x)$, si $f(0) = 0$ y $f'(L/2) = 0$



19. **Crecimiento de plantas**. Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es aproximadamente, $dh/dt = 1,5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan $(t = 0)$

a) Determine la altura después de t años

b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

20. **Crecimiento de población**. La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t, donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días $(0 \le t \le 10)$. Esto es, $dP/dt = k\sqrt{t}$. El tamaño inicial de la población ha crecido hasta 600. Estimar el tamaño de la población después de 7 días.

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 3
Tema: INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 5, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

1. $\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$
2. $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx$
3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$
4. $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3 \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$
5. $\int 2\pi y(8-y^{3/2})\,dy$

En los ejercicios 6 y 7, resolver la ecuación diferencial

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{10x^2}{\sqrt{1+x^3}}$
7. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}}$
8. Encuentre una función $y=f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(\pi,-1)$ y también satisfaga $\frac{dy}{dx}=1-6sen3x$

II Bloque

En los ejercicios 9 a 15, encontrar la integral indefinida.

9. $\int \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$
10. $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$

11. $\int \frac{senx}{\cos^3 x} dx$

12. $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x - 3} dx$

13. $\int \frac{1}{x \ln(x^3)} dx$

14. $\int \frac{1}{1 + \sqrt{3x}} dx$

15. $\int \frac{e^{4/x}}{x^2} dx$

III Bloque

En los ejercicios 16 a 18 encuentre la integral indefinida por cambio de variable.

16. $\int sen^{1/3} x.\cos^{-13/3} x\, dx$

17. $\int \left[(x-1)(x+1)^2 \right]^{-2/3} dx$

18. $\int \frac{tgx\ dx}{(\cos^{99} x + 1)^2}$

19. Calcule la integral $\int \frac{1}{sen\, x + \cos x} dx$ mediante la sustitución $x = 2\, arc \tan u$

20. Determina una fórmula que permita integrar de manera rápida la siguiente integral: $\int e^{\sqrt[n]{x}} dx$, el número "n" es entero positivo.

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 4
Tema: INTEGRACIÓN DE FUNCIONES CON TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 6, calcular la integral (completando el cuadrado cuando sea necesario)

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} dx$

2. $\int \frac{2x}{x^2 + 6x + 13} dx$

3. $\int \frac{2x - 5}{x^2 + 2x + 2} dx$

4. $\int \frac{2}{\sqrt{4x - x^2}} dx$

5. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{4x - x^2}} dt$

6. $\int \frac{\sec^2 5x}{4\tan 5x - 3 - \tan^2 5x} dx$

7. $\int \frac{x}{\sqrt{9 + 8x^2 - x^4}} dx$

II Bloque

En los ejercicios 8 a 10, hallar la integral mediante sustitución especificada.

8. $\int \sqrt{e^t - 3}\, dt$

   $u = \sqrt{e^t - 3}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + x)}$

   $u = \sqrt{x}$

10. $\int \frac{dx}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}}$
$u=\sqrt{x+1}$

11. Considera la integral: $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}dx$

a) Hallar la integral completando el cuadrado en el radical.

b) Hallarla ahora haciendo la sustitución $u=\sqrt{x}$

II Bloque

En los ejercicios 12 a 17, encontrar la integral indefinida.

12. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{-2-sen^2 x+3senx}}dx$

13. $\int \frac{(3x+2)}{\sqrt{19+x^2-5x}}dx$

14. $\int \frac{5x-2}{\sqrt{12x-9x^2-2}}dx$

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2senx\cos x+2sen^2 x}$

16. $\int \frac{x^3}{x^4+x^2+1}dx$

17. $\int \frac{5dx}{(x+5)\sqrt{10x+x^2}}dx$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 5
Tema: INTEGRACIÓN POR PARTES

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 5, calcular la integral por el método de integración por partes

1. $\int xe^{-2x}\,dx$

2. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

3. $\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

4. $\int x\,arcsen\,x^2\,dx$

5. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

En los ejercicios 6 y 7, utilice el método tabular para encontrar la integral.

6. $\int x^3e^{-2x}dx$ usar

7. $\int x^3\cos 2x$

II Bloque

En los ejercicios 8 a 11, encontrar la integral usando primero sustitución y después la integración por partes.

8. $\int e^{\sqrt{2x}}\,dx$

9. $\int senx\ln(1+senx)\,dx$

10. $\int \cos^2(\ln x)\,dx$

11. Integre $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

a) Por partes, con $dv = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

b) Por sustitución, con $u = 4+x^2$

En los ejercicios 12 a 15, encontrar la integral usando la integración por partes.

12. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$

13. $\int arc\,sen\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) dx$

14. $\int \frac{x^2}{1+x^2} arctgx\ dx$

15. $\int xe^{\ln\left[(\ln x)^2+e^x\right]}\ dx$

III Bloque

16. Calcula la expresión de la función $f(x)$, tal que

$$f''(x) = x\ln x\,,\quad f'(1) = 0\,,\quad f(e) = e/4$$

En los ejercicios 17 a 19. Usar un sistema algebraico para encontrar la integral para $n = 0, 1, 2\ y\ 3$. Utilice el resultado para obtener una regla general para las integrales para cualquier entero positivo n y ponga a prueba sus resultados para $n = 4$

17. $\int x^n \ln x\ \ dx$

18. $\int e^{ax} senbx\, dx$

19. $\int x^n e^{ax} dx$

20. Sea la integral $\int arc\,sen\sqrt{2\sqrt[n]{x}+1}\,dx$. Evalúa la integral para $n = 1, 2, 3, \ldots$. De ser posible determine una fórmula de recurrencia.

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 6
Tema: INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 5, calcule la integral indefinida.

1. $\int \cos^3 x\, sen^4 x\, dx$
2. $\int \frac{sen^5 t}{\sqrt[3]{\cos t}}\, dt$
3. $\int sen^2\alpha \cos^2 \alpha\, d\alpha$
4. $\int sen^4 2\theta\, d\theta$
5. $\int sen^4 x \cos^4 x\, dx$

En los ejercicios 6 a 10, calcule la integral indefinida.

6. $\int \sec^4 x\, dx$
7. $\int \tan^5 \left(\frac{x}{4}\right) dx$
8. $\int \tan^7 \left(\frac{\pi x}{2}\right) \sec^4 \left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$
9. $\int \sec^3 \pi x\, dx$
10. $\int \frac{\tan^2 x}{\sec^5 x}\, dx$

II Bloque

En los ejercicios 11 a 15, encuentre la integral indefinida

11. $\int \cos 5\theta \,\cos 3\theta\, d\theta$
12. $\int \mathrm{sen}(-7x) \cos 6x\; dx$

13. $\int \frac{1}{\sec x \tan x} dx$

14. $\int \frac{1-\sec t}{\cos t - 1} dt$

15. $\int \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$

III Bloque

En los ejercicios 16 a 20, calcula la integral

16. $\int \frac{dx}{a^2 sen^2 x + b^2 \cos^2 x}$

17. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{sen 2x}}$

18. $\int \cos ec^6 \left(\frac{x}{3}\right) dx \ + \int \frac{dx}{sen^5 x} dx$

19. $\int \frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x} dx$

20. $\int \frac{senx + 2\cos x - 3}{senx - 2\cos x + 3} dx$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 7
Tema: INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 5, encontrar la integral indefinida, usando la sustitución mostrada.

1. $\int \frac{1}{(16-x^2)^{3/2}}\,dx$, sustitución $x = 4\operatorname{sen}\theta$
2. $\int \frac{4}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$, sustitución $x = 4\operatorname{sen}\theta$
3. $\int x^3\sqrt{x^2-25}\,dx$, sustitución $x = 5\sec\theta$
4. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$, sustitución $x = 5\sec\theta$
5. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$, sustitución $x = \tan\theta$

II Bloque

En los ejercicios 6 a 10, encontrar la integral indefinida haciendo la sustitución trigonométrica correspondiente.

