UNIVERSIDAD CONTINENTAL

Vive tu propósito

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

GUÍA DE TRABAJO

VISIÓN

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

MISIÓN

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

Universidad Continental
Material publicado con fines de estudio
Código: A0023
2016

PRESENTACIÓN

La asignatura de Análisis Matemático II, esta diseñada para proporcionar al estudiante, las herramientas del Calculo Integral.

En general, los contenidos propuestas en el material de estudio, se divide en cinco unidades: Fundamento para el aprendizaje del Cálculo Integral, que incluyen ejercicios recopilados del libro de Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta Edición. 2011, el cual se ha tomado como texto guía, para la presente asignatura.

Se recomienda que el estudiante desarrolle una permanente lectura de este material, pues permitirá asimilar la parte teórica impartida en el aula. El contenido del material se complementará con las lecciones presenciales y del aula virtual.

Agradecemos a quienes con sus aportes y sugerencias han contribuido a mejorar la presente edición, el que sólo tiene el valor de una introducción al mundo del cálculo infinitesimal.

Los recopiladores

ÍNDICE

PRESENTACIÓN 3

PRIMERA: Integral Indefinida

Balotario de Ejercicios Nº 1: Integrales indefinidas y Métodos de Integración e Integración por sustitución 5

Balotario de Ejercicios Nº 2: Integración por partes 16

Balotario de Ejercicios Nº 3: Integración de funciones trigonométricas 23

Balotario de Ejercicios Nº 4: Integración de funciones con trinomio cuadrado perfecto y Sustitución trigonométricas 27

Balotario de Ejercicios Nº 5: Integración de fracciones simples y parciales................ 30

SEGUNDA UNIDAD: Integral Definida

Balotario de Ejercicios Nº 6: Sumas de Reimann; la integral definida y Teorema del Valor Medio para integrales 35

Balotario de Ejercicios Nº 7: Cambio de variable para integrales definidas y Integración por partes para integrales definidas 50

TERCERA UNIDAD: Aplicaciones de la Integral Definida

Balotario de Ejercicios Nº 8: Movimiento rectilíneo... 56

Balotario de Ejercicios Nº 9: Calculo de volúmenes por el método de disco 64

Balotario de Ejercicios Nº 10: Longitud de arco y superficie de revolución 69

Balotario de Ejercicios Nº 11: Integrales impropias y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Nociones básicas...................... 77

CUARTA UNIDAD: Ecuaciones Diferenciales

Balotario de Ejercicios Nº 12: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 82

PRIMERA UNIDAD

Integral Indefinida

Balotario de Ejercicios Nº 1

Antiderivadas o primitivas. La integral indefinida definición y propiedades. Integración directa

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 268, 269, 270, 274, 275, 380, 381, 382, 283, 384, 385

5.1 La integral indefinida

Introducción En los capítulos 3 y 4 sólo abordamos el problema básico:

- Dada una función f, encontrar su derivada f'.

En este capítulo y en los subsecuentes veremos cuán importante es el problema de:

- Dada una función f, encontrar una función F cuya derivada sea f.

En otras palabras, para una función dada f, ahora pensamos en f como una derivada. Deseamos encontrar una función F cuya derivada sea f; es decir, $F'(x) = f(x)$ para toda x en algún intervalo. Planteado en términos generales, es necesario diferenciar en reversa.

Empezamos con una definición.

Definición 5.1.1 Antiderivada

Se dice que un función F es una **antiderivada** de una función f sobre algún intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

EJEMPLO 1 Una antiderivada

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $F'(x) = 2x$. ■

Una función siempre tiene más de una antiderivada. Así, en el ejemplo anterior, $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$, puesto que $F_1'(x) = F_2'(x) = 2x$.

A continuación demostraremos que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; es decir, *dos antiderivadas de la misma función pueden diferir a lo más en una constante*. Por tanto, $F(x) + C$ es *la antiderivada más general* de $f(x)$.

Teorema 5.1.1 Las antiderivadas difieren por una constante

Si $G'(x) = F'(x)$ para toda x en algún intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + C$$

para toda x en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Suponga que se define $g(x) = G(x) - F(x)$. Entonces, puesto que $G'(x) = F'(x)$, se concluye que $g'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera que satisfacen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, por el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) se concluye que en el intervalo abierto (x_1, x_2) existe un número k para el cual

$$g'(k) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad g(x_2) - g(x_1) = g'(k)(x_2 - x_1).$$

Pero $g'(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$; en particular, $g'(k) = 0$. Por tanto, $g(x_2) - g(x_1) = 0$ o $g(x_2) = g(x_1)$. Luego, por hipótesis, x_1 y x_2 son dos números arbitrarios, pero diferentes, en el intervalo. Puesto que los valores funcionales $g(x_1)$ y $g(x_2)$ son iguales, debe concluirse que la función $g(x)$ es una constante C. Por tanto, $g(x) = C$ implica $G(x) - F(x) = C$ o $G(x) = F(x) + C$. ■

La notación $F(x) + C$ representa una *familia de funciones*; cada miembro tiene una derivada igual a $f(x)$. Volviendo al ejemplo 1, la antiderivada más general de $f(x) = 2x$ es la familia $F(x) = x^2 + C$. Como se ve en la FIGURA 5.1.1, la gráfica de la antiderivada de $f(x) = 2x$ es una traslación vertical de la gráfica de x^2.

