Universidad Continental

Precálculo I

Guía de Trabajo

Visión

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

MISIÓN

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental

Material publicado con fines de estudio
Código: UC0672
2017

Presentación

Precálculo I es una asignatura que tiene como finalidad sentar las bases para desarrollar y fortalecer las habilidades numéricas del estudiante universitario. Las habilidades numéricas se revelan en la capacidad para manejar y utilizar números en operaciones matemáticas e implica la agilidad mental para la realización de operaciones con números; la Matemática es la ciencia que se ocupa de describir y analizar las cantidades, el espacio y las formas, los cambios y relaciones, así como la incertidumbre. Si miramos a nuestro alrededor vemos que esos componentes están presentes en todos los aspectos de la vida de las personas, en su trabajo, en su quehacer diario, en los medios de comunicación, entre otros. Es evidente, que en nuestra sociedad, dentro de los distintos ámbitos profesionales, es preciso un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas. Estas habilidades coadyuvan la formación del perfil profesional de nuestros estudiantes que les permitirán el desarrollo de la lógica y el razonamiento en sus actividades personales, académicas y profesionales.

En concordancia con lo anterior, la competencia que desarrolla la asignatura es**:** Identifica, define, analiza y aplica los diferentes teoremas, propiedades en los números reales, funciones en la solución de situaciones problemáticas, demostrando interés en los trabajos de investigación, tolerancia y respeto a los demás.

Es recomendable que el estudiante trabaje y lea con responsabilidad el presente Material de Trabajo y formule sus dudas a su docente para que pueda desarrollar las prácticas planteadas. Además, requiere la revisión y consulta complementaria de otros libros, principalmente los propuestos en la bibliografía básica y complementaria del sílabo; incluso de información confiable de Internet y otros medios electrónicos. Es inexorable la visita a la plataforma de búsqueda de ProQuest. Este recurso, que ofrece nuestra universidad a través de la Biblioteca Virtual, representa una mejor manera de buscar, encontrar, usar y compartir la información.

Finalmente, agradecemos a los docentes de Matemática: Ing. Edwin Flores Álvarez e Ing. Rocío Vargas Navarro; quienes trabajaron en la elaboración del presente Manual ya que sus aportes y sugerencias han contribuido a mejorar la presente edición.

Los autores

ÍNDICE

Unidad I

LOS NÚMEROS REALES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de, resolver ejercicios de números reales, polinomios, ecuaciones e inecuaciones aplicando los procedimientos del cálculo en situaciones formales y de la vida cotidiana

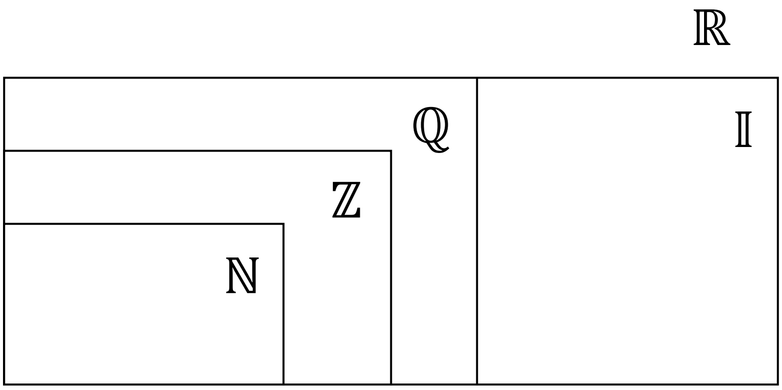
PORTAFOLIO N° 01 NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender los números reales

PRÁCTICA N° 1
Tema: CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Ejercicios

A. Nivel Básico:

Llene los espacios en blanco



1. Un número real es __________ si se puede escribir como la razón p/q entre dos enteros, donde $q \neq 0$
2. El punto 0 sobre la recta de números reales se llama ___________

Propiedad	**Adición**	**Multiplicación**
Clausura	$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \in \mathbb{R}$	$(\mathbf{a}.\mathbf{b}) \in \mathbb{R}$
Conmutativa	$\mathbf{a + b = b + a}$	$\mathbf{a . b = b . a}$
Asociativa	$\mathbf{a + (b + c) = (a + b) + c}$	$\mathbf{a . (b . c) = (a . b) . c}$
Elemento neutro	Es el cero **0** porque: $\mathbf{0 + a = a + 0 = a}$	Es el **1** porque: $\mathbf{1 . a = a . 1 = a}$
Elemento inverso	Es $\mathbf{-a}$ porque: $\mathbf{a + (- a) = 0}$	Para $\mathbf{a \neq 0}$ es $\frac{1}{a}$ porque $\mathbf{a . \frac{1}{a} = 1}$
Distributiva	$\mathbf{a . (b + c) = a . b + a . c}$	

3. Indique la(s) propiedad(es) de los números reales que justifica(n) cada afirmación:
   a) $26 \cdot 12$ es un número real
   b) $\frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}$
   c) $2+(-7+5)=(2+(-7))+5$
   d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$
   e) $(x+3)(2y+7)=(x+3)(2y)+(x+3)(7)$
   f) $(3)[4(5)]=[3(5)](4)$
   g) $5 + [\sqrt{2} + (-\sqrt{2})] = 5$
   h) $3(x+2)=3(2)+3x$

B. Nivel Medio

1. En los siguientes ejercicios, determine qué números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros, (c) enteros (negativos y positivos), (d) números racionales y (e) números irracionales.
   a) { -9, -7/2, 5, 2/3, $\sqrt{2}$, 0, 1, -4, 2, -11 }
   b) { $\sqrt{5}$, -7, -7/3, 0, 3, 12, 5/4, -3, 12, 5 }
   c) {2.01, 0.666…, 0.7575, -4,63, $\sqrt{10}$, -75, 4 }
   d) { - π, -1/3, 6/3, ½, $\sqrt{2}$, - 7.5, - 1.8, -22 }
   e) 25, -17, - 12/5, $\sqrt{9}$, 3, 12. π/2, 7, -11.1, 13 }

2. En los siguientes ejercicios, (a) haga una descripción verbal del subconjunto de los números reales representados por la desigualdad o el intervalo, (b) trace el subconjunto en la recta de números reales.

   a) $x \leq 5$
   b) $x < 0$
   c) [4, ∞)
   d) $-2 < x < 2$
   e) $-1 \leq x < 0$
   f) [-2, 5)
   g) $x \geq -2$
   h) $x > 3$
   i) (-∞, 2)
   j) $0 \leq x \leq 5$
   k) $0 < x \leq 6$
   l) (-1, 2]

3. En los siguientes ejercicios, use notación de desigualdad y notación de intervalo para describir el conjunto.

   a) " y es no negativo "
   b) " y es no mayor a 25 "
   c) " x es mayor a -2 y a lo más 4"
   d) " y es al menos -6 y menor que 0"
   e) " t es al menos 10 y a lo más 22"

   f) " k es menor que 5 pero no menor que -3"
   g) "El peso del perro, W, es más de 65 libras"

4. Evalúe las siguientes expresiones
   a) $|-10|$
   b) $-3|-3|$
   c) $|3-8|$
   d) $|-1|-\ |-2|$
   e) $-3-|-3|$
   f) $\frac{-5}{|-5|}$

5. En los siguientes ejercicios, escriba el símbolo correcto (<, > o =) entre los dos números reales.

   a) $|-3| \qquad -|-3|$
   b) $|-4| \qquad |4|$
   c) $-5 \qquad -|5|$
   d) $-|-6| \qquad |-6|$
   e) $-|-2| \qquad -|2|$
   f) $-(-2) \qquad -2$

6. En los siguientes ejercicios, use notación de valor absoluto para describir la situación

   a) La distancia entre "x" y 5 es no mayor a 3
   b) La distancia entre "x" y -10 es al menos 6
   c) y está al menos a seis unidades de 0
   d) y está como máximo a dos unidades de a

7. Indique la(s) propiedad(es) de los números reales que justifica(n) cada afirmación:

   a) $x + 9 = 9 + x$
   b) $\frac{1}{h+6}(h+6)=1,\ \ h \neq 6$
   c) $2(x + 3) = 2.x + 2.3$
   d) $x + (y + 10) = (x + y) + 10$
   e) $2\left(\frac{1}{2}\right)=1$
   f) $(x+3)-(x+3)=0$
   g) $(z - 2) + 0 = z - 2$
   h) $x(3y) = (x . 3)y = (3x)y$

C. Nivel Avanzado

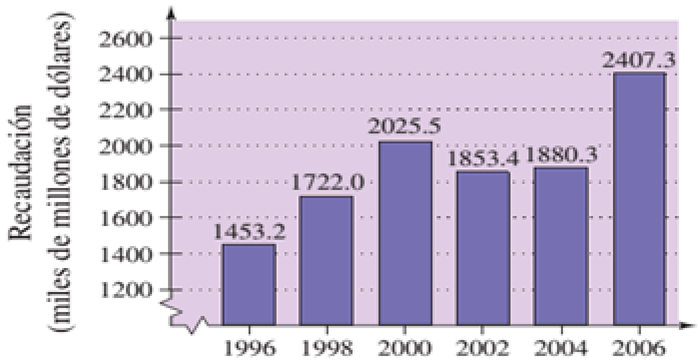
1. En el diseño de un ingeniero aparece un triángulo equilátero cuyo lado mide $\sqrt{8}$. Indica un procedimiento para que el ingeniero pueda tomar la medida de la longitud de dicho lado y pintar el triángulo.

2. Un delineante debe pintar un cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{11}$ indica cómo puede obtener la medida de dicho lado.

3. En los ejercicios, el departamento de contabilidad de una compañía embotelladora de bebidas para deporte está comprobando si los gastos reales de un departamento difieren, en más de \$500 o en más de 5%, respecto de los gastos presupuestados. Llene las partes faltantes de la tabla y determine si cada gasto real pasa el "examen de varianza de presupuesto ".

	Gasto presupuestado	Gasto real		
	b	a	$\lvert a-b \rvert$	$0.05b$
Sueldos	\$112 700	\$113 356		
Utilidades	\$9 400	\$9 772		
Impuestos	\$37 640	\$37 335		
Seguros	\$2 575	\$2 613		

4. Use la gráfica de barras, que muestra la recaudación del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para años seleccionados de 1996 a 2006. En cada ejercicio se indican los gastos del gobierno federal. Encuentre la magnitud del excedente o déficit para el año.



Año	Recaudación	Gastos	$\lvert \text{Recaudación} - \text{Gastos} \rvert$
1996		\$1560.6 miles de millones	
1998		\$1652.7miles de millones	
2000		\$1789.2miles de millones	
2002		\$2011.2 miles de millones	
2004		\$2293.0 miles de millones	
2006		\$2655.4 miles de millones	

Ejercicios Propuestos

1. En los siguientes ejercicios, determine qué números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros, (c) enteros (negativos y positivos), (d) números racionales y (e) números irracionales.

$a)\ \left\{0, -10{,}50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\right\}$

$b)\ \left\{1.001{,}0.333\ \ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\right\}$

2. Indique la(s) propiedad(es) de los números reales que justifica(n) cada afirmación:

a) $\mathrm{x} + 9 = 9 + \mathrm{x}$

b) $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

c) $\frac{1}{(h+6)}(h+6) = 1, h \neq -6$

d) $(x+3) - (x+3) = 0$

e) $(z-2) + 0 = z - 2$

f) 1(x+1)=x+1

g) $(z+5)x = zx + 5x$

h) $x + (y+10) = (x+y) + 10$

i) $x(3y) = (3x)y$

j) $3(t-4) = 3t - 3\ (4)$

k) $\frac{1}{7}\big(7\ (12)\big) = \left(\frac{1}{7}\ (7)\right) 12 = 1\ (12) = 12$

PORTAFOLIO N° 02 EXPONENTES Y RADICALES	HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender los números reales

PRÁCTICA N° 2
Tema: TEORÍA DE EXPONENTES

Se llama así a los conjuntos numéricos expresados como potenciación y que se pueden representar de la siguiente manera:

$$a^n = P$$

- **a** es la base
- **n** es el exponente
- **P** es la potencia

PROPIEDADES.

1. **EXPONENTE CERO**

$$x^0 = 1 \qquad \text{Ejemplo}: 5^0 = 1$$

2. **EXPONENTE NEGATIVO**

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m} \qquad \text{Ejemplo}: \ x^{-8} = \frac{1}{x^8}$$

3. **MULTIPLICACIÓN DE BASES IGUALES**

$$x^m x^n x^p = x^{m+n+p} \qquad \text{Ejemplo}: \ x^5 x^7 x^{10} = x^{5+7+10} = x^{22}$$

4. **DIVISIÓN DE BASES IGUALES**

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad \text{Ejemplo}: \ \frac{x^{10}}{x^5} = x^{10-(5)} = x^{10-5} = x^5$$

5. **MULTIPLICACIÓN DE BASES DIFERENTES**

$$(xy)^m = x^m y^m \quad \text{Ejemplo}: \ (27)^3 = 2^3 7^3 = 8(343) = 2744$$

6. **DIVISIÓN DE BASES DIFERENTES**

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \qquad \text{Ejemplo}: \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

7. DIVISIÓN DE FRACCIONES CON EXPONENTE NEGATIVO

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m}=\left(\frac{y}{x}\right)^{m}\quad \text{Ejemplo}: \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$$

8. POTENCIA DE UNA POTENCIA

$$\left(x^m\right)^n=x^{mn}\qquad \text{Ejemplo}: \left[\left(x^2\right)^3\right]^{-4}=x^{(2)(3)(-4)}=x^{-24}=\frac{1}{x^{24}}$$

9. EXPONENTE FRACCIONARIO

$$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}\qquad \text{Ejemplo}: \sqrt[5]{x^4}=x^{\frac{4}{5}}$$

10. RAÍZ DE RAÍZ

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{x}}}}=\sqrt[mnpq]{x}\qquad \text{Ejemplo}: \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt{x^3}}}}=\sqrt[(3)(4)(5)(2)]{x^3}=\sqrt[120]{x^3}$$

11. RAÍZ DE UN PRODUCTO

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}\ \text{Ejemplo}: \sqrt[5]{x^{10}y^{25}}=\sqrt[5]{x^{10}}\sqrt[5]{y^{25}}=x^2y^5$$

12. RAÍZ DE UN COCIENTE

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\qquad \text{Ejemplo}: \sqrt[4]{\frac{16}{625}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}}=\frac{2}{5}$$

Ejercicios

A. Nivel Básico:

1. Simplificar:

$$\frac{3^{2n+1}+9^{n+1}}{9^{n+1}-3^{2n+1}}\ ;\ n\in N$$

2. Simplificar:

$$\frac{5\times 2^{m+2}-2^{m+4}+6\times 2^{m-1}}{2^{m+5}-15\times 2^{m}-2\times 2^{m+3}}$$

3. Efectuar:

$$\frac{15^3\times 16^3\times 25^3\times 49}{27\times 2^{12}\times 5^9\times 7}$$

4. Al reducir:

$$\frac{x^{2^4}.(x^2)^4.x^{(-2)^4}.x^{-2^4}}{x^2.x^4.x^6.x^8}$$

Se obtuvo: x^{-n}

Hallar: n;

5. Reducir:

$$\frac{x^4.x^6.x^8.x^{10}....x^{40}}{x^1.x^3.x^5.x^7....x^{37}}$$

6. Indicar el exponente final de (xy) en:

$$\frac{x^4y^4\overbrace{(xy)^3(xy)^3.......(xy)^3}^{20\ \text{veces}}}{\underbrace{(x^2y^2)(x^2y^2).......(x^2y^2)}_{30\ \text{veces}}}$$

7. Siendo: "n" un número natural mayor que la unidad; al efectuar:

$$\left(\frac{3^n-2^n}{2^{-n}-3^{-n}}\right)^{1/n}$$

Tendremos:

8. Simplificar.

$$\left(\sqrt[b^b]{b^{b^{b^2+1}}}\right)^{b^{b-b^2}}$$

B. Nivel Medio:

1. Reducir:

$$Q=\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\left(\frac{4}{9}\right)^{-2n}\left(\frac{8}{27}\right)^{n}$$

2. Reducir:

$$E=\frac{\sqrt[8]{\sqrt[5]{x^2}}\,\sqrt[4]{\sqrt[10]{x^{13}}}}{\sqrt{\sqrt[20]{x^3}}}$$

3. Calcular el valor de :

$$T=\frac{4^{3}\left(8^{\frac{4}{3}}\right)^{-n}}{\left[4\left(4^{-1}\right)^{n}\right]^{2}}$$

4. Hallar el valor de "x":

$$\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}}-\sqrt[3x-7]{8^{x-3}}=0$$

5. Hallar el valor de "x":

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{9}{16}$$

6. Reducir:

$$R=\left[2^{-2}\left(2^{2}\right)^{2}\right]^{-2}\sqrt[3]{X^{2}}$$

7. Calcular el valor de :

$$S=\frac{2^{x+4}+36\left(2^{x-2}\right)}{2^{x+5}-2\left(2^{x+3}\right)-4\left(2^{x+1}\right)-6\left(2^{x-1}\right)}$$

8. Calcular el valor de :

$$P=\frac{21^{6}.35^{3}.80^{3}}{15^{4}.14^{9}.30^{2}}$$

9. Efectuar:

$$Q=\sqrt[m-n]{\frac{6^{m}.3^{n}+2^{m+n}}{6^{n}.3^{m}+4^{n}}}$$

10. Resolver:

$$R=\left(x^{m}\right)^{\frac{1}{m}}-\left(x^{1+\frac{1}{m}}\right)^{\frac{m}{m+1}}+\sqrt[m]{x^{2m}}$$

C. Nivel Avanzado

1. Hallar el valor de la expresión:

$$C=\sqrt[n]{\frac{20^{n+1}}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$$

21. Simplificar :

$$Q=\left(3^{n^2+n+4}-3^{n^2+n+2}\right)/\left[3\left(3^{n^2+n}\right)\right]$$

22. $$F=\sqrt[6]{\frac{x^5\sqrt[8]{x^3}}{x^3\sqrt[4]{x}}}\cdot\sqrt[16]{\underbrace{x^5.x^5............x^5}_{9\text{ veces}}}$$

23. Ejecutar :

$$K=\left[27\left(\frac{81}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{729}{8000}\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1024}{243}\right)^{\frac{2}{5}}+3375^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

24. Resolver :

$$3^{10x}+3^{10x-1}+3^{10x-2}+3^{10x-3}+3^{10x-4}=363$$

25. Calcular el valor de "m" si se cumple que :

$$\left[\frac{\sqrt[3]{\sqrt[m]{a^5\sqrt[4]{(c/b)^2}}}}{\sqrt{(ab)^2\sqrt[3]{c\sqrt[m]{b^5}}}}\right]^{-1}=\left(a^{\frac{1}{9}}b^{\frac{1}{9}}\right)^{10}$$

PORTAFOLIO Nº 03 FACTORIZACIÓN	HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO
	• Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender los números reales

PRÁCTICA N° 3
Tema: FACTORIZACIÓN

FACTOR ALGEBRAICO

Un polinomio "F" no constante será factor algebraico de "P" si y sólo si "P" es divisible por "F.

Ejemplos:

- $P_{(x)} = (x + 2)^3 (x + 1)^2$
  Son factores algebraicos de $P_{(x)}$:

FACTOR PRIMO

Un polinomio "F" será primo de otro polinomio "P" si "F" es factor algebraico de "P" y primo a la vez.

Ejemplos:

- $P_{(x)} = (x + 2)^3 (x + 1)^2 (x + 5)^6$
  Son factores primos de $P_{(x)}$:

- $P_{(x)} = (x) (x + 2)^6 (x - 1)^2$
  Son factores primos de $P_{(x)}$:

FACTORIZACIÓN

Es el proceso de transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de sus factores primos o sus potencias.

Multiplicación

$$P_{(x)} = x^2 + 3x + 2 \equiv (x + 1)(x + 2)$$

Factorización

A. Nivel Básico:

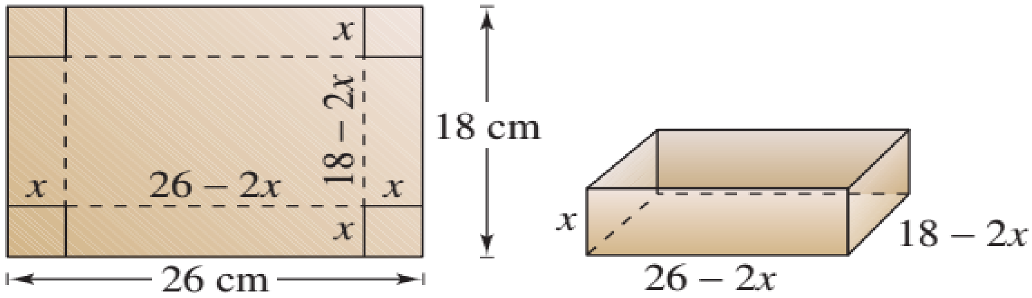
1. Factorizar: $x^2y + x^2z$
2. Factorizar: $2a^2x + 6ax^2$
3. Factorizar: $m^2 + 13m - 30$
4. Factorizar: $x^2 - 17x - 60$; e indicar uno de los factores primos
5. Factorizar: $16x^2 - 25y^4$
6. Factorizar: $4x^2 - 81y^4$
7. Factorizar: $100 - x^2y^6$; e indicar uno de los factores primos
8. Hallar la suma de los factores que se obtienen de factorizar:
   $2p^2 + 3rp + 4p + 3rp$
9. Factorizar y dar como respuesta la suma de coeficientes de uno de sus factores.
   $3ab + 1 + 3b + a$
10. Factorizar: $4x^2 - (x + y)^2$
11. Factorizar: $a(x - 1) - (a + 2)(x - 1)$
12. Factorizar: $18a^2 - 13a - 5$
13. Indicar el número de factores primos de:
    $4x^2 - 20xy + 25y^2$
14. Factorizar: $4m(a^2 + x - 1) + 3n(x - 1 + a^2)$; e indicar la suma de coeficientes de uno de los factores primos.
15. Factorizar: $- m - n + x(m + n)$
16. Indica un factor de: $6x^8 - 13x^4 + 6$
17. Desarrollo: $8m^3 - 27n^{12}$ e indicar un factor
18. Factorizar: $x(a - 1) + y(a - 1) - a + 1$
19. ¿Cuántos binomios se obtienen de la factorización de:
    $$\frac{a^8}{81} - x^4$$
20. Factorizar: $(m - n)^2 + 6(m - n) + 9$
21. Factorizar: $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$; e indicar la suma de los factores primos.
22. Factorizar: $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$ e indicar uno de los factores primos

B. Nivel Medio:

1. $72x^{2a}y^{b}+48x^{a+1}y^{b+1}+24x^{a}y^{2b}$
2. $(x+y)^{9}(x-y)^{5}-\left(x^{2}-y^{2}\right)^{7}$
3. $x^{m+n}+y^{m+n}+(xy)^{m}+(xy)^{n}$
4. $x^{y}y^{x}+xy+x^{y+1}+y^{x+1}$
5. $x^{4}+y^{4}+2xy\left(x^{2}+y^{2}\right)+3x^{2}y^{2}$
6. $9(x-y)^{2}+12(x-y)(x+y)+4(x+y)^{2}$
7. $x^{4n}+7x^{2n}+12$
8. $64x^{12}y^{3}-68x^{8}y^{7}+4x^{4}y^{11}$
9. $a(x+1)+b(x+1)$
10. $a^{2}+ab+ax+bx$
11. $256a^{12}-289b^{4}m^{10}$
12. $x^{6}-8y^{12}$
13. $9b^{2}-30a^{2}b+25a^{4}$
14. $x^{2}+7x+10$
15. $c^{2}-4c-320$
16. $x^{4}-7x^{2}+12$
17. $x^{3}-27$
18. $\left(a^{2}+b^{2}-c^{2}-d^{2}\right)^{2}-4(ab+cd)^{2}$
19. $(a+1)^{7}\left(a^{2}+1\right)^{10}-(a+1)^{5}\left(a^{2}+1\right)^{11}$
20. $(x+3)(x+2)(x+1)+(x+2)(x+1)+(x+1)$
21. $bd\left(a^{2}+c^{2}\right)+bc\left(a^{2}+d^{2}\right)+ad\left(b^{2}+c^{2}\right)+ac\left(b^{2}+d^{2}\right)$
22. $(x+1)^{4}+(x+2)^{3}+(x+3)^{2}-7(x+2)+2$
23. $(x+8)(x+8)+3(x+8)(9-y)+2(9-y)^{2}$
24. $(x+17)(x+17)+6(x+17)(10-y)+5(10-y)^{2}$
25. $a^{2}(b-c)+b^{2}(c-a)+c^{2}(a-b)$
26. $a^{3}\left(b^{2}-c^{2}\right)+b^{3}\left(c^{2}-a^{2}\right)+c^{3}\left(a^{2}-b^{2}\right)$
27. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+2)+(x+1)(x+2)(x+3)$
28. $c^{2}\left(2a^{2}+2b^{2}-c^{2}\right)-\left(a^{2}-b^{2}\right)^{2}$
29. $\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}+ab+ac+bc\right)^{2}-(a+b+c)^{2}\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)$
30. $2a^{2}+2b^{2}-\left(a^{2}-b^{2}\right)^{2}-1$

C. Nivel Avanzado:

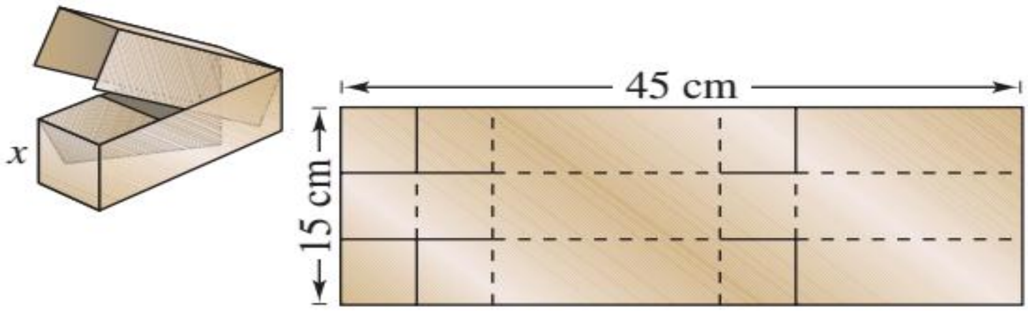
VOLUMEN DE UNA CAJA Un restaurante de comida rápida para llevar está construyendo una caja abierta, al cortar cuadrados de las esquinas de un cartón de 18 centímetros por 26 centímetros (vea figura). El borde de cada cuadrado cortado mide x centímetros.



(a) Encuentre el volumen de la caja en términos de x

(b) Encuentre el volumen cuando $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

VOLUMEN DE UNA CAJA Una compañía de mensajería de entregas de un día para otro está diseñando una caja cerrada al cortar a lo largo de líneas continuas y doblar a lo largo de líneas discontinuas, en una pieza rectangular de cartón acanalado como se muestra en la figura. La longitud y ancho del rectángulo son 45 centímetros y 15 centímetros, respectivamente.



(a) Encuentre el volumen de la caja de envíos en términos de x.

(b) Encuentre el volumen cuando $x = 3$, $x = 5$ y $x = 7$.

PORTAFOLIO N° 04 ECUACIONES	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender los números reales

PRÁCTICA N° 4
Tema: ECUACIONES

Generación de ecuaciones equivalentes

Una ecuación puede ser transformada en una ecuación equivalente por medio de uno o más de los pasos siguientes.