6. $\int \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt$
7. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$
8. $\int \frac{\sqrt{4x^2+9}}{x^4}\,dx$
9. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$
10. $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

En los ejercicios 11 a 14, completar el cuadrado y encontrar la integral

11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

12. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+6x+12}}dx$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

III Bloque

En los ejercicios 15 a 20, encontrar la integral

15. $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}dx$

16. $\int \frac{x^2-3}{x\sqrt{x^4-4}}\,dx$

17. $\int \frac{e^{-x}dx}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}$

18. $\int \frac{\sec^2 x\tan^2 x}{\sqrt{2+\sec^2 x}}dx$

19. $\int \frac{x^2-3}{x\sqrt{x^4-4}}dx$

20. $\int \sqrt{1-a^x}dx$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 8
Tema: INTEGRACIÓN MEDIANTE FRACCIONES PARCIALES

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 8, usar las fracciones simples para encontrar la integral.

1. $\int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x}dx$
2. $\int \frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}dx$
3. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+4x}dx$
4. $\int \frac{x}{16x^4-1}dx$
5. $\int \frac{x^2-x+9}{(x^2+9)^2}dx$
6. $\int \frac{x^2}{x^4-2x^2-8}dx$
7. $\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-x^2+x+3}dx$
8. $\int \frac{5x^2+5}{x^3-4x^2-3x+18}dx$

II Bloque

En los ejercicios 9 y 10, usar el método de fracciones simples para verificar la fórmula de integración.

9. $\int \frac{x}{(a+bx)^2}dx=\frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx}+\ln|a+bx|\right)+c$
10. $\int \frac{1}{x^2(a+bx)}dx=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|+c$

En los ejercicios 11 a 13, calcular la integral

11. $\int \frac{2x^4+3x^2-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}dx$

12. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$

13. $\int \frac{x}{x^6-1}dx$

II Bloque

14. **Modelo de epidemias**. Un solo individuo infectado entra en una comunidad de n individuos susceptibles. Sea x el número de individuos recientemente infectados en el momento t. El modelo de epidemias común asume que la enfermedad se extiende a un ritmo proporcional al producto del número total de infectados y al número no infectado todavía. Así, $\frac{dx}{dt}=k(x+1)(n-x)$ y se obtiene $\int \frac{1}{(x+1)(n-x)}dx=\int k\,dt$. Resolver para x como una función de t

15. **Reacciones químicas**. En una reacción química, una unidad de compuesto **Y** y una unidad de compuesto **Z** se convierte en una sola unidad de **X**. El compuesto x es la cantidad de compuesto **X** formada, y la proporción de formación de **X** es proporcional al producto de las cantidades de compuestos no convertidos **Y** y **Z**. Entonces $\frac{dx}{dt}=k(y_0-x)(z_0-x)$; donde el y_0 y x_0 son las cantidades iniciales de compuestos **Y** y **Z**. De esta ecuación se obtiene $\int \frac{1}{(y_0-x)(z_0-x)}dx=\int kdt$.

    a) Realizar las dos integraciones y resolver para x en términos de t.
    b) Usar el resultado del inciso a) para encontrar x como $t\to\infty$ si 1) $y_0<z_0$, 2) $y_0>z_0$ y $y_0=z_0$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 9
Tema: MÉTODO PARA INTEGRALES BINOMIALES Y FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 7, usando el método para integrales binomiales evalúa la integral.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}}$
2. $\int x^5(1+x^3)^{2/3}\,dx$
3. $\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\,dx$
4. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$
5. $\int x(2+x^{2/3})^{1/2}\,dx$
6. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,dx$
7. $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}\,dx$

II Bloque

En los ejercicios 8 a 15, determina una fórmula de reducción para las siguientes integrales

8. $\int \cos^{2n} x\,dx$
9. $\int \operatorname{sen}^{2n} x\,dx$
10. $\int \operatorname{sen}^{2n} x\,\cos^{2m} x\,dx$
11. $\int \tan^{n} x\,dx$
12. $\int \operatorname{sen}^{n} x\,dx$
13. $\int x^n e^{2x}\,dx$

14. $\int \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x}\,dx$

15. $\int x^m (x+a)^n\,dx$

III Bloque

En los ejercicios 16 a 19, aplique las fórmulas de reducción para evaluar las integrales.

16. $\int \tan^5 x\,dx$

17. $\int \cos^8 x\,dx$

18. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x\,dx$

19. $\int \sec^5 x\,dx$

20. Deduzca una fórmula para la integral $\int x^4 \ln^n x\,dx$ y calcule $\int_1^2 x^4 \ln^3 x\,dx$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

Unidad II

LA INTEGRAL DEFINIDA

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de explicar la solución de una Integral Definida usando diferentes métodos de integración.

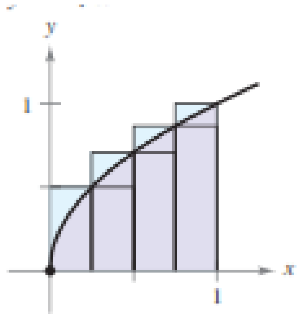
PRÁCTICA N° 10
Tema: LA INTEGRAL DEFINIDA

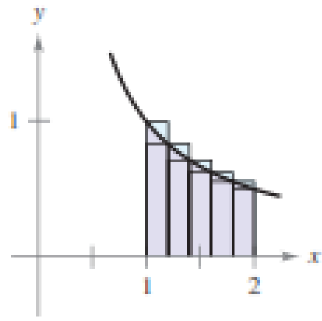
INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando la definición y propiedades de la integral definida. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En el ejercicio 1 utiliza sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región empleando el número dado de subintervalos (de igual ancho)

1. a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \dfrac{1}{x}$





En los ejercicios 2 y 3, utilizar el proceso de límite para encontrar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo indicado. Dibuja la región.

2. $y = x^2 + 1$, $[0, 3]$
3. $y = x^2 - x^3$, $[-1, 1]$
4. Emplea el proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función $f(y) = 4y^2 - y^3$ y el eje y sobre el intervalo $1 \le y \le 3$

En los ejercicios 5 y 6, evalúa la integral definida mediante la definición de límite.

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\, dx$
6. $\displaystyle\int_{-2}^{1} (2x^2 + 3)\, dx$

En los ejercicios 7 y 8, evalúa la integral aplicando las propiedades de la integral definida, utilizando los valores dados.

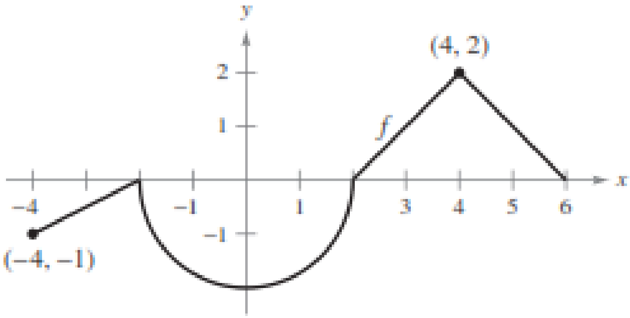
7. $\displaystyle\int_{2}^{4} x^3 dx = 60, \quad \int_{2}^{4} x\, dx = 6, \quad \int_{2}^{4} dx = 2$

a) $\int_4^2 dx$ b) $\int_2^2 x^3 dx$ c) $\int_2^4 8x\,dx$ d) $\int_2^4 25\,dx$ e) $\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x + 2\right) dx$

8. $\int_0^5 f(x)dx = 10$, $\int_5^7 f(x)dx = 3 \wedge \int_0^5 g(x) = -2$

a) $\int_0^7 f(x)dx$ b) $\int_0^5 [f(x) - g(x)]dx$ c) $\int_5^5 f(x)dx$ d) $\int_0^5 3f(x)dx$

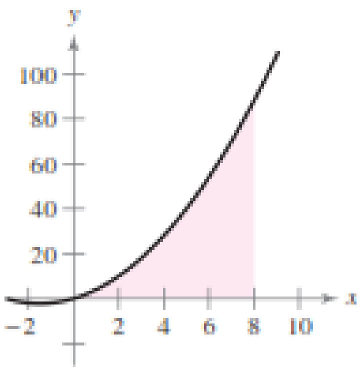
9. La gráfica de f está compuesta por segmentos de recta y un semicírculo, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas



a) $\int_0^2 f(x)dx$ b) $\int_{-4}^2 f(x)dx$ c) $\int_{-4}^6 f(x)dx$ d) $\int_{-4}^0 f(x)dx$ e) $\int_{-4}^6 [f(x)+2]dx$

II Bloque

10. Encontrar la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 8]$, donde $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 7$ y $x_4 = 8$, y donde $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 5$ y $c_4 = 8$



En los ejercicios 11 a 14, hallar la integral definida de la función.