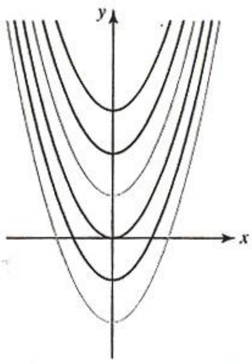


FIGURA 5.1.1 Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 2x$

EJEMPLO 2 Antiderivadas más generales

a) Una antiderivada de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x$ puesto que $F'(x) = 2x + 5$. La antiderivada más general de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x + C$.

b) Una antiderivada de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x$ puesto que $F'(x) = \sec^2 x$. La antiderivada más general de $f(x) = \sec^2 x$ es $F(x) = \tan x + C$. ■

Notación de la integral indefinida Por conveniencia, se introducirá la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se denomina **signo integral**. La notación $\int f(x)\, dx$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ respecto a x. La función $f(x)$ se denomina **integrando**. El proceso de encontrar una antiderivada se denomina **antidiferenciación** o **integración**. El número C se denomina **constante de integración**. Justo como $\frac{d}{dx}(\ )$ denota la operación de diferenciación de ( ) *con respecto a x*, el simbolismo $\int (\ )\, dx$ denota la operación de integración de ( ) *con respecto a x*.

La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f; es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

$$\int F'(x)\, dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Además,

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x) \tag{2}$$

En palabras, (1) y (2) son, respectivamente:

- Una antiderivada de la derivada de una función es esa función más una constante.
- La derivada de una antiderivada de una función es esa función.

A partir de lo anterior se concluye que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración. Por ejemplo, debido a (1), si

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n \qquad \text{entonces} \qquad \int \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1}\, dx = \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

◀ Este primer resultado sólo es válido si $n \neq -1$.

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad \text{entonces} \qquad \int \frac{d}{dx}\ln|x|\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,$$

$$\frac{d}{dx}\text{sen}\, x = \cos x \qquad \text{entonces} \qquad \int \frac{d}{dx}\text{sen}\, x\, dx = \int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + C,$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \text{entonces} \qquad \int \frac{d}{dx}\tan^{-1} x\, dx = \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \tan^{-1} x + C.$$

De esta manera es posible construir una fórmula de integración a partir de cada fórmula de derivada. En la TABLA 5.1.1 se resumen *algunas* fórmulas de derivadas importantes para las funciones que se han estudiado hasta el momento, así como sus fórmulas de integración análogas.

TABLA 5.1.1

Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración	Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración
1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$	**10.** $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n (n \neq -1)$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	**11.** $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + C$
3. $\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	**12.** $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}\lvert x\rvert + C$
4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	**13.** $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$, $(b > 0, b \neq 1)$	$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	**14.** $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
6. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	**15.** $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
7. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	**16.** $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
8. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$		
9. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$		

Con respecto a la entrada 3 de la tabla 5.1.1, es cierto que las fórmulas de derivadas

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\log_b x}{\ln b} = \frac{1}{x}$$

significan que *una* antiderivada de $1/x = x^{-1}$ puede tomarse como $\ln x$, $x > 0$, $\ln\lvert x\rvert$, $x \neq 0$, o $\log_b x/\ln b$, $x > 0$. Pero como resultado más general y útil escribimos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C.$$

Observe también que en la tabla 5.1.1 sólo se proporcionan tres fórmulas que implican funciones trigonométricas inversas. Esto se debe a que, en forma de integral indefinida, las tres fórmulas restantes son redundantes. Por ejemplo, de las derivadas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

observamos que es posible tomar

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C \quad \text{o} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\cos^{-1}x + C.$$

Observaciones semejantes se cumplen para la cotangente inversa y la cosecante inversa.

EJEMPLO 3 Una antiderivada simple pero importante

La fórmula de integración en la entrada 1 en la tabla 5.1.1 se incluye para recalcar:

$$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C \quad \text{ya que} \quad \frac{d}{dx}(x + C) = 1 + 0 = 1.$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 con $n = 0$. ■

A menudo es necesario volver a escribir el integrando $f(x)$ antes de realizar la integración.

∫ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, a los estudiantes se les dificulta más calcular antiderivadas que derivadas. Dos palabras de advertencia. Primero, debe tenerse mucho cuidado con el procedimiento algebraico, especialmente con las leyes de los exponentes. La segunda advertencia ya se ha planteado, aunque vale la pena repetirla: tenga en cuenta que *los resultados de la integración indefinida siempre pueden comprobarse*. En un cuestionario o en un examen vale la pena que dedique unos minutos de su valioso tiempo para comprobar su respuesta al tomar la derivada. A veces esto puede hacerse mentalmente. Por ejemplo,

integración

$$\int \boxed{x^2}\,dx = \boxed{\frac{x^3}{3} + C}$$

compruebe por diferenciación

Ejercicios 5.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-18.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral indefinida dada.