	Ecuación dada	*Ecuación equivalente*
1. Elimine símbolos de agrupación, combine términos semejantes, o simplifique fracciones en uno o ambos lados de la ecuación.	$2x - x = 4$	$x =$
2. Sume (o reste) la misma cantidad a *cada* lado de la ecuación.	$x + 1 = 6$	$x =$
3. Multiplique (o divida) *cada* lado de la ecuación entre la misma cantidad diferente de cero	$2x = 6$	$x =$
4. Intercambie los dos lados de la ecuación	$2 = x$	$x =$

Resolución de una ecuación cuadrática

Factorización: si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo:

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Fórmula cuadrática: si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejemplo: $2x^2 + 3x - 1 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

A. Nivel Básico:

1. $2x-34=-20$	Sol: $x=7$	2. $9x+8=7x+6$	Sol: $x=-1$
3. $4x+3=3x+5$	Sol: $x=2$	4. $7x+9=3+9x$	Sol: $x=3$
5. $x-8=2x-11$	Sol: $x=3$	6. $x+1=2x-7$	Sol: $x=8$
7. $6x+6=4+8x$	Sol: $x=1$	8. $9+9x=17+5x$	Sol: $x=2$
9. $2x+3=3x$	Sol: $x=3$	10. $25-2x=3x+20$	Sol: $x=1$
11. $4x+1=3x+3$	Sol: $x=2$	12. $5x-3=10x-6$	Sol: $x=3/5$
13. $1+8x=-16x+31$	Sol: $x=5/4$	14. $5x-11=15x-19$	Sol: $x=4/5$
15. $12x-48=-15x-30$	Sol: $x=2/3$	16. $2x+17=3x+7$	Sol: $x=10$
17. $10-5x=x-2$	Sol: $x=2$	18. $70-3x=4x$	Sol: $x=10$
19. $48-3x=5x$	Sol: $x=6$	20. $-4x+30=-3x-10$	Sol: $x=40$
21. $10x-15=4x+27$	Sol: $x=7$	22. $x-3(x-2)=6x-2$	Sol: $x=1$
23. $3x+1=6x-8$	Sol: $x=3$	24. $3x-7=2(x+1)$	Sol: $x=9$
25. $47-3x=5+11x$	Sol: $x=3$	26. $2(2+4x)=3+12x$	Sol: $x=1/4$
27. $30-9x=-7x+21$	Sol: $x=9/2$	28. $5x=7(5x-3)+3$	Sol: $x=3/5$
29. $3x-10=2x+1$	Sol: $x=11$	30. $2(x-5)=3x-17$	Sol: $x=7$
31. $25-2x=3x-35$	Sol: $x=12$	32. $2+5(x-13)=x-3$	Sol: $x=15$
33. $75-5x=3x+3$	Sol: $x=9$	34. $2x-1=3(2x-15)$	Sol: $x=11$
35. $5+8x=2x+20$	Sol: $x=5/2$	36. $2(x-2)=-(4-x)$	Sol: $x=0$
37. $2y-3=y+5$	Sol: $y=8$	38. $2(3x-49)=-x+14$	Sol: $x=16$
39. $2-6x=3x-1$	Sol: $x=1/3$	40. $20=2x-(10-4x)$	Sol: $x=5$
41. $60x-1=3(1+12x)$	Sol: $x=1/6$	42. $5(x-1)+10(x+2)=45$	Sol: $x=2$
43. $2x+3(2x-1)=x+67$	Sol: $x=10$	44. $12x+3(2x-4)=60$	Sol: $x=4$

B. Nivel Medio:

59. $\frac{3x}{2} + 2 = x + 4$

60. $x - 8 = \frac{x}{2} - \frac{x-6}{3}$

61. $x - \frac{3x}{4} = \frac{x}{7} + 3$

62. $2\left(\frac{x+5}{3}\right) = x + 3$

63. $\frac{9x}{4} - 6 = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$

64. $\frac{5x}{6} - \frac{3x}{4} = x - 11$

65. $\frac{3x}{5} - 7 = \frac{2x}{6} + 1$

66. $x - 10 = \frac{5}{9}(x - 6)$

67. $\frac{x}{3} + x = 10 + \frac{2x}{9}$

68. $\frac{3x}{2} + 1 = 12 - \frac{x}{3}$

69. $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = x - 3$

70. $4x - 7 = \frac{5x - 6}{4}$

71. $\frac{x+2}{3} = 5x - 4$

72. $\frac{2x-10}{3x-20} = \frac{7}{8}$

73. $\frac{x}{4} + \frac{3x}{6} + x = 21$

74. $\frac{x}{4} - \frac{13}{6} = \frac{5x}{2} - \frac{5}{6}$

75. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 94$

76. $\frac{x}{3} + 10 = \frac{x}{5} + 16$

77. $\frac{x-7}{x+3} = \frac{10}{x+3} - 3$

78. $3x - 9 + \frac{x}{5} = 2x - 3$

79. $\frac{\frac{3x}{5} - 12}{x+1} = 6$

80. $\frac{x}{4} + 5 = \frac{2x}{5} - 2 - \frac{x}{30}$

81. $\frac{3}{x+1} = \frac{x}{x-1} - 1$

82. $\frac{5x}{8} - 5(x-20) = \frac{-2x + 18}{6}$

83. $x + \frac{x+1}{5} = x + \frac{x}{2}$

84. $3x - \frac{7-x}{8} = -1 + \frac{x-3}{4} + 2x$

85. $8 - \frac{3x}{10} + \frac{2x}{4} - \frac{5x}{8} = -9$

86. $\frac{x+1}{2} + \frac{3+x}{6} = 1 + \frac{x}{3}$

87. $\frac{3x}{5} - 2 + \frac{3x}{2} - \frac{x}{10} = 0$

88. $\frac{10}{x+5} + \frac{3+4x}{x+5} = 3$

C. Nivel Avanzado:

89. $\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{2x+2}{x^2-1}$

90. $\frac{7x-3}{6} - \frac{3x-1}{4} = \frac{5x-1}{4}$

91. $\frac{4x - 3}{6} - \frac{3x-1}{4} = \frac{4x-2}{3} - 1$

92. $\frac{3\ (x+1)}{4} - \frac{x+3}{6} + x = 2x + \frac{3-7x}{12}$

93. $\frac{2x}{5} - 2 - \frac{x}{3} = \frac{x}{10} - 3$

94. $\frac{15}{x+10} - \frac{5}{x+2} = 0$

95. $\frac{2}{x+1} + \frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{7}{x+1}$

96. $\frac{2x+1}{4} - \frac{3x}{9} - 2 = \frac{3x-2}{4}$

97. $\frac{5}{x-1} - \frac{3}{x+4} - \frac{3}{x^2+3x-4} = \frac{5}{x-1}$

98. $\frac{15}{x-2} - \frac{12x+6}{x^2-4} = \frac{18}{x+2}$

99. $(a+x)\ (b-x) - a\ (b+a) + x^2 + a^2 = \frac{b^2-ab}{a}$

100. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}$

101. $\frac{x}{2a} - 2 = \frac{1 + x}{2}$

102. $\dfrac{1 + \frac{x+1}{x-1}}{2 - \frac{x-1}{x+1}} = 2$

103. $\frac{x}{3} + \frac{x-5}{2} - \frac{1}{4}x = \frac{5x-2}{2}$

104. $\frac{x-3}{3} - \frac{3\ (x-2)}{2} = \frac{x-3-(x+2)}{2}$

105. $\frac{x-3}{5} - \frac{x-3}{2} = \frac{x-3}{3} - \frac{x+3}{2}$

106. $\frac{x+1}{2} + \frac{5+x}{6} = 1 + \frac{9-2x}{3}$

107. $x\ (x-2) - \frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{2} = (x-2)^2 - 4$

108. $x\ (x-2) - \frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{2} = (x-2)^2 - 4x$

109. $\frac{x^2-2x+1}{x\ (x+1)\ (x-1)} = \frac{3}{2x}$

ECUACIONES DE 2º GRADO

110. $x^2-7x+12=0$ Sol: x=3; x=4
111. $x^2-9x+18=0$ Sol: x=3; x=6
112. $x^2-5x+6=0$ Sol: x=2; x=3
113. $x^2+8x+15=0$ Sol: x=-5; x=-3
114. $x^2-6x-27=0$ Sol: x=-3; x=9
115. $x^2-6x+9=0$ Sol: x=3
116. $x^2+6x=-9$ Sol: x=-3
117. $4x^2+4x=3$ Sol:x=1/2;x=-3/2
118. $x^2-9x+14=0$ Sol: x=2; x=7
119. $x^2-6x+8=0$ Sol: x=4; x=2
120. $2x^2+10x-48=0$ Sol: x=3; x=-8
121. $x^2-x=20$ Sol: x=-4; x=5
122. $x^2=5x+6$ Sol: x=6; x=-1
123. $2x^2-5x+3=0$ Sol: x=1; x=3/2
124. $x^2+10x+25=0$ Sol: x=-5
125. $x^2+9=10x$ Sol: x=1; x=9
126. $3x^2-39x+108=0$ Sol: x=4; x=9
127. $2x^2-9x+9=0$ Sol: x=3; x=3/2
128. $3x^2+2x=8$ Sol: x=-2; x=4/3
129. $4x^2+12x+9=0$ Sol: x=-3/2
130. $5x^2+1=6x$ Sol: x=1; x=1/5
131. $6x^2+1=5x$ Sol:x=1/2; x=1/3
132. $6x^2-6=5x$ Sol: x=-2/3; x=3/2
133. $2x^2+7x+6=0$ Sol: x=-2; x=-3/2
134. $x^2=2x+3$ Sol: x=-1; x=3
135. $4x^2+3=8x$ Sol:x=1/2; x=3/2
136. $x^2-x+1/4=0$ Sol: x=1/2
137. $3x^2-16x+5=0$ Sol: x=5; x=1/3
138. $1-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{3x+2}{3}=1$
139. $\dfrac{(x-3)^2}{2}-x+x^2=x-(x-2)$
140. $\dfrac{1}{x-1}+3x+3x^2-2=\dfrac{3}{x-1}+3x^2$
141. $(x-3)^2-\dfrac{x-1}{3}=2x$
142. $\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{1}{x-1}=3x$
143. $x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x}=5x+5$
144. $\dfrac{x-3}{x}+3x-\dfrac{5}{x}=2x-\dfrac{3}{x}-3$
145. $3x-\dfrac{8}{x}+(x-1)^2=3(x-2)-(x-5)$
146. $(x-3)(x-2)+\dfrac{x(x-3)}{2}=(x-2)^2$
147. $(x-2)x-\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{(x-2)(x+2)}{2}=(x-2)^2-4$
148. $(x-3)^2-\dfrac{x-2}{3}+(3-x)(x-1)=(x-2)^2$

149. $\frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x} = 2$

150. $\frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x-1} = 2$

151. $x + \frac{1}{x-2} = 4$

152. $x^2 - x = \frac{2}{9} - \frac{2x}{3}$

153. $\frac{x^2}{3} + 2 = \frac{5x}{3}$

154. $x + \frac{2}{x} = 3$

155. $x - 2 = \frac{4x-8}{x}$

156. $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} = \frac{2x+9}{x}$

157. $2x - 2 = \frac{6x}{x-1} - 5$

158. $x\ (x+1) - \left(x + \frac{x}{2}\right) = 0$

159. $3x + 1 - \frac{3}{x} = \frac{1+3x}{4}$

160. $2 + \frac{x+4}{3} = \frac{4x+4}{3} + \frac{2-x}{x-3}$

161. $x + \frac{1}{x} = \frac{6}{3x}$

162. $x - 2 = \frac{2x-3}{x}$

163. $\frac{x}{3} + \frac{2}{x} = \frac{3x+10}{3x}$

164. $x + 3 = \frac{2x+1}{x-1}$

165. $\dfrac{3}{x + \dfrac{1}{2 + \dfrac{x+1}{x-2}}} = \frac{1}{x}$

166. $\dfrac{\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-3}{4}}{x - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x-1}{x+1}}} = -\frac{1}{x}$

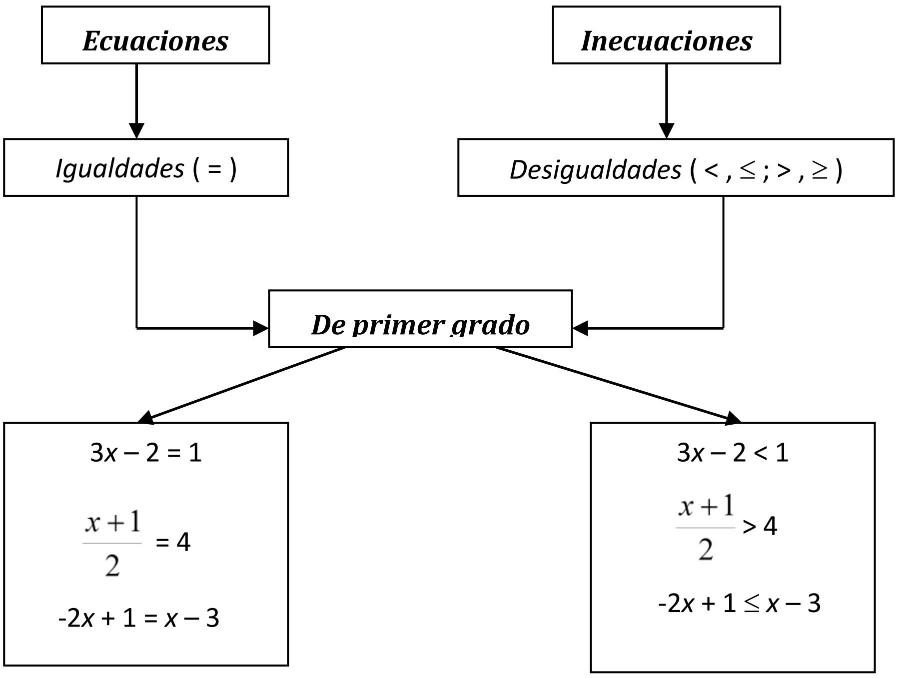
ECUACIONES IRRACIONALES

1. $x + \sqrt{x} = 30$
2. $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x+9}$
3. $\sqrt{7-3x} - x = 7$
4. $\sqrt{x+4} = 3 - \sqrt{x-1}$
5. $5\sqrt{x} + 3 = 2x$
6. $3\sqrt{6x+1} - 5 = 2x$
7. $\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+1} = 1$
8. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$
9. $1 + \sqrt{x+1} = \frac{x}{3}$
10. $\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}$
11. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+4} = \sqrt{4x+1}$
12. $2\sqrt{x+4} = \sqrt{5x+4}$
13. $\sqrt{x^2+3x+7} = 5$
14. $3 - \sqrt{x} = x + 1$
15. $2\sqrt{2x-1} = \sqrt{6x-5} + \sqrt{2x-9}$
16. $\sqrt{2x+5} + 6 = 3x + 3$

PORTAFOLIO N° 05 INECUACIONES	HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender los números reales

PRÁCTICA N° 5
Tema: INECUACIONES

INECUACIONES LINEALES



Resolver una inecuación significa hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que se cumpla la desigualdad.

Ejemplos: Resolver

a) $3x - 2 < 1$

Despejando

$$3x - 2 < 1$$
$$3x < 1 + 2$$
$$3x < 3$$
$$x < 3 : 3$$
$$x < 1$$

Aplicando propiedades

$$3x - 2 < 1$$
$$3x - 2 + 2 < 1 + 2$$
$$\frac{1}{3}\,3x < \frac{1}{3}3$$
$$x < 1$$

Solución: S = (- ∞ , 1)

Representación gráfica:

b) $\frac{x+1}{2} > 4$

Despejando

$$\frac{x+1}{2} > 4$$

$x + 1 > 4 . 2$

$x + 1 > 8$

$x > 8 - 1$

$x > 7$

Aplicando propiedades

$$\frac{x+1}{2} > 4$$

$$\frac{x+1}{2} . 2 > 4 . 2$$

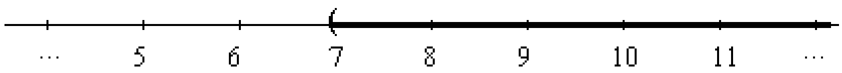
$x + 1 > 8$

$x + 1 + (- 1) > 8 + (- 1)$

$x > 7$

Solución: S = (7 , + ∞)

Representación gráfica:



A. Nivel Básico:

a) $3 - x < 2 + 5x$

b) $1 + x > 2 - 3x$

c) $2 \cdot (3x - 3) > 6$

d) $3 \cdot (3 - 2x) < 2 \cdot (3 + x)$

e) $2 \cdot (x + 3) + 3 \cdot (x - 1) > 2 \cdot (x + 2)$

f) $\frac{3x-3}{5} - \frac{4x+8}{2} \leq \frac{x}{4} - 3x$

INECUACIONES CUADRÁTICAS

B. Nivel Medio:

a) $-5x^2+3x+8<0$

b) $25x^2-101x+102<0$

c) $x\cdot(x+5)>2x^2$

d) $\dfrac{2x+5}{x-4}\geq 0$

e) $(81-x)\cdot(4-x)>x+11$

f) $(x-1)^2>9$

g) $2\cdot(-x+1)^2\geq -2x^2+3$

h) $(x^2-9)\cdot(x+1)\geq 0$

i) $(1-x^2)\cdot(x^2-9)\leq 0$

j) $\dfrac{(x-4)\cdot(x-2)\cdot(1-x)}{(x+3)\cdot(x+1)}\geq 0$

k) $\left|\dfrac{2x-4}{x+3}\right|\leq 4$

l) $\left(\dfrac{3x+2}{2}+2\right)^2+\left(\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x}{2}\right)\geq 0$

m) $x^3-5x^2+6x\leq 0$

n) $(x-1)\cdot(x^2-4x+3)>0$

p) $(x^2-1)\cdot(x^2+1)\leq 0$

o) $x^3-x^2-4x+4<0$

p) $\dfrac{x^2-1}{x+3}\geq 0$

q) $(x-1)^3\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)>0$

r) $\dfrac{x^2-9}{x-1}\geq 0$

s) $\dfrac{(3x-1)\cdot(x^2-2x-8)}{(x^2+9)\cdot(2-5x)\cdot(x+1)}\leq 0$

t) $\dfrac{(x+3)\cdot\left(x-\dfrac{2}{5}\right)}{4-x}\leq 0$

u) $\dfrac{(x-4)\cdot(x-2)\cdot(1-x)}{(x+3)\cdot(x+1)}\geq 0$

v) $\dfrac{x^2-3x+2}{6-x^2+x}\leq 0$

w) $\dfrac{x\cdot(x-1)\cdot(x+3)}{(x^2-4)\cdot(x+5)}\geq 0$

x) $\dfrac{(x-3)\cdot(x+3)\cdot x}{(2-x)\cdot(x+1)}\leq 0$

C. Nivel Avanzado:

Efectúa cada uno de las siguientes expresiones:

1) $|x-5|<3$

2) $|2x+3|>1$

3) $|3x-7|\leq 7$

4) $\left|3x-2-\dfrac{1-x}{3}\right|\geq 1$

5) $\left|\dfrac{4x}{5}-2\right|\leq 1$

6) $\left|3x+\dfrac{15}{2}\right|\geq 7$

7) $\left|2x-\dfrac{3x-5}{4}\right|\leq 3$

8) $\left|3x+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5x}{2}\right|<6$

9) $\left|\dfrac{5x}{3}+\dfrac{x}{2}\right|<13$

10) $\left|\dfrac{4}{3}x+3\right|\geq -\dfrac{5}{6}$

Unidad II

FUNCIONES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas de aplicación de funciones, transformaciones y algebra de funciones, utilizando el lenguaje algebraico para expresar situaciones problemáticas cotidianas.

PORTAFOLIO Nº 06 FUNCIONES	HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO
	• Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender las funciones.

PRÁCTICA N° 6

Tema: FUNCIONES

A. Nivel Básico:

Dadas las funciones, determinar su dominio y rango.

a) $y = \dfrac{2}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$

c) $p(x) = \sqrt{x+3}$

d) $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{x+1}}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

f) $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

g) $q(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$

B. Nivel Medio:

Exprese la regla en su notación de función. (Por ejemplo, la regla "eleve al cuadrado, luego reste 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$:

1.-Sume 5, luego multiplique por 2

2.- Reste 5, luego eleve al cuadrado

Exprese la función (o regla) en palabras:

3.- $f(x) = \frac{x-4}{3}$

4.- $h(x) = x^2 + 2$

Trace un diagrama de máquina para la función:

5. $f(x) = \sqrt{x-1}$

Complete la tabla

6.- $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

Evalúe la función en los valores indicados

7.- $f(x) = 2(x+1)$

$f(1);\ f(-2); f\left(\frac{1}{2}\right); f(a), f(-a), f(a+b)$

8.- $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$

$g(2);\ g(-2); g\left(\frac{1}{2}\right); g(a), g(a-1), g(-1)$

9.- $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

$f(0);\ f(2); f(-2); f(\sqrt{2}), f(x+1), f(-x)$

10.- $f(x) = 2|x-1|$

$f(-2);\ f(0); f\left(\frac{1}{2}\right); f(2), f(x+1), f(x^2+2)$

Evalúe la función definida por partes en los valores indicados.

11.- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2);\ f(-1); f(0); f(1), f(2)$

12.- $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{Si } x \leq 1 \\ x & \text{Si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4);\ f\left(-\frac{3}{2}\right); f(-1); f(0), f(25)$

Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique

13.- $f(x) = x^2 + 1;\ f(x+2), f(x) + f\,(2)$

14.-$f(x) = x + 4; f\,(x^2), (f(x))^2$

Halle $f\,(a),\ f(\,a + h), y\ $ el cociente de diferencia $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

15.- $f(x) = 3x + 2$

16.- $f(x) = 5$

17.- $f(x) = \frac{x}{x+1}$

18.- $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

Encuentre el dominio de la función

19.- $f(x) = 2x$

20.- $f(x) = 2x, \qquad -1 \leq x \leq 5$

21.- $f(x) = \frac{1}{x-3}$

22.- $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

23.- $f(x) = \sqrt{x-5}$

24.- $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

25.- $h(x) = \sqrt{2x-5}$

26.- $g(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

27.- $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$

28.- $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$

29.- $f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

C. Nivel Avanzado:

30.- Costo de producción. El costo C en dólares de producir x yardas de cierta tela se expresa mediante la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02\,x^2 + 0.0001\,x^3$$

a) Halle C (10) y C (100)
b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?
c) Encuentre C (0). (Este número representa los costos fijos)

31.- ¿Qué tan lejos puede ver? Debido a la curvatura de la tierra, la distancia máxima D que una persona puede ver, desde la parte alta de un edificio alto o desde un avión a la altura h está dada por la función.

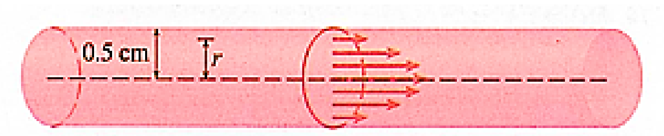
$$D\,(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

Donde r=3960 millas es el radio de la tierra y D y h se miden en millas.
a) Determine d (0.1) y d (0.2)
b) ¿Qué tan lejos puede ver desde la terraza de la torre CN de Toronto, situada a 1135 pies desde el nivel del suelo?
c) la aviación comercial vuela a una altitud de cerca de 7 millas. ¿Qué tan lejos puede ver el piloto?

32.- Flujo de sangre. Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). La fórmula que da v como una función de r se llama **ley del flujo laminar.** Para una arteria con radio 0.5 cm, se tiene.

$$v(r) = 18500(0.25 - r^2) \qquad\qquad 0 \leq r \leq 0.5$$

a) Determine $v\,(0.1)$ y $v\,(0.4)$
b) ¿Qué indican las respuestas del inciso a) acerca del flujo de sangre en esta arteria?
c) Construya una tabla de valores de $v(r)$ para r = 0; 0.1; 0.2; 0.3 ; 0.4; 0.5.



33.- Relatividad. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la longitud L de un objeto es una función de su velocidad v con respecto a un observador, Para un Objeto cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L\,(v)\;10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Donde c es la velocidad de la luz.

a) Determine L(0.5 c), L (0.75c) y L (0.9c)
b) ¿Cómo cambia la longitud de un objeto cuando se incrementa su velocidad?

34.- Compras por Internet Una librería por internet cobra $15 por envío para pedidos menores a $100 o más, pero el envío es gratis para pedidos de $ 100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x de los libros comprados dada por:

$$c(x) = \begin{cases} x + 15 & Si\ x < 100 \\ x & Si\ \geq 100 \end{cases}$$

a) Encuentre C (75), C(90), C(100) Y C(105)
b) ¿Qué representan las respuestas al inciso a)?

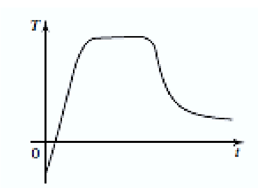
35.- Multas por exceso de velocidad. En cierto estado la velocidad máxima permitida en las autopistas es 65 millas/h y la mínima es 40. La multa F por violar estos límites es $15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

a) Complete las expresiones en la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la que conduce una persona.

$$c(x) = \begin{cases} \boxed{} & Si\ \ 0 < x < 40 \\ \boxed{} & Si\ \ 40 \leq x \leq 65 \\ \boxed{} & Si\ \ x > 65 \end{cases}$$

b) Determine F(30), F(50) y F(75)
c) ¿Qué representan las respuestas del inciso b)?

36.- Cambio de temperatura. Se coloca un pastel congelado en un horno y se calienta durante una hora. Luego se saca y se deja enfriar antes de comerlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como una función del tiempo.



Costo de producción El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos*.)

TRAYECTORIA DE UNA PELOTA La altura y (en pies) de una pelota de béisbol lanzada por un niño es

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + 3x + 6$$

donde x es la distancia horizontal (en pies) desde donde la pelota es lanzada. ¿La pelota volará sobre la cabeza de otro niño que está a 30 pies de distancia y que trata de atraparla? (Suponga que el niño que está tratando de atrapar la pelota tiene su guante a una altura de 5 pies.)

PORTAFOLIO N° 06 GRÁFICA DE FUNCIONES	HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender las funciones.

PRÁCTICA N° 7

Tema: GRÁFICA DE FUNCIONES

Historia:

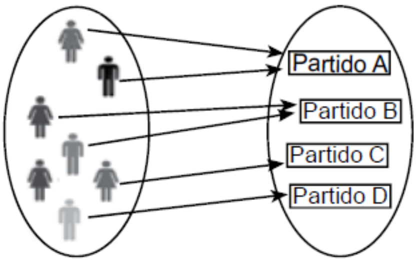
Gottfried Wilhelm Leibniz
(1946-1716)

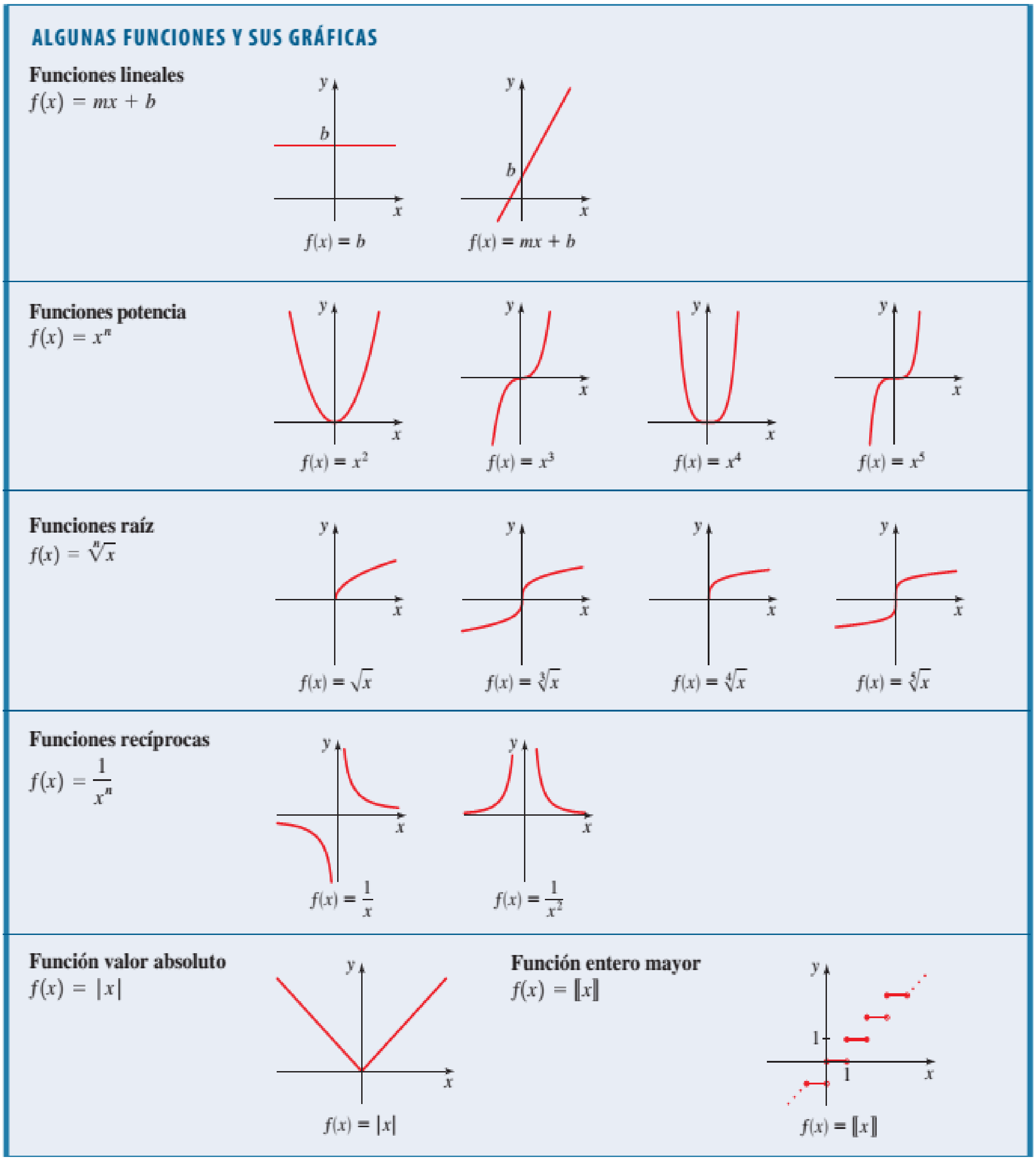
Uno de los modelos matemáticos de mayor utilidad son las funciones matemáticas. Aunque desde la época de la formación de los primeros conceptos matemáticos hay antecedentes de la idea de función el mismo se desarrolla completamente en el periodo histórico de las matemáticas de las magnitudes variables. En este periodo alrededor del siglo XVI cuando comienzan a modelarse matemáticamente el movimiento y los fenómenos de variación y cambio por ejemplo el movimiento de un cuerpo o el llenado de un tanque pues hasta entonces los que se estudiaban eran estáticos o sea sin movimiento. Para este tipo de fenómenos de variación y cambio es que hace falta las funciones o sea el modelo funcional.

No es hasta el siglo XVII que se culmina el proceso de formación del concepto de función. En ese proceso jugó un papel muy importante Leibniz matemático alemán que introdujo dicho concepto para designar a ciertas magnitudes geométricas asociadas a las curvas que eran el principal objeto de estudio de la matemática en esa época. Sin embargo en el siglo XVIII que Euler matemático suizo muy destacado perfecciona el concepto de función pero sin llegar a expresarlo como se hace en la actualidad.

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una correspondencia que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B.

Como se observa en el diagrama de la derecha este concepto corresponde a un modelo matemático muy general que permite modelar situaciones de naturaleza muy diferentes.





Ejercicios Propuestos

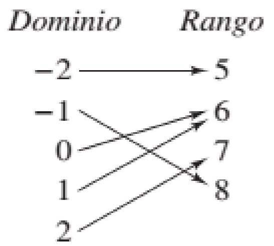
A. Nivel Básico

Características de una función del conjunto A al conjunto B

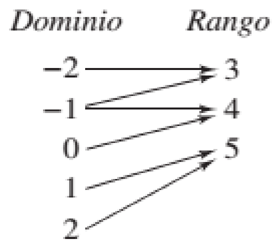
1. Cada elemento de A debe relacionarse con un elemento de B.
2. Algunos elementos de B pueden no relacionarse con algún elemento de A.
3. Dos o más elementos de A pueden relacionarse con el mismo elemento de B.
4. Un elemento de A (el dominio) no puede relacionarse con dos elementos diferentes de B.

1. **En los Ejercicios 7-10, ¿la relación es una función?**

7.

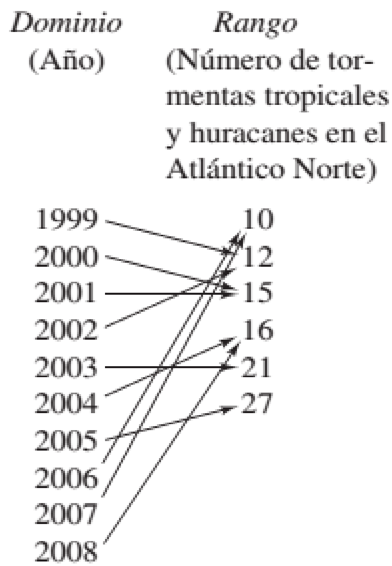


8.