11. $\displaystyle\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\,dx$

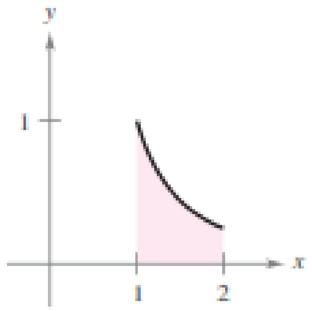
12. $\displaystyle\int_{-1}^{0} (t^{1/3}-t^{2/3})\,dt$

13. $\displaystyle\int_{1}^{4} (3-|x-3|)\,dx$

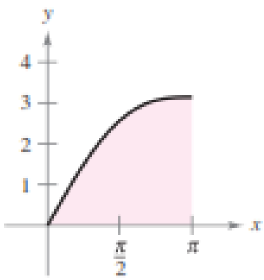
14. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t+\cos t)\,dt$

15. Determinar el área de la región indicada

a) $y=\dfrac{1}{x^2}$



b) $y = x + senx$



En los ejercicios 16 y 17, determinar el (los) valor(es) de c cuya existencia es garantizada por el teorema del valor medio para integrales de la función en el intervalo indicado.

16. $f(x)=\dfrac{9}{x^3}$, $[1,\ 3]$

17. $f(x)=2\sec^2 x$, $[-\pi/4,\ \pi/4]$

En los ejercicios 18 y 19, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado y todos los valores de x en el intervalo para los cuales la función sea igual a su valor promedio

18. $f(x)=4x^3-3x^2$, $[-1,\ 2]$

19. $f(x)=\cos x$, $[0,\ \pi/2]$

III Bloque

20. Utilizando la definición, determina el área encerrada por la gráfica de la función $y = x^3$ y el eje X entre $0 \le x \le 2$

21. Calcular el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$, interpretándolo como el área de una figura geométrica conocida y hallando entonces el área de dicha figura.

22. Hallar las sumas de Riemann para la integral $\int_0^{\pi/2} sen x\, dx$ con 5 subintervalos y tomando en cada subintervalo el extremo izquierdo, el punto medio y el extremo derecho respectivamente.

23. Expresar el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$ como una integral.

24. Dada $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{sen\, t}{t}\, dt$, determina $F'(x)$

25. **Costo**. El costo total C (en dólares) de compra y mantenimiento de una pieza de equipo durante x años es $C(x) = 5000\left(25 + 3\int_0^x t^{1/4} dt\right)$
    a) Efectúa la integración para escribir C como una función de x.
    b) Encontrar $C(1)$, $C(5)$, $C(10)$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 11
Tema: CAMBIO DE VARIABLE E INTEGRACIÓN POR PARTES PARA INTEGRALES DEFINIDAS

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración definida. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 10, calcule la integral definida con cambio de variable y cambio de límites de integración.

1. $\int_0^1 x^3(2x^4+1)^2\,dx$

2. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^e \frac{1}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}\,dx$

3. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$

4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\,dx$

5. $\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,dx$

6. $\int_2^4 \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x}+e^x} + \frac{1}{x(\sqrt{\ln x}+\ln x)}\right)dx$

7. $\int_1^3 \left(\frac{e^{3/x}}{x^2} + 3^{x/4}\right)dx$

8. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

9. $\int_0^2 \frac{x^5}{(1+x^3)^{3/2}}\,dx$

10. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{senx.\cos^3 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$

II Bloque

En los ejercicios 11 a 18, calcule la integral definida por integración por partes.

11. $\int_0^2 x^2 e^{-2x}\, dx$

12. $\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\, dx + \int_0^{\frac{\pi^2}{2}} \cos\sqrt{2x}\, dx$

13. $\int_0^1 x\, arc\, sen\, x^2\, dx + \int_2^4 x\, arc\sec x\, dx$

14. $\int_0^1 e^x senx\, dx$

15. $\int_0^1 \ln(4+x^2)\, dx$

16. $\int_0^{\pi/8} x\sec^2 2x\, dx$

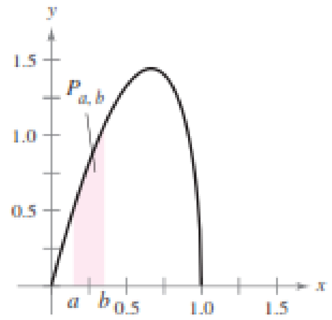
17. $\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{2x^2+7}}\, dx$

18. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\, dx + \int_0^{\pi/3} senx\ln(1+senx)\, dx$

III Bloque

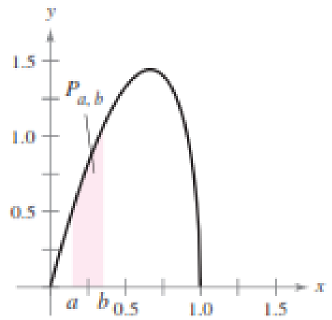
En los ejercicios 19 y 20, la función: $f(x) = kx^n(1-x)^m,\ \ 0 \le x \le 1$, donde $n > 0,\ m > 0$ y k es una constante, puede utilizarse para representar diversas distribuciones de probabilidad. Si k se elige de manera que $\int_0^1 f(x)dx = 1$. La probabilidad de que x caerá entre a y b $(0 \le a \le b \le 1)$ es $P_{a,b} = \int_a^b f(x)dx$

19. La probabilidad de que una persona recuerde entre $100a\%\ y\ 100b\%$ del material aprendido en un experimento es $P_{a,b} = \int_a^b \frac{15}{4} x\sqrt{1-x}\, dx$, donde x representa el porcentaje recordado (vea la figura)

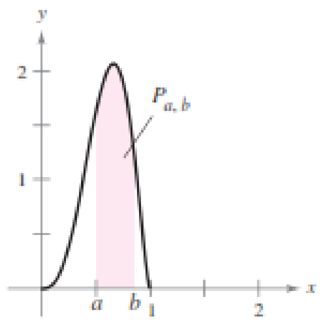


a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar recuerde entre 50 y 75% del material?
b) ¿Cuál es el porcentaje medio de lo que recuerda? Esto es, ¿para qué valor de b es cierto que la probabilidad de recordar de 0 a b es 0.5?

20. La probabilidad de que se tomen muestra de un mineral de una región que contiene entre $100a\%$ y $100b\%$ de hierro es $P_{a,b} = \int_a^b \frac{1155}{32} x^3 (1-x)^{3/2}\, dx$, donde x representa el porcentaje de hierro (vea la figura)



¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga entre
a) 0 y 25% de hierro?
b) 50 y 100% de hierro?



Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

Unidad III

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de aplicar las integrales definidas para resolver problemas de cálculo de áreas, cálculo de volúmenes y superficies de revolución y el cálculo de longitud de arcos.

PRÁCTICA N° 12

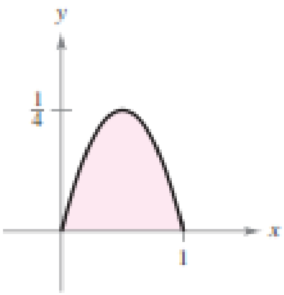
Tema: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA: CÁLCULO DE ÁREAS

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración. El orden influirá en su calificación.