1. $\int 3\,dx$
2. $\int (\pi^2 - 1)\,dx$
3. $\int x^5\,dx$
4. $\int 5x^{1/4}\,dx$
5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$
6. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$
7. $\int (1 - t^{-0.52})\,dt$
8. $\int 10w\sqrt{w}\,dw$
9. $\int (3x^2 + 2x - 1)\,dx$
10. $\int \left(2\sqrt{t} - t - \frac{9}{t^2}\right)dt$
11. $\int \sqrt{x}(x^2 - 2)\,dx$
12. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{s^2}} + \frac{2}{\sqrt{s^3}}\right)ds$
13. $\int (4x + 1)^2\,dx$
14. $\int (\sqrt{x} - 1)^2\,dx$
15. $\int (4w - 1)^3\,dw$
16. $\int (5u - 1)(3u^3 + 2)\,du$
17. $\int \frac{r^2 - 10r + 4}{r^3}\,dr$
18. $\int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$
19. $\int \frac{x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}}{x^2}\,dx$
20. $\int \frac{t^3 - 8t + 1}{(2t)^4}\,dt$
21. $\int (4\,\text{sen}\,x - 1 + 8x^{-5})\,dx$
22. $\int (-3\cos x + 4\sec^2 x)\,dx$
23. $\int \csc x(\csc x - \cot x)\,dx$
24. $\int \frac{\text{sen}\,t}{\cos^2 t}\,dt$
25. $\int \frac{2 + 3\,\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x}\,dx$
26. $\int \left(40 - \frac{2}{\sec\theta}\right)d\theta$
27. $\int (8x + 1 - 9e^x)\,dx$
28. $\int (15x^{-1} - 4\,\text{senh}\,x)\,dx$
29. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 4}{1 + x^2}\,dx$
30. $\int \frac{x^6}{1 + x^2}\,dx$

En los problemas 31 y 32, use una identidad trigonométrica para evaluar la integral indefinida dada.

31. $\int \tan^2 x\,dx$
32. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$

En los problemas 33-40, use diferenciación y la regla de la cadena para comprobar el resultado de integración dado.

33. $\int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}\,dx = \sqrt{2x + 1} + C$
34. $\int (2x^2 - 4x)^9(x - 1)\,dx = \frac{1}{40}(2x^2 - 4x)^{10} + C$
35. $\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\text{sen}\,4x + C$
36. $\int \text{sen}\,x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}^2 x + C$
37. $\int x\,\text{sen}\,x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$
38. $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\,\text{sen}^2 x} + C$
39. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
40. $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$

En los problemas 41 y 42, efectúe las operaciones indicadas.

41. $\frac{d}{dx}\int (x^2 - 4x + 5)\,dx$
42. $\int \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5)\,dx$

En los problemas 43-48, resuelva la ecuación diferencial dada.

43. $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 9$

44. $\dfrac{dy}{dx} = 10x + 3\sqrt{x}$

45. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2 + x)^2}{x^5}$

47. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - 2x + \operatorname{sen} x$

48. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

49. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto (2, 3) y que también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 2x - 1$.

50. Encuentre una función $y = f(x)$ de modo quel $dy/dx = 1/\sqrt{x}$ y $f(9) = 1$.

51. Si $f''(x) = 2x$, encuentre $f'(x)$ y $f(x)$.

52. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 6$, $f'(-1) = 2$ y $f(-1) = 0$.

53. Encuentre una función f tal que $f''(x) = 12x^2 + 2$ para la cual la pendiente de la recta tangente a su gráfica en (1, 1) es 3.

54. Si $f^{(n)}(x) = 0$, ¿cuál es f?

En los problemas 55 y 56, la gráfica de la función f se muestra en azul. De las gráficas de las funciones F, G y H cuyas gráficas se muestran en negro, verde y rojo, respectivamente, ¿cuál función es la gráfica de una antiderivada de f? Justifique su razonamiento.

55.

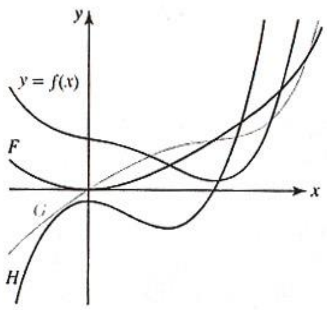


FIGURA 5.1.3 Gráficas para el problema 55

56.

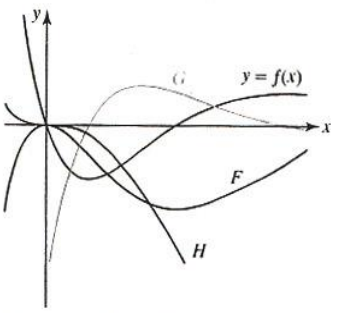


FIGURA 5.1.4 Gráficas para el problema 56

≡ Aplicaciones

57. Un cubo que contiene un líquido gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular constante ω. La forma de la sección transversal del líquido giratorio en el plano xy está determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x.$$

Con ejes de coordenadas como se muestra en la FIGURA 5.1.5, encuentre $y = f(x)$.

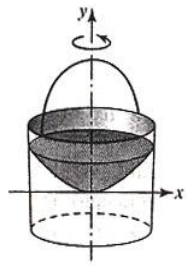


FIGURA 5.1.5 Cubo en el problema 57

58. Los extremos de una viga de longitud L están sobre dos soportes como se muestra en la FIGURA 5.1.6. Con una carga uniforme sobre la viga, su forma (o curva elástica) está determinada a partir de

$$EIy'' = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2,$$

donde E, I y q son constantes. Encuentre $y = f(x)$ si $f(0) = 0$ y $f'(L/2) = 0$.

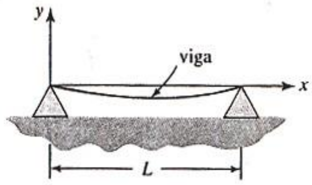


FIGURA 5.1.6 Viga en el problema 58

≡ Piense en ello

En los problemas 59 y 60, determine f.

59. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \ln|\ln x| + C$

60. $\displaystyle\int f(x)\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

61. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^2$ y $y = 4x + 7$ sea una recta tangente a la gráfica de f.

62. Simplifique la expresión $e^{4\int dx/x}$ tanto como sea posible.

63. Determine cuál de los dos resultados siguientes es correcto:

$$\int (x + 1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x + 1)^4 + C$$

o

$$\int (x + 1)^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

64. Dado que $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}\pi x = \pi\cos\pi x$, encuentre una antiderivada F de $\cos\pi x$ que tenga la propiedad de que $F(\tfrac{3}{2}) = 0$.