9.

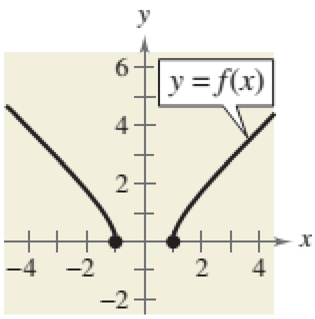
10.



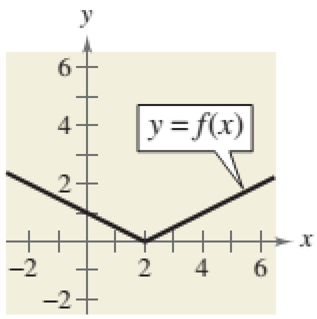
B. Nivel Medio

1. **En los Ejercicios 9-12, use la gráfica de la función para hallar el dominio y el rango de f.**

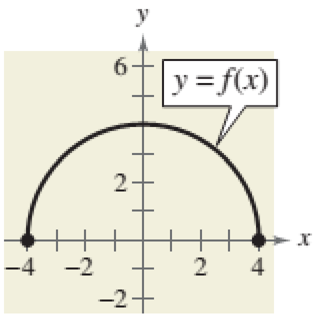
9.



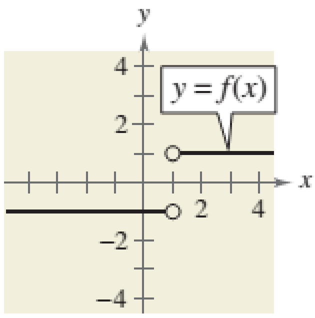
10.



11.

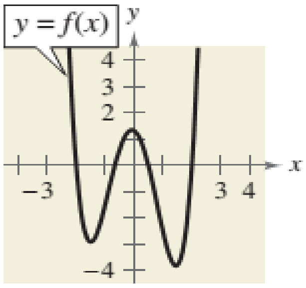


12.

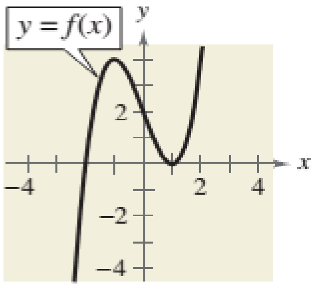


2. **En los Ejercicios 13-16, use la gráfica de la función para hallar el dominio y el rango de f y los valores de función indicados.**

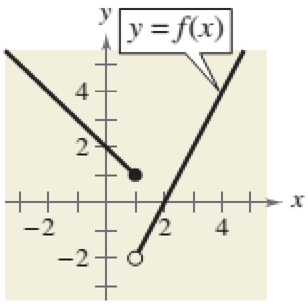
13. (a) $f(-2)$ (b) $f(-1)$
(c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (d) $f(1)$



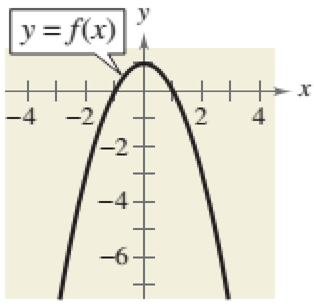
14. (a) $f(-1)$ (b) $f(2)$
(c) $f(0)$ (d) $f(1)$



15. (a) $f(2)$ (b) $f(1)$
(c) $f(3)$ (d) $f(-1)$



16. (a) $f(-2)$ (b) $f(1)$
(c) $f(0)$ (d) $f(2)$



3. **En los Ejercicios, (a) escriba la función lineal f tal que tenga los valores de la función indicada y (b) trace la gráfica de la función.**

$f(1) = 4, f(0) = 6$

$f(5) = -4, f(-2) = 17$

$f(-5) = -1, f(5) = -1$

$f(-10) = 12, f(16) = -1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -6, f(4) = -3$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{2}, f(-4) = -11$

4. **En los Ejercicios 19-42, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Asegúrese de escoger una pantalla apropiada.**

19. $f(x) = 0.8 - x$
20. $f(x) = 2.5x - 4.25$
21. $f(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{2}$
22. $f(x) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}x$
23. $g(x) = -2x^2$
24. $h(x) = 1.5 - x^2$
25. $f(x) = 3x^2 - 1.75$
26. $f(x) = 0.5x^2 + 2$
27. $f(x) = x^3 - 1$
28. $f(x) = 8 - x^3$
29. $f(x) = (x - 1)^3 + 2$
30. $g(x) = 2(x + 3)^3 + 1$
31. $f(x) = 4\sqrt{x}$
32. $f(x) = 4 - 2\sqrt{x}$
33. $g(x) = 2 - \sqrt{x + 4}$
34. $h(x) = \sqrt{x + 2} + 3$
35. $f(x) = -1/x$
36. $f(x) = 4 + (1/x)$
37. $h(x) = 1/(x + 2)$
38. $k(x) = 1/(x - 3)$
39. $g(x) = |x| - 5$
40. $h(x) = 3 - |x|$
41. $f(x) = |x + 4|$
42. $f(x) = |x - 1|$

5. **En los Ejercicios grafique la función.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 0 \\ 3 - x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 6, & x \leq -4 \\ \frac{1}{2}x - 4, & x > -4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 + x}, & x < 0 \\ \sqrt{4 - x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x - 1)^2, & x \leq 2 \\ \sqrt{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

C. Nivel Avanzado

SALARIOS A un mecánico se le pagan \$14.00 por hora por tiempo normal y tiempo y medio por hora extra. La función de salario semanal está dada por

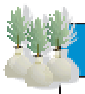
$$W(h) = \begin{cases} 14h, & 0 < h \leq 40 \\ 21(h - 40) + 560, & h > 40 \end{cases}$$

donde h es el número de horas trabajadas en una semana.

(a) Evalúe $W(30)$, $W(40)$, $W(45)$ y $W(50)$.

(b) La compañía aumentó la semana regular de trabajo a 45 horas. ¿Cuál es la nueva función de salario semanal?

INGRESOS La tabla siguiente muestra el ingreso mensual y (en miles de dólares) de una empresa de jardinería, por cada mes del año 2008, con $x = 1$ representando enero.



Mes, x	Ingresos, y
1	5.2
2	5.6
3	6.6
4	8.3
5	11.5
6	15.8
7	12.8
8	10.1
9	8.6
10	6.9
11	4.5
12	2.7

Un modelo matemático que representa estos datos es

$$f(x) = \begin{cases} -1.97x + 26.3 \\ 0.505x^2 - 1.47x + 6.3 \end{cases}$$

(a) Use una calculadora para graficar el modelo. ¿Cuál es el dominio de cada parte de la función definida por tramos? ¿Cómo puede usted indicarlo? Explique su razonamiento.

(b) Encuentre $f(5)$ y $f(11)$ e interprete sus resultados en el contexto del problema.

(c) ¿Cómo se comparan los valores obtenidos del modelo del inciso (a) con los valores de datos reales?

Ejercicios Propuestos

1. **Trace la gráfica de la función definida por partes.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

PORTAFOLIO N° 07 TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender las funciones.

PRÁCTICA N° 7

Tema: TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

Ejercicios Propuestos

A. Nivel Básico

Desplazamientos vertical y horizontal

Sea c un número real positivo. Los **desplazamientos vertical y horizontal** en la gráfica de $y = f(x)$ están representados como sigue.

1. Desplazamiento vertical c unidades *hacia arriba:* $h(x) = f(x) + c$

2. Desplazamiento vertical c unidades *hacia abajo:* $h(x) = f(x) - c$

3. Desplazamiento horizontal c unidades *a la derecha:* $h(x) = f(x - c)$

4. Desplazamiento horizontal c unidades *a la izquierda:* $h(x) = f(x + c)$

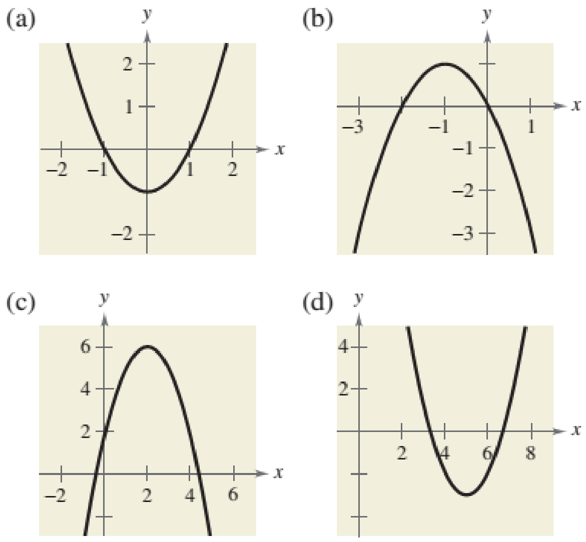
Reflexiones en los ejes de coordenadas

Las **reflexiones** en los ejes de coordenadas de la gráfica de $y = f(x)$ están representadas como sigue.

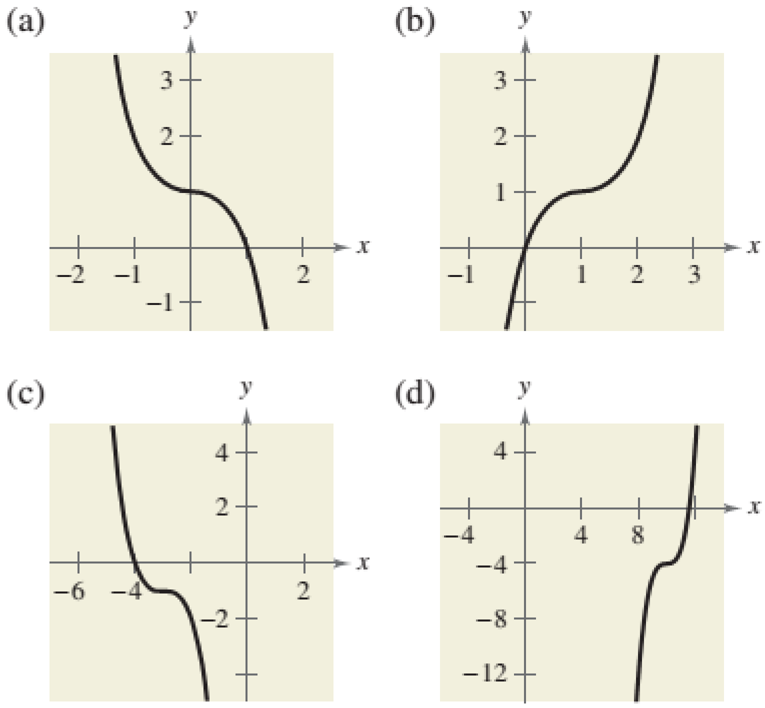
1. La reflexión en el eje x: $h(x) = -f(x)$

2. La reflexión en el eje y: $h(x) = f(-x)$

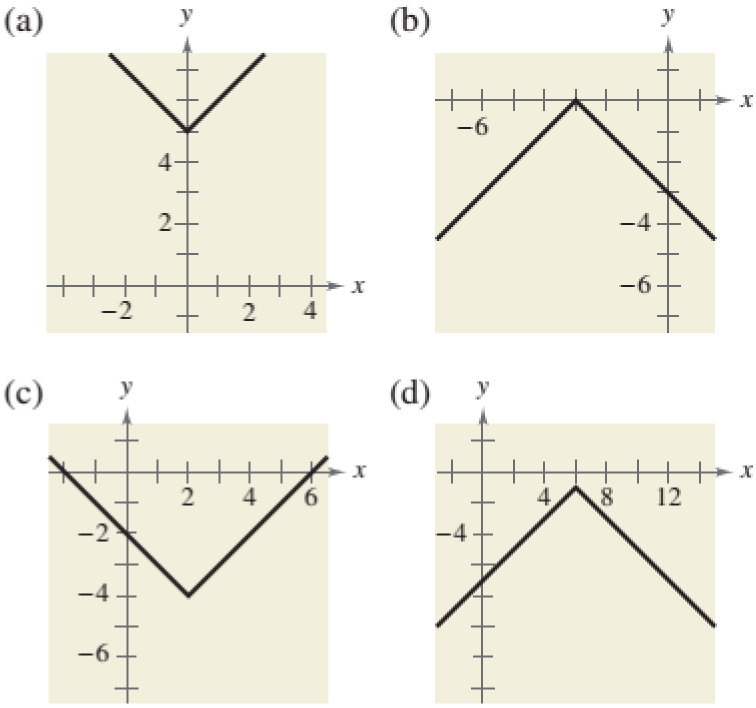
1. **Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.**



2. **Use la gráfica de $f(x) = x^3$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.**



3. **Use la gráfica de $f(x) = |x|$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.**



B. Nivel Medio

1. **Trace la gráfica de g.**

25. $g(x) = 12 - x^2$	**26.** $g(x) = (x - 8)^2$
27. $g(x) = x^3 + 7$	**28.** $g(x) = -x^3 - 1$
29. $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4$	**30.** $g(x) = 2(x - 7)^2$
31. $g(x) = 2 - (x + 5)^2$	**32.** $g(x) = -(x + 10)^2 + 5$
33. $g(x) = 3 + 2(x - 4)^2$	**34.** $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 - 2$
35. $g(x) = \sqrt{3x}$	**36.** $g(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x}$
37. $g(x) = (x - 1)^3 + 2$	**38.** $g(x) = (x + 3)^3 - 10$
39. $g(x) = 3(x - 2)^3$	**40.** $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^3$
41. $g(x) = -\lvert x\rvert - 2$	**42.** $g(x) = 6 - \lvert x + 5\rvert$
43. $g(x) = -\lvert x + 4\rvert + 8$	**44.** $g(x) = \lvert -x + 3\rvert + 9$
45. $g(x) = -2\lvert x - 1\rvert - 4$	**46.** $g(x) = \frac{1}{2}\lvert x - 2\rvert - 3$
47. $g(x) = 3 - [\![x]\!]$	**48.** $g(x) = 2[\![x + 5]\!]$
49. $g(x) = \sqrt{x - 9}$	**50.** $g(x) = \sqrt{x + 4} + 8$
51. $g(x) = \sqrt{7 - x} - 2$	**52.** $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x + 3} - 1$
53. $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x} - 4$	**54.** $g(x) = \sqrt{3x} + 1$

2. **Escriba una ecuación para la función descrita por las características dadas.**

55. La forma de $f(x) = x^2$, pero desplazada tres unidades a la derecha y siete unidades hacia abajo.

56. La forma de $f(x) = x^2$, pero desplazada dos unidades a la izquierda, nueve unidades hacia arriba y reflejada en el eje x.

57. La forma de $f(x) = x^3$, pero desplazada 13 unidades a la derecha.

58. La forma de $f(x) = x^3$, pero desplazada seis unidades a la izquierda, seis unidades hacia abajo y reflejada en el eje y.

59. La forma de $f(x) = |x|$, pero desplazada 12 unidades hacia arriba y reflejada en el eje x.

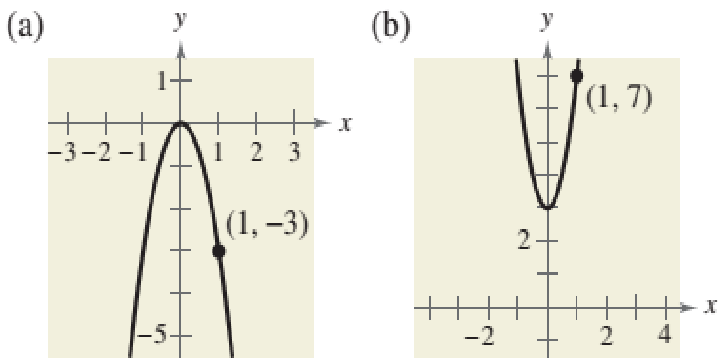
60. La forma de $f(x) = |x|$, pero desplazada cuatro unidades a la izquierda y ocho unidades hacia abajo.

61. La forma de $f(x) = \sqrt{x}$, pero desplazada seis unidades a la izquierda y reflejada en los ejes x y y.

62. La forma de $f(x) = \sqrt{x}$, pero desplazada nueve unidades hacia abajo y reflejada en los ejes x y y.

3. **Nivel Avanzado**

63. Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para escribir una ecuación para cada función cuya gráfica se muestra.



Ejercicios Propuestos

1. Trace la gráfica de la función.

21. $f(x) = x^2 - 1$

22. $f(x) = x^2 + 5$

23. $f(x) = \sqrt{x} + 1$

24. $f(x) = |x| - 1$

25. $f(x) = (x - 5)^2$

26. $f(x) = (x + 1)^2$

27. $f(x) = \sqrt{x + 4}$

28. $f(x) = |x - 3|$

29. $f(x) = -x^3$

30. $f(x) = -|x|$

31. $y = \sqrt[4]{-x}$

32. $y = \sqrt[3]{-x}$

33. $y = \frac{1}{4}x^2$

34. $y = -5\sqrt{x}$

35. $y = 3|x|$

36. $y = \frac{1}{2}|x|$

37. $y = (x - 3)^2 + 5$

38. $y = \sqrt{x + 4} - 3$

39. $y = 3 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

40. $y = 2 - \sqrt{x + 1}$

41. $y = |x + 2| + 2$

42. $y = 2 - |x|$

43. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$

44. $y = 3 - 2(x - 1)^2$

2. Escriba la ecuación.

$f(x) = x^2$; desplazar hacia arriba 3 unidades

$f(x) = x^3$; desplazar hacia abajo 1 unidad

$f(x) = \sqrt{x}$; desplazar 2 unidades a la izquierda

$f(x) = \sqrt[3]{x}$; desplazar 1 unidad a la derecha

$f(x) = |x|$; desplazar 3 unidades a la derecha y desplazar 1 unidad hacia arriba

$f(x) = |x|$; desplazar 4 unidades a la izquierda y desplazar 1 unidad hacia abajo

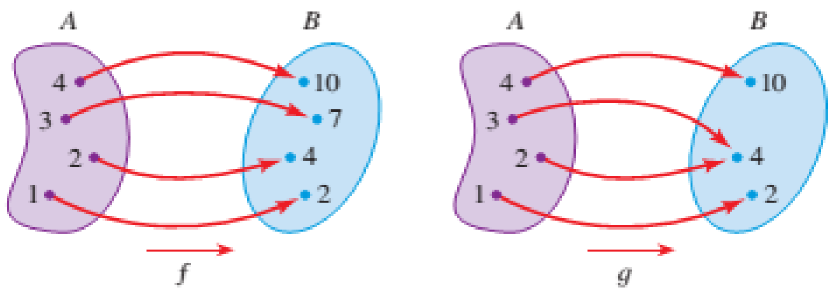
PORTAFOLIO N° 08 FUNCIONES INVERSAS	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender las funciones.

PRÁCTICA N° 7

Tema: FUNCIONES INVERSAS

Funciones uno a uno

Comparemos las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la Figura 1. Observe que f nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquier dos números en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se denominan *uno a uno*.



f es uno a uno g no es uno a uno

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

Una función con dominio A se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

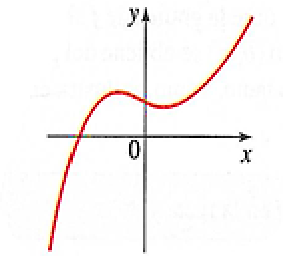
$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B.

A. Nivel Básico

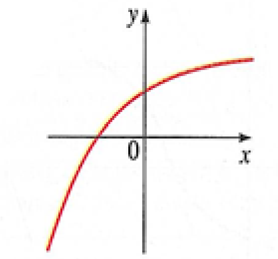
Se da la gráfica de una función f. Determine si f es uno a uno

1. –



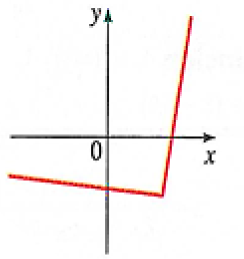
Respuesta: No

2.-



Respuesta: Si

3.-



Respuesta: No

Determine si la función es uno a uno.

4. $f\ (x) = -2x + 4$ *Respuesta: Si*

5. $g\ (x) = \sqrt{x}$ *Respuesta: Si*

6. $h\ (x) = x^2 - 2x$

7. $f\ (x) = x^4 + 5$

8. $f\ (x) = \frac{1}{x^2}$

9. Suponga que f es una función uno a uno

a) Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$

b) Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$

10.- Si $f(x) = 5 - 2x$, encuentre $f^{-1}(3)$

Use la propiedad de la función inversa para mostrar que f y g son inversas entre sí

11.- $f(x) = x - 6, \quad g(x) = x + 6$

12.- $f(x) = 2x - 5, \quad g(x) = \frac{x+5}{2}$

13.- $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$

14.- $f(x) = x^2 - 4, \; x \geq 0$

$g(x) = \sqrt{x+4}, x \geq -4$

15.- $f(x) = \frac{1}{x-1}, \; x \neq 1$

$g(x) = \frac{1}{x} + 1, x \neq 0$

A. Nivel Medio

Encuentre la función inversa de f

16.- $f(x) = 2x + 1$

Respuesta: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$

17.- $f(x) = 4x + 7$

18.- $f(x) = \frac{x}{2}$

19.- $f(x) = \frac{1}{x+2}$

20.- $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$

21.- $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$

22.- $f(x) = 4 - x^2, \quad x \geq 0$

23.- $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$

24.- $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$

25.- $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

26 Se da una función f

a) Bosqueje la gráfica de f.
b) Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1}.
c) Encuentre f^{-1}
   1.- $f(x) = 3x - 6$
   2.- $f(x) = \sqrt{x+1}$

Trace una gráfica de f y empléela para determinar si la función es uno a uno

27.- $f(x) = x^3 - x$

28.- $f(x) = \frac{x+12}{x-6}$

29.- $f(x) = |x| - |x-6|$

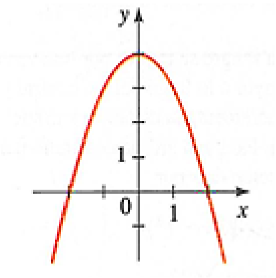
Se da una función uno a uno

a) Encuentre la inversa de la función

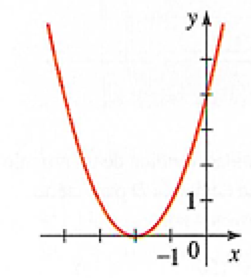
b) Grafique tanto la función como su inversa en la misma pantalla para comprobar que las gráficas son reflexiones entre sí en la recta $y = x$

30.- $f(x) = 2 + x$
31.- $g(x) = \sqrt{x+3}$

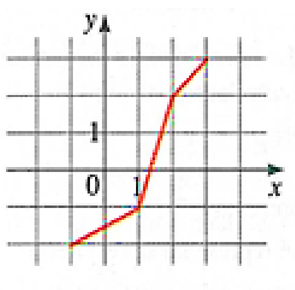
32.- La función dad no es uno a uno. Restrinja su dominio de modo que la función resultante sea uno a uno. Encuentre la inversa de la función con el dominio restringido. (Hay más de una respuesta correcta).



67



33.- Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1}



B. Nivel Avanzado

34.- Cuota por servicio. Por sus servicios, un investigador privado requiere una cuota de retención de $ 500 más $80 por hora. Sea x el número de horas que el investigador pasa trabajando en un caso.

a) Halle la función f que modela la cuota del investigador como una función de x

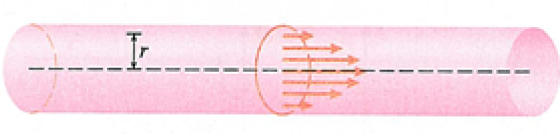
b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

c) Encuentre $f^{-1}(1220)$. ¿Qué representa su respuesta?

35.- Flujo de sangre. Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). Para una arteria con radio $0.5\ \mathrm{cm}$, v está dada como una función de r por.

$$v(r) = 18500(0.25 - r^2)$$

a) Encuentre $v - 1$. ¿Qué representa v^{-1} ?
b) Determine $v^{-1}(30)$. ¿qué representa su respuesta?



36.- Escalas de temperatura.- La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por:

$$F(C) = \frac{9}{5}C+32$$

a) Encuentre F^{-1}. ¿Qué representa F^{-1}?

b) Determine $F^{-1}(86)$. ¿Qué representa su respuesta ?

37.- Impuesto sobre la renta. En cierto país, el impuesto por ingresos o iguales que 20000 euros es 10%.

Para ingresos de más de 20000 euros, el impuesto es de 2000 euros más 20% de la cantidad sobre 20000 euros.

a) Encuentre una función f que proporciona el Impuesto sobre la renta por un ingreso x. Exprese f como una función definida por partes
b) Encuentre f^{-1} . ¿Qué representa f^{-1} ?
c) ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de 10000 euros?

38.- Costo de una pizza. Marcello's Pizza fijó como precio base de la pizza grande $7 más $2 por cada ingrediente. Por tanto, si usted ordena una pizza grande con x ingredientes, el precio lo dará la función $f(x) = 7 + 2x$. Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa la función f^{-1}?

39.- Hallar una inversa "en su cabeza". En las notas del margen de esta sección se señaló que la inversa de una función se puede encontrar revirtiendo las operaciones que constituyen la función. Por ejemplo, en el ejemplo 6 se vio que la inversa de

$$F(x) = 3x - 2 \quad \text{es} \quad f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

Porque el "inverso" de "multiplicar por 3 y restar 2" es "sumar 2 y dividir entre 3".

PORTAFOLIO N° 09 FUNCIONES POLINOMIALES Y GRADO SUPERIOR	HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender las funciones.

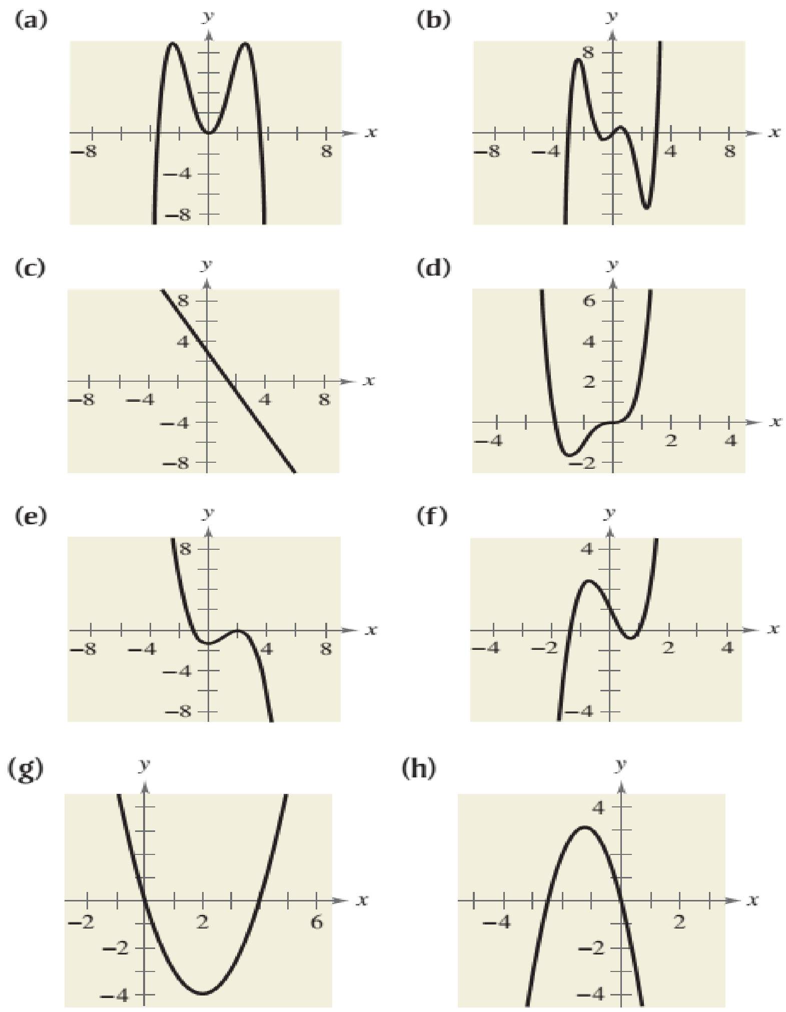
PRÁCTICA N° 9

Tema: FUNCIONES POLINOMIALES

Ejercicios Propuestos

A. Nivel Básico

En los Ejercicios 9-16, relacione la función polinomial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) y (h).]



9. $f(x) = -2x + 3$

10. $f(x) = x^2 - 4x$

11. $f(x) = -2x^2 - 5x$

12. $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$

13. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$

14. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}$

15. $f(x) = x^4 + 2x^3$

16. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + \frac{9}{5}x$

B. Nivel Medio

En los Ejercicios 21-30, describa el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de la función polinomial.

21. $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + 4x$ **22.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

23. $g(x) = 5 - \frac{7}{2}x - 3x^2$ **24.** $h(x) = 1 - x^6$

25. $f(x) = -2.1x^5 + 4x^3 - 2$

26. $f(x) = 4x^5 - 7x + 6.5$

27. $f(x) = 6 - 2x + 4x^2 - 5x^3$

28. $f(x) = (3x^4 - 2x + 5)/4$

29. $h(t) = -\frac{3}{4}(t^2 - 3t + 6)$

30. $f(s) = -\frac{7}{8}(s^3 + 5s^2 - 7s + 1)$

En los Ejercicios 35-50, (a) encuentre todos los ceros reales de la función polinomial, (b) determine la multiplicidad de cada cero y el número de puntos de inflexión de la gráfica de la función y (c) use una calculadora de gráficas para graficar la función y verificar sus respuestas.