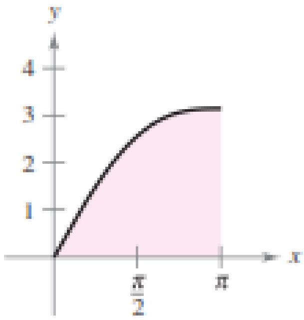
I Bloque

En los ejercicios 1 y 2, determine el área de la región dada.

1. $y = x - x^2$



2. $y = x + senx$



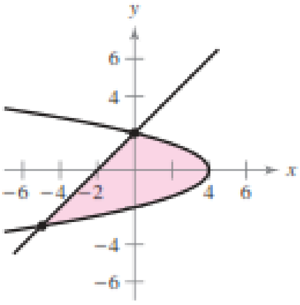
En los ejercicios 3 a 5, encuentre el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

3. $y = x^3 + x, \quad x = 2, \quad y = 0$
4. $y = 2\sqrt{x} - x, \quad y = 0$
5. $y = -x^2 + 4x, \; y = 0$

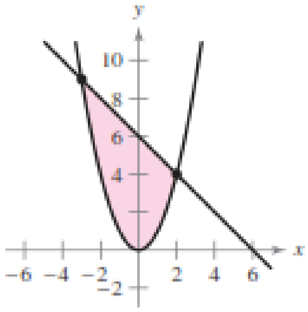
II Bloque

En los ejercicios 6 y 7, encuentre el área de la región mediante la integración de (a) respecto a x y (b) respecto a y. (c) compare los resultados. ¿Qué método es más sencillo? En general, ¿este método será siempre más sencillo que el otro? ¿Por qué si o por qué no?

6. $x = 4 - y^2$
$x = y - 2$



7. $y = x^2$
$y = 6 - x$



En los ejercicios 8 a 13 dibuje la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y encuentre el área de la región.

8. $y = -x^2 + 3x + 1, \quad y = -x + 1$
9. $f(y) = y(2 - y), \quad g(y) = -y$
10. $y = 2^{-x}, \quad y = e^{x+1}, \quad x = 0, \quad x = 1$
11. $y = x^2, \quad y = \dfrac{x^2}{2}, \quad y = 2x$
12. $y = 1 - x^2, \quad y = x^2 - 3, \quad y = x + 3$
13. $f(x) = \sec\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), \quad g(x) = (\sqrt{2} - 4)x + 4, \quad x = 0$

En los ejercicios 14 y 15, configure y calcule la integral definida que da el área de la región acotada por la gráfica de la función y la(s) recta(s) tangente(s) a la gráfica en el (los) punto(s) dado(s).

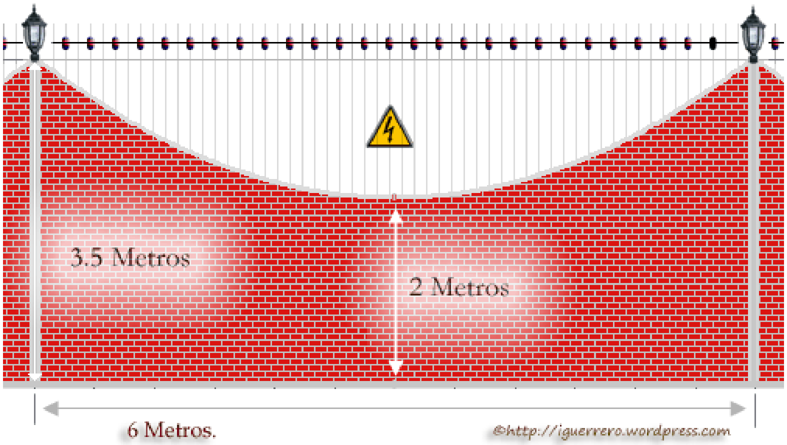
14. $y = \dfrac{2}{1 + 4x^2}, \quad \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$
15. $y + x^2 - 4x + 3 = 0, \ (0, -3) \ \wedge \ (4, -3)$

III Bloque

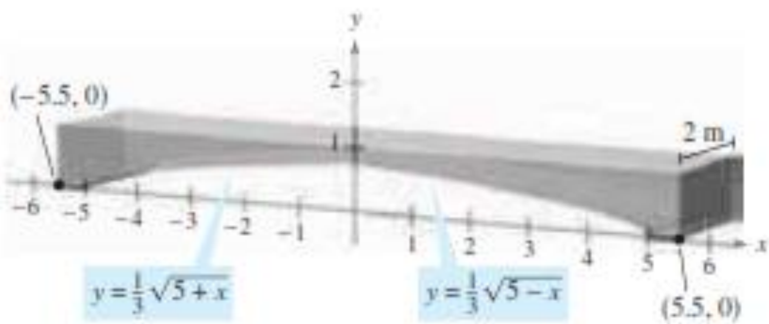
16. Sean los puntos $A(-2,4) \wedge B(1,1)$ sobre la parábola $y = x^2$, y los puntos $C(1,s) \wedge D(-2,r)$ tales que el segmento de recta CD es tangente a la parábola y es paralelo al segmento de recta AB. Halla el área de la región encerrada por la parábola y por los segmentos $AD,\ DC\ y\ CB$.

17. Contrataste un albañil para que construyera una barda alrededor de tu residencia con el diseño mostrado en la figura. Al inicio de la obra cuya longitud total fue de 90 Metros lineales en segmentos de 6 metros, acordaste un pago de $80.00 por metro cuadrado de barda construido, **solo por la mano de obra.** Al final del trabajo el maestro albañil calculó un área total de 315 m^2 por lo que quiere cobrarte $25,200.00 La pregunta es:

¿Hizo bien el cálculo del área total?

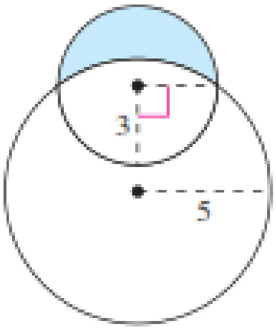


18. **Diseño de construcción**. Las secciones de concreto (hormigón) para un nuevo edificio tiene las dimensiones (en metros) y la forma mostrada en la figura.

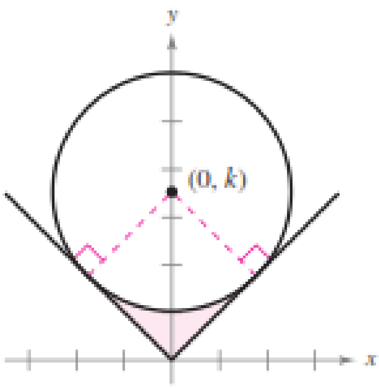


a) Encontrar el área de la cara adosada en el sistema de la coordenada rectangular.
b) Encontrar el volumen de concreto en una de las secciones multiplicando el área obtenida en a) por 2 metros
c) Un metro cúbico de concreto pesa 5 000libras. Encontrar el peso de la sección.

19. La región creciente acotada por dos círculos forman un "lune" (ver figura). Encontrar el área del lune, dado que el radio del círculo más pequeño es 3 y el radio del círculo más grande es 5



20. La superficie de una parte de la máquina es la región entre las gráficas de $y = |x|$ y $x^2 + (y-k)^2 = 25$ (ver figura)



a) Encontrar k, si el círculo es tangente a la gráfica de $y = |x|$
b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.
c) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina como una función del radio r del círculo.

ÁREAS EN COORDENADAS POLARES Y PARAMÉTRICAS

21. Calcula el área de la región limitada por las curvas $r_1 = 1+\cos\theta,\ r_2 = \cos\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \pi/4$
22. Halla el área encerrada por la curva $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$
23. Encuentre el área de la intersección de las cardiodes $r_1 = 2+2\cos\theta$ y $r_2 = 2+2sen\theta$
24. Determina el área común de las regiones limitadas por $r_1 = \sqrt{3}sen\theta$ y $r_2 = 1+\cos\theta$
25. Encuentre el área exterior a $r^2 = 9\cos 2\theta$ e interior a $r = 2-\cos\theta$
26. Halla el área interior a $r = 4sen\theta\cos^2\theta$ y exterior a $r = sen\theta$
27. Halla el área encerrada por $x = t^3 - t$ y $y = t^2 + t$
28. Encuentre el área encerada por el lazo de la curva dada por $x = t^2 - t \quad \wedge \quad y = t^3 - 3t$
29. Determina el área encerrada por el lazo de la curva descrita por $x = t^2 - 2t\ ;\quad y = t^3 - 12t$
30. Encuentre el área limitada por el lazo del Folium de descartes: $x^3 + y^3 + 3axy$, donde a es una constante positiva.