7.1 Integración: tres recursos

Introducción En este capítulo vamos a resumir el estudio de antiderivadas que empezó en el capítulo 5, en el que mostramos superficialmente cómo obtener antiderivadas de una función f. Recuerde que una integral definida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

es una familia $F(x) + C$ de antiderivadas de la función f; es decir, F está relacionada con f por el hecho de que $F'(x) = f(x)$. De esta manera, a la derivada de una función específica (sen x, cos x, e^x, ln x, etc.) corresponde una integral indefinida análoga. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \text{implica} \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$$

Tablas La TABLA 7.1.1 que se muestra a continuación es una versión ampliada de la tabla 5.2.1. Puesto que resume en notación integral indefinida todas las derivadas de la regla de la cadena de las funciones analizadas en los capítulos 1 y 3, referiremos las entradas de la tabla 7.1.1 a formas *familiares* o *básicas*. El objetivo de este capítulo consiste en evaluar integrales que, en su mayor parte, no caen en ninguna de las formas proporcionadas en la tabla.

La tabla 7.1.1 es sólo la punta de un *iceberg* más bien enorme; los manuales de referencia solían incluir cientos de fórmulas de integración. Aunque aquí no somos tan ambiciosos, en la sección *Fórmulas matemáticas* al final de este texto proporcionamos una tabla más amplia de fórmulas de integración. Como de costumbre, en ambas se usa notación diferencial. Si $u = g(x)$ denota una función diferenciable, entonces la diferencial de u es el producto $du = g'(x)\,dx$.

TABLA 7.1.1

Fórmulas de integración

Integrandos constantes

1. $\int du = u + C$	2. $\int k\,du = ku + C$

Integrandos que son potencias

3. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	4. $\int u^{-1}\,du = \int \dfrac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C$

Integrandos exponenciales

5. $\int e^u\,du = e^u + C$	6. $\int a^u\,du = \dfrac{1}{\ln a}a^u + C$

Integrandos trigonométricos

7. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$	8. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
9. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$	10. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
11. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$	12. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
13. $\int \tan u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	14. $\int \cot u\,du = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + C$
15. $\int \sec u\,du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$	16. $\int \csc u\,du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$

(continúa)

mente sofisticado diseñado para realizar una amplia gama de operaciones matemáticas simbólicas como álgebra normal, álgebra matricial, aritmética con números complejos, resolver ecuaciones polinomiales, aproximar raíces de ecuaciones, diferenciación, integración, graficado de ecuaciones en dos o tres dimensiones, resolver ecuaciones diferenciales, manipular funciones especiales ya contempladas en el SAC, etcétera. Si usted piensa convertirse en un estudiante serio de matemáticas, ciencias o ingeniería, entonces una ayuda ideal para sus clases teóricas y prácticas (así como para su carrera futura) sería contar con una computadora portátil equipada con un programa como *Mathematica*, *Maple* o MATLAB. También verifique en los laboratorios de matemáticas de su departamento de matemáticas o física; las computadoras que ahí encuentre indudablemente cuentan con uno o más de estos programas.

A medida que conozca y se sienta cómodo al usar un SAC, tal vez se interese en investigar sitios en la web como:

http://scienceworld.wolfram.com
http://mathworld.wolfram.com

Wolfram Research es el desarrollador del sistema computacional de álgebra *Mathematica*.

Ejercicios 7.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-32, use una sustitución u y la tabla 7.1.1 para evaluar la integral dada.

1. $\int 5^{-5x}\,dx$
2. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$
3. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$
4. $\int \dfrac{\cos e^{-x}}{e^{x}}\,dx$
5. $\int \dfrac{x}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$
6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$
7. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2-25}}\,dx$
8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{25+4x^2}}\,dx$
9. $\int \dfrac{1}{25+4x^2}\,dx$
10. $\int \dfrac{x}{25+4x^2}\,dx$
11. $\int \dfrac{1}{4x^2-25}\,dx$
12. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2+25}}\,dx$
13. $\int \cot 10x\,dx$
14. $\int x\csc^2 x^2\,dx$
15. $\int \dfrac{6}{(3-5t)^{2.2}}\,dx$
16. $\int x^2\sqrt{(1-x^3)^5}\,dx$
17. $\int \sec 3x\,dx$
18. $\int 2\csc 2x\,dx$
19. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
20. $\int \dfrac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\,dx$
21. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$
22. $\int \dfrac{\cos(\ln 9x)}{x}\,dx$
23. $\int \dfrac{x^3}{\cosh^2 x^4}\,dx$
24. $\int \tanh x\,dx$
25. $\int \tan 2x\sec 2x\,dx$
25. $\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen}(\cos x)\,dx$
27. $\int \operatorname{sen} x\csc(\cos x)\cot(\cos x)\,dx$
28. $\int \cos x\csc^2(\operatorname{sen} x)\,dx$
29. $\int (1+\tan x)^2\sec^2 x\,dx$
30. $\int \dfrac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$
31. $\int \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$
32. $\int \dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx$

7.2 Integración por sustitución

Introducción En esta sección se ampliará la idea de **sustitución u** presentada en la sección 5.2, donde esta sustitución se usó básicamente como ayuda para identificar que una integral era una de las fórmulas de integración familiares como $\int u^n\,du$, $\int du/u$, $\int e^u\,du$, etcétera. Por ejemplo, con la sustitución $u = \ln x$ y $du = (1/x)\,dx$ reconocemos que

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx \qquad \text{es lo mismo que} \qquad \int u^2\,du.$$

Usted debe comprobar que $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$ no se ajusta a *ninguna* de las 31 fórmulas de integración de la tabla 7.1.1. No obstante, con ayuda de una sustitución es posible reducir la integral a *varios* casos de una de las fórmulas en la tabla 7.1.1.