35. $f(x) = x^2 - 36$ **36.** $f(x) = 81 - x^2$

37. $h(t) = t^2 - 6t + 9$ **38.** $f(x) = x^2 + 10x + 25$

39. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ **40.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

41. $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x$ **42.** $g(x) = 5x(x^2 - 2x - 1)$

43. $f(t) = t^3 - 8t^2 + 16t$ **44.** $f(x) = x^4 - x^3 - 30x^2$

45. $g(t) = t^5 - 6t^3 + 9t$ **46.** $f(x) = x^5 + x^3 - 6x$

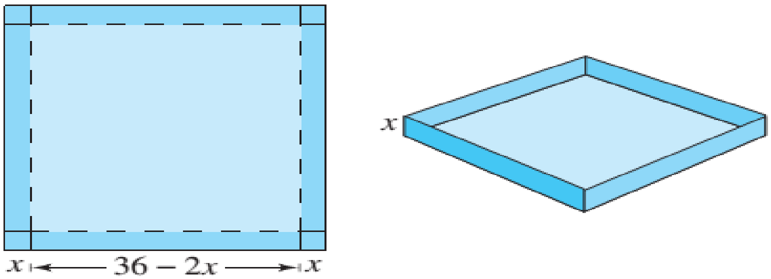
47. $f(x) = 3x^4 + 9x^2 + 6$ **48.** $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 40$

49. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

50. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 25x + 100$

C. Nivel Avanzado

97. ANÁLISIS NUMÉRICO Y GRÁFICO Se ha de construir una caja abierta a partir de una pieza cuadrada de material, de 36 pulgadas por lado, cortando cuadrados iguales con lados de longitud x desde las esquinas y volteando hacia arriba los lados (vea figura).



(a) Escriba una función $V(x)$ que represente el volumen de la caja.

(b) Determine el dominio de la función.

(c) Use una calculadora de gráficas para crear una tabla que muestre alturas x de la caja y los correspondientes volúmenes V. Use la tabla para estimar las dimensiones que producirán un volumen máximo.

(d) Use una calculadora de gráficas para graficar V y use la gráfica para estimar el valor de x para el que $V(x)$ sea máximo. Compare su resultado con el del inciso (c).

Ejercicios Propuestos

15-26 ■ Trace la gráfica de la función polinomial. Asegúrese que su gráfica muestre todos los puntos de intersección y exhiba el comportamiento final apropiado.

15. $P(x) = (x - 1)(x + 2)$

16. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

17. $P(x) = x(x - 3)(x + 2)$

18. $P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$

19. $P(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

20. $P(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

21. $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$

22. $P(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^3(x - 3)$

23. $P(x) = \frac{1}{12}(x + 2)^2(x - 3)^2$

24. $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$

25. $P(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$

26. $P(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2$

27-40 ■ Factorice el polinomio y use la forma factorizada para hallar los ceros. A continuación, trace la gráfica.

27. $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$

28. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

29. $P(x) = -x^3 + x^2 + 12x$

30. $P(x) = -2x^3 - x^2 + x$

31. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$

32. $P(x) = x^5 - 9x^3$

33. $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

34. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

35. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$

36. $P(x) = \frac{1}{8}(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24)^2$

37. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

38. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$

39. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

40. $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$

PORTAFOLIO N° 10 FUNCIONES RACIONALES	HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender las funciones.

PRÁCTICA N° 10

Tema: FUNCIONES RACIONALES

Ejercicios Propuestos

A. Nivel Básico

Asíntotas verticales y horizontales de una función racional

Sea f la función racional dada por

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

donde $N(x)$ y $D(x)$ no tienen factores comunes.

1. La gráfica de f tiene asíntotas *verticales* en los ceros de $D(x)$.

2. La gráfica de f tiene una asíntota *horizontal*, o ninguna, determinada al comparar los grados de $N(x)$ y $D(x)$.

a. Si $n < m$, la gráfica de f tiene la recta $y = 0$ (el eje x) como asíntota horizontal.

b. Si $n = m$, la gráfica de f tiene la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ (razón entre los coeficientes principales) como asíntota horizontal.

c. Si $n > m$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

En los Ejercicios 9-16, encuentre el dominio de la función e identifique cualesquiera asíntotas verticales y horizontales.

9. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$

10. $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$

11. $f(x) = \dfrac{5+x}{5-x}$

12. $f(x) = \dfrac{3-7x}{3+2x}$

13. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

14. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x+2}$

15. $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+x+9}$

16. $f(x) = \dfrac{3x^2+x-5}{x^2+1}$

B. Nivel Medio

En los Ejercicios 31-50, (a) exprese el dominio de la función, (b) identifique todas las intersecciones con los ejes coordenados, (c) encuentre cualesquiera asíntotas verticales y horizontales y (d) localice puntos adicionales de solución, según sea necesario, para trazar la gráfica de la función racional.

31. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

33. $h(x) = \dfrac{-1}{x + 4}$

34. $g(x) = \dfrac{1}{6 - x}$

35. $C(x) = \dfrac{7 + 2x}{2 + x}$

36. $P(x) = \dfrac{1 - 3x}{1 - x}$

37. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

38. $f(t) = \dfrac{1 - 2t}{t}$

39. $g(s) = \dfrac{4s}{s^2 + 4}$

40. $f(x) = -\dfrac{1}{(x - 2)^2}$

41. $h(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}$

42. $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 9}$

43. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

44. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

45. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$

46. $f(x) = \dfrac{5(x + 4)}{x^2 + x - 12}$

47. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6}$

48. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$

49. $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t - 1}$

50. $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$

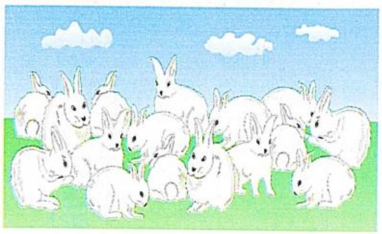
C. Nivel Avanzado

51.- Crecimiento poblacional. Suponga que la población de conejos de la granja del señor Jenkins sigue la fórmula

$$(\mathrm{p}) = \frac{3000\mathrm{t}}{\mathrm{t}+1}$$

Donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde el comienzo del año

a) Trace una gráfica de la población de conejos
b) ¿Qué sucede finalmente con la población de conejos)



52.- Concentracion del fármaco. Se monitorea la concetración de fármacos en el torrente sanguineo de un paciente al que le fueron administrados fármacos en el instante $t \geq 0$(en horas desde la adminsitración del fármaco), la concentracion (en mg/L) se determina por:

$$c(t) = \frac{5t}{t^2+1}$$

Indique la función c con un dispositivo de graficación

a)¿Cuál es la concentracion más alta del fármaco que se alcanza en el torrente sanguineo del paciente?

b)¿Qué sucede con la concentración del fármaco despues de un periodo largo?

c)¿Cuánto le toma a la concentración disminuir debajo de 0.3 mg/L?

53.- El efecto Doppler. Cuando un tren se mueve hacia un observador (véase la figura), el tono de su silbato suena más alto para el observador que si el tren estuviera en reposo, porque las ondas sonoras están más cerca unas de otras. Este fenómeno se llama efecto Doppler. El tono P observado es una función de la velocidad v del tren y se expresa como.

$$P(v) = P_0\left(\frac{s_0}{s_0 - v}\right)$$

Donde P_0 es el tono real del silbato en la fuente y $s_0 = 332$ es igual a la velocidad del sonido en el aire. Suponga que un tren tiene un silbato establecido de $P_0 = 440HZ.$ Grafique la función $y = P(v)$ por medio de un dispositivo de graficación. ¿Cómo se puede interpretar físicamente la asíntota vertical esta función?

Ejercicios Propuestos

21-32 ■ Encuentre todas las asíntotas horizontales y verticales (si las hay).

21. $r(x) = \dfrac{5}{x - 2}$

22. $r(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 1}$

23. $r(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 2}$

24. $r(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 + x + 1}$

25. $s(x) = \dfrac{6x^2 + 1}{2x^2 + x - 1}$

26. $s(x) = \dfrac{8x^2 + 1}{4x^2 + 2x - 6}$

27. $s(x) = \dfrac{(5x - 1)(x + 1)}{(3x - 1)(x + 2)}$

28. $s(x) = \dfrac{(2x - 1)(x + 3)}{(3x - 1)(x - 4)}$

29. $r(x) = \dfrac{6x^3 - 2}{2x^3 + 5x^2 + 6x}$

30. $r(x) = \dfrac{5x^3}{x^3 + 2x^2 + 5x}$

31. $t(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$

32. $r(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 4}$

65-72 ■ Encuentre la asíntota diagonal, las asíntotas verticales y trace una gráfica de la función.

65. $r(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

66. $r(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$

67. $r(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

68. $r(x) = \dfrac{3x - x^2}{2x - 2}$

69. $r(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x - 3}$

70. $r(x) = \dfrac{x^3 + 4}{2x^2 + x - 1}$

71. $r(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$

72. $r(x) = \dfrac{2x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

Unidad III

FUNCIÓN EXPONENCIAL y LOGARÍTMICA

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad el estudiante será capaz de, resolver ejercicios y problemas de aplicación de funciones exponenciales y logarítmicas, utilizando de manera compresiva el lenguaje algebraico para expresar situaciones problemáticas cotidianas.

PORTAFOLIO N° 11 FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender la función exponencial y los logaritmos.

PRÁCTICA N° 11

Tema: FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Definición de función exponencial

La **función exponencial f con base a** se denota por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es cualquier número real.

Definición de función logarítmica con base a

Para $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$y = \log_a x \text{ si y sólo si } x = a^y.$$

La función dada por

$$f(x) = \log_a x$$ léase como "logaritmo base a de x".

se llama **la función logarítmica con base a.**

Propiedades de los logaritmos.

1. $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$.

2. $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$.

3. $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$ — Propiedades inversas

4. Si $\log_a x = \log_a y$, entonces $x = y$. — Propiedad biunívoca

A. Nivel Básico

Use una calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

1.-$f(x) = 4^x; f(0.5), f(\sqrt{2}), f(\pi), f\left(\frac{1}{3}\right)$ Respuesta: 2000 ,7.103, 77.880,1.587

2.- $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}; g(1.3), g(\sqrt{5}), g(2\pi), g\left(-\frac{1}{2}\right)$

Bosqueje la gráfica de la función construyendo una tabla de valores. Use una calculadora si es necesario.

3.- $f(x) = 2^x$

4.- $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

5.- $g(x) = 3e^x$

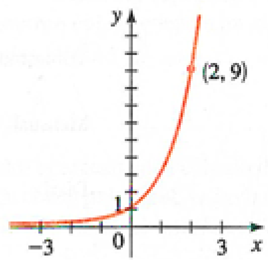
Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes

6.- $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$

7.- $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$

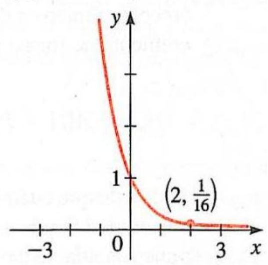
Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se muestra

8.-



Respuesta: $f(x) = 3^x$

9.-



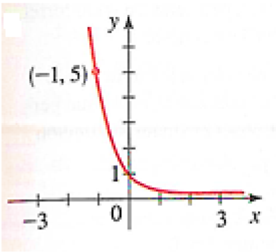
Compare la función exponencial con una de las gráficas marcadas I-VI

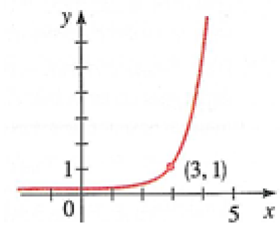
10.- $f(x) = 5^x$

11.- $f(x) = 5^{-x}$

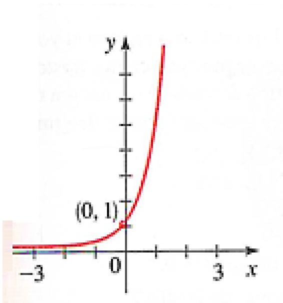
12.- $f(x) = 5^{x-3}$

I.-

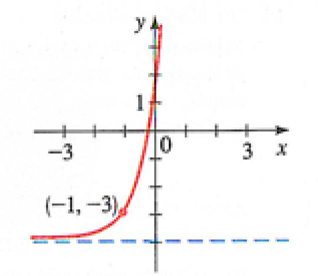




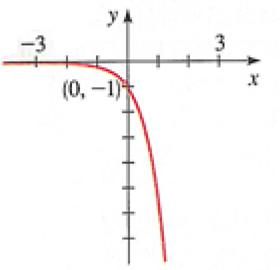
III.



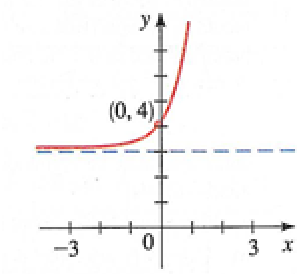
IV.-



V.-



VI.-



B. Nivel Medio

Grafique la función.

12.- $f(x) = -3^x$

13.- $g(x) = 2^x - 3$

14.- $h\,(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

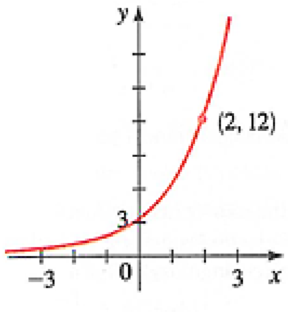
15.- $f(x) = 10^{x+3}$

16.- $f(x) = -e^x$

17.- $y = e^{-x} - 1$

18.- $f(x) = e^{x-2}$

Encuentre la función de la forma $f(x) = Ca^x$, cuya gráfica es la siguiente



a) Bosqueje las gráficas de $f(x)=2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$

b) ¿Cómo se relacionan las gráficas?

19.- Si $f(x) = 10^x$, muestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 10^x \left(\frac{10h - 1}{h}\right)$$

20.- La función coseno hiperbólico se define mediante

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Bosqueje las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes y use la adición gráfica para bosquejar la gráfica de y=cosh(x)

C. Nivel Avanzado

21.- Decaimiento radioactivo. Una sustancia radiactiva se desintegra de tal manera que la cantidad de masa que permanece después de t días se expresa mediante la función.

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

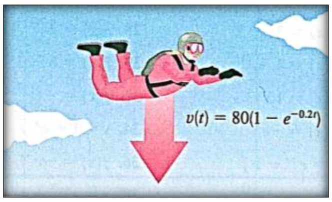
Donde m (t) se mide en kilogramos

a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$
b) ¿Cuánta masa permanece después de 45 días?

22.- Paracaidismo. Un paracaidista salta desde una altura razonable del suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad de descenso del paracaidista en el tiempo t se expresa como: $v(t) = 80(1 - e^{-2t})$

Donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).

a) Encuentre la velocidad inicial del paracaidista
b) Calcule la velocidad después de 5s y después de 10s
c) Dibuje la gráfica de la función de velocidad $v(t)$
d) La velocidad máxima de un objeto que cae con resistencia del viento se llama su velocidad terminal. De la gráfica del inciso c) encuentre la velocidad terminal de este paracaidista.

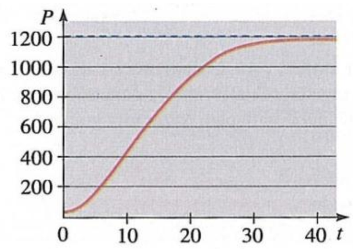


23.- Crecimiento logístico. Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimento. En tales condiciones la población sigue un modelo de crecimiento logístico

$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

Donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces, en un pequeño estanque $d = 1200,\quad k = 11\quad c = 0.2$, y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

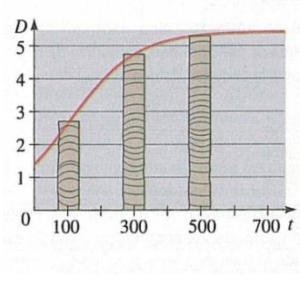
a) ¿Cuántos peces se colocaron originalmente en el estanque?
b) Calcule la población después de 10, 20 y 30 años.
c) Evalúe P(t) para valores grandes de t. ¿ A qué valor tiende la población cuando $t \to \infty$¿la gráfica mostrada confirma sus cálculos?



24.- Diámetro de un árbol. Para cierto tipo de árbol el diámetro D (en pies) depende de la edad del árbol t (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Determine el diámetro de un árbol de 20 años



Interés compuesto.- Una inversión de 5000 dólares se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla llenando las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos indicados o las tasas de interés.

$r = 4\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

25.- Interés compuesto.- Si se invierten 10 000 dólares a una tasa de interés de 10% por año, capitalizable semianualmente, encuentre el valor de la inversión después del numero dado de años.

a) 5 años
b) 10 años
c) 15 años

26.- Interés compuesto. Si se invierten 3000 dólares a una tasa de interés de 9% por año, encuentre la cantidad de la inversión al final de 5 años para los siguientes métodos de capitalización.

a) Anual
b) Semianual
c) Mensual
d) Semanal
e) Por día
f) Por hora
g) De manera continua

27.-Interés compuesto.- ¿Cuál de las tasas de interés dadas y períodos de capitalización proporcionarían la mejor inversión?

i) $8\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizable cada medio año
ii) $8\frac{1}{4}\%$ por año, capitalizable trimestralmente
iii) 8% por año, capitalizable de forma continua

28.- Valor presente.- El **valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que se debe invertir ahora, a una determinada tasa de interés, para producir la suma deseada e en una fecha posterior.

a) Encuentre el valor presente de 10 000 dólares si se paga interés a una tasa de 9% por año, capitalizable cada medio año, durante tres años.

b) Encuentre el valor presente de 100 000 dólares si se paga interés a una tasa de 8% por año, capitalizable mensualmente, durante 5 años.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

1-2.- Complete la tabla con la forma exponencial logarítmica apropiada de la ecuación, como en el ejemplo I

1.-

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

Exprese la ecuación en forma exponencial

3.- a) $\log_5 25 = 2$ b) $\log_5 1 = 0$

4.- a) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

5.- a) $\ln 5 = x$ b) $\ln y = 5$

Exprese la ecuación en forma logarítmica

6.- a) $5^3 = 125$ b) $10^{-4} = 0.0001$

7.- a) $8^{-1} = \frac{1}{8}$ b) $2^{-3} = \frac{1}{8}$

8.- a) $e^x = 2$ b) $e^3 = y$

Evalúe la expresión

9.- a) $\log_3 3$ b) $\log_3 1$ c) $\log_3 3^2$

10.- a) $\log_3 36$ b) $\log_9 81$ c) $\log_7 7^{10}$

11.- a) $\log_3 \frac{1}{27}$ b) $\log_{10} \sqrt{10}$ c) $\log_5 0.2$

12.- a) $2^{\log_2 37}$ b) $3^{\log_3 8}$ c) $e^{\ln\sqrt{5}}$

13.- a) $\log_8 0.25$ b) $\ln e^4$ c) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

Use la definición de la función logarítmica para hallar x

14.- a) $\log_2 x = 5$ b) $\log_2 16 = x$

15.- a) $\log_3 243 = x$ b) $\log_3 x = 3$

16.- a) $\log_{10} x = 2$ b) $\log_5 x = 2$

17.- a) $\log_x 16 = 4$ b) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

Use una calculadora para evaluar la expresión, correcta hasta cuatro decimales.

18.- a) $\log 2$ b) $\log 35.2$ c) $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

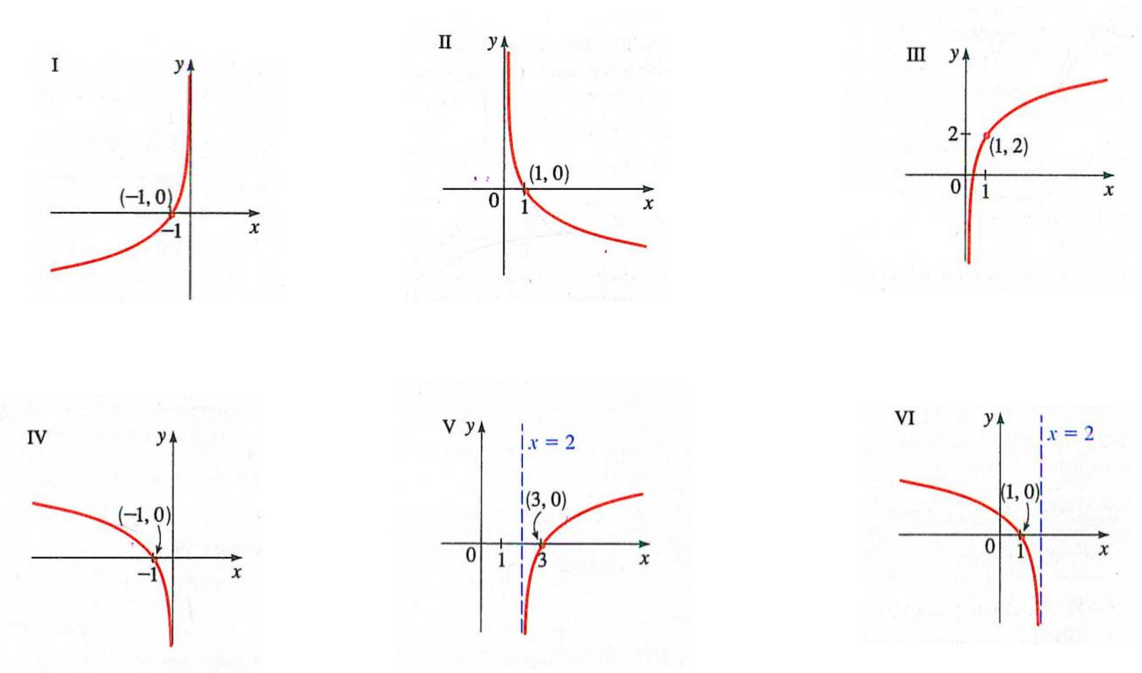
19.- a) $\ln 5$ b) $\ln 25.3$ c) $\ln(1+\sqrt{3}\,)$

Compare la funcion logarítmica con una de las gráfuicas marcadas I-VI.

20.- $f(x) = -\ln x$

21.- $f(x) = 2 + \ln x$

22.- $f(x) = \ln(2 - x)$



23.-Dibuje la gráfica de $y = 4^x$, después utilícela para dibujar la gráfica de $y = \log_4 x$

Grafique la función sin trazar los puntos, sino a partir de las gráficas iniciales. Expese el dominio, rango y asíntota

24.- $f(x) = \log_2(x - 4)$

25.- $g(x) = \log_5(-x)$

26.- $y = 2 + \log_3 x$

26.- $y = 1 - \log_{10} x$

27.- $y = |\ln x|$

Encuentre el dominio de la función

28.- $f(x) = \log_{10}(x+3)$ Respuesta: $(-3, \infty)$

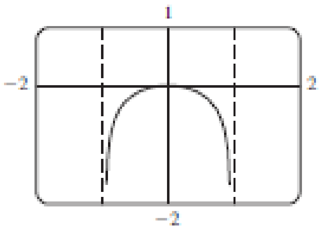
29.- $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$

30.- $h(x) = \ln x + \ln(2-x)$

Dibuje la gráfica de la función en un rectángulo de visión adecuado y empléela para hallar el dominio, las asíntotas y los valores locales máximo y mínimo

31.- $y = \log_{10}(1 - x^2)$

Respuesta:



Dominio $(-1,1)$

Asíntotas verticales $x = 1,\ x = -1$

Local máximo (0,0)

32.- $y = x + \ln x$

33.- $y = \frac{\ln x}{x}$

Compare las tasas de crecimiento de las funciones

$f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ Dibujando sus gráficas en una pantalla común en el rectángulo de visión $[-1,30]$ por $[-1,6]$.

Aplicaciones

79.-Fechado con carbono. La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de carbono 14 radioactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en año) se determina por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

80.- Inversión. El tiempo requerido para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés capitalizable de manera continua está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Determine el tiempo requerido para duplicar una inversión en 6 por ciento y 8 por ciento

PORTAFOLIO N° 12 ECUACIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender la función exponencial y los logaritmos.

PRÁCTICA N° 12

Tema: ECUACIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Fórmula de cambio de base

Sean a, b y x números reales positivos tales que $a \neq 1$ y $b \neq 1$. Entonces $\log_a x$ se puede convertir a una base diferente como sigue.

Base b	*Base 10*	*Base e*
$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$	$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Propiedades de los logaritmos

Sea a un número positivo tal que $a \neq 1$, y sea n un número real. Si u y v son números reales positivos, las siguientes propiedades son verdaderas.

	Logaritmo con base a	*Logaritmo natural*
1. Propiedad del producto:	$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$	$\ln(uv) = \ln u + \ln v$
2. Propiedad del cociente:	$\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$	$\ln \dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$
3. Propiedad de la potencia:	$\log_a u^n = n \log_a u$	$\ln u^n = n \ln u$

Estrategias para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1. Reescriba la ecuación original en una forma que permita usar las propiedades biunívocas de funciones exponenciales o logarítmicas.
2. Reescriba una ecuación *exponencial* en forma logarítmica y aplique la propiedad inversa de las funciones logarítmicas.
3. Reescriba una ecuación *logarítmica* en forma exponencial y aplique la propiedad inversa de las funciones exponenciales.

A. Nivel Básico

Evalúe la expresión

1.- $\log_3 \sqrt{27}$ Respuesta: $\frac{3}{2}$

2.- $\log 4 + \log 25$

3.- $\log_4 192 - \log_4 3$

4.- $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

5.- $\log_4 16^{100}$

6.- $\log(\log 10^{10\,000})$

Use las leyes de los logaritmos para desarrollar la expresión.

7.- $\log_2(2x)$ Respuesta: $1 + \log_2 x$

8.- $\log_2(x(x-1))$

9.- $\log 6^{10}$

10.- $\log_2(AB^2)$

11.- $\log_3(x\sqrt{y})$

12.- $\log_5(\sqrt[3]{x^2+1})$

13.- $\ln \sqrt{ab}$

14.- $\log\left(\frac{x^3y^4}{z^6}\right)$

15.- $\log_2\left(\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

16.- $\ln\left(x\sqrt{\frac{y}{z}}\right)$

17.- $\log \sqrt[4]{x^2+y^2}$

18.- $\log \sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$

19.-$\ln\left(\frac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$

Use las leyes de los logaritmos para combinar la expresión

20.- $\log_3 5 + 5\log_3 2$ Respuesta: $\log_3 160$

21.- $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$

22.- $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log\ (x-1)$

23.- $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$

24.- $\frac{1}{3}\log(2x+1) + \frac{1}{2}[\log(x-4) - \log(x^4 - x^2 - 1)]$

B. Nivel Medio

25.- Distribución de la riqueza. Vilfredo Pareto (1848-1923)

Observó que la mayor parte de la riqueza de un país la poseen algunos miembros de la población. El Principio de Pareto es.

$$\log P = \log c - k\log W$$

Donde W es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y P es el número de personas en la población que tiene esa cantidad de dinero.

a) Resuelva la ecuación para P
b) Suponga que K=2.1, c=8000 y W se mide en millones de dólares. Use el inciso a) para hallar el número de personas que tienen dos millones o más. ¿Cuántas personas tienen 10 millones o más?

26.- Magnitud de estrellas. La magnitud de M de una estrella es una media de cuán brillante aparece una estrella para el ojo humano. Se define por:

$$M = -2.5\log\frac{B}{B_0}$$

Donde B es el brillo real de la estrella y B_0 es una constante.

a) Desarrolle el lado derecho de la ecuación
b) Use el inciso a) para mostrar que mientras más brillante es una estrella menor es su magnitud
c) Betelgeuse es más o menos 100 veces más brillantes que Albiero. Use el inciso a) para mostrar que Betelgeuse es cinco magnitudes menos que Albiero.

C. Nivel Básico

ECUACIONES EXPONENCIALES

Encuentre la solución de la ecuación exponencial, correcta hasta cuatro decimales

1.- $10^{x} = 25$ Respuesta: 1.3979

2.- $e^{-2x} = 7$ Respuesta: -0.9730

3.- $e^{1-x} = 3$

4.- $3e^{x} = 10$

5.- $e^{1-4x} = 2$

6.- $4 + 3^{5x} = 8$

7.- $8^{0.4x} = 5$

8.- $5^{-x/100} = 2$

9.- $e^{2x+1} = 200$

10.- $5^{x} = 4^{x+1}$

11.- $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

12.- $\frac{50}{1+e^{-x}} = 4$

13.- $100(1.04^{2t} = 300)$

Resolver la ecuación

14.- $x^{2}2^{x} - 2^{x} = 0$ Respuesta: ± 1

15.- $4x^{3}e^{-3x} - 3x^{4}e^{-3x} = 0$

16.- $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

17.- $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

Resolver la ecuación logarítmica para x

18.- $\ln x = 10$ Respuesta: $e^{10}, 22026$

19.- $\log x = -2$

20.- $\log(3x + 5) = 2$

21.- $2 - \ln(3 - x) = 0$

22.- $\log_{2} 3 + \log_{2} x = \log_{2} 5 + \log_{2}(x - 2)$

23.- $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

24.- $\log(x+1)-\log_5(x-1)=2$

25.- $\log_9(x-5)+\log_9(x+3)=1$

26.- ¿Para qué valor de x se cumple lo siguiente?

$\log(x+3)=\log x+\log 3$

27.- Despeje x: $2^{\frac{2}{\log_5 x}}=\frac{1}{16}$

Use un dispositivo de graficación para hallar las soluciones de la ecuación, correcta hasta dos decimales.

28.- $\ln x=3-x$ Respuesta: 2.21

29.- $x^3-x=\log(x+1)$

30.- $e^x=-x$

31.- $4^{-x}=\sqrt{x}$

Resuelva la identidad

32.- $\log(x-2)+\log(9-x)<1$

33.- $2<10^x<5$

D. Nivel Medio

34.-Interés compuesto.- Una persona invierte 5000 dólares en una cuenta que paga 8.5% de interés anual, capitalizable cada trimestre.

a) Encuentre la cantidad después de tres años

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que se duplique la inversión?

35.-Interés Compuesto.- Calcule el tiempo requerido para que una inversión de 5000 dólares crezca a 8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizable cada trimestre.

36.-Duplicar una inversión. ¿En cuánto tiempo se duplica una inversión de 1000 dólares si la tasa de interés es de 8.5 % anual, capitalizable de manera continua?

37.-Rendimiento porcentual anual. Encuentre el rendimiento porcentual anual para que una inversión que gana 8% anual, capitalizable mensualmente.

38.-Decaimiento radioactivo. Una muestra de 15 g de yodo radioactivo se desintegra de una manera que la masa restante después de t días está dada por $m(t)=15e^{-0.087t}$ donde m(t) se mide en gramos. ¿Después de cuántos días hay sólo 5g restantes?

39.-Población de peces. Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. La población se modela mediante la función

$$P = \frac{10}{1+4e^{-0.8t}}$$

Donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que se aprovisiono el lago.

a) Encuentre la población de peces después de tres años.
b) ¿después de cuantos años la población de peces llega a 5000?