    Sugerencia: Parametriza la ecuación del Folium

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 13

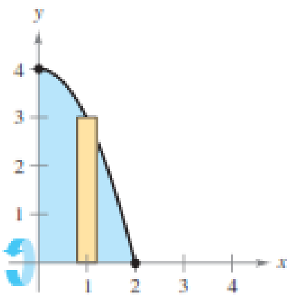
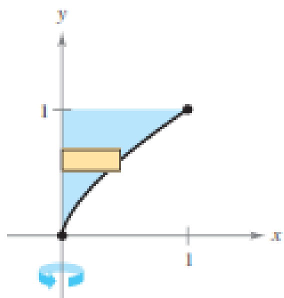
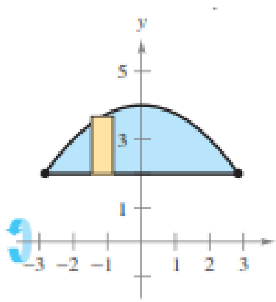
Tema: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA: CÁLCULO DE VOLÚMENES

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando los métodos de cálculo de volúmenes. El orden influirá en su calificación.

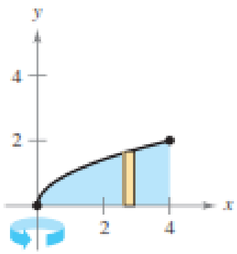
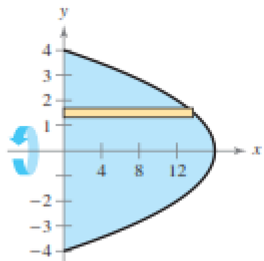
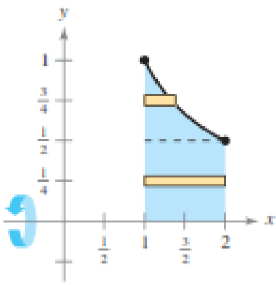
I Bloque

En los ejercicios 1 y 2, establezca y calcule la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje mostrado.

1. a) $y = 4 - x^2$ b) $y = 2,\ \ y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ c) $y = x^{2/3}$

2. a) $y = \sqrt{x}$ b) $x + y^2 = 16$ c) $y = \dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 3 a 6, encuentre los volúmenes de los sólidos generados al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones sobre las rectas dadas.

3. $y = x^2,\quad y = 4x - x^2$
   a) El eje x b) la recta $y = 6$
4. $y = 4 + 2x - x^2,\quad y = 4 - x$
   a) El eje x b) la recta $y = 1$
5. $y = \sqrt{x+2},\quad y = x,\quad y = 0$
   a) El eje x b) la recta $y = -1$
6. $y = \sqrt{x-2},\quad y = 0,\quad x = 4$
   a) El eje y b) la recta $x = 5$

II Bloque

En los ejercicios 7 a 15, determine el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones respecto a la recta dada.

7. $y=\dfrac{3}{1+x},\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=3$. Eje de rotación: $y=4$

8. $y=x-3,\ \ y=(x-5)^2$. Eje de rotación: $y=-1$

9. $y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}$. Eje de rotación: $y=-1$

10. $y=\frac{1}{2}(x+3)^2,\ \ y=2$. Eje de rotación: $y=4$

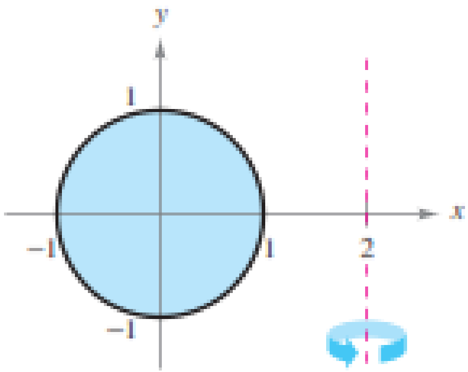
11. $y=e^{x/2}+e^{-x/2},\ \ y=0,\ \ x=-1,\ \ x=2$. Eje de rotación: eje x

12. $y=2-\sqrt{x^2-2x},\ \ x=2,\ \ x=3$ Eje de rotación: $x=1$

13. $y=\dfrac{x^2}{2},\ \ y=x^3-3x+4,\ \ x=2,\ \ x=0$. Eje de rotación: eje y

14. **Pieza de máquina**. Se genera un sólido al girar la región acotada por $y=\frac{1}{2}x^2 \wedge y=2$ respecto al eje y. Un agujero centrado a lo largo del eje de revolución, es perforado a través de este sólido, de manera que se elimina una cuarta parte del volumen. Encuentre el diámetro del agujero.

15. **Volumen de un toro**. Un toro se forma al girar la **región** acotada por el círculo $x^2+y^2=1$ respecto a la recta $x=2$ (vea la figura). Calcule el volumen de este sólido "en forma de rosquilla". (*Sugerencia* La integral $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ representa el área de un semicírculo)



III Bloque

16. **Determina** el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje "y", de la región exterior a la curva $y = x^2$ y entre las rectas $y = 2x - 1 \wedge y = x + 2$.

17. **Determina** el volumen del sólido de revolución que se forma cuando la región limitada por las gráficas de las ecuaciones: $y = x^3,\ y = 5,\ |y + x| = 2,\ y = x^2 + 2x + 1$, gira alrededor de la recta $y = 5$.

18. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al rotar, la región acotada por las gráficas de: $y = x^3 - 6x^2 + 8x \wedge y = x^2 - 4x$ (donde en ambos casos $x \in [0,\ 4]$) alrededor de la recta:
    a) $x = 4$
    b) $y = 4$

19. Halla el volumen del sólido formado al hacer girar en torno al eje OX la figura plana limitada por la cisoide de ecuación $y^2 = \dfrac{8a^3}{2a - x}$, la recta de ecuación $x = 2a$ y la recta de ecuación $y = 0$.

20. Calcula el volumen del sólido que se forma al rotar alrededor de la recta $x = 0$, la región limitado por las curvas $y = \sqrt{\cos^2 x},\ 4x = \pi,\ y = 0 \wedge 4x = 5\pi$

21. Utilice el método de los discos o el método de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0$ (hipocicloide) alrededor de:
    a) El eje x
    b) El eje y

VOLÚMENES EN COORDENADAS POLARES Y DE CUERPOS DE SECCION TRANSVERSAL CONOCIDA

22. Calcula el volumen del sólido obtenido por la rotación alrededor del eje polar de la figura limitada por la cardiode $r = 4 + 4\cos\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \pi / 2$

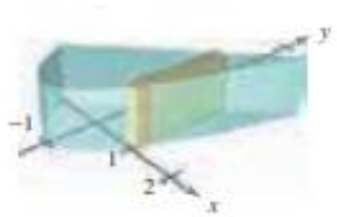
23. Encuentre el volumen de un sólido obtenido por rotación de la región acotada por la curva $r = 3\cos^2\theta$ alrededor del eje polar.