El primer ejemplo ilustra la idea general.

EJEMPLO 1 Uso de una sustitución u

Evalúe $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$.

Solución Si se hace $u = 2x+1$, entonces la integral dada puede replantearse en términos de la variable u. Para ello, observe que

$$x = \frac{1}{2}(u-1), \qquad dx = \frac{1}{2}\,du,$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(u-1)^2 = \frac{1}{4}(u^2-2u+1) \text{ y } \sqrt{2x+1} = u^{1/2}.$$

Al sustituir estas expresiones en la integral dada se obtiene:

$$\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{1}{4}(u^2-2u+1)u^{1/2}\frac{1}{2}\,du,$$

es decir,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{8}\int (u^2-2u+1)u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{8}\int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\,du && \leftarrow \text{tres aplicaciones de la fórmula 3 en la tabla 7.1.1}\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}u^{7/2}-\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\right)+C && \leftarrow \text{ahora se vuelve a sustituir para } u\\ &= \frac{1}{28}(2x+1)^{7/2}-\frac{1}{10}(2x+1)^{5/2}+\frac{1}{12}(2x+1)^{3/2}+C.\end{aligned}$$

Usted debe comprobar que la derivada de la última línea en realidad es $x^2\sqrt{2x+1}$. ■

La elección de cuál sustitución usar, en caso de haber alguna, no siempre es evidente. En general, si el integrando contiene una potencia de una función, entonces una buena idea consiste en intentar que u sea esa función *o* potencia de la función en sí. En el ejemplo 1, la sustitución alterna $u = \sqrt{2x+1}$ o $u^2 = 2x+1$ lleva a la integral diferente $\frac{1}{4}\int(1-u^2)^2u^2\,du$. La última puede evaluarse al desarrollar el integrando e integrar cada término.

EJEMPLO 2 Uso de una sustitución u

Evalúe $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Solución Sea $u = \sqrt{x}$ de modo que $x = u^2$ y $dx = 2u\,du$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+u}2u\,du\\ &= \int \frac{2u}{1+u}\,du && \leftarrow \text{ahora se usa división larga}\\ &= \int\left(2-\frac{2}{1+u}\right)du && \leftarrow \text{fórmulas 2 y 4 en tabla 7.1.1}\\ &= 2u-2\ln|1+u|+C && \leftarrow \text{se vuelve a sustituir para } u\\ &= 2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C.\end{aligned}$$

■

Integrandos que contienen una expresión cuadrática Si un integrando contiene una expresión cuadrática ax^2+bx+c, completar el cuadrado puede producir una integral que sea posible expresar en términos de una función trigonométrica inversa o una función hiperbólica inversa. Por supuesto, también es posible que integrales más complicadas produzcan otras funciones.

EJEMPLO 3 Completar el cuadrado

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx$.

Solución Después de completar el cuadrado, la integral dada puede escribirse como

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx = \int \frac{x+4}{(x+3)^2+9}\,dx.$$

Ahora, si $u = x + 3$, entonces $x = u - 3$ y $dx = du$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx &= \int \frac{u+1}{u^2+9}\,du \quad \leftarrow \text{división término a término}\\
&= \int \frac{u}{u^2+9}\,du + \int \frac{1}{u^2+9}\,du\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+9}\,du + \int \frac{1}{u^2+9}\,du \quad \leftarrow \text{fórmulas 4 y 24 en la tabla 7.1.1}\\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln[(x+3)^2+9] + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+18) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra una sustitución algebraica en una integral definida.

EJEMPLO 4 Una integral definida

Evalúe $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx$.

Solución Si $u = 3x + 2$, entonces

$$x = \frac{1}{3}(u-2), \qquad dx = \frac{1}{3}\,du,$$
$$6x + 1 = 2(u-2) + 1 = 2u - 3 \text{ y } \sqrt[3]{3x+2} = u^{1/3}.$$

Puesto que se cambiará la variable de integración, es necesario convertir los límites de integración x en límites de integración u. Observe que cuando $x = 0$, $u = 2$ y cuando $x = 2$, $u = 8$. En consecuencia, la integral original se vuelve

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx &= \int_2^8 \frac{2u-3}{u^{1/3}}\,\frac{1}{3}\,du \quad \leftarrow \text{de nuevo división término a término}\\
&= \int_2^8 \left(\frac{2}{3}u^{2/3} - u^{-1/3}\right)du\\
&= \left(\frac{2}{5}u^{5/3} - \frac{3}{2}u^{2/3}\right)\Bigg]_2^8\\
&= \left(\frac{2}{5}\cdot 2^5 - \frac{3}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} - \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3}\right)\\
&= \frac{34}{5} - \frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} + \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3} \approx 7.9112. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Se pide que el lector vuelva a trabajar el ejemplo 4. La segunda vez use $u = \sqrt[3]{3x+2}$.

$\int$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Cuando trabaje los ejercicios presentados en este capítulo, no se preocupe demasiado si no siempre obtiene la misma respuesta que se proporciona en el texto. Al aplicar técnicas diferentes al mismo problema es posible obtener respuestas que parecen diferentes. Recuerde que dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando mucho por una constante. Intente conciliar los conflictos que se presenten.

ii) También podría ser de utilidad en este punto recordar que la integración del cociente de dos funciones polinomiales, $p(x)/q(x)$, suele empezar con división larga si el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$. Vea el ejemplo 2.

iii) Busque problemas que sea posible resolver con métodos previos.