40.- Presión atmosférica. La presión atmosférica P (en kilo pascales, K Pa) a la altura h (en kilómetros, Km) está gobernada por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

Donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ KPa. Son constantes

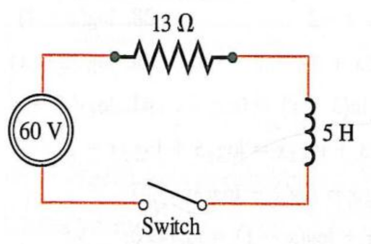
a) Despeje P de la ecuación

b) Use el inciso a) para calcular la presión P a una altitud de 4Km

41.-Circuitos electrónicos. Un circuito electrónico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Por medio del cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de que se cierra el interruptor es $I = \frac{60}{13}\left(1 - e^{\frac{-13t}{5}}\right)$.

a) Use esta ecuación para expresar el tiempo t como una función de la corriente I

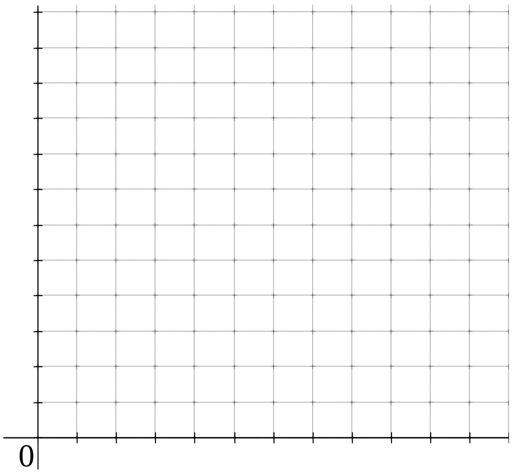
b) ¿Después de cuántos segundos la corriente es 2A?



42.- Bajo condiciones ideales de laboratorio, el número de bacterias crece con el tiempo como se indica en la siguiente tabla:

Tiempo t, hrs.	**Número de bacterias** $N, \times 10^3$
0	27
1	47
2	82
3	143
4	250
5	437
6	760
7	1322
8	2300
9	4000
10	6900

a.- Dibuja una gráfica que ilustre el crecimiento de la población de bacterias con el tiempo.



b.- ¿Crees que la población de bacterias crece uniformemente, o lo hace de algún otro modo? Argumenta tu respuesta.

PORTAFOLIO N° 13 MODELADO EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender la función exponencial y los logaritmos.

PRÁCTICA N° 13

Tema: MODELADO EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Introducción

Los cinco tipos más comunes de modelos matemáticos que contienen funciones exponenciales y logarítmicas son como sigue:

1. **Modelo de crecimiento exponencial:** $y = ae^{bx}, \quad b > 0$
2. **Modelo de desintegración exponencial:** $y = ae^{-bx}, \quad b > 0$
3. **Modelo de Gauss:** $y = ae^{-(x-b)^2/c}$
4. **Modelo de crecimiento logístico:** $y = \dfrac{a}{1 + be^{-rx}}$
5. **Modelos logarítmicos:** $y = a + b\ln x, \quad y = a + b\log x$

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TASA DE CRECIMIENTO RELATIVA)

Una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t)$ = población en el tiempo t

n_0 = tamaño inicial de la población

r = tasa de crecimiento relativa (expresada como una proporción de la población)

t = tiempo

Calcular el valor de cada una de las siguientes expresiones aproximando hasta milésimos (tres cifras decimales).

1. $\dfrac{\ln 6}{\ln 2}$ **2**. $\dfrac{\ln 10}{\ln 5}$ **3**. $\dfrac{\ln 8}{\ln 0.2}$ **4.** $\dfrac{\ln 0.8}{\ln 4}$ **5.** $\dfrac{\ln 15}{\ln 3}$ **6.** $\dfrac{\ln 25}{\ln 5}$ **7.** $\dfrac{\ln 100}{\ln 10}$ **8.** $\dfrac{\ln 80}{\ln 8}$

Calcule el valor de y en $y = Ae^{kx}$, para los valores dados de A, k y x.

9. A = 100, k = 0.75, x = 4 **10.** A = 25, k = 0.5, x = 10
11. A = 1000, k = -1.8, x = 2 **12.** A = 12.5, k = -0.04, x = 50

Resuelva para k. Deje cada respuesta expresada en logaritmos naturales.

13. 5000 = 50e^{2k} **14.** 75 = 150ee^{10k} **15.** $\dfrac{A}{3} = Ae^{4k}$ **16.** $\dfrac{A}{2} = Ae^{100k}$

17. Un cultivo de bacterias crece de acuerdo con la fórmula $y = 10{,}000e^{0.6x}$, donde *x* es el tiempo, expresado en días. Calcule el número de bacterias que habrá después de 1 semana.

18. Calcule el número de bacterias que hay en el cultivo del Ejercicio 17, después de que ha proliferado durante 12 horas.

19. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que se triplique el cultivo de bacterias del Ejercicio 17?

20. ¿Cuánto tiempo hará falta para que el número de bacterias del Ejercicio 17 llegue a 1,000,000?

21. Cierta sustancia radiactiva se descompone de acuerdo con la fórmula exponencial

$$S = S_o e^{-0.04t}$$

donde S_o es la cantidad inicial de la sustancia y *S* es la cantidad de dicha sustancia que queda después de *t* años. Si al principio hay 50 gramos de la sustancia radiactiva, ¿cuánto tiempo se necesitará para que se descomponga la mitad?

22. Demuestre usted que, cuando se resuelve para *t* la fórmula del Ejercicio 21, el resultado es

$$t = -25 \ln \frac{S}{S_o}$$

23. Una sustancia radiactiva está desintegrándose de acuerdo con la fórmula $y = Ae^{kx}$, donde *x* es el tiempo, en años. Se tiene la cantidad inicial *A* = 10 gramos y, después de 5 años, quedan 8 gramos.

- **(a)** Encuentre el valor de *k*. Deje la respuesta expresada en logaritmo natural.
- **(b)** Calcule la cantidad restante después de 10 años.
- **(c)** Calcule la vida media, aproximando hasta el décimo más cercano de un año.

24. La vida media del radio es de 1690 años, aproximadamente. Un laboratorio tiene 50 miligramos de radio.

(a) Utilice la vida media al resolver para *k* la ecuación $y = Ae^{kx}$. Deje la respuesta expresada en logaritmo natural.
(b) Aproximando a las decenas de años más cercanas, ¿cuánto tiempo se necesitará para que sólo queden 40 miligramos?

25. Supongamos que 5 gramos de una sustancia radiactiva se descomponen a razón de 4 gramos por cada 30 segundos. ¿Cuál es su vida media, aproximada hasta la décima de segundo más cercana?

26. ¿Cuánto tiempo se necesita para que se desintegren las dos terceras partes del material radiactivo del Ejercicio 25? Aproxime su respuesta a la décima de segundo más cercana.

27. Cuando se estudió por primera vez el crecimiento demográfico de cierta ciudad, tenía una población de 22,000 habitantes. Se encontró que la población *P*, en función del tiempo (en años), crecía de acuerdo con la fórmula exponencial

$$P = (22{,}000)(10^{0.0163t})$$

¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la población?

28. ¿Cuánto tiempo hará falta para que se triplique la población de la ciudad mencionada en el Ejercicio 27?

29. Se ha descubierto que una momia egipcia contiene el 60% de su ^{14}C. Con aproximación al siglo más cercano, ¿qué antigüedad tiene la momia? (*Observación*: si *A* es la cantidad original de ^{14}C, la cantidad restante será $\frac{3}{5}A$)

30. Un esqueleto contiene la centésima parte de la cantidad original de ^{14}C. Aproximando el valor al milenio más cercano, ¿cuál es la antigüedad del esqueleto?

31. Responda la misma pregunta del Ejercicio 30, si sólo queda una millonésima del ^{14}C.

Use una calculadora que tenga la tecla exponencial y la de logaritmo natural (e^x), para contestar las siguientes preguntas.

32. Supongamos que una inversión de $10,000 gana réditos con la tasa del 9% de interés compuesto anual. Si el tiempo de depósito de la inversión es de un año (t = 1), encuentre usted el valor de la inversión para cada uno de los siguientes periodos de aplicación del interés compuesto:

(a) n = 4 (trimestrales) **(b)** n = 12 (mensuales) **(c)** n = 52 (semanales)
(d) n = 365 (diarios) **(e)** continuamente.

33. Siga las instrucciones del Ejercicio 32, pero aumente a 5 años el tiempo de depósito de la inversión.

34. Calcule el interés ganado en cada caso del Ejercicio 32.

35. Siga las instrucciones del Ejercicio 32, pero cambie a 3.5 años el tiempo de depósito de la inversión.

36. Supongamos que se invierten \$1500 a rédito con la tasa de 8% de interés compuesto continuamente, anual. ¿Qué cantidad habrá en depósito después de 5 años? ¿ Y después de 10 años?

37. La señorita Rivera deposita \$5000 al 9% de interés anual. ¿Cuánto tiempo necesitará para que se duplique su inversión? ¿Cuánto tiempo tardará, si la tasa de interés fuera el 12%?

38. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que se duplique una inversión de \$1000, si gana el 12% de interés compuesto, continuo, anual? ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse?

39. Una inversión de \$1000 gana réditos a la tasa del *r*% compuesto, continuo, anual. Si la inversión se duplica en 5 años, ¿cuál es el valor de *r*?

40. ¿Cuánto tiempo hace falta para que se duplique una inversión de \$4000, si gana réditos con la tasa del 8% de interés anual, compuesto trimestralmente?

41. En el Ejercicio 40, ¿cuánto tiempo se necesitaría, si los periodos de aplicación del interés compuesto fueran mensuales?

42. Una inversión *P* gana el 9% de interés anual. compuesto continuamente. Después de 3 años, el valor de la inversión es de \$5000. Encuentre usted la cantidad inicial *P*. (*Sugerencia*: resuelva para *P* la fórmula $A = Pe^{rt}$.)

43. Conteste la pregunta del Ejercicio 42 empleando 6 años como tiempo de depósito.

44. Una inversión *P* gana el 8% de interés anual, compuesto en periodos trimestrales. Después de un año, el valor de la inversión es de \$5000. Encuentre la cantidad inicial *P*. (*Sugerencia*: resuelva $A^1 = P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ para *P*.)

45. ¿Qué suma de dinero se debe invertir a la tasa de interés del 12% anual, compuesto en periodos mensuales, para lograr que el valor de la inversión ascienda a \$20,000 después de 5 años? (*Sugerencia*: resuelva usted $A_t = P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ para *P.*)

46. Una colonia de bacterias tiene una población inicial de 800.000 individuos y se duplica cada 3 horas. Se pide:

i. Escriba la ecuación que describe el crecimiento de la colonia por cada hora.

ii. Grafique esa función.

iii. ¿Qué población habrá después de 5 horas?

iv. ¿Cuántos nuevos individuos habrá entre la séptima y octava hora?

47. A causa de una profunda recesión económica una población decrece a razón de 1,5% cada año. En el inicio la población era de 350.000 habitantes. Suponga que la situación se mantiene por tres años ¿Cuál será la población en ese momento? (aproxime el resultado entero más próximo)

48.-Cultivo de bacterias. El número de bacterias en un cultivo se modela mediante la función.

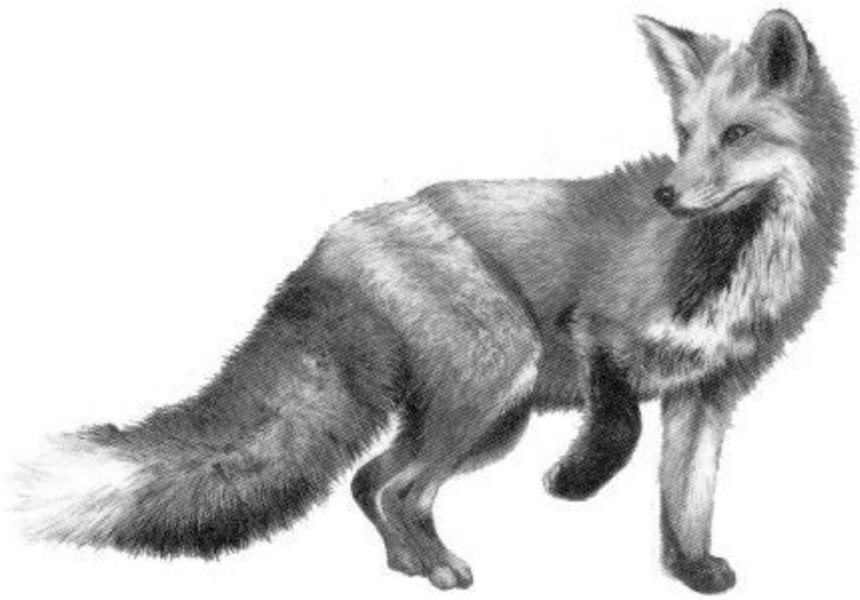
$$n(t) = 500e^{0.45t}$$

Donde t se mide en horas.

a) ¿Cuál es el número inicial de la bacteria?
b) ¿cuál es la tasa relativa de crecimiento de esta población?
c) ¿Cuántas bacterias están en el cultivo después de tres horas?
d) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llega a 10 000?

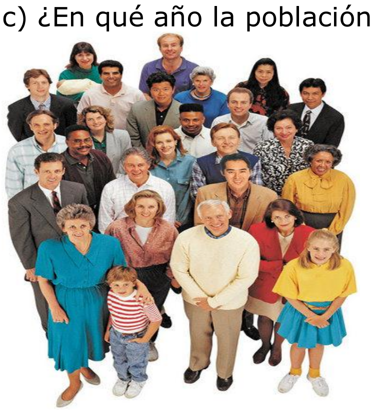
49.- Población de zorros. La población de zorros en cierta región tiene una tasa de crecimiento relativa de 8% por año. Se estima que la población en 2000 fue 18000

a) Encuentre una función que modele la población t años después del año 2000
b) Use la función del inciso a) para estimar la población de zorros en el año 2008.
c) Trace una gráfica de la función de población de zorros para los años 2000-2008

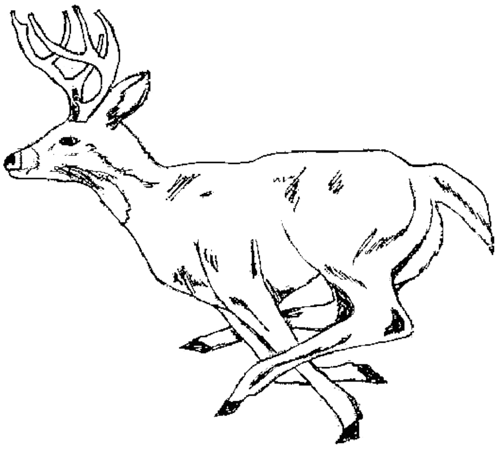


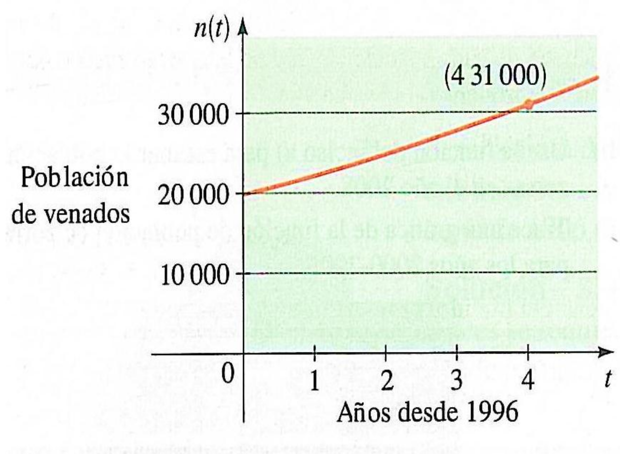
50.-Población de una ciudad. La población de cierta ciudad fue 112 000 en 1998, y la tasa de crecimiento relativa observada es 4% por año.

a) Encuentre una función que modele la población después de t años.
b) Encuentre la población proyectada en el año 2004
c) ¿En qué año la población llega a 200 000?



51.-Poblacion de venados. En la gráfica se muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entre 1996 y 2000. Suponga que la población crece de forma exponencial.
a) ¿Cuál es la población de venados en 1996?
b) Encuentre una función que modele la población de venados t años después de 1996.
c) ¿Cuál es la población de venados proyectada en 2004?
d) ¿En qué año la población de venados llega a 100 000?





52.-Cultivo de bacterias. Un cultivo comienza con 8600 bacterias. Después de una hora la cuenta es 10 000.
a) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.
b) Encuentre el número de bacterias después de dos horas.
c) ¿Después de cuántas horas se duplica el número de bacterias?

53.- Población Mundial. La población del mundo fue 5.7 miles de millones en 1995 y la tasa de crecimiento relativa observada fue 2% al año.
a) ¿En qué año se habrá duplicado la población?
b) ¿En qué año se habrá triplicado la población?

54.-Bacterias infecciosas. Una cepa infecciosa de bacterias se incrementa a una tasa de crecimiento relativa de 200% por hora. Cuando cierta cantidad crítica de bacterias está presente en el torrente sanguíneo, una persona se enferma. Si una sola bacteria infecta a una persona, la concentración crítica se alcanza en 24 horas. ¿Cuánto tiempo toma alcanzar la concentración crítica si la persona es infectada con 10 bacterias?
55.- Cesio Radioactivo. L a vida media del cesio 137 son 30 años. Suponga que se tiene una muestra de 10g.
a) Encuentre una función que modele la masa restante después de t años
b) ¿Qué cantidad de la muestra queda después de 80 años?
c) ¿Después de cuánto tiempo sólo quedarán 18 mg de la muestra?

56.-Estroncio radioactivo.- La vida media el estroncio 90 son 28 años. ¿Cuánto tiempo tarda una muestra de 50 mg en desintegrase a una masa de 32 mg?

Unidad IV

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

RESULTADO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de resolver ejercicios y problemas de una función trigonométrica utilizando instrumentos, técnicas y fórmulas en entornos formales y físicos.

PORTAFOLIO N° 14 MEDICIONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender la trigonometría.

PRÁCTICA N° 14

Tema: MEDICIONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Sistema Sexagesimal

Su unidad ángular es el grado sexagesimal(1º); el cual es equiva-lente a la 360^{ava} parte del ángulo de una vuelta.

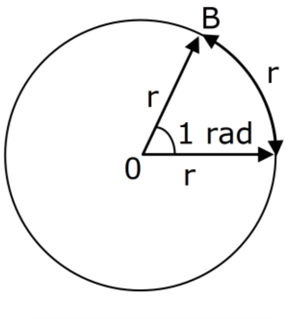
$$1^{\circ} = \frac{1V}{360} \rightarrow 1V \ 360^{\circ}$$

Equivalencias:

1º=60′	1′=60″	1º=3600″

2. Sistema Radial o Circular o Internancional

Su unidad es el radian, el cual es un ángulo que subtiene un arco de longitud equivalente al radio de la circunferencia respectiva.



$$\boxed{m\measuredangle AOB = 1rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{1V}{2\pi} \rightarrow \boxed{1V = 2\pi rad} \cong 6{,}2832$$

Nota
Como π = 3,141592653...

CONVERSION DE SISTEMAS

Factor de Conversión Es un cociente "conveniente" de dos magnitudes angulares equivalentes.

Magnitudes angulares equivalentes

$\measuredangle$ 1 vuelta : 1 v 360º=400^g=2πrad
$\measuredangle$ Llano : 1/2v 180º=200^g=πrad
Grados : 9º =10^g

Ejemplos:

Convertir a radianes la siguiente magnitud angular α=12º

Resolución:

Magnitud equivalente	Factor de Conversión
$\pi rad = 180^{\circ}$	$\dfrac{\pi rad}{180^{\circ}}$

$$\alpha = 12^{\circ}\frac{\pi rad}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{15} rad$$

2.1 Sistema Sexagesimal

Su unidad ángular es el grado sexagesimal(1º); el cual es equiva-lente a la 360^{ava} parte del ángulo de una vuelta.

$$1^{\circ} = \frac{1V}{360} \rightarrow 1V \ 360^{\circ}$$

Equivalencias:

1º=60′ 1′=60″ 1º=3600″

Encuentre la medida en radianes del ángulo con la medida de grados dada.

1.- 72° Respuesta: $\frac{2\pi}{5}$; $1.257\ \mathrm{rad}$

2.- $-45°$

3.- $-75°$

4.- 1080°

5.- 96°

6.- 7.5°

Encuentre la medida en grados del ángulo con la medida en radianes dada

7.- $\frac{7\pi}{6}$ Respuesta: 210°

8.- $\frac{5\pi}{4}$

9.- 3

10.- -1.2

11.- $\frac{\pi}{10}$

12.- $\frac{2\pi}{15}$

Se da la medida de un ángulo es posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que son coterminales con el ángulo dado.

13.- $50°$ Respuesta: $410°, 770°, -310°, -670$

14.- $\frac{3\pi}{4}$

15.- $-\frac{\pi}{4}$

Se dan las medidas de dos ángulos en posición estándar. Determine si los ángulos son coterminales.

16.- 70°, 430° Respuesta: Sí

17.- $\frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$

18.- 155°, 875°

Encuentre el ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con el ángulo dado.

19.- 733° Respuesta: 13°

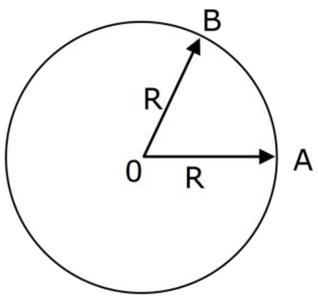
20.- 1110°

21.- $-800°$

Tema: ARCO Y SECTOR CIRCULAR

1. ARCO

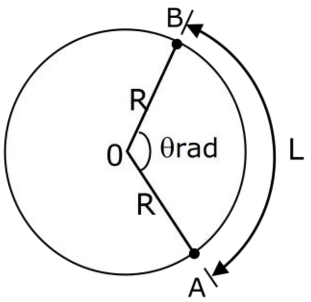
Una porción cualquiera de una circunferencia, recibe el nombre de "Arco" de la circunferencia.



AB: Arco AB
A: Origen del arco AB
B: Extremo del arco AB
O: Centro de la circunferencia
R: Radio de la circunferencia

Amplitud
Dada por la medida del ángulo central que sostiene el arco.

Longitud de Arco
En una circunferencia de radio "R" un ángulo central de "θ" radianes determina una longitud de arco "L", que se calcula multiplicando el número de radianes "θ" y el radio de la circunferencia "R".

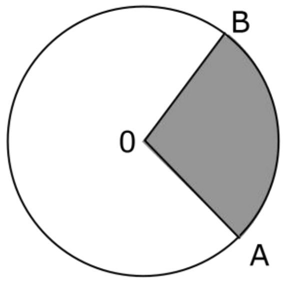


L: Longitud del arco AB
R: Radio de la circunferencia
θ: Nº de radianes del ángulo central ($0 \leq \theta\ 2 \leq \pi$)

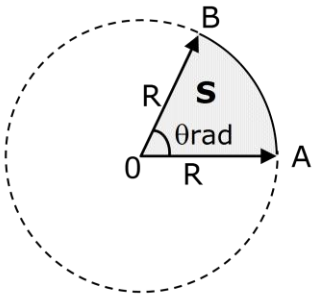
$$L = R.\theta$$

2. SECTOR CIRCULAR

Se llama sector circular a la región circular limitada por dos radios y el arco correspondiente.



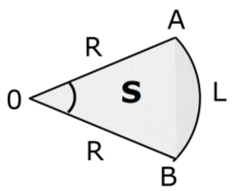
◁ AOB: Sector Circular AOB



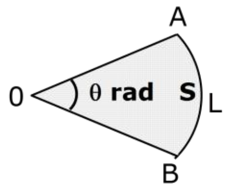
$$\boxed{S = \frac{\theta R^2}{2}}$$

Donde:
S: Área del sector circular AOB

Otras fórmulas



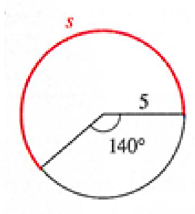
$$\boxed{S = \frac{L.R}{2}}$$



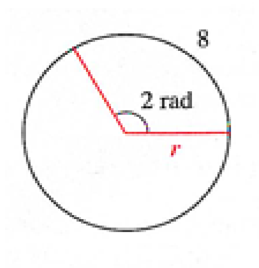
$$\boxed{S = \frac{L^2}{2\theta}}$$

A. Nivel Básico

1.- Encuentre la longitud del arco s en la figura



2.- Encuentre el radio r del círculo en la figura



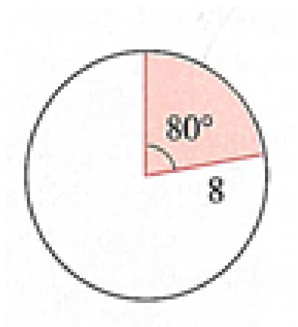
3.- Encuentre la longitud de un arco que subtiende a un ángulo central de 2 radianes en un círculo de radio 2.

4.- Un arco de longitud 100 m subtiende un ángulo central θ en un círculo de radio 50 m. Encuentre la media de θ en grados y radianes.

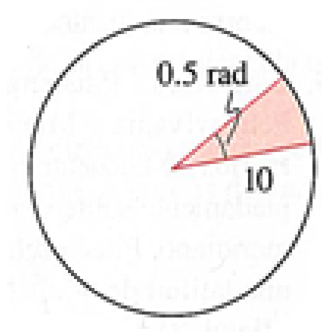
5.- Determine el radio del círculo si un arco de longitud 6m en el círculo subtiende un ángulo central de 135°

6.- Encuentre el área del sector mostrado en cada figura:

a)



b)



7.- Encuentre el área de un sector con un ángulo central 1 radian en un círculo de radio 10 m.

8.- El área de un sector de un círculo con un ángulo central de 2 radianes es 16 m^2. Encuentre el radio del círculo.

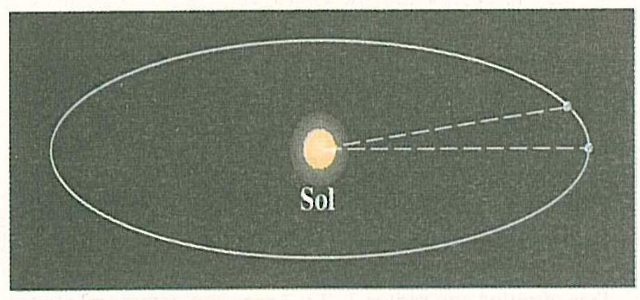
9.- El área de un círculo es 72 cm^2. Encuentre el área de un sector de este círculo que subtiende un ángulo central de $\frac{\pi}{6}$ radianes.

B. Nivel Medio

10.- Distancia Recorrida. Las ruedas de un automóvil miden 28 pulgadas de diámetro. ¿Qué tan lejos viajara el automóvil (en millas) si sus ruedas giran 10 000 veces sin deslizamiento?

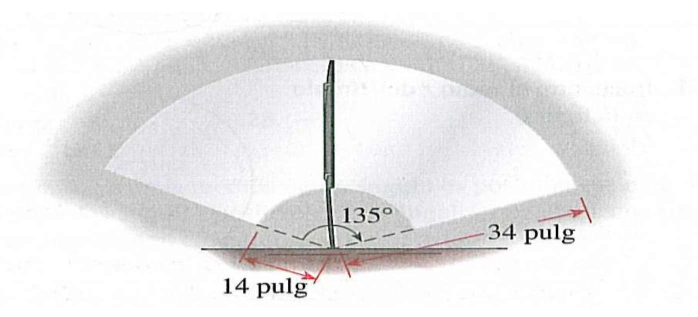
11.- Latitudes. Pittsburgh Pennsylvania y Miami Florida, se encuentra aproximadamente sobre el mismo meridiano. Pittsburgh tiene una latitud de 40.5° N y Miami 25.5° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es 3960 millas)

11.- Orbita de la tierra. Encuentre la distancia que viaja la tierra en un día y su trayectoria alrededor del Sol. Suponga que un año tiene 365 y que la trayectoria de la tierra alrededor del sol es un círculo de radio 93 millones de millas. (La trayectoria de la Tierra alrededor del sol es en realidad una elipse con el Sol en un foco. Esta elipse, sin embargo, tiene excentricidad muy pequeña, así que es aproximadamente circular.)



12.- Millas Náuticas. Encuentre la distancia a lo largo de un arco en la superficie de la tierra que subtiende un ángulo central de 1 minuta (1 minuto $= \frac{1}{60}$ de grado). La distancia se llama una milla náutica. (El radio de la Tierra mide 3960 millas).

13.-Limpia parabrisas. Los extremos superior e inferior de una hoja de limpia parabrisas están a 34 pulg. Y 14 pulg. Del punto central, respectivamente. Mientras está en operación el limpiador abarca 135°. Encuentre el área barrida por la hoja.

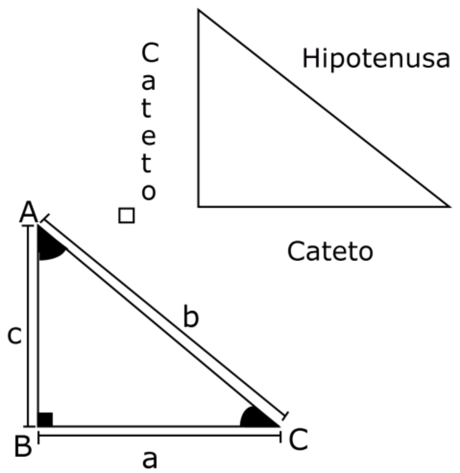


Tema: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas son números que resultan de dividir dos lados de un triángulo rectángulo.

TRIANGULO RECTANGULO



Teorema de Pitágoras

"La suma de cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

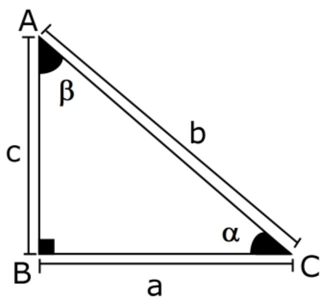
Teorema

"Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios".