24. Halla el volumen del sólido formado por rotación alrededor del eje polar de la curva v $r = 3sen2\theta$

25. Encuentra el volumen del sólido cuya base es acotada por las gráficas de $y = x + 1$ y $y = x^2 - 1$ con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

a) Cuadrados

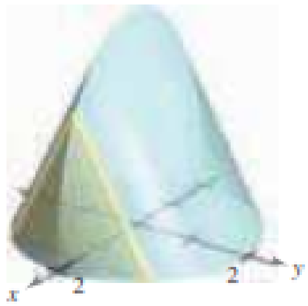
b) Rectángulos de altura 1



26. Encontrar el volumen de sólido cuya base es acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x

a) Triángulos equiláteros

b) semicírculos



27. La base de un sólido es limitada por $y = x^3$, $y = 0 \wedge x = 1$. Encontrar el volumen del sólido para cada una de las secciones transversales siguientes (perpendiculares al eje y):
    a) Cuadrados
    b) Semicírculos
    c) Triángulos equiláteros
    d) Semielipses
    Cuyas alturas son dos veces las longitudes de sus bases.

28. Un operador taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de radio R. el orificio tiene un radio r. Encontrar el volumen del anillo resultante.

29. Para la esfera del metal del ejercicio 28, sea $R=6$. ¿Qué valor de r producirá un anillo cuyo volumen es exactamente la mitad del volumen de la esfera.

30. La base de un sólido es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y=x$ y $y = x^2$.Cada sección transversal perpendicular a la recta $y=x$ es un cuadrado. Determina el volumen del sólido.

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

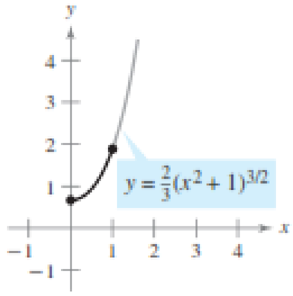
PRÁCTICA N° 14
Tema: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA: CÁLCULO DE LONGITUD DE ARCO Y ÁREA DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando la aplicación de las integrales definidas. El orden influirá en su calificación.

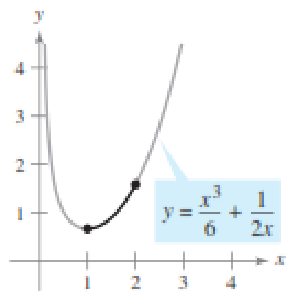
I Bloque

En los ejercicios 1 a 6, encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

1. $y=\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$



2. $y=2,\ y=4-\frac{x^2}{4}$



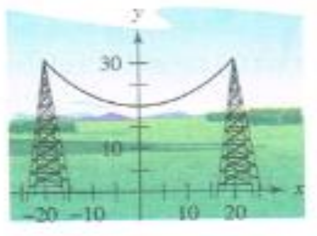
3. $y=\ln(senx),\quad \left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

4. $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad [0,\ 2]$

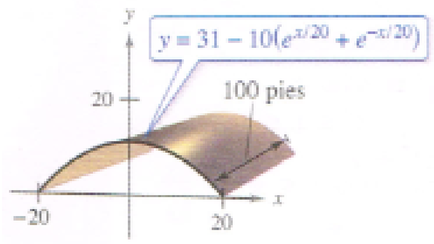
5. $y=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right),\quad [\ln 2,\ \ln 3]$

6. $x=\frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y-3),\quad 1\le y\le 4$

7. **Longitud de una catenaria**. Los cables eléctricos suspendidos entre dos torres forman una catenaria (ver figura) modelada por la ecuación $y = 20\cosh\frac{x}{20}$, $-20 \le x \le 20$, donde x y y se miden en metros. Las torres tienen 40 metros de separación. Encuentre la longitud del cable suspendido.



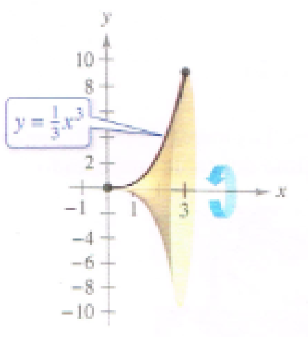
8. Un granero mide 100 pies de largo y 40 pies de ancho (vea la figura). Una sección transversal del techo es la catenaria invertida $y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$ encuentre el número de pies cuadrados de techo sobre el granero.



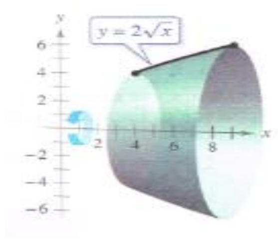
II Bloque

En los ejercicios 9 a 13, configure y evalúe la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje mostrado.

9. $y = \frac{1}{3}x^3$



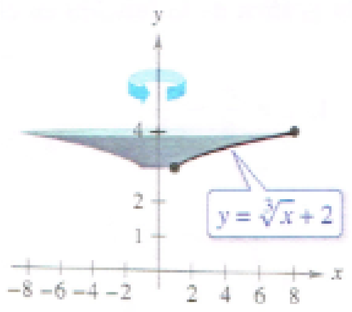
10. $y = 2\sqrt{x}$

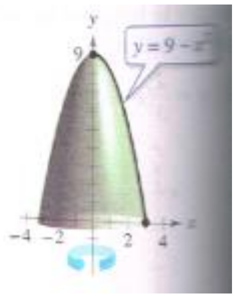


11. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x},\quad 1\le x\le 2,$ Eje de rotación: eje x

12. $y=\sqrt{9-x^2},\quad -2\le x\le 2$ Eje de rotación: eje x

13. a) $y=\sqrt[3]{x}+2$ b) $y=9-x^2$



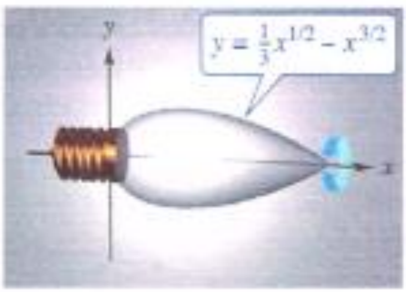


14. $y=1-\frac{x^2}{4},\quad 0\le x\le 2,$ Eje de rotación: eje y

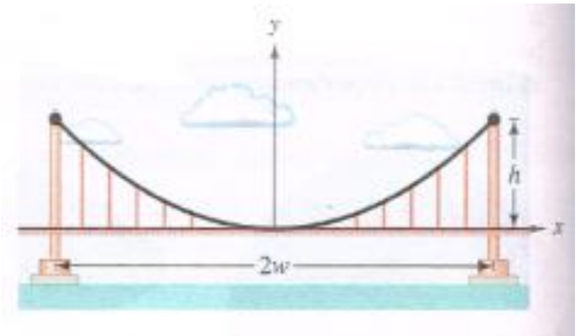
15. $y=\frac{x}{2}+3,\quad 1\le x\le 5,$ Eje de rotación: eje y

III Bloque

16. **Diseñar un foco.** Un foco ornamental ha sido diseñado mediante la revolución de la gráfica de $y=\frac{1}{3}x^{1/2}-x^{3/2},\quad 0\le x\le\frac{1}{3}$, respecto al eje x, donde x y y se miden en pies (vea la figura). Encuentre el área de la superficie del foco y utilice el resultado para aproximar la cantidad de vidrio necesaria para fabricar el foco. (Suponga que el vidrio tiene 0,015 pulgadas de espesor).



17. **Puente colgante**. Un cable para un puente colgante tiene la forma de una parábola con la ecuación $y = kx^2$. Sea h la altura del cable desde su punto más bajo hasta su punto más alto y sea $2w$ la longitud total del puente (vea la figura). Demuestre que la longitud del cable C está dado por $C = 2\int_0^w \sqrt{1+(4h^2/w^4)x^2}\,dx$



18. Calcula la longitud total de la curva $8y^2 = x^2(1-x^2)$

19. Sea R la región del plano limitado superiormente por $x^2 + y^2 = 2$ e interiormente por $x^2 = -y^3$. Halle la longitud del contorno de la región R.

20. Calcule la longitud de un arco de curva de la función $y = \frac{t^2}{8} + \frac{1}{4t}$, $x = \sqrt{t}$, desde $t = 1$ hasta $t = 2$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 15
Tema: INTEGRALES IMPROPIAS

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración impropia. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 5, determine si la integral impropia diverge o converge. Evalúe la integral, si converge.