Ejercicios 7.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-26, use una sustitución para evaluar la integral dada.

1. $\int x(x+1)^3\,dx$

2. $\int \frac{x^2-3}{(x+1)^3}\,dx$

3. $\int (2x+1)\sqrt{x-5}\,dx$

4. $\int (x^2-1)\sqrt{2x+1}\,dx$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,dx$

7. $\int \frac{x+3}{(3x-4)^{3/2}}\,dx$

8. $\int (x^2+x)\sqrt[3]{x+7}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

10. $\int \frac{t}{\sqrt{t}+1}\,dt$

11. $\int \frac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t}+1}\,dt$

12. $\int \frac{\sqrt{r}+3}{r+3}\,dr$

13. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

14. $\int \frac{x^5}{\sqrt[5]{x^2+4}}\,dx$

15. $\int \frac{x^2}{(x-1)^4}\,dx$

16. $\int \frac{2x+1}{(x+7)^2}\,dx$

17. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

19. $\int \sqrt{1-\sqrt{v}}\,dv$

20. $\int \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1-\sqrt{w}}}\,dw$

21. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\int \sqrt{t}\sqrt{1+t\sqrt{t}}\,dt$

23. $\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\,dx$

24. $\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+10}\,dx$

25. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{16-6x-x^2}}\,dx$

26. $\int \frac{4x-3}{\sqrt{11+10x-x^2}}\,dx$

En los problemas 27 y 28, use la sustitución $u = x^{1/6}$ para evaluar la integral.

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

28. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

En los problemas 29-40, use una sustitución para evaluar la integral definida dada.

29. $\int_0^1 x\sqrt{5x+4}\,dx$

30. $\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}\,dx$

31. $\int_1^{16} \frac{1}{10+\sqrt{x}}\,dx$

32. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

33. $\int_2^9 \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

34. $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

35. $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^{50}\,dx$

36. $\int_0^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}\,dx$

37. $\int_1^8 \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}\,dx$

38. $\int_1^{64} \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2}\,dx$

39. $\int_0^1 x^2(1-x)^5\,dx$

40. $\int_0^6 \frac{2x+5}{\sqrt{2x+4}}\,dx$

En los problemas 41 y 42, use una sustitución para establecer el resultado dado. Suponga $x > 0$.

41. $\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

42. $\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

≡ Repaso de aplicaciones

43. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \frac{1}{x^{1/3}+1}$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

44. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = x^3\sqrt{x+1}$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.

45. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$ alrededor del eje y.

46. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar alrededor del eje x la región en el problema 45.

47. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \frac{4}{5}x^{5/4}$ en el intervalo $[0, 9]$.

48. La **ecuación diferencial de Bertalanffy** es un modelo matemático para el crecimiento de un organismo donde se supone que el metabolismo constructivo (anabolismo)

Balotario de Ejercicios Nº 2

Integración por partes

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 386, 387, 392 y 393

del organismo procede en razón proporcional al área superficial, mientras el metabolismo destructivo (catabolismo) procede en razón proporcional al volumen. Si también se supone que el área superficial es proporcional a la potencia dos tercios del volumen y que el peso w del organismo es proporcional al volumen, entonces es posible escribir la ecuación de Bertalanffy como

$$\frac{dw}{dt} = Aw^{2/3} - Bw,$$

donde A y B son parámetros positivos. A partir de esta ecuación puede concluirse que el tiempo necesario para que tal organismo aumente de peso desde w_1 hasta w_2 está dado por la integral definida

$$T = \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{Aw^{2/3} - Bw}\, dw.$$

Evalúe esta integral. Encuentre un límite superior sobre cuánto puede crecer el organismo.

7.3 Integración por partes

Introducción En esta sección desarrollaremos una fórmula importante que puede usarse a menudo para integrar el producto de dos funciones. Para aplicar la fórmula es necesario identificar una de las funciones en el producto como una diferencial. Recuerde que si $v = g(x)$, entonces su diferencial es la función $dv = g'(x)\, dx$.

Integración de productos Puesto que deseamos integrar un producto, parece razonable empezar con la regla de diferenciación del producto. Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces la derivada de $f(x)g(x)$ es

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{1}$$

A su vez, la integración de ambos miembros de (1),

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx = \int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx$$

o

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx,$$

produce la fórmula

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx. \tag{2}$$

La fórmula (2) suele escribirse en términos de las diferenciales $du = f'(x)\, dx$ y $dv = g'(x)\, dx$:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{3}$$

El procedimiento definido por la fórmula (3) se denomina **integración por partes**. La idea esencial detrás de (3) es evaluar la integral $\int u\, dv$ mediante la evaluación de otra, que se espera sea más simple, integral $\int v\, du$.

Directrices para la integración por partes

- El **primer paso** en este proceso de integración por partes consta en la elección e integración de dv en la integral dada. Como cuestión práctica, la función dv *suele ser* el factor más complicado en el producto que puede integrarse usando una de las fórmulas básicas en la tabla 7.1.1.
- El **segundo paso** es la diferenciación del factor restante u en la integral dada. Luego se forma

$$\int u\, \underbrace{dv = uv}_{\text{se integra}} - \int \overbrace{v\, du}^{\text{se diferencia}}.$$

- El **tercer paso**, por supuesto, es la evaluación de $\int v\, du$.