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} = 90^o}$$

2. DEFINICION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS PARA UN ANGULO AGUDO.

Dado el triángulo ABC, recto en "B", según la figura, se establecen las siguientes definiciones para el ángulo agudo "α":



$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cat.op.}}{\text{Hip.}} = \frac{c}{b} = \text{Cos } \beta$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cat.ady.}}{\text{Hip.}} = \frac{a}{b} = \text{Sen } \beta$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\text{Cat.op.}}{\text{Cat.ady}} = \frac{c}{a} = \text{Ctg } \beta$$

$$\text{Ctg } \alpha = \frac{\text{Cat.ady.}}{\text{Cat.op.}} = \frac{a}{c} = \text{Tg } \beta$$

$$\text{Sec } \alpha = \frac{\text{Hip.}}{\text{Cat.ady}} = \frac{b}{a} = \text{Csc } \beta$$

$$\text{Csc } \alpha = \frac{\text{Hip.}}{\text{Cat.op}} = \frac{b}{c} = \text{Sec } \beta$$

Ejemplo:

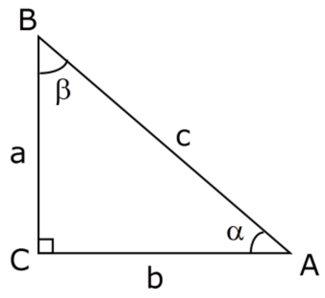
- En un triángulo rectángulo ABC (recto en C), se sabe que la suma de catetos es igual "k" veces la hipotenusa. Calcular la suma de los senos de los ángulos agudos del triángulo.

Resolución:

Nótese que en el enunciado del problema tenemos:

$$a + b = k.c$$

Nos piden calcular



$$\text{Sen}\alpha + \text{Sen}\beta = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

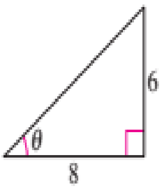
$$= \frac{a+b}{c}$$

Luego: $Sen\alpha + Sen\beta = \frac{k.c}{c} = k$

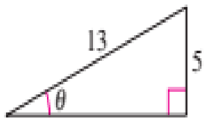
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ que se ilustra en la figura. (Use el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado del triángulo.)

5.

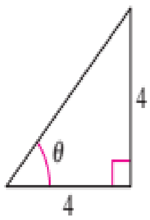


6.



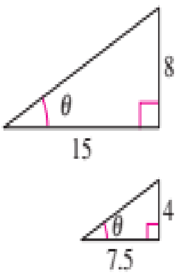
7.

8.

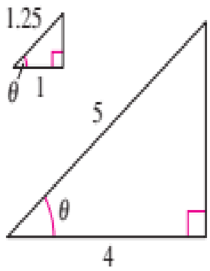


En los Ejercicios 9-12, encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ para cada uno de los dos triángulos. Explique por qué los valores de la función son iguales.

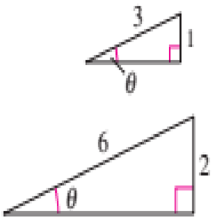
9.



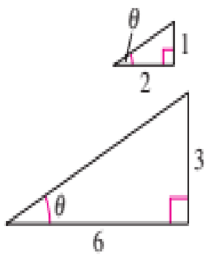
10.



11.



12.



En los Ejercicios 13-20, trace un triángulo rectángulo que corresponda a la función trigonométrica del ángulo agudo θ. Use el teorema de Pitágoras para determinar el tercer lado y a continuación encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

13. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ **14.** $\cos\theta = \frac{5}{6}$

15. $\sec\theta = \frac{3}{2}$ **16.** $\tan\theta = \frac{4}{5}$

17. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{5}$ **18.** $\sec\theta = \frac{17}{7}$

19. $\cot\theta = 3$ **20.** $\csc\theta = 9$

En los Ejercicios 21-30, construya un triángulo apropiado para completar la tabla. ($0° \le \theta \le 90°$, $0 \le \theta \le \pi/2$)

	Función	*θ (grad)*	*θ (rad)*	*Valor de la función*
21.	sen	30°		
22.	cos	45°		
23.	sec		$\frac{\pi}{4}$	
24.	tan		$\frac{\pi}{3}$	
25.	cot			$\frac{\sqrt{3}}{3}$
26.	csc			$\sqrt{2}$
27.	csc		$\frac{\pi}{6}$	
28.	sen		$\frac{\pi}{4}$	
29.	cot			1
30.	tan			$\frac{\sqrt{3}}{3}$

En los Ejercicios 31-36, use el valor o valores de la función dada, así como identidades trigonométricas (incluidas las de cofunción), para hallar las funciones trigonométricas indicadas.

31. $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

(a) $\operatorname{sen} 30°$ (b) $\cos 30°$
(c) $\tan 60°$ (d) $\cot 60°$

32. $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}, \quad \tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(a) $\csc 30°$ (b) $\cot 60°$
(c) $\cos 30°$ (d) $\cot 30°$

33. $\cos \theta = \frac{1}{3}$

(a) $\operatorname{sen} \theta$ (b) $\tan \theta$
(c) $\sec \theta$ (d) $\csc(90° - \theta)$

34. $\sec \theta = 5$

(a) $\cos \theta$ (b) $\cot \theta$
(c) $\cot(90° - \theta)$ (d) $\operatorname{sen} \theta$

35. $\cot \alpha = 5$

(a) $\tan \alpha$ (b) $\csc \alpha$
(c) $\cot(90° - \alpha)$ (d) $\cos \alpha$

36. $\cos \beta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(a) $\sec \beta$ (b) $\operatorname{sen} \beta$
(c) $\cot \beta$ (d) $\operatorname{sen}(90° - \beta)$

En los Ejercicios 37-46, use identidades trigonométricas para transformar el lado (miembro) izquierdo de la ecuación en el lado (miembro) derecho ($0 < \theta < \pi/2$).

37. $\tan \theta \cot \theta = 1$

38. $\cos \theta \sec \theta = 1$

39. $\tan \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha$

40. $\cot \alpha \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$

41. $(1 + \operatorname{sen} \theta)(1 - \operatorname{sen} \theta) = \cos^2 \theta$

42. $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \operatorname{sen}^2 \theta$

43. $(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta) = 1$

44. $\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1$

45. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \dfrac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \csc \theta \sec \theta$

46. $\dfrac{\tan \beta + \cot \beta}{\tan \beta} = \csc^2 \beta$

En los Ejercicios 47-56, use calculadora para evaluar cada función. Redondee las respuestas a cuatro lugares decimales. (Asegúrese que la calculadora esté en el modo correcto de ángulos.)

47. (a) $\operatorname{sen} 10°$ (b) $\cos 80°$

48. (a) $\tan 23.5°$ (b) $\cot 66.5°$

49. (a) $\operatorname{sen} 16.35°$ (b) $\csc 16.35°$

50. (a) $\cot 79.56°$ (b) $\sec 79.56°$

51. (a) $\cos 4° 50' 15''$ (b) $\sec 4° 50' 15''$

52. (a) $\sec 42° 12'$ (b) $\csc 48° 7'$

53. (a) $\cot 11° 15'$ (b) $\tan 11° 15'$

54. (a) $\sec 56° 8' 10''$ (b) $\cos 56° 8' 10''$

55. (a) $\csc 32° 40' 3''$ (b) $\tan 44° 28' 16''$

56. (a) $\sec\left(\frac{9}{5} \cdot 20 + 32\right)°$ (b) $\cot\left(\frac{9}{5} \cdot 30 + 32\right)°$

En los Ejercicios 57-62, encuentre los valores de θ en grados ($0° < \theta < 90°$) y radianes ($0 < \theta < \pi/2$) sin ayuda de calculadora.

57. (a) $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ (b) $\csc \theta = 2$

58. (a) $\cos \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\tan \theta = 1$

59. (a) $\sec \theta = 2$ (b) $\cot \theta = 1$

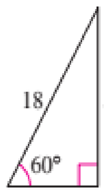
60. (a) $\tan \theta = \sqrt{3}$ (b) $\cos \theta = \frac{1}{2}$

61. (a) $\csc \theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (b) $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

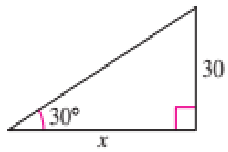
62. (a) $\cot \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\sec \theta = \sqrt{2}$

En los Ejercicios 63-66, despeje x, y o r como se indica.

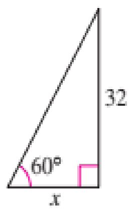
63. Despeje y.



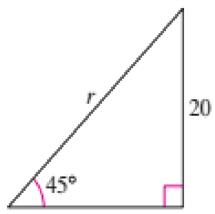
64. Despeje x.



65. Despeje x.

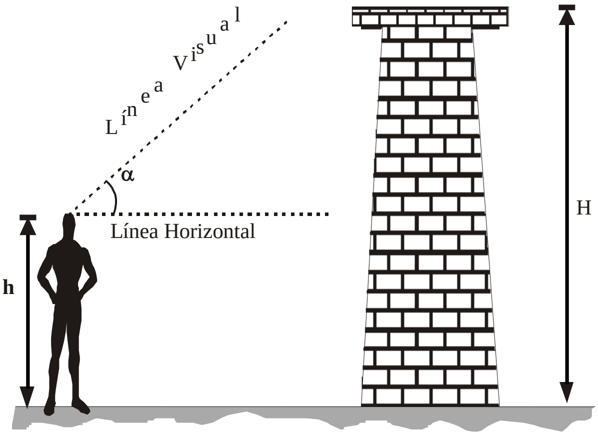


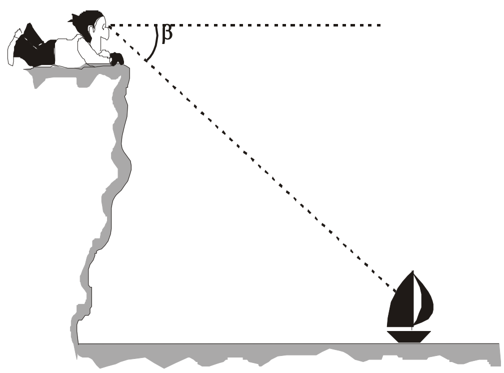
66. Despeje r.



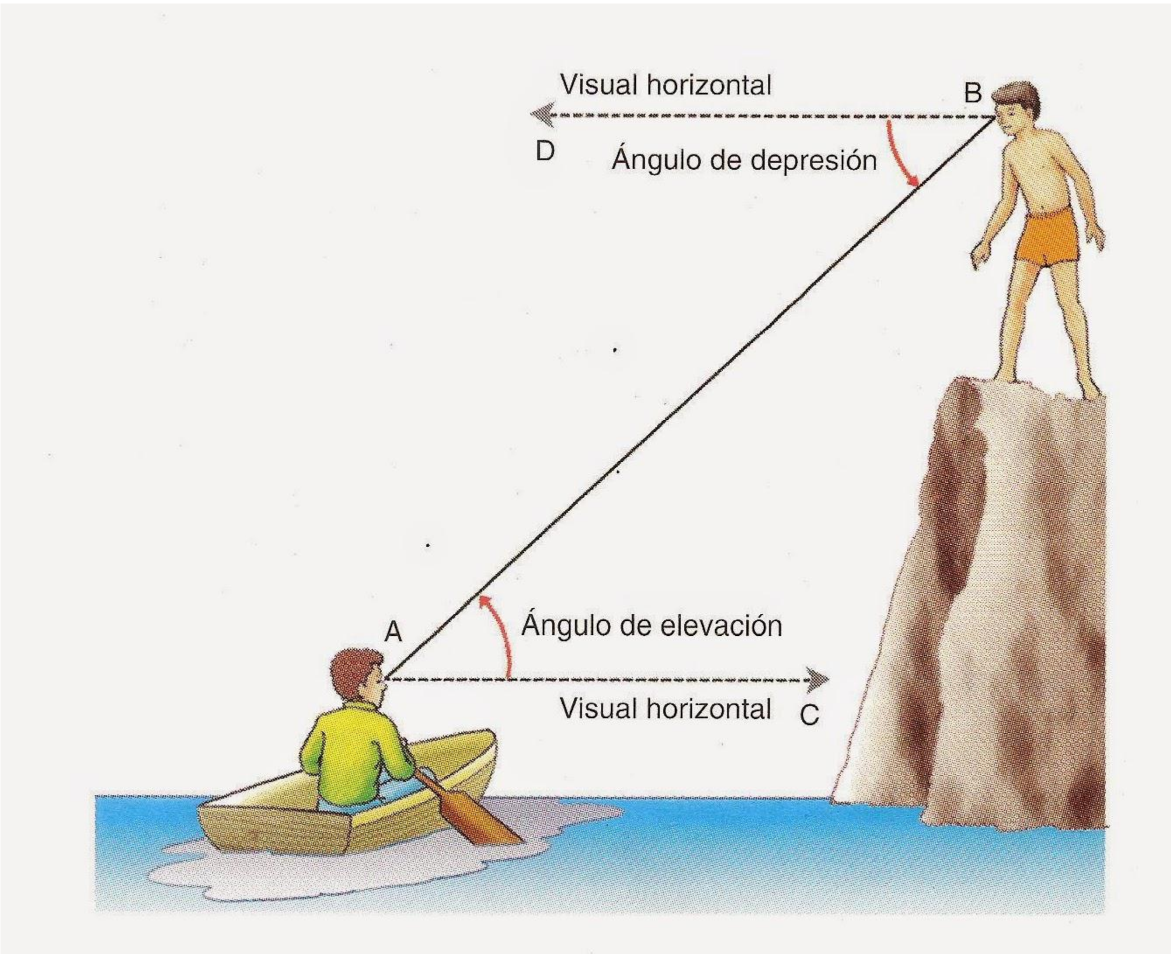
67. EDIFICIO EMPIRE STATE Supongamos que usted se encuentra de pie a 45 metros de distancia de la base del edificio Empire State. Estima que el ángulo de elevación hasta el piso 86 (el observatorio) es 82°. Si la altura total del edificio es de otros 123 metros arriba del piso 86, ¿cuál es la altura aproximada del edificio? Uno de sus amigos está en el piso 86. ¿Cuál es la distancia entre usted y su amigo?

Tema: ÁNGULO DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN





α : **Ángulo de Elevación**



1. Una persona halla que la elevación angular de una torre es de "θ" si avanza 6m. Hacia la torre su elevación es de $45°$ y acercándose 4m mas su elevación es de "$90° - \theta$". Hallar la altura de la torre si la persona mide 2m.

2. Dos móviles A y B parten de un punto P el móvil A en el rumbo NθE y el móvil B en el rumbo S2θE cuando A recorre 8m, B recorre 15m y la distancia que los separa en ese momento es 17m.
 ¿Cuál es el valor de "θ"?

3. Un avión que esta por aterrizar observa en su misma trayectoria la pista de aterrizaje de extensión igual al doble de la altura que se encuentra. Si ve al extremo más alejado con un ángulo de depresión de $22°30'$. Calcular el ángulo de depresión con que observa al otro extremo.

4. Un móvil se desplaza 40 km. según el rumbo S$60°$O con respecto a un punto luego se desplaza 20km. Según el rumbo N$60°$O.
   Hallar el desplazamiento total con respecto a su nueva ubicación.

5. Una hormiga observa la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación "θ". Cuando la distancia que los separa se ha reducido a la tercera parte, el nuevo ángulo de elevación se ha duplicado.
   Calcular "θ"

6. Desde un punto al SUR de una torre se observa a su parte superior con un ángulo de elevación "θ".
   El observador avanza en el rumbo NθE hasta ubicarse exactamente al ESTE de la torre.
   Calcular el ángulo de elevación con que se observa nuevamente la parte superior de la torre esta nueva posición.

7. Desde lo alto de un acantilado de 21 m de altura se observa una boya en el mar con un ángulo de depresión de 16°. Calcular aproximadamente la distancia de la boya al pie del acantilado.

8. Desde un punto en el suelo se observa la parte más alta de un edificio de 81 m. de altura con un ángulo de elevación cuya tangente es 1,8. ¿Qué distancia hay entre la base del edificio y el punto de observación?

9. Un globo aerostático se encuentra entre dos pueblos que están separados 10km. Y los observa con ángulos de depresión de 37° y 53°. ¿A qué altura se encuentra volando el globo?

10. A 20 m. de un poste, se observa el foco de parte superior con un ángulo de elevación cuya tangente es 0,5 ¿Cuánto habrá que acercarnos al poste en la misma dirección para ver el foco con un ángulo de elevación que es el complemento del anterior?

11. Desde lo alto de una cima se observan los puntos "A" y "B" distantes a 20m. y 50 m. del pie de la cima con ángulo de depresión "x" e "y".
    Determinar la altura de la cima., sabiendo que se cumple:

$$\text{Tanx} - \text{Tany} = \frac{3}{10}$$

12. Un niño de 1m de estatura se dirige hacia un edificio, en un instante dado se detiene y observa la azotea del edificio con un ángulo de elevación de 37° , luego avanza 7m y vuelve a observar el punto anterior con un ángulo de elevación de 45° . Calcule la altura del edificio.

13. Calcular el mayor ángulo formado por las direcciones:

$$\text{SE}\frac{1}{4}\text{S} \quad \text{y} \quad \text{N}\frac{1}{4}\text{NE}$$

14. Un basquetbolista observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 37°, si la persona dista 8m. del árbol. Calcular el valor del ángulo de observación del árbol, sabiendo que la altura de la persona es la cuarta parte de la del árbol en mención.

15. Un pato que se encuentra sobre una laguna se percata de la presencia de un cazador a 14m, el ave alza vuelo en línea recta con un ángulo de 53° alejándose. El cazador hace un tiro certero con un ángulo de 37°. Calcular la distancia de vuelo del a ave antes de caer muerta.

16. Un árbol se encuentra sobre una ladera la cual tiene una inclinación de 23° con la horizontal. A una distancia de 30 m. colina abajo desde el píe del árbol, el ángulo de elevación hasta su parte superior es de 53°. Calcule la altura del árbol.

17. Un avión en picada, es observado desde un punto de tierra con una ángulo de elevación de 60° y una visual de 800 m, luego de pasar sobre dicho punto de observación es observado nuevamente desde dicho punto con un ángulo de elevación de 30° y una visual de 600 m. ¿Con que ángulo de inclinación, con respecto de la horizontal cae dicho avión?

18. Una cuerda elástica se mantiene unida a un poste y a tierra manteniéndole poste verticalmente. Al medio día un movimiento telúrico hace que el poste sufra una inclinación proyectando una sombra la cual es la mitad del poste. Si antes y después del temblor el ángulo formado por las cuerda y la tierra eran de 53° yθ. Calcular aproximadamente $\text{Tan}\theta$

19. Pepe observa la parte más alta de un faro con un ángulo de elevación ‘‘θ’’, si se acerca hacia el faro un distancia ‘‘d’’m observa al punto anterior con un ángulo de elevación 2θ y a un punto que esta ‘‘x’’m debajo y en la misma vertical del punto anterior con un ángulo de elevaciónθ. Hallar x.

20. En el camino hacia la cima de una colina esa inclinada un ángulo ‘‘α’’ respecto a la horizontal. Si desde la cima se divisa un punto del plano horizontal que pasa por la base de la colina con un ángulo de depresiónθ. Calcular la altura de la colina si dicho punto se encuentra a 180m. de la base de la colina. Además:

$$\text{Cot}\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \text{Cot}\theta = \frac{12}{5}$$

21. A, B, C son tres puntos que se encuentran al OESTE, SO y SUR de un punto P respectivamente si desde B se observa a los puntos A y C en las direcciones NαO y SαE respectivamt.
    Hallar el valor de la tangente del ángulo CAP, si BC=5 y BA=6.
22. Dos barcos salen de un punto en direcciones que forman un ángulo recto, siendo el primero de ellos en la dirección EθN ($\theta < 45°$), si después de navegar ambos barcos cierto tiempo a la misma velocidad desde el primero se al segundo en la dirección S$27°$O.
    ¿En qué dirección salió el segundo barco?

23. Desde un punto a 28m. de altura sobre el nivel de las cristalinas y quietas aguas de una laguna se observa a un globo con un ángulo de elevación de $53°$ y su imagen reflejada en la laguna con un ángulo de depresiónα. ¿A qué altura esta el globo obre el nivel de la laguna?
    Si: $\mathrm{Csc}\alpha = 1{,}025$

24. Un avión que esta por aterrizar observa en su misma trayectoria la pista de aterrizaje de extensión igual al doble de la altura que se encuentra. Si ve al extremo más alejado con un ángulo de depresión de $22°30'$. Calcular el ángulo de depresión con que observa al otro extremo.

25. Desde un punto al SUR de una torre se observa a su parte superior con un ángulo de elevación "θ".
    El observador avanza en el rumbo NθE hasta ubicarse exactamente al ESTE de la torre.
    Calcular el ángulo de elevación con que se observa nuevamente la parte superior de la torre esta nueva posición.

26. Desde un punto situado al SUR de una torre se observa la parte más alta de esta con un ángulo de elevación de $30°$ y desde otro punto situado al ESTE de la torre el ángulo de elevación es de $45°$.

    Hallar la longitud de la torre si la distancia entre los dos puntos de observación es de 10m.

27. Desde un faro se observa a dos barcos A y B en las direcciones N$35°$O y S$55°$O respectivamente, en este mismo instante B es observado desde A en la dirección S$255°$O, si la velocidad de A es de 24km/h, la velocidad de B es de $24\sqrt{3}$ km/h y la distancia inicial de A al faro es de 5km. Hallar la distancia entre A y B al cabo de una hora y 15 minutos.

PORTAFOLIO N° 15 GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender la trigonometría.

PRÁCTICA N° 15

Tema: GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. FUNCIÓN SENO

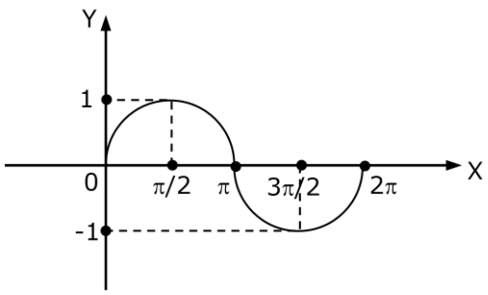
a. Definición

$\boxed{\text{Sen} = \{(x;\ y)\ /\ y = \text{Senx}\}}$

DOM (SEN): "x" $\in$ <-∞; ∞> o IR
RAN (SEN): "Y" $\in$ [-1; 1]

Gráfico de la Función SENO

- *Una parte de la gráfica de la función seno se repite por tramos de longitud 2π. Esto quiere decir que la gráfica de la función seno es periódica de período 2π. Por lo tanto todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico:*



X	0	π/2	π	3π/2	2π
Y=Senx	0	1	0	-1	0

Nota
El período de una función se representa por la letra "T". Entonces el período de la función seno se denota así:

$\boxed{T(\text{Senx}=2\pi)}$

1. FUNCIÓN COSENO

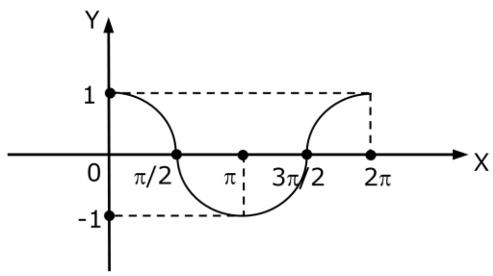
a. Definición

$\boxed{\text{Cos} = \{(x;\ y)\ /\ y=\text{Cosx}\}}$

DOM (COS): "x" $\in$ <-∞; ∞> o IR
RAN (COS): "Y" $\in$ [-1; 1]

Gráfico de la Función COSENO

- *Una parte de la gráfica de la función coseno se repite por tramos de longitud 2π. Esto quiere decir que la gráfica de la función coseno es periodo 2π. Por la tanto todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico:*



X	0	π/2	π	3π/2	2π
Y=Cosx	1	0	-1	0	1

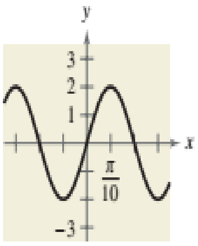
Nota
El período de una función Coseno se denota así:

$\boxed{T(\text{Cosx}=2\pi)}$

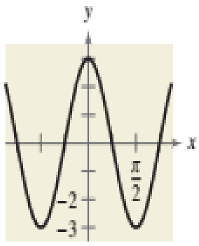
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-18, encuentre el periodo y amplitud.

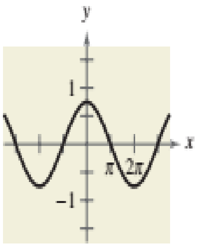
5. $y = 2 \operatorname{sen} 5x$



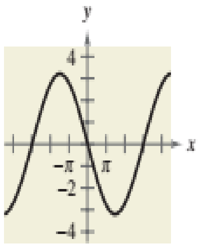
6. $y = 3 \cos 2x$



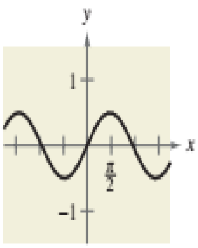
7. $y = \frac{3}{4} \cos \frac{x}{2}$



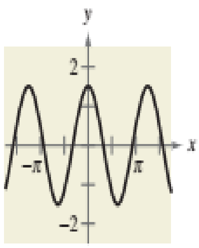
8. $y = -3 \operatorname{sen} \frac{x}{3}$



9. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}$



10. $y = \frac{3}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$



11. $y = -4 \operatorname{sen} x$

12. $y = -\cos \frac{2x}{3}$

13. $y = 3 \operatorname{sen} 10x$

14. $y = \frac{1}{5} \operatorname{sen} 6x$

15. $y = \frac{5}{3} \cos \frac{4x}{5}$

16. $y = \frac{5}{2} \cos \frac{x}{4}$

17. $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\pi x$

18. $y = \frac{2}{3} \cos \frac{\pi x}{10}$

En los Ejercicios 19-26, describa la relación entre las gráficas de f y g. Considere la amplitud, periodo y desplazamientos.

19. $f(x) = \operatorname{sen} x$
$g(x) = \operatorname{sen}(x - \pi)$

20. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos(x + \pi)$

21. $f(x) = \cos 2x$
$g(x) = -\cos 2x$

22. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$
$g(x) = \operatorname{sen}(-3x)$

23. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos 2x$

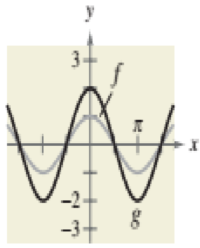
24. $f(x) = \operatorname{sen} x$
$g(x) = \operatorname{sen} 3x$

25. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
$g(x) = 3 + \operatorname{sen} 2x$

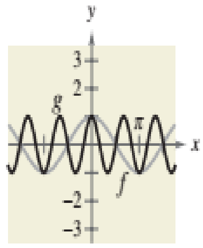
26. $f(x) = \cos 4x$
$g(x) = -2 + \cos 4x$

En los Ejercicios 27-30, describa la relación entre las gráficas de f y g. Considere la amplitud, periodo y desplazamientos.

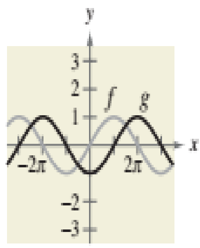
27.



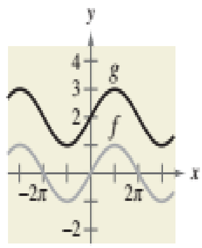
28.



29.



30.



En los Ejercicios 31-38, grafique f y g en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. (Incluya dos periodos.)

31. $f(x) = -2 \operatorname{sen} x$
$g(x) = 4 \operatorname{sen} x$

32. $f(x) = \operatorname{sen} x$
$g(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{3}$

33. $f(x) = \cos x$
$g(x) = 2 + \cos x$

34. $f(x) = 2 \cos 2x$
$g(x) = -\cos 4x$

35. $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

$g(x) = 3 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

36. $f(x) = 4\operatorname{sen}\pi x$

$g(x) = 4\operatorname{sen}\pi x - 3$

37. $f(x) = 2\cos x$

$g(x) = 2\cos(x + \pi)$

38. $f(x) = -\cos x$

$g(x) = -\cos(x - \pi)$

En los Ejercicios 39-60, trace la gráfica de la función. (Incluya dos periodos.)

39. $y = 5\operatorname{sen} x$ **40.** $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$

41. $y = \frac{1}{3}\cos x$ **42.** $y = 4\cos x$

43. $y = \cos\frac{x}{2}$ **44.** $y = \operatorname{sen} 4x$

45. $y = \cos 2\pi x$ **46.** $y = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{4}$

47. $y = -\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{3}$ **48.** $y = -10\cos\frac{\pi x}{6}$

49. $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **50.** $y = \operatorname{sen}(x - 2\pi)$

51. $y = 3\cos(x + \pi)$ **52.** $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

53. $y = 2 - \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{3}$ **54.** $y = -3 + 5\cos\frac{\pi t}{12}$

55. $y = 2 + \frac{1}{10}\cos 60\pi x$ **56.** $y = 2\cos x - 3$

57. $y = 3\cos(x + \pi) - 3$ **58.** $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 4$

59. $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ **60.** $y = -3\cos(6x + \pi)$

En los Ejercicios 61-66, g está relacionada a una función principal $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ o $f(x) = \cos(x)$. (a) Describa la secuencia de transformaciones de f a g. (b) Trace la gráfica de g. (c) Use notación de funciones para escribir g en términos de f.

61. $g(x) = \operatorname{sen}(4x - \pi)$ **62.** $g(x) = \operatorname{sen}(2x + \pi)$

63. $g(x) = \cos(x - \pi) + 2$ **64.** $g(x) = 1 + \cos(x + \pi)$

65. $g(x) = 2\operatorname{sen}(4x - \pi) - 3$ **66.** $g(x) = 4 - \operatorname{sen}(2x + \pi)$

En los Ejercicios 67-72, use una calculadora de gráficas para graficar la función. Incluya dos periodos. Asegúrese de escoger una pantalla apropiada.

67. $y = -2\operatorname{sen}(4x + \pi)$ **68.** $y = -4\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

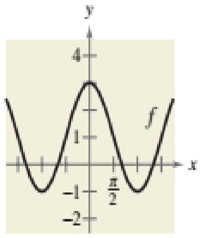
69. $y = \cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

70. $y = 3\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

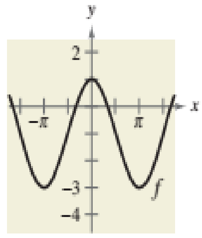
71. $y = -0.1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10} + \pi\right)$ **72.** $y = \frac{1}{100}\operatorname{sen} 120\pi t$

RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 73-76, encuentre a y d para la función $f(x) = a\cos x + d$ tal que la gráfica de f se relacione con la figura.