1. $\int_{4}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

2. $\int_{-\infty}^{0} xe^{-4x}\,dx$

3. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{16+x^2}\,dx$

5. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

II Bloque

En los ejercicios 6 a 10, determine si la integral impropia diverge o converge. Evalúe la integral si converge.

6. $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

7. $\int_{0}^{1} x\ln x\,dx$

8. $\int_{0}^{\pi/2} \tan\theta\,d\theta$

9. $\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$

10. $\int_{3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x-6}}\,dx$

En los ejercicios 11 y 12, considere la región que satisface las desigualdades. (a) encuentre el área de la región. (b) Determine el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x. (c) Halle el volumen del sólido generado al girar la región sobre el eje y.

11. $y \le e^{-x}, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0$
12. $y \le \dfrac{1}{x^2}, \quad y \ge 0, \quad x \ge 1$

13. **Teoría electromagnética**. El potencial magnético en un punto en el eje de una bobina circula está dado por $P = \dfrac{2\pi NIr}{k}\displaystyle\int_c^{\infty} \frac{1}{(r^2+x^2)^{3/2}}\,dx$, donde N, I, r, k y c son constantes. Encuentre P.

14. **Fuerza de Gravedad**. Una varilla uniforme "semi – infinita" ocupa el eje x no negativo. La varilla tiene una densidad lineal δ que significa que un segmento de longitud dx tiene una masa de δdx.

    Una partícula de masa M se encuentra en el punto $(-a, 0)$. La fuerza de gravedad F que la vailla ejerce sobre la masa está dada por $F = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{GM\delta}{(a+x)^2}\,dx$, donde G es la constante gravitacional. Encuentre F.

15. ¿Para qué valor de c, la integral $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\frac{cx}{x+2} - \frac{1}{3x}\right)dx$ es convergente? Evalúe la **integral** para este valor de c.

III Bloque

16. ¿Es convergente o divergente la siguiente integral? $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$. Justifique su respuesta.

17. Analiza la convergencia o divergencia de la siguiente integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^t - e^{-t}}\,dt$

18. Determina el valor de la constante "a" para que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{a}{x+1}\right)dx$ sea convergente

19. Halla los valores de las constantes $m \wedge n$ de tal manera que se cumpla

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \frac{x^3+mx^2+nx}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{\pi}{3}$$

20. Dada la integral impropia $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^m x}$, identifique los valores m para los cuales la integral diverge. ¿Para qué valores de m converge?

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

Unidad IV

INTEGRALES MÚLTIPLES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de calcular centroides, centro de masa y momentos de inercia en sólidos, utilizando Integrales dobles y triples, sus teoremas y corolarios.

PRÁCTICA N° 16
Tema: INTEGRALES DOBLES

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración doble. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

1. Calcular las siguientes integrales dobles, sobre el rectángulo R que se indica:

(a) $\iint_R x\,y\,(x+y)\,dA \qquad R=[0,1]\times[0,1]$

(b) $\iint_R (y+x-3xy^2)\,dA \qquad R=[0,1]\times[1,3]$

(c) $\iint_R \text{sen}^2x\,\text{sen}^2y\,dA \qquad R=[0,\pi]\times[0,\pi]$

(d) $\iint_R (x\,\text{sen}\,y - y\,e^x)\,dA \qquad R=[-1,1]\times[0,\pi/2]$

2. Dibujar la región de integración y calcular las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x\cos(x+y)\,dA$ R triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π)

(b) $\iint_R e^{x+y}\,dA \qquad R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,/\, |x|+|y|\le 1\}$

(c) $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$ R región limitada por la recta $y=x$ y por la parábola $y=x^2$

(d) $\iint_R 2xy\,dA$ R región limitada por las rectas $y=0,\ y=x,\ x+y=2$

(e) $\iint_R x^2y^2\,dA$ R región limitada por las rectas $y=1,\ y=2,\ x=0,\ y=x$

(f) $\iint_R (x^2-y^2)\,dA$ R región limitada por la gráfica de $y=\text{sen}\,x$ y el segmento $[0,\pi]$ en $y=0$

II Bloque

3. En los siguientes ejercicios calcular las integrales dobles para las funciones f.

(a) $f(x, y) = \begin{cases} x + y & x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ $R = [0,1] \times [0,1]$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ $R = [-1,1] \times [-1,1]$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^{-2} & x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ $R = [1,2] \times [1,4]$

Una pirámide está delimitada por los tres planos de coordenadas y el Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0, x = 1, x = 3$.

4.

Calcular el volumen del sólido comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + z^2 = 25$.

5.

Calcular el volumen del sólido comprendido entre los cilindros parabólicos $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

6.

Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ y $z = 0$.

7.

Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x$, $y = -x$, $x - y = 2$, $x + y = 2$ y $z = 0$.

III Bloque

8. En cada uno de los siguientes casos describir la región de integración en coordenadas cartesianas, describirlas luego en coordenadas polares y calcular cada integral mediante ese cambio:

(a) $$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

(b) $$\int_0^{a}\int_0^{x} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

(c) $$\int_0^{1}\int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-1/2}\,dy\,dx$$

9. Calcular las siguientes integrales dobles:

(a) $$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$$ R región acotada de frontera $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$

(b) $$\iint_R (x^3y+y-x)\,dx\,dy$$ R semicírculo derecho de centro (0,0) y radio 1

(c) $$\iint_R \frac{(x^2-y^2)\,x-2y^2x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$ R primer cuadrante del círculo $x^2+y^2 \leq 9$

(d) $$\iint_R \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$ R región acotada de frontera $r^2 = \cos 2\theta$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 17
Tema: INTEGRALES TRIPLES

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración triple. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

1. Calcular las siguientes integrales triples:

   (a) $\iiint_D xy^2z^2 \, dx\, dy\, dz$

   D sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x$, $x = 1$, $z = 0$

   (b) $\iiint_D (1 + x + y + z)^{-3} \, dx\, dy\, dz$

   D sólido limitado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados.

   (c) $\iiint_D dx\, dy\, dz$

   D sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el plano $x + y = 1$, y los planos de coordenadas.

2. Calcular las integrales triples que se indican:

   (a) $\iiint_D xyz \, dx\, dy\, dz$

   $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \}$

   (b) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx\, dy\, dz$

   $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 \leq z^2, \ 0 \leq z \leq 1 \}$

II Bloque

3. Calcular las siguientes integrales triples empleando, según convenga, un cambio a coordenadas cilíndricas o esféricas

(a) $\iiint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$

D sólido limitado por las superficies $z = 2$ y $x^2 + y^2 = 2z$.

(b) $\iiint_D z\, dx\, dy\, dz$

D esfera de centro el origen y radio a.

(c) $\iiint_D dx\, dy\, dz$

D sólido limitado entre dos esferas concéntricas de radios respectivos a y b ($b > a > 0$).

4.

Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$, $z = 4$.

5.

Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 2 - x$, $z = 0$.

6.

Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$, $x + y + z = 2$.

7.

Calcular el volumen comprendido entre las superficies $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = 1/2$.

8.

Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

9.

Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z = 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}$.

10.

Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 18
Tema: MOMENTOS DE REGIONES PLANAS Y CENTRO DE MASA

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración doble. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

En los ejercicios 1 a 4, hallar la masa de la lámina descrita por las desigualdades, dado que su densidad es $\rho(x, y) = xy$. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más simples en coordenadas polares.)

1. $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$

2. $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 9 - x^2$

3. $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$

4. $x \geq 0,\ 3 \leq y \leq 3 + \sqrt{9 - x^2}$

En los ejercicios 5 a 8, hallar la masa y el centro de masa de la lámina con cada densidad.

5. R: cuadrado con vértices $(0, 0), (a, 0), (0, a), (a, a)$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$ *c)* $\rho = kx$

6. R: rectángulo con vértices $(0, 0),\ (a, 0),\ (0, b),\ (a, b)$

a) $\rho = kxy$ *b)* $\rho = k(x^2 + y^2)$

7. R: triángulo con vértices $(0, 0), (0, a), (a, a)$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$ *c)* $\rho = kx$

8. R: triángulo con vértices $(0, 0), (a/2, a), (a, 0)$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = kxy$

9. ***Traslaciones en el plano*** Trasladar la lámina del ejercicio 5 cinco unidades a la derecha y determinar el centro de masa resultante.