Algunas veces los problemas de integración pueden efectuarse aplicando varios métodos. En el primer ejemplo, la integral puede evaluarse por medio de una sustitución algebraica (sección 7.2) así como por integración por partes.

EJEMPLO 1 Uso de (3)

Evalúe $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Solución Primero, la integral se escribe como

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx.$$

A partir de esta última forma vemos que para la función dv hay varias opciones. De las posibles opciones para dv,

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx, \quad dv = x\,dx \quad \text{o} \quad dv = dx,$$

escogemos

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx \quad \text{y} \quad u = x.$$

Luego, por integración de la fórmula 3 en la tabla 7.1.1 encontramos

$$v = \int (x+1)^{-1/2}\,dx = 2(x+1)^{1/2}.$$

◀ Cuando se integra dv no se requiere ninguna constante de integración.

Al sustituir $v = 2(x+1)^{1/2}$ y $du = dx$ en (3) se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \overbrace{x}^{u}\overbrace{(x+1)^{-1/2}\,dx}^{dv} &= \overbrace{x}^{u}\cdot\overbrace{2(x+1)^{1/2}}^{v} - \int \overbrace{2(x+1)^{1/2}}^{v}\,\overbrace{dx}^{du} \\
&= 2x(x+1)^{1/2} - 2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \leftarrow \text{se usó la fórmula 3 en la tabla 7.1.1} \\
&= 2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Comprobación por diferenciación Para verificar el resultado precedente se usa la regla del producto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C\right) &= 2x\cdot\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{1/2} \\
&= x(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - 2(x+1)^{1/2} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x+1}}.
\end{aligned}$$

■

La clave para que la integración por partes funcione consiste en hacer la elección "correcta" de la función dv. En las directrices antes del ejemplo 1 se afirmó que dv suele ser el factor más complicado en el producto que puede integrarse de inmediato por medio de una fórmula conocida de antemano. Sin embargo, esto no puede tomarse como una regla estricta. Considerando que la opción "correcta" para dv que se ha hecho a menudo se basa en retrospectiva pragmática, ¿la segunda integral $\int v\,du$ es menos complicada que la primera integral $\int u\,dv$? ¿Es posible evaluar esta segunda integral? Para ver qué ocurre cuando se hace una elección "mala", de nuevo se considerará el ejemplo 1, aunque esta vez se escoge

$$dv = x\,dx \qquad \text{y} \qquad u = (x+1)^{-1/2}$$

de modo que

$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad du = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

En este caso, al aplicar (3) se obtiene

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2} + \frac{1}{4}\int x^2(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

Ejercicios 7.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-40, use integración por partes para evaluar la integral dada.

1. $\int x\sqrt{x+3}\,dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}}\,dx$
3. $\int \ln 4x\,dx$
4. $\int \ln(x+1)\,dx$
5. $\int x\ln 2x\,dx$
6. $\int x^{1/2}\ln x\,dx$
7. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx$
9. $\int (\ln t)^2\,dt$
10. $\int (t\ln t)^2\,dt$
11. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
12. $\int x^2\tan^{-1} x\,dx$
13. $\int xe^{3x}\,dx$
14. $\int x^2e^{5x}\,dx$
15. $\int x^3e^{-4x}\,dx$
16. $\int x^5e^{x}\,dx$
17. $\int x^3e^{x^2}\,dx$
18. $\int x^5e^{2x^3}\,dx$
19. $\int t\cos 8t\,dt$
20. $\int x\operatorname{senh} x\,dx$
21. $\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$
22. $\int x^2\cos\frac{x}{2}\,dx$
23. $\int x^3\cos 3x\,dx$
24. $\int x^4\operatorname{sen} 2x\,dx$
25. $\int e^x\operatorname{sen} 4x\,dx$
26. $\int e^{-x}\cos 5x\,dx$
27. $\int e^{-2\theta}\cos\theta\,d\theta$
28. $\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx$
29. $\int \theta\sec\theta\tan\theta\,d\theta$
30. $\int e^{2t}\cos e^t\,dt$
31. $\int \operatorname{sen} x\cos 2x\,dx$
32. $\int \cosh x\cosh 2x\,dx$
33. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$
34. $\int \frac{t^5}{(t^3+1)^2}\,dt$
35. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
36. $\int \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$
37. $\int \csc^3 x\,dx$
38. $\int x\sec^{-1} x\,dx$
39. $\int x\sec^2 x\,dx$
40. $\int x\tan^2 x\,dx$

En los problemas 41-46, evalúe la integral definida dada.

41. $\int_0^2 x\ln(x+1)\,dx$
42. $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$
43. $\int_2^4 xe^{-x/2}\,dx$
44. $\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos x\,dx$
45. $\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$
46. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \cos^{-1} x\,dx$

≡ Repaso de aplicaciones

47. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = 1 + \ln x$ sobre el intervalo $[e^{-1}, 3]$.
48. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.
49. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $x = 5$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
50. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = e^x$, $x = 0$ y $y = 3$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
51. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = 0$, $0 \le x \le \pi$, gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
52. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.
53. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \tan^{-1}(x/2)$ sobre el intervalo $[0, 2]$.
54. Un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$, donde v se mide en cm/s. Encuentre la función posición $s(t)$ si se sabe que $s = 0$ cuando $t = 0$.
55. Un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t) = te^{-t}$, donde a se mide en cm/s^2. Encuentre la función velocidad $v(t)$ y la función posición $s(t)$ si $v(0) = 1$ y $s(0) = -1$.
56. Un tanque de agua se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen}\pi x$ y $y = 0$, $0 \le x \le 1$, alrededor del eje x, que se toma en la dirección hacia abajo. El tanque contiene agua hasta una profundidad de $\frac{1}{2}$ pie. Determine el trabajo realizado para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque.
57. Encuentre la fuerza provocada por la presión de un líquido sobre un lado de la placa vertical que se muestra en la FIGURA 7.3.2. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

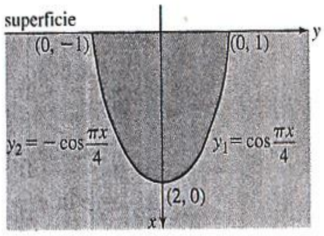


FIGURA 7.3.2 Placa sumergida en el problema 57

58. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$ y $x = \pi/2$.

En los problemas 59-62, evalúe la integral usando primero una sustitución seguida de integración por partes.

59. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **60.** $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x}}\,dx$

61. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x+2}\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{t}\,dt$

En los problemas 63-66, use integración por partes para establecer la **fórmula de reducción** dada.

63. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

64. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

65. $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

66. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx,$

En los problemas 67-70, use una fórmula de reducción para los problemas 63-66 para evaluar la integral dada.

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$ **68.** $\displaystyle\int \sec^4 x\,dx$

69. $\displaystyle\int \cos^3 10x\,dx$ **70.** $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

71. Use el problema 64 para demostrar que para $n \geq 2$,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

72. Demuestre cómo el uso repetido de la fórmula en el problema 71 sirve para obtener los siguientes resultados.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n},$
n par y $n \geq 2$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n},$
n impar y $n \geq 3$

73. Use el inciso *a*) del problema 72 para evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\,dx.$

74. Use el inciso *b*) del problema 72 para evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx.$

≡ Piense en ello

En los problemas 75-82, la integración por partes es algo más desafiante. Evalúe la integral dada.

75. $\displaystyle\int e^{2x}\tan^{-1} e^x\,dx$ **76.** $\displaystyle\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ **78.** $\displaystyle\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$

79. $\displaystyle\int xe^x \operatorname{sen} x\,dx$ **80.** $\displaystyle\int xe^{-x}\cos 2x\,dx$

81. $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ **82.** $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen}^{-1} x}\,dx$

≡ Problemas con calculadora/SAC

83. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = 3 + 2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen}^4 x$.

b) Encuentre el área bajo la gráfica de la función dada en el inciso *a*) sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

84. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = x\operatorname{sen} x$ y $y = x\cos x$.

b) Encuentre el área de la región acotada por las gráficas sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, donde x_1 y x_2 son las coordenadas x positivas correspondientes a los puntos primero y segundo de intersección de las gráficas para $x > 0$.

7.4 Potencias de funciones trigonométricas

Introducción En la sección 5.2 vimos cómo integrar $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$. En esta sección veremos cómo integrar potencias superiores de sen x y cos x, determinados productos de potencias de sen x y cos x, y productos de potencias de sec x y tan x. Las técnicas ilustradas en esta sección dependen de identidades trigonométricas.

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$ Para evaluar integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx, \qquad (1)$$

distinguimos dos casos.

Balotario de Ejercicios Nº 3

Integración de funciones trigonométricas

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 393, 394, 395, 398 y 399

58. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \text{sen } x$, $y = 0$ y $x = \pi/2$.

En los problemas 59-62, evalúe la integral usando primero una sustitución seguida de integración por partes.

59. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **60.** $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x}}\,dx$

61. $\displaystyle\int \text{sen}\sqrt{x+2}\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{t}\,dt$

En los problemas 63-66, use integración por partes para establecer la **fórmula de reducción** dada.

63. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

64. $\displaystyle\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{\text{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\,dx$

65. $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\,\text{sen } x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

66. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx,$

En los problemas 67-70, use una fórmula de reducción para los problemas 63-66 para evaluar la integral dada.

67. $\displaystyle\int \text{sen}^3 x\,dx$ **68.** $\displaystyle\int \sec^4 x\,dx$

69. $\displaystyle\int \cos^3 10x\,dx$ **70.** $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

71. Use el problema 64 para demostrar que para $n \geq 2$,

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2} x\,dx.$$

72. Demuestre cómo el uso repetido de la fórmula en el problema 71 sirve para obtener los siguientes resultados.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n},$
n par y $n \geq 2$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n},$
n impar y $n \geq 3$

73. Use el inciso *a*) del problema 72 para evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^8 x\,dx.$

74. Use el inciso *b*) del problema 72 para evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^5 x\,dx.$

≡ Piense en ello

En los problemas 75-82, la integración por partes es algo más desafiante. Evalúe la integral dada.

75. $\displaystyle\int e^{2x}\tan^{-1} e^x\,dx$ **76.** $\displaystyle\int (\text{sen}^{-1} x)^2\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ **78.** $\displaystyle\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$

79. $\displaystyle\int xe^x\,\text{sen } x\,dx$ **80.** $\displaystyle\int xe^{-x}\cos 2x\,dx$

81. $\displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$ **82.** $\displaystyle\int e^{\text{sen}^{-1} x}\,dx$

≡ Problemas con calculadora/SAC

83. *a)* Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = 3 + 2\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}^4 x$.

b) Encuentre el área bajo la gráfica de la función dada en el inciso *a*) sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

84. *a)* Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = x\,\text{sen } x$ y $y = x\cos x$.

b) Encuentre el área de la región acotada por las gráficas sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, donde x_1 y x_2 son las coordenadas x positivas correspondientes a los puntos primero y segundo de intersección