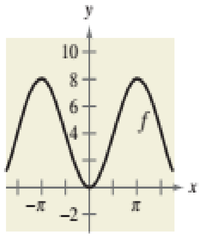
73.



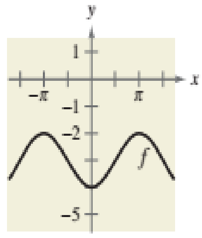
74.



75.

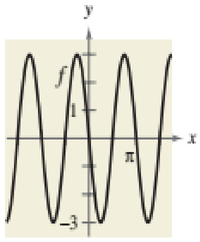


76.

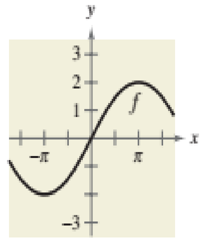


RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 77-80, encuentre a, b y c para la función $f(x) = a\operatorname{sen}(bx - c)$ tal que la gráfica de f se relacione con la figura.

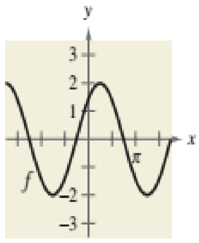
77.



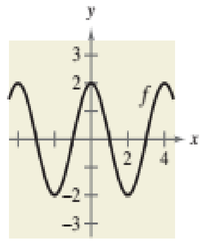
78.



79.



80.



En los Ejercicios 81 y 82, use una calculadora de gráficas para graficar y_1 y y_2 en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Use las gráficas para hallar números reales x tales que $y_1 = y_2$.

81. $y_1 = \operatorname{sen} x$

$y_2 = -\frac{1}{2}$

82. $y_1 = \cos x$

$y_2 = -1$

En los Ejercicios 83-86, escriba una ecuación para la función descrita por las características indicadas.

83. Una curva senoidal con periodo de π, una amplitud de 2, un desfase derecho de $\pi/2$ y una traslación vertical de 1 unidad hacia arriba.

84. Una curva senoidal con periodo de 4π, amplitud de 3, desfasamiento izquierdo de $\pi/4$ y traslación vertical de 1 unidad hacia abajo.

85. Una curva cosenoidal con periodo de π, amplitud de 1, desfasamiento izquierdo de π y traslación vertical de $\frac{3}{2}$ de unidad hacia abajo.

86. Una curva cosenoidal con período de 4π, amplitud de 3, desfasamiento derecho de $\pi/2$ y traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.

87. CICLO RESPIRATORIO Para una persona en reposo, la velocidad v (en litros por segundo) de flujo de aire durante un ciclo respiratorio (el tiempo desde que se inicia una respiración hasta el inicio de la siguiente) está dada por $v = 0.85 \text{ sen } \frac{\pi t}{3}$, donde t es el tiempo (en segundos). (La inhalación ocurre cuando $v > 0$ y la exhalación, cuando $v < 0$.)

(a) Encuentre el tiempo para un ciclo respiratorio completo.

(b) Encuentre el número de ciclos por minuto.

(c) Trace la gráfica de la función de velocidad.

88. CICLO RESPIRATORIO Después de hacer ejercicio unos minutos, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la velocidad de flujo de aire se aproxima con $v = 1.75 \text{ sen } \frac{\pi t}{2}$, donde t es el tiempo (en segundos). (La inhalación ocurre cuando $v > 0$ y la exhalación, cuando $v < 0$.)

(a) Encuentre el tiempo para un ciclo respiratorio completo.

(b) Encuentre el número de ciclos por minuto.

(c) Trace la gráfica de la función de velocidad.

89. ANÁLISIS DE DATOS: METEOROLOGÍA La tabla siguiente muestra las temperaturas altas diarias máximas en Las Vegas L y en International Falls I (en grados Fahrenheit) para el mes t, con $t = 1$ correspondiente a enero. (Fuente: National Climate Data Center)

Mes, t	Las Vegas, L	International Falls, I
1	57.1	13.8
2	63.0	22.4
3	69.5	34.9
4	78.1	51.5
5	87.8	66.6
6	98.9	74.2
7	104.1	78.6
8	101.8	76.3
9	93.8	64.7
10	80.8	51.7
11	66.0	32.5
12	57.3	18.1

(a) Un modelo para la temperatura en Las Vegas está dado por

$$L(t) = 80.60 + 23.50 \cos\left(\frac{\pi t}{6} - 3.67\right).$$

Encuentre un modelo trigonométrico para International Falls.

(b) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo para las temperaturas en Las Vegas. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(c) Use una calculadora de gráficas para graficar los puntos de datos y el modelo para las temperaturas en International Falls. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) Use los modelos para estimar el promedio de temperatura máxima en cada ciudad. ¿Cuál término de los modelos usó usted? Explique.

(e) ¿Cuál es el periodo de cada modelo? ¿Los periodos son lo que usted esperaba? Explique.

(f) ¿Cuál ciudad tiene la mayor variabilidad en temperatura en todo el año? ¿Cuál factor de los modelos determina esta variabilidad? Explique.

90. SALUD La función dada por

$$P = 100 - 20 \cos \frac{5\pi t}{3}$$

aproxima la presión sanguínea P (en milímetros de mercurio) en el tiempo t (en segundos) para una persona en reposo.

(a) Encuentre el periodo de la función.

(b) Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

91. AFINACIÓN DE UN PIANO Al afinar un piano, un técnico golpea un diapasón para la nota de *la* arriba de la *do* mayor, y ajusta un movimiento ondulatorio que puede ser aproximado con $y = 0.001 \text{ sen } 880\pi t$, donde t es el tiempo (en segundos).

(a) ¿Cuál es el periodo de la función?

(b) La frecuencia f está dada por $f = 1/p$. ¿Cuál es la frecuencia de la nota?

92. ANÁLISIS DE DATOS: ASTRONOMÍA Los porcentajes y (en forma decimal) de la cara de la Luna que estuvo iluminada el día x en el año 2009, donde $x = 1$ representa el 1 de enero, se muestran en la tabla. (Fuente: U.S. Naval Observatory)

x	y
4	0.5
11	1.0
18	0.5
26	0.0
33	0.5
40	1.0

Funciones Trigonométricas Inversas

Definición de función seno inversa

La **función seno inversa** se define por

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad \text{si y sólo sí} \qquad \operatorname{sen} y = x$$

donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. El dominio de $y = \operatorname{arcsen} x$ es $[-1, 1]$, en tanto que el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

Definiciones de las funciones trigonométricas inversas

Función	*Dominio*	*Rango*
$y = \operatorname{arcsen} x$ si y sólo si $\operatorname{sen} y = x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \arctan x$ si y sólo si $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Propiedades inversas de funciones trigonométricas

Si $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, entonces

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y.$$

Si $-1 \le x \le 1$ y $0 \le y \le \pi$, entonces

$$\cos(\arccos x) = x \qquad \text{y} \qquad \arccos(\cos y) = y.$$

Si x es un número real y $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces

$$\tan(\arctan x) = x \qquad \text{y} \qquad \arctan(\tan y) = y.$$

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-20, evalúe la expresión sin usar calculadora.

5. $\arcsen \frac{1}{2}$ **6.** $\arcsen 0$

7. $\arccos \frac{1}{2}$ **8.** $\arccos 0$

9. $\arctan \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **10.** $\arctan(1)$

11. $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **12.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

13. $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$ **14.** $\arctan \sqrt{3}$

15. $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **16.** $\arcsen \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

17. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **18.** $\tan^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

19. $\tan^{-1} 0$ **20.** $\cos^{-1} 1$

En los Ejercicios 21 y 22, use una calculadora de gráficas para graficar f, g y $y = x$ en la misma pantalla para verificar geométricamente que g sea la función inversa de f. (Asegúrese de restringir en forma apropiada el dominio de f.)

21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \arcsen x$

22. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \arctan x$

En los Ejercicios 23-40, use una calculadora para evaluar la expresión. Redondee el resultado a dos lugares decimales.

23. $\arccos 0.37$ **24.** $\arcsen 0.65$

25. $\arcsen(-0.75)$ **26.** $\arccos(-0.7)$

27. $\arctan(-3)$ **28.** $\arctan 25$

29. $\operatorname{sen}^{-1} 0.31$ **30.** $\cos^{-1} 0.26$

31. $\arccos(-0.41)$ **32.** $\arcsen(-0.125)$

33. $\arctan 0.92$ **34.** $\arctan 2.8$

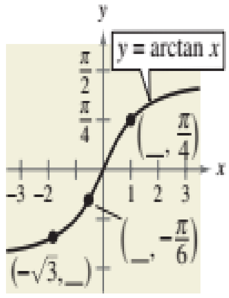
35. $\arcsen \frac{7}{8}$ **36.** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

37. $\tan^{-1} \frac{19}{4}$ **38.** $\tan^{-1}\left(-\frac{95}{7}\right)$

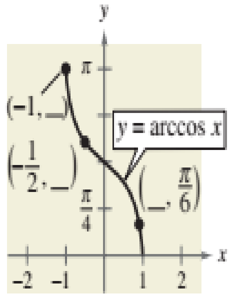
39. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{372}\right)$ **40.** $\tan^{-1}\left(-\sqrt{2165}\right)$

En los Ejercicios 41 y 42, determine las coordenadas faltantes de los puntos sobre la gráfica de la función.

41.

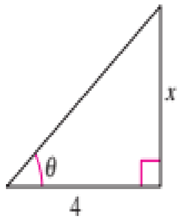


42.

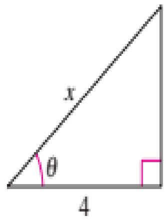


En los Ejercicios 43-48, use una función trigonométrica inversa para escribir θ como función de x.

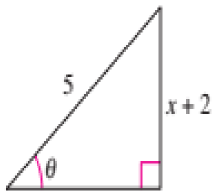
43.



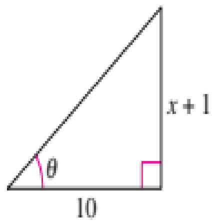
44.



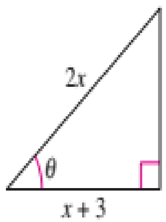
45.



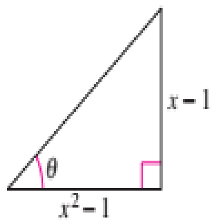
46.



47.



48.



En los Ejercicios 49-54, use las propiedades de las funciones trigonométricas inversas para evaluar la expresión.

49. $\operatorname{sen}(\arcsen 0.3)$ **50.** $\tan(\arctan 45)$

51. $\cos[\arccos(-0.1)]$ **52.** $\operatorname{sen}[\arcsen(-0.2)]$

53. $\arcsen(\operatorname{sen} 3\pi)$ **54.** $\arccos\left(\cos \dfrac{7\pi}{2}\right)$

En los Ejercicios 55-66, encuentre el valor exacto de la expresión. (*Sugerencia:* trace un triángulo rectángulo.)

55. $\operatorname{sen}\left(\arctan \frac{3}{4}\right)$

56. $\sec\left(\operatorname{arcsen} \frac{4}{5}\right)$

57. $\cos(\tan^{-1} 2)$

58. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

59. $\cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{5}{13}\right)$

60. $\csc\left[\arctan\left(-\frac{5}{12}\right)\right]$

61. $\sec\left[\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

62. $\tan\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$

63. $\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

64. $\cot\left(\arctan \frac{5}{8}\right)$

65. $\csc\left[\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

66. $\sec\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

En los Ejercicios 67-76, escriba una expresión algebraica que sea equivalente a la expresión. (*Sugerencia:* trace un triángulo rectángulo, como se demuestra en el Ejemplo 7.)

67. $\cot(\arctan x)$

68. $\operatorname{sen}(\arctan x)$

69. $\cos(\operatorname{arcsen} 2x)$

70. $\sec(\arctan 3x)$

71. $\operatorname{sen}(\arccos x)$

72. $\sec[\operatorname{arcsen}(x - 1)]$

73. $\tan\left(\arccos \frac{x}{3}\right)$

74. $\cot\left(\arctan \frac{1}{x}\right)$

75. $\csc\left(\arctan \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

76. $\cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{x - h}{r}\right)$

En los Ejercicios 77 y 78, use una calculadora de gráficas para graficar *f* y *g* en la misma pantalla para verificar que las dos funciones sean iguales. Explique por qué son iguales. Identifique cualesquiera asíntotas de las gráficas.

77. $f(x) = \operatorname{sen}(\arctan 2x), \quad g(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

78. $f(x) = \tan\left(\arccos \frac{x}{2}\right), \quad g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$

En los Ejercicios 79-82, llene el espacio en blanco.

79. $\arctan \frac{9}{x} = \operatorname{arcsen}(\quad), \quad x \neq 0$

80. $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{36 - x^2}}{6} = \arccos(\quad), \quad 0 \leq x \leq 6$

81. $\arccos \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \operatorname{arcsen}(\quad)$

82. $\arccos \frac{x - 2}{2} = \arctan(\quad), \quad |x - 2| \leq 2$

En los Ejercicios 83 y 84, trace una gráfica de la función y compare la gráfica de *g* con la de $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

83. $g(x) = \operatorname{arcsen}(x - 1)$

84. $g(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$

En los Ejercicios 85-90, trace una gráfica de la función.

85. $y = 2 \arccos x$

86. $g(t) = \arccos(t + 2)$

87. $f(x) = \arctan 2x$

88. $f(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan x$

89. $h(v) = \tan(\arccos v)$

90. $f(x) = \arccos \frac{x}{4}$

En los Ejercicios 91-96, use una calculadora de gráficas para graficar la función.

91. $f(x) = 2 \arccos(2x)$

92. $f(x) = \pi \operatorname{arcsen}(4x)$

93. $f(x) = \arctan(2x - 3)$

94. $f(x) = -3 + \arctan(\pi x)$

95. $f(x) = \pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

96. $f(x) = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\right)$

En los Ejercicios 97 y 98, escriba la función en términos de la función seno con el uso de la identidad

$$A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}\left(\omega t + \arctan \frac{A}{B}\right).$$

Use una calculadora de gráficas para graficar ambas formas de la función. ¿Qué implica la gráfica?

97. $f(t) = 3 \cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t$

98. $f(t) = 4 \cos \pi t + 3 \operatorname{sen} \pi t$

En los Ejercicios 99-104, llene el espacio en blanco. Si no es posible, exprese la razón. (*Nota:* la notación $x \to c^+$ indica que *x* se aproxima a *c* desde la derecha y $x \to c^-$ indica que *x* se aproxima a *c* desde la izquierda.)

99. Cuando $x \to 1^-$, el valor de $\operatorname{arcsen} x \to$ ____.

100. Cuando $x \to 1^-$, el valor de $\arccos x \to$ ____.

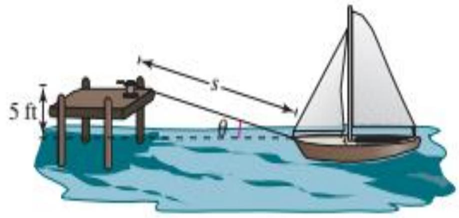
101. Cuando $x \to \infty$, el valor de arctan $x \to$ ☐.

102. Cuando $x \to -1^+$, el valor de arcsen $x \to$ ☐.

103. Cuando $x \to -1^+$, el valor de arccos $x \to$ ☐.

104. Cuando $x \to -\infty$, el valor de arctan $x \to$ ☐.

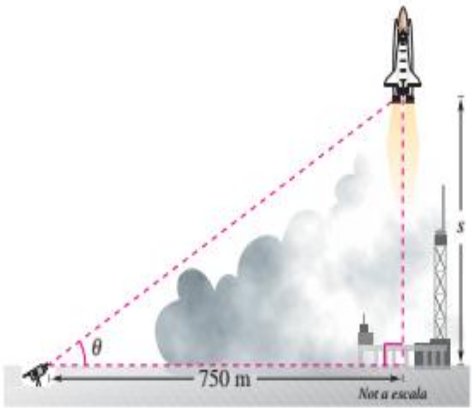
105. ATRACAR UN BOTE Un bote es jalado por medio de un malacate situado en un muelle a 5 pies sobre la cubierta del bote (vea figura). Sea θ el ángulo de elevación del bote al malacate y sea s la longitud de la cuerda del malacate al bote.



(a) Escriba θ como función de s.

(b) Hallar θ cuando $s = 40$ pies y $s = 20$ pies.

106. FOTOGRAFÍA Una cámara de televisión al nivel del suelo está filmando el despegue de un transbordador espacial en un punto a 750 metros de la plataforma de lanzamiento (vea figura). Sea θ el ángulo de elevación del transbordador y sea s la altura del transbordador.

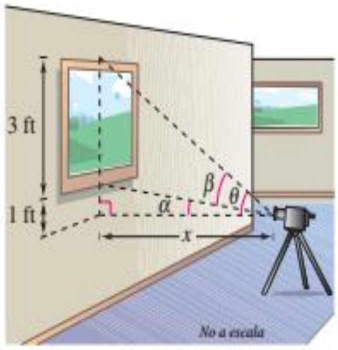


(a) Escriba θ como función de s.

(b) Encuentre θ cuando $s = 300$ metros y $s = 1200$ metros.

107. FOTOGRAFÍA Un fotógrafo está tomando una fotografía de una pintura de tres pies de alto colgada en una galería de arte. El lente de la cámara está a 1 pie debajo del borde inferior de la pintura (vea figura). El ángulo β subtendido por el lente de la cámara a x pies de la pintura es

$$\beta = \arctan \frac{3x}{x^2 + 4}, \quad x > 0.$$

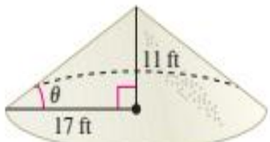


(a) Use una calculadora de gráficas para graficar β como función de x.

(b) Mueva el cursor a lo largo de la gráfica para aproximar la distancia desde la pintura cuando β sea máximo.

(c) Identifique la asíntota de la gráfica y discuta su significado en el contexto del problema.

108. ÁNGULO DE REPOSO GRANULAR Diferentes tipos de sustancias granulares se asientan naturalmente a diferentes ángulos cuando se almacenan en pilas en forma de conos. Este ángulo θ se denomina *ángulo de reposo* (vea figura). Cuando sal de piedra se almacena en una pila en forma de cono de 11 pies de alto, el diámetro de la base de la pila es de unos 34 pies. (Fuente: Bulk-Store Structures, Inc.)



(a) Encuentre el ángulo de reposo para sal de piedra.

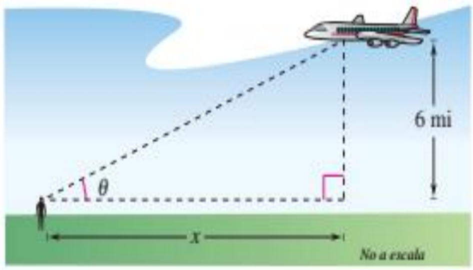
(b) ¿Cuál es la altura de la pila de sal de piedra que tiene un diámetro de 100 pies en la base?

109. ÁNGULO DE REPOSO GRANULAR Cuando se almacena maíz integral en una pila en forma de cono de 20 pies de alto, el diámetro de la base de la pila es de unos 82 pies.

(a) Encuentre el ángulo de reposo del maíz integral.

(b) ¿Cuál es la altura de la pila de maíz que tiene un diámetro de base de 100 pies?

110. ÁNGULO DE ELEVACIÓN Un avión vuela a una altitud de 6 millas hacia un punto directamente sobre un observador. Considere θ y x como se ve en la figura.



(a) Escriba θ como función de x.

(b) Encuentre θ cuando $x = 7$ millas y $x = 1$ milla.

PORTAFOLIO N° 16 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender la trigonometría.

PRÁCTICA N° 16

Tema: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares e impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunción

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

GUÍA PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. **Empezar con un lado.** Escoger un lado de la ecuación y escribirlo. El objetivo es transformarlo en el otro lado. Suele ser más fácil empezar con el lado más complicado.
2. **Usar identidades conocidas.** Use álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Lleve las expresiones fraccionarias a un denominador común, factorice y use las identidades fundamentales para simplificar expresiones.
3. **Convertir a senos y cosenos.** Si se ha quedado bloqueado, puede que encuentre útil reescribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

1. IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas que se cumplen para todo valor admisible de la variable.

Ejemplos
Identidad Algebraica: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Identidad Trigonométrica: $Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$
Ecuación Trigonométrica: $Sen\theta + Cos\theta = 1$
Para: $\theta = 90º$ Cumple
Para: $\theta = 30º$ No cumple

2. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Las identidades trigonométricas fundamentales sirven de base para la demostración de otras identidades más complejas.
Se clasifican:

- Pitagóricas
- Por cociente
- Recíprocas

2.1 IDENTIDADES PITAGÓRICAS

I.	$Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$
II.	$1 + Tan^2\theta = Sec^2\theta$
III.	$1 + Cot^2\theta = Csc^2\theta$

Demostración I
Sabemos que $x^2 + y^2 = r^2$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1 \qquad Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

2.2 IDENTIDADES POR COCIENTE

I.	$Tan\theta = \dfrac{Sen\theta}{Cos\theta}$
II.	$Cot\theta = \dfrac{Cos\theta}{Sen\theta}$

Demostración I

$$Tan\theta = \frac{ORDENADA}{ABSCISA} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{Sen\theta}{Cos\theta} \quad \text{L.q.q.d.}$$

2.3 IDENTIDADES RECÍPROCAS

I.	$\text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1$
II.	$\text{Cos}\theta \cdot \text{Sec}\theta = 1$
III.	$\text{Tan}\theta \cdot \text{Cot}\theta = 1$

Demostración I

$$\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1 \qquad \text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1 \qquad \text{L.q.q.d.}$$

Observaciones: Sabiendo que: $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

Despejando: $\boxed{\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta} \Rightarrow \boxed{\text{Sen}^2\theta = (1 + \text{Cos}\theta)(1-\text{Cos}\theta)}$

Así mismo: $\boxed{\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta} \Rightarrow \boxed{\text{Cos}^2\theta = (1 + \text{Sen}\theta)(1-\text{Sen}\theta)}$

3. IDENTIDADES AUXILIARES

A) $\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta = 1 - 2\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$
B) $\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta = 1 - 3\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$
C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta$
D) $\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \text{Sec}^2\theta \cdot \text{Csc}^2\theta$
E) $(1+\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^2 = 2(1+\text{Sen}\theta)(1+\text{Cos}\theta)$

Demostraciones

A) $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$
Elevando al cuadrado:

$$(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)^2 = 1^2$$

$\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta + 2\,\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$
$\text{Sen}^4\theta+\text{Cos}^4\theta=1-2\,\text{Sen}^2\theta.\text{Cos}^2\theta$

B) $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$
Elevando al cubo:

$$(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)^3 = 1^3$$

$$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta + 3(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)\,\underbrace{(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)}_{1} = 1$$

$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta + 3(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta) = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Sen}^6\theta+\text{Cos}^6\theta=1-3(\text{Sen}^2\theta.\text{Cos}^2\theta)}$

C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \dfrac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}+\dfrac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$

$$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \frac{\overbrace{\text{Sen}^2\theta+\text{Cos}^2\theta}^{1}}{\text{Cos}\theta\,.\,\text{Sen}\theta}$$

$$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \frac{1.1}{\text{Cos}\theta\,.\,\text{Sen}\theta} \Rightarrow \boxed{\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta}$$

D) $Sec^2\theta + Csc^2\theta = \frac{1}{Cos^2\theta} + \frac{1}{Sen^2\theta}$

$$Sec^2\theta + Csc^2\theta = \frac{\overbrace{Sen^2\theta + Cos^2\theta}^{1}}{Cos^2\theta . Sen^2\theta}$$

$$Sec^2\theta + Csc^2\theta = \frac{1.1}{Cos^2\theta \,.\, Sen^2\theta} \Rightarrow Sec^2\theta + Csc^2\theta = \boxed{Sec^2\theta \,.\, Csc^2\theta}$$

E) $(1+Sen\theta + Cos\theta)^2 = 1^2+(Sen\theta)^2+(Cos\theta)^2+2Sen\theta+2Cos\theta+2Sen\theta.Cos\theta$

$= 1+Sen^2\theta + Cos^2\theta + 2Sen\theta.2cos\theta + 2Sen\theta.Cos\theta$

$= 2+2Sen\theta + 2Cos\theta + 2Sen\theta.Cos\theta$

Agrupando convenientemente:

$= 2(1 + Sen\theta) + 2Cos\theta\ (1 + Sen\theta)$

$= (1 + Sen\theta)\ (2 + 2Cos\theta)$

$= 2(1 + Sen\theta)\ (1 + Cos\theta)$

$\Rightarrow \boxed{(1 + Sen\theta + Cos\theta)^2 = 2(1+Sen\theta)\ (1+Cos\theta)}$

4. PROBLEMAS PARA DEMOSTRAR

Demostrar una identidad consiste en que ambos miembros de la igualdad propuesta son equivalentes, para lograr dicho objetivo se siguen los siguientes pasos:

1. Se escoge el miembro "más complicado"
2. Se lleva a Senos y Cosenos (por lo general)
3. Se utilizan las identidades fundamentales y las diferentes operaciones algebraicas.

Ejemplos:

1) Demostrar:

$$Secx\ (1 - Sen^2x)\ Cscx = Cotx$$

Se escoge el 1º miembro:

$$Secx\ (1-Sen^2x)\ Cscx =$$

Se lleva a senos y cosenos:

$$\frac{1}{Cosx}.(Cos^2x).\frac{1}{Senx} =$$

Se efectúa: $Cosx.\frac{1}{Senx} =$

$$\boxed{Cotx = Cotx}$$

5. PROBLEMAS PARA REDUCIR Y SIMPLIFICAR

Ejemplos:

1) Reducir: $K = Sen^4x - Cos^4x + 2Cos^2x$

Por diferencia de cuadrados

$$K = \overbrace{(Sen^2x + Cos^2x)}^{1}(Sen^2x - Cos^2x) + 2Cos^2x$$

$$K = Sen^2x - Cos^2x + 2Cos^2x$$

$$K = Sen^2x + Cos^2x \quad \Rightarrow \quad K = 1$$

2) Simplificar: $E = \dfrac{1+Cosx}{Senx} - \dfrac{Senx}{1-Cosx}$

$$E = \frac{\overbrace{(1+Cosx)(1-Cosx)}^{1-Cos^2x} - (Senx)(Senx)}{Senx\,(1-Cosx)}$$

$$E = \frac{Sen^2x - Sen^2x}{Senx\,(1-Cosx)} \rightarrow \quad E = \frac{O}{Senx\,(1-Cosx)} \Rightarrow \quad E = 0$$

6. PROBLEMAS CON CONDICIÓN

Dada una o varias condiciones se pide hallar una relación en términos de dicha o dichas condiciones.

Ejemplo

Si: $Senx + Cosx = \dfrac{1}{2}$. Hallar: $Senx \,.\, Cosx$

Resolución

Del dato: $(Senx + Cosx)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$\underbrace{Sen^2x + Cos^2x}_{1} + 2Senx\,.\,Cosx = \frac{1}{4}$$

$$2Senx\,.\,Cosx = \frac{1}{4} - 1$$

$$2Senx\,.\,Cosx = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad Senx\,.\,Cosx = -\frac{3}{8}$$

A. Nivel Básico.

1. ¿Cuáles valores de a, b y c hacen de la siguiente ecuación una identidad?

$$3 + 4\cos^2\theta + 5\cos^4\theta = a + b\,\text{sen}^2\theta + c\,\text{sen}^4\theta$$

2. Demuestre las siguientes identidades:

a) $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$

b) $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

c) $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \text{cosec}^2 x$

d) $(\text{cosec}\, x - \cot x)^2 = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

e) $\dfrac{\cos^2 x}{(1-\text{sen}x)^2} = (\sec x + \tan x)^2$

f) $\text{sen}\, x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \text{sen}^3 x = \dfrac{1}{4}\,\text{sen}\, 4x$

g) $\dfrac{1-\cos x}{\text{sen}x} = \tan\dfrac{x}{2}$

h) $\dfrac{2\sec x}{\sec x - 1} = \csc^2\!\left(\dfrac{x}{2}\right)$

i) $\dfrac{\text{sen}4x\cdot\cos 2x - \cos 4x\cdot\text{sen}2x}{\cos^2 - \text{sen}^2 x} = \tan 2x$

j) $\tan x + \cot x = 2\,\text{cosec}\, 2x$

k) $\dfrac{2}{\csc^2 x} = 1 - \dfrac{1}{\sec 2x}$

l) $\dfrac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

m) $\dfrac{\text{sen}2x}{1-\cos 2x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\cos x} = \tan\dfrac{x}{2}$

n) $\tan\theta = (\sec\theta + 1)\cdot(\csc\theta - \cot\theta)$

o) $\dfrac{5\sec A - \tan A}{8\sec A + \tan A} + \dfrac{5\csc A + 1}{8\csc A - 1} = \dfrac{82 - 2c}{63 + c}$

p) $\sec\theta(\text{sen}\,\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -1$

q) $(\cot\theta - \tan\theta)^2 = \cot^2\theta\,(2 - \sec^2\theta)^2$

r) $\dfrac{\tan^2\theta}{1 + \csc^2\theta + \tan^2\theta} = \text{sen}\, 4\theta$

s) $(\cot\theta - \tan\theta)^2 = \cot^2\theta(2 - \sec^2\theta)^2$

t) $\dfrac{\cot^2 A}{\text{sen}^2 B} - \dfrac{\cot^2 B}{\text{sen}^2 A} = \cot^2 A - \cot^2 B$

4

3. Demuestre que $\dfrac{1}{20}\sec^4(5\theta) + \dfrac{1}{40}\sec2(5\theta)$ es idéntica a $\dfrac{1}{20}\tan^4(5\theta) + \dfrac{1}{8}\tan^2(5\theta) + C$ donde C es una constante real; determine el valor de esa constante C.