10. ***Conjetura*** Utilizar el resultado del ejercicio 9 para formular una conjetura acerca del cambio en el centro de masa cuando una lámina de densidad constante se traslada c unidades horizontalmente o d unidades verticalmente. ¿Es la conjetura verdadera si la densidad no es constante? Explicar.

II Bloque

En los ejercicios 11 a 22, hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades que se especifican. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

11. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1,\ \rho = ky$

12. $y = x^2,\ y = 0,\ x = 2,\ \rho = kxy$

13. $y = 4/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4,\ \rho = kx^2$

14. $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1,\ \rho = k$

15. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$

16. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

a) $\rho = ky$ *b)* $\rho = ky^2$

17. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ \rho = ky$

18. $x = 9 - y^2,\ x = 0,\ \rho = kx$

19. $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{L},\ y = 0,\ x = 0,\ x = L,\ \rho = k$

20. $y = \cos\dfrac{\pi x}{L},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{L}{2},\ \rho = ky$

21. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ 0 \le y \le x,\ \rho = k$

22. $x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ \rho = k(x^2 + y^2)$

III Bloque

En los ejercicios 1 a 14, hallar el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

1. $f(x, y) = 2x + 2y$

R: triángulo cuyos vértices son $(0, 0), (4, 0), (0, 4)$

2. $f(x, y) = 15 + 2x - 3y$

R: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0), (3, 0), (0, 3), (3, 3)$

3. $f(x, y) = 7 + 2x + 2y$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 4\}$

4. $f(x, y) = 12 + 2x - 3y$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 9\}$

5. $f(x, y) = 9 - x^2$

R: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$

6. $f(x, y) = y^2$

R: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0), (3, 0), (0, 3), (3, 3)$

7. $f(x, y) = 3 + x^{3/2}$

R: rectángulo cuyos vértices son $(0, 0), (0, 4), (3, 4), (3, 0)$

8. $f(x, y) = 2 + \frac{2}{3}y^{3/2}$

$R = \{(x, y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 - x\}$

9. $f(x, y) = \ln|\sec x|$

$R = \left\{(x, y): 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, 0 \le y \le \tan x\right\}$

10. $f(x, y) = 13 + x^2 - y^2$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 4\}$

11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$

12. $f(x, y) = xy$, $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16\}$

13. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq b^2, 0 < b < a\}$

14. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$

En los ejercicios 15 a 18, hallar el área de la superficie.

15. Porción del plano $z = 24 - 3x - 2y$ en el primer octante

16. Porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ en el primer octante

17. Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$

18. Porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

PRÁCTICA N° 19
Tema: CENTRO DE MASA Y MOMENTO DE INERCIA EN SÓLIDOS

INSTRUCCIONES: Resuelva cada ejercicio considerando las reglas de integración triple. El orden influirá en su calificación.

I Bloque

Masa y centro de masa **En los ejercicios 39 a 42, hallar la masa y las coordenadas indicadas del centro de masa del sólido de densidad dada acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

39. Hallar $\bar{x}$ utilizando $\rho(x, y, z) = k$.

$Q: 2x + 3y + 6z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$

40. Hallar $\bar{y}$ utilizando $\rho(x, y, z) = ky$.

$Q: 3x + 3y + 5z = 15, x = 0, y = 0, z = 0$

41. Hallar $\bar{z}$ utilizando $\rho(x, y, z) = kx$.

$Q: z = 4 - x, z = 0, y = 0, y = 4, x = 0$

42. Hallar $\bar{y}$ utilizando $\rho(x, y, z) = k$.

$Q: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ (a, b, c > 0), x = 0, y = 0, z = 0$

Masa y centro de masa **En los ejercicios 43 y 44, formular las integrales triples para hallar la masa y el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

43. $x = 0, x = b, y = 0, y = b, z = 0, z = b$

$\rho(x, y, z) = kxy$

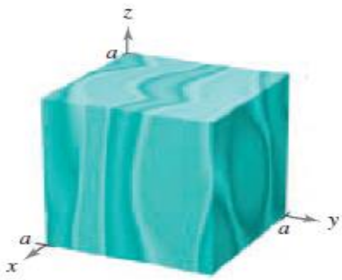
44. $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$

$\rho(x, y, z) = kz$

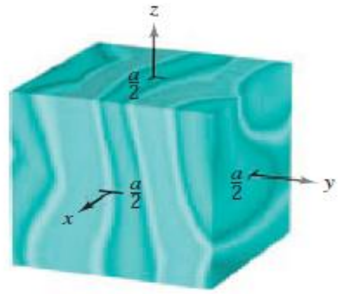
II Bloque

Momentos de inercia **En los ejercicios 55 a 58, hallar I_x, I_y e I_z para el sólido de densidad dada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples.**

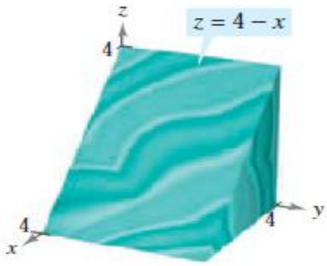
55. *a)* $\rho = k$
b) $\rho = kxyz$



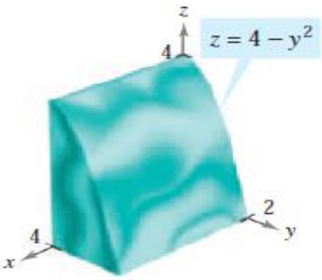
56. *a)* $\rho(x, y, z) = k$
b) $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$



57. *a)* $\rho(x, y, z) = k$
b) $\rho = ky$



58. *a)* $\rho = kz$
b) $\rho = k(4 - z)$



III Bloque

Momentos de inercia **En los ejercicios 61 y 62, dar una integral triple que represente el momento de inercia con respecto al eje z de la región sólida Q de densidad ρ.**

61. $Q = \{(x, y, z): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}$
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

62. $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$
$\rho = kx^2$

En los ejercicios 63 y 64, utilizando la descripción de región sólida, dar la integral para *a*) la masa, *b*) el centro de masa y *c*) el momento de inercia con respecto al eje z.

63. El sólido acotado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho = kz$

64. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con función de densidad $\rho = kxy$

Bibliografía:

LARSON Ron y BRUCE Edwards. Cálculo. Décima edición. México, D.F: Cengage Learning. 2017.

Referencias bibliográficas

BÁSICA
Larson, R. y Bruce, E. (2017). Cálculo (Vol. 1 y 2). (10ª ed.). México, D.F.: Cengage Learning. Código de la bilbioteca UC 515. L26.

COMPLEMENTARIA

Espinoza Ramos, E. (2004). *Análisis matemático II (4ª ed.).* Lima: Servicios Gráficos J.J. Código de la bilbioteca UC. *515 / E88 2008 / 2*

Espinoza Ramos, E. (2004). *Análisis matemático IV (4ª ed.).* Lima: Servicios Gráficos J.J.

Kreyszig, E. (2000). Matemáticas avanzadas para ingeniería (3ª ed.). México: Editorial Limusa S.A. 2000.

Larson, R., Hosteler, R.P. y Edwars, B. (2011). *Cálculo integral - Matemática 2.* México: Editorial Mc Graw Hill. 2011.

Larson, R., Hostetler, R.P. y Bruce, E. (2010). Cálculo esencial. México:Cengage Learning.

Leithold, L. (1998). *El cálculo.* México: Oxford.

Stewart, J. (2008). *Cálculo: Trascendentes tempranas (6ª ed.).* México: Cengage Learning.

Zill, D.G. y Wrigth, W.S. (2011). Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas. México: Editorial McGraw Hill. (515 Z77)

ENLACES RECOMENDADOS
http://www.freelibros.org/,
http://search.4shared.com/q/CCQD/1/books_office