4. Decida si las siguientes igualdades son o no identidades trigonométricas:

a) $10\cos^2 11^\circ - 10\,\text{sen}^2 11^\circ$

b) $\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6}$

c) $4\,\text{sen}^4\theta - 4\,\text{sen}^2\theta = \cos^2 2\theta$

d) $\left(\dfrac{1-\cos160^\circ}{2}\right)^3 = \text{sen}^6 8\theta$

e) $2\,\text{sen}\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2} = \text{sen}\, B$

f) $2\,\text{sen}^2 3\theta - 1 = -\cos 6\theta.$

B. Nivel Medio.

1. Reducir : $E = Sen^2x.Secx + Cosx$
2. Simplificar : $E = \dfrac{Secx - Tgx - 1}{Cscx - Ctgx - 1}$
3. Reducir :
$$E = \frac{1}{1 - Cos^2q} + \frac{1}{Csc^2q - 1} - \frac{1}{1 - Sen^2q}$$
4. Calcular el valor de "K" si : $\dfrac{1}{1+K} + \dfrac{1}{1-K} = 2Sec^2q$
5. Reducir : $W = (Senx + Cosx + 1)(Senx + Cosx - 1)$
6. Reducir : $G = \sqrt[3]{\dfrac{Cscx - Senx}{Secx - Cosx}}$
7. Reducir :
$K = Ctgx.Cosx - Cscx\left(1 - 2Sen^2x\right)$
8. Si : $Cscq - Ctgq = \dfrac{1}{5}$
Calcular: $E = Secq + Tgq$
9. Reducir : $H = Tg^2x\left[Tg^4x + 3Tg^2x + 3\right] + 1$
10. Reducir : $G = \dfrac{Senx}{1 + Cosx} + \dfrac{Tgx + Cosx - 1}{Senx}$
11. Reducir : $J = Cosq(Sec^3q - Cscq) - Tg^3q(Ctgq - Ctg^4q)$
12. Reducir : $W = (Sec^2q + 1)(Sec^4q + 1) + Ctg^2q$
13. Reducir : $M = \dfrac{(2Tgx + Ctgx)^2 + (Tgx - 2Ctgx)^2}{Tg^2x + Ctg^2x}$
14. Reducir : $E = 1 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{Sen^2x}{(1 - Senx)(1 + Senx)}}}}$
15. Si : $\dfrac{Tg\theta + Ctg\theta + m}{Tg\theta + Ctg\theta + 2} = \dfrac{Sen^3\theta + Cos^3\theta}{[Sen\theta + Cos\theta]^3}$
Calcular el valor de " m "
16. Simplificar : $E = \dfrac{(Cos^3x.Sec^2x + Tgx.Senx)Cscx}{Ctgx.Senx}$
17. Si : $\theta \in \left\langle \dfrac{3\pi}{4}, \pi \right\rangle$ Reducir : $J = \sqrt{1 + \dfrac{2}{Tg\theta + Ctg\theta}} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{Tg\theta + Ctg\theta}}$
18. Si : $Sen^4\theta - Cos^4\theta = \dfrac{1}{3}$
Calcular: $E = Sec^2\theta.(1 + Ctg^2\theta)$

19. Simplificar : $R=(Senx+Cosx)(Tgx+Ctgx)-Secx$

20. Reducir : $H=(Secx-Cosx)(Cscx-Senx)(Tgx+Ctgx)$

21. Si : $Tg\theta=7-Ctg\theta$

Calcular: $E=\sqrt{Sec^2\theta+Ctg^2\theta}$

22. Reducir : $E=\dfrac{Sec^2x+Csc^2x+Sec^2x.Csc^2x}{2Sec^2x.Csc^2x}+Tg^2x$

23. Reducir : $H=\dfrac{(1-Senx+Cosx)^2(1+Senx)}{Senx.Cosx(1+Cosx)}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ARCOS

Sen $(\alpha+\beta)$= Senα.Cosβ +Senβ.Cosα
Cos $(\alpha+\beta)$= Cosα. Cosβ-Senα.Senβ
Tg $(\alpha+\beta)$ = $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha.tg\beta}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA RESTA DE DOS ARCOS

Sen $(\alpha-\beta)$= Senα.Cosβ - Cosα.Senβ
Cos $(\alpha-\beta)$= Cosα.Cosβ + Senα.Senβ
Tg $(\alpha-\beta)$ = $\dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1+ tg\alpha\ .\ tg\beta}$

Ojo:

$Ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{Ctg\alpha\ .\ Ctg\beta\mp 1}{Ctg\beta\pm Ctg\ \alpha}$

Aplicación:

a) Sen 75º = Sen (45º+30º)

= Sen 45º Cos30º+Cos45º Sen30º

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore$ Sen75º = $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

EJERCICIOS

A. Nivel Básico.

Aplique la fórmula de la adición o de la sustracción para calcular el valor exacto de la expresión, según se demostró en el ejemplo.

1.- $\operatorname{sen} 75°$

Respuesta: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2.- $\cos 105°$

3.- $\tan 15°$

4.- $\operatorname{sen} \frac{19\pi}{12}$

5.- $\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

6.- $\cos\frac{11\pi}{12}$

Mediante la fórmula de la adición o de la sustracción para plantear la expresión como una función trigonométrica de un número, y después determinar su valor exacto.

7.- $\operatorname{sen} 18° \cos 27° + \cos 18° \operatorname{sen} 27°$

8.- $\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{21} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{21}$

9.- $\frac{\tan 73° - \tan 13°}{1 + \tan 73° \tan 13°}$

Demuestre la identidad de la confusión usando las fórmulas de adición y sustracción.

10.- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$

11.- $\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$

Demuestre la identidad.

12.- $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

13.- $\operatorname{sen}(x - \pi) = -\operatorname{sen} x$

14.- $\tan(x - \pi) = \tan x$

15.- $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

16.- $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2\cos x \operatorname{sen} y$

17.- $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

18.- $\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cos y}$

19.- $\frac{\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \tan y$

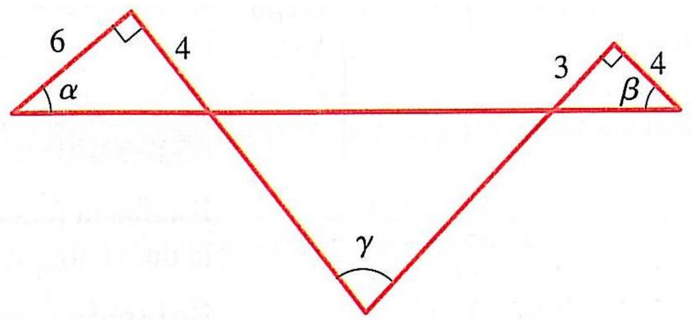
20.- $(x + y + z) = \operatorname{sen} x \cos y \cos z + \cos x \operatorname{sen} y \cos z + \cos x \cos y \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$

Escriba la función sólo en términos de seno

21.- $-\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x$

22.- $5(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$

23.- Refiérase a la figura. Demuestre que $\alpha + \beta = \gamma$ y calcule $\tan\gamma$



B. Nivel Medio.

C. Si : $\operatorname{Sen}\alpha = -\frac{3}{5}$; $\alpha \in$ III C;

$\operatorname{Cos}\beta = \frac{12}{13}$, $\beta \in$ IV C. Hallar: $E = \operatorname{Sen}(\alpha + \beta)$

D. Reducir : $E = \frac{\operatorname{Sen}(a-b)}{\operatorname{Cosa}.\operatorname{Cosb}} + \operatorname{Tagb}$

Si: $\operatorname{Cos}(a+b) - \operatorname{Cos}(a-b) = \frac{1}{2}$

Hallar E = $\operatorname{Csca}.\operatorname{Cscb}$

E. Si : $\operatorname{Sen}\theta = -\frac{5}{13}$;$\theta \in$III C; Tag α=1 ; $\alpha \in$ III C

Hallar E = $\operatorname{Sen}(\theta+\alpha)$

F. Reducir : $G = \frac{\operatorname{Cos}(a-b) - \operatorname{Cos}(a+b)}{2\operatorname{Sena}}$

G. Reducir :M = $\sqrt{8}\operatorname{Sen}(\theta + 45°) - 2\operatorname{Sen}\theta$

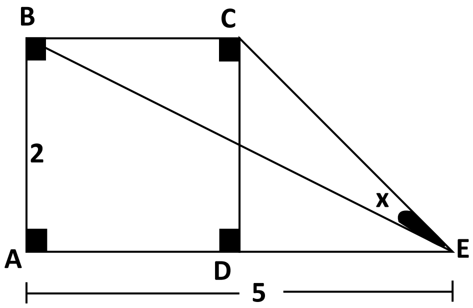
H. Reducir : $E = \frac{\operatorname{Sen}(a+b) - \operatorname{Senb}.\operatorname{Cosa}}{\operatorname{Sen}(a-b) + \operatorname{Senb}.\operatorname{Cosa}}$

I. Reducir : $E = \operatorname{Cos}(60° + x) + \operatorname{Sen}(30° + x)$

J. Si se cumple: $\mathrm{Cos}(a-b)=3\mathrm{SenaSenb}$

k. Hallar $M = \mathrm{Taga.Tagb}$

K. Si ABCD es un cuadrado. Hallar Tagx



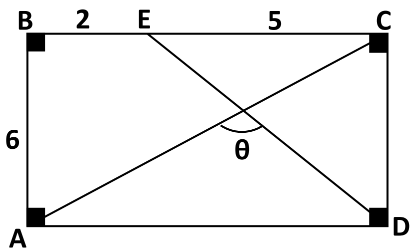
L. Reducir :

$E = \mathrm{Cos}80^\circ + 2\mathrm{Sen}70^\circ.\mathrm{Sen}10^\circ$

M. Si: $\mathrm{Tag}\alpha + \mathrm{Tag}\beta = \dfrac{2}{3}$; $\mathrm{Ctg}\alpha + \mathrm{Ctg}\beta = \dfrac{5}{2}$

Hallar $E = \mathrm{Tag}(\alpha+\beta)$

N. Hallar : $\mathrm{Ctg}\theta$



O. Hallar :$M = (\mathrm{Tag}80^\circ - \mathrm{Tag}10^\circ)\mathrm{Ctg}70^\circ$

P. Hallar el máximo valor de:

$M = \mathrm{Sen}(30^\circ + x) + \mathrm{Cos}(60^\circ + x)$

I. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ARCO DOBLE

1. Seno de 2α:

$$\boxed{\text{Sen } 2\alpha = 2\text{Sen}\alpha \text{ Cos}\alpha}$$

2. Coseno de 2α:

$$\text{Cos } 2\alpha = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha$$

$$\text{Cos } 2\alpha = 1 - 2\text{ Sen}^2\alpha \quad \ldots \text{ (I)}$$

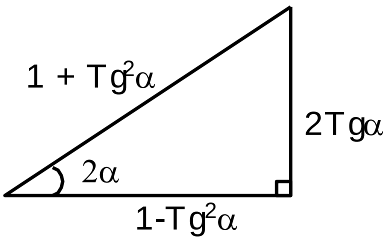
$$\text{Cos } 2\alpha = 2\text{ Cos}^2\alpha - 1 \quad \ldots \text{ (II)}$$

3. Fórmulas para reducir el exponente (Degradan Cuadrados)

De (I)... $\mathbf{2\ Sen^2\alpha = 1 - Cos\ 2\alpha}$
De (II).. $\mathbf{2\ Cos^2\alpha = 1 + Cos\ 2\alpha}$

4. Tangente de 2α:

$$\boxed{\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{Tg}\alpha}{1-\text{Tg}^2\alpha}}$$



Ejemplos

1. Reducir: R= $\dfrac{1+\text{Sen}\,2x+\text{Cos}2x}{1+\text{Sen}\,2x-\text{Cos}2x}$

Resolución:

$$R = \frac{1+\text{Cos}2x+\text{Sen}\,2x}{1-\text{Cos}2x+\text{Sen}\,2x} = \frac{2\text{Cos}^2x+2\text{Senx}\text{Cosx}}{2\text{Sen}^2x+2\text{Senx}\text{Cosx}}$$

$$R = \frac{2\text{Cosx}\cancel{(\text{Cosx}+\text{Senx})}}{2\text{Senx}\cancel{(\text{Senx}+\text{Cosx})}} = \text{Ctgx}$$

2. Simplificar:

$$E = \frac{(\text{Sen}\,2x+\text{Senx})(\text{Sen}\,2x-\text{Senx})}{(1+\text{Cosx}+\text{Cos}2x)(1-\text{Cosx}+\text{Cos}2x)}$$

Resolución

$$E = \frac{(2\text{SenxCosx}+\text{Senx})(\text{SenxCosx}.2-\text{Senx})}{(2\text{Cos}^2x+\text{Cosx})(2\text{Cos}^2x-\text{Cosx})}$$

$$E = \frac{\text{Senx}\cancel{(2\text{Cosx}+1)}\text{Senx}\cancel{(2\text{Cosx}-1)}}{\text{Cosx}\cancel{(2\text{Cosx}+1)}\text{Cosx}\cancel{(2\text{Cosx}-1)}} = \text{tgx.tgx}$$

E = tg^2x

3. Siendo: $\dfrac{\text{Sen}\theta}{b} = \dfrac{\text{Cos}\theta}{a}$

Reducir: P = $a\text{Cos}2\theta + b\text{Sen}2\theta$

Resolución:

= $a\text{Cos}2\theta+b.2\text{Sen}\theta.\text{Cos}\theta$
= $a\text{Cos}\,2\theta+b\text{Cos}\theta.\ 2\text{Sen}\theta$
= $a\text{Cos}\,2\theta+a\text{Sen}\theta.\ 2\text{Sen}\theta$
= $a\text{Cos}\,2\theta+a(2\text{Sen}^2\theta)\underbrace{(1-\text{Cos}2\theta)}$

P = $a\text{Cos}2\theta + a - a\text{Cos}2\theta \rightarrow$ **P = a**

A. Nivel Básico.

1. Si : $Cscx=\sqrt{3}$.

   Hallar : $E=Sen2x$

2. Si: $Tag\theta=-1/5$. Calcular : $E=Cos2\theta$

3. Si: $Senx - Cosx=\frac{1}{5}$ Hallar E = Csc 2x

4. Si: $Tag\ (\pi+\theta)=\frac{1}{2}$ Hallar :

   E = Tag 2θ

5. Reducir:

   M = $2SenxCos^3x+2CosxSen^3x$

6. Si: $Sen\alpha=\frac{1}{3}$

   Hallar E = $E=3-\frac{2}{9}Cos2\alpha+Cos4\alpha$

7. Reducir:

   M = $\dfrac{5+3Cos4x}{Cos^4x - Sen^2xCos^2x+Sen^4x}$

8. Si se cumple:

   $Sen^4x-Sen^2xCos^2x+Cos^4x\equiv ACos4x+B$

8. Reducir: M = $\dfrac{Sen10°Sen80°}{Cos10°-\sqrt{3}Sen10°}$

9. Si se cumple: $\dfrac{Tag^4\theta+Sec^2\theta+Tag^2\theta}{2Tag\theta-2Tag^3\theta}=\dfrac{8}{3}$

   Hallar E = Sen 4θ

10. Reducir:

   M = $\dfrac{2Sen2\theta-Sen\theta}{Sen3\theta+4Sen2\theta.Sen^2\frac{\theta}{2}}$

II. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO MITAD

1. Seno de $\frac{\alpha}{2}$:

$2\,\text{Sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \text{Cos}\alpha$

$$\boxed{\text{Sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\alpha}{2}}}$$

2. Coseno de $\frac{\alpha}{2}$:

$2\text{Cos}^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \text{Cos}\alpha$

$$\boxed{\text{Cos}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\alpha}{2}}}$$

Donde:

($\pm$) Depende del cuadrante al cual $\in$ "$\frac{\alpha}{2}$"

3. Tangente de $\frac{\alpha}{2}$:

$$\boxed{\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}\alpha}{1+\text{Cos}\alpha}}}$$

4. Cotangente de $\frac{\alpha}{2}$:

$$\boxed{\text{Ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\alpha}{1-\text{Cos}\alpha}}}$$

5. Fórmulas Racionalizadas

$$\boxed{\text{Tg}\frac{\alpha}{2} = \text{Csc}\alpha - \text{Ctg}\alpha}$$

$$\boxed{\text{Ctg}\frac{\alpha}{2} = \text{Csc}\alpha + \text{Ctg}\alpha}$$

A. Nivel Básico.

1. Si: $Cosx = 1/4$; x $\in$ III Cuadrante

   Hallar E = $Sen\ (\frac{x}{2})$

2. Si : $Ctgx = \frac{5}{12}$; x $\in$ III Cuadrante

   Hallar M = $Cos\ (\frac{x}{2})$

3. Si. $Cosx = 1/3$; $3\pi/2 < x > 2\pi$

   Hallar E = $Tag\left(\frac{x}{2}\right)$

4. Si : $90° < x < 180°$ y $Tag^2 x = 32/49$

   Hallar : $Cos(x/2)$

5. Reducir : $E = Senx(Tagx.Ctg\frac{x}{2} - 1)$

6. Reducir:

   E = $Tag\frac{x}{4} + 2Sen^2\left(\frac{x}{4}\right).Ctg\frac{x}{2}$

7. Si: $2Sen2\theta = Sen\theta$; $\theta \in <\ 270°;360°\ >$

   Hallar E = $\sqrt{2}\left[\sqrt{3}Sen\frac{\theta}{2} + \sqrt{5}\ Cos\frac{\theta}{2}\right]$

8. Reducir:

   M = $Tagx + Ctg\frac{x}{2} - Ctg\frac{x}{2}Secx$

9. Reducir: $A = Tag(45° + \frac{\theta}{2}) - Sec\theta$

10. Hallar E = $Tag7°\ 30''$

PORTAFOLIO N° 17 LEY DE SENOS Y COSENOS	**HABILIDAD FINAL DEL PORTAFOLIO** • Utilizar instrumentos, técnicas y formulas, individual y grupalmente, para entender la trigonometría.

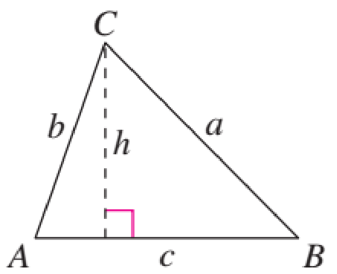
PRÁCTICA N° 17

Tema: LEY DE SENOS Y COSENOS

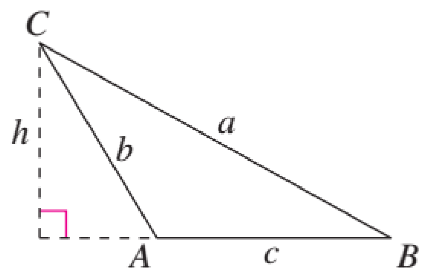
Ley de los senos

Si ABC es un triángulo con lados a, b y c, entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$



A es agudo.



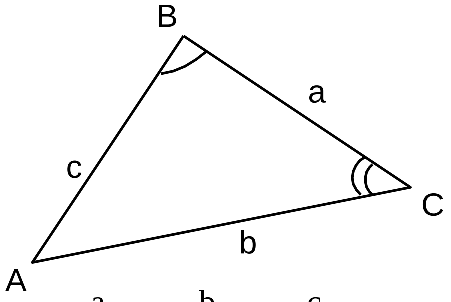
A es obtuso.

Ley de los cosenos

Forma estándar	*Forma alternativa*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

1. LEY DE SENOS

En todo triángulo la longitud de cada lado es D.P. al seno del ángulo que se opone al respectivo lado.



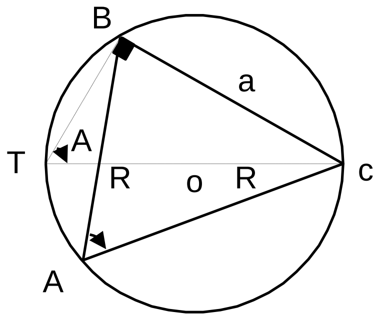
$$\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC}=K$$

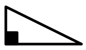
Sea "S" el Área del ∆ABC

S = $\frac{bc}{2}SenA$ **S =** $\frac{ac}{2}SenB$

Igualando áreas: $\frac{ac}{2}SenB=\frac{bc}{2}SenA$ **, luego:** $\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}$

COROLARIO DEL TEOREMA DE SENOS



 **TBA : Sen A =** $\frac{a}{2R}\Rightarrow 2R=\frac{a}{SenA}$

$$\boxed{\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC}=2R}$$

R = Circunradio

*** Observaciones:**

a = 2RSenA, b = 2RSenB, c = 2RSenC

2. LEY DE COSENOS

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\,CosA \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\,CosB \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\,CosC \end{aligned}}$$

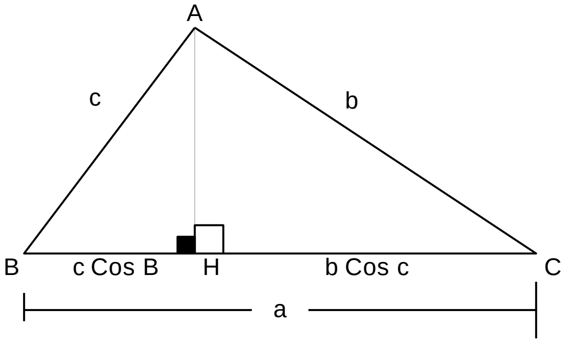
Observaciones:

CosA = $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, **CosB =** $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, **CosC =** $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

3. **LEY DE TANGENTES**

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\left(\frac{A+B}{2}\right)}{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)} \qquad \frac{b+c}{b-c}=\frac{tg\left(\frac{B+C}{2}\right)}{tg\left(\frac{B-C}{2}\right)} \qquad \frac{a+c}{a-c}=\frac{tg\left(\frac{A+C}{2}\right)}{tg\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$

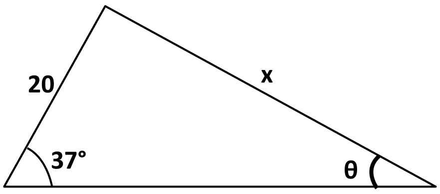
4. **LEY DE PROYECCIONES**



a = bCosC + c CosB
b = aCosC + c CosA
c = aCosB + b CosA

A. Nivel Básico.

1. Hallar " x" si : Ctg θ = $2\sqrt{2}$



2. En un triángulo ABC ; $\hat{B}$ = 60° ; b = $3\sqrt{2}$; y c = 3 + $\sqrt{3}$. Hallar el ángulo $\hat{A}$

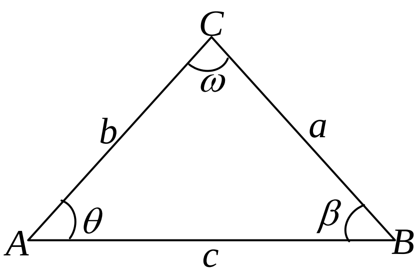
3. Si los lados b y c de un triángulo miden 31 cm. y $7\sqrt{2}$ cm. respectivamente y el ángulo A = 45°. Hallar el lado "a".

4. El Coseno del mayor ángulo de un triángulo cuyos lados son tres números enteros y consecutivos es iguales a 1 /5. Hallar el perímetro del triángulo.

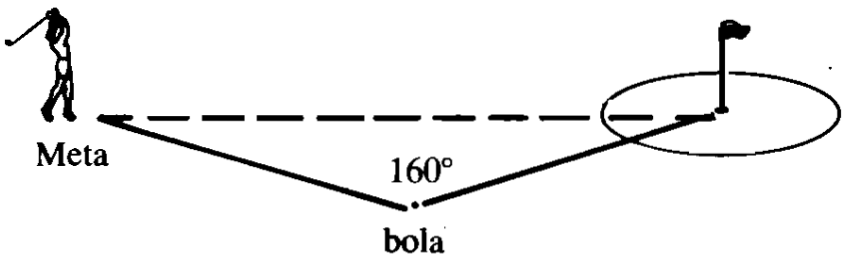
B. Nivel Medio.

1. A partir de la figura dada determine los elementos restantes del triángulo teniendo en cuenta las condiciones de cada caso y una de las leyes conocidas:

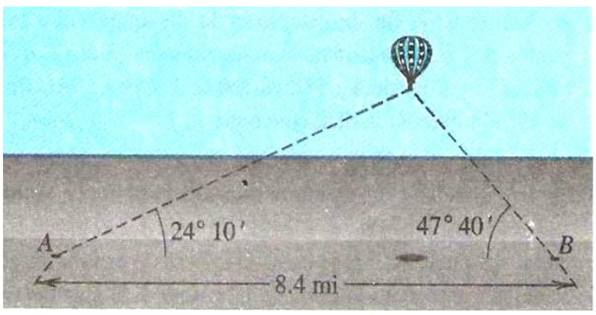
a) $\omega = 65°$, $\theta = 50°$, $b = 12$
b) $\beta = 60°$, $a = 7$, $c = 7$
c) *a=7, b=9, c=12*
d) $\omega = 56°30'$, $b = 10$, $c = 5$
e) $\theta = 120°$, $a = 4$, $c = 8$
f) $c = 5$, $b = 3$, $a = 6$



2. Según las leyes y sus características vistas, resuelva cada una de las siguientes situaciones
a) La distancia entre la meta y un hoyo particular de golf es de 370 m. Una golfista le pega a la pelota y la coloca a una distancia de 210 m. Desde el punto donde está la pelota, ella mide un ángulo de 160 entre la meta y el hoyo, encuentre el ángulo de su lanzamiento y cuál es la distancia entre la bola y el hoyo (**véase figura).**

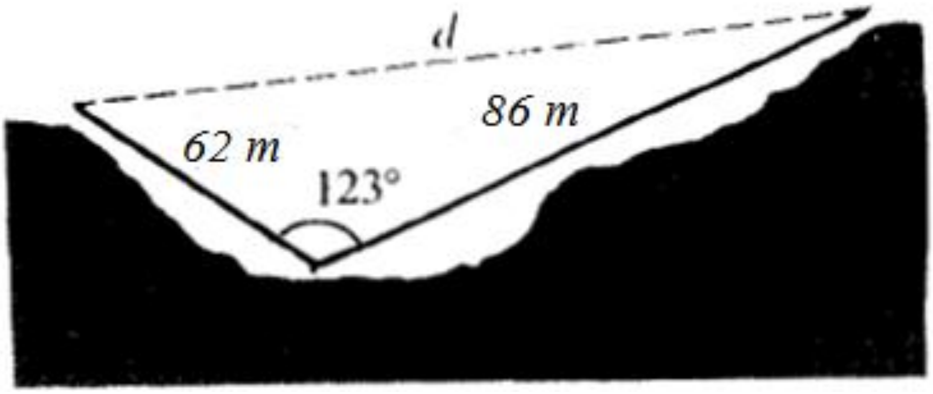


b) Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son de 24°10′ y 47°40′, respectivamente (como se muestra en la figura). Los puntos A y B están a 8.4 millas uno del otro y el globo de encuentra entre ambos, en el mismo plano vertical. Calcula la altura del globo sobre el suelo



c) Un rombo tiene lados de 10 cm de longitud. Si el ángulo de uno de los vértices es de 50°, encuentre las longitudes de las diagonales.

d) Desde el piso de un cañón se necesitan 62 m de cuerda para alcanzar la cima de la pared del cañón 86 m para alcanzar la cima de la pared opuesta (según la figura). Si ambas cuerdas forman un ángulo de 123°, cuál es la distancia entre la cima de una de las paredes de un cañón y la otra?



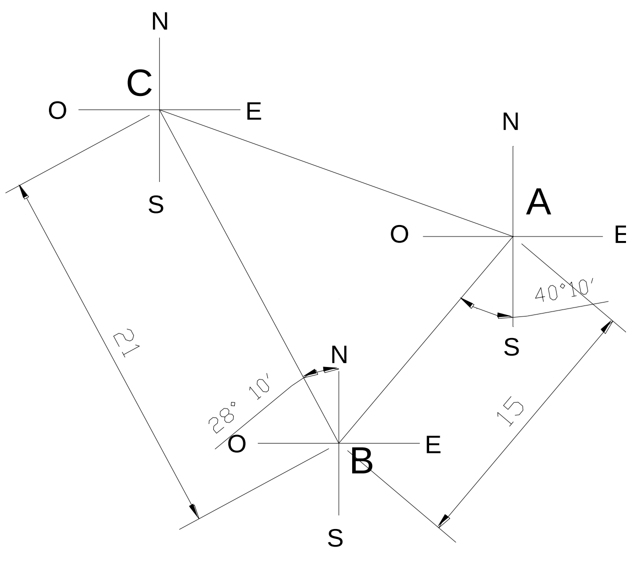
e) Una persona se dirige desde un punto A en línea recta hacia un punto C. otra persona hace lo mismo desde un punto B. si la distancia entre A y B es de 8 Km., el ángulo CAB es de 75º y el ángulo CBA es de 45º, ¿Qué distancia tendrá que recorrer cada persona?

f) Las boyas A, B y C marcan los vértices de una pista triangular en una laguna. La distancia entre las boyas A y B es de 1.200 m, la distancia entre las boyas A y C es de 900 m y el ángulo CAB es de 110º. Si el bote ganados de la carrera recorrió la pista en 8,2 minutos, ¿cuál fue su velocidad promedio?

c. Nivel Avanzado.

1. un barco navega 15.0 millas en dirección **s** 40° 10’ **o**, y después 21.0 millas en dirección **n** 28° 20’ **o**, encontrar a que distancia esta del punto de partida y cuál es su orientación respecto del punto c al punto de partida.

2. Un barco sale del punto A y sale en dirección S 40° 10’ O, y llega al punto B y navega 21.0 millas en dirección N 28° 20’ O, y llega al punto C y navega 22.09 millas en dirección S 77º 38´ E. Determinar la distancia de AB = c y la orientación del punto A al punto C.



BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía Básica

- **LARSON, Ron., FALVO, David.** *Precálculo*. 8ª ed. México: Editorial Cengage Learning Editores, 2012. Código de la biblioteca 515 – L26

Bibliografía Complementaria

- **STEWART, James., REDLIN, Lothar., WATSON Saleem**. *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo.* 6ª ed. México D.F.: Cengage Learning, 2012.
- **ZILL, Dennis., DEWAR, Jaqueline**. *Precálculo con avances de cálculo*. 4ª ed. Colombia: Editorial McGraw-Hill, 2008.

Link para Consultar

Ditutor. Diccionario de Matemática. [Consulta: 5 de febrero 2015]. Recuperado de http://www.ditutor.com/numeros_reales/numeros_reales.html

Profesor en línea. Números Reales. [Consulta: 6 de febrero 2015]. Recuperado de http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Numeros_reales.html

Curso de Algebra. Números Reales. [Consulta: 5 de febrero 2015]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=tMHJbmUGcQk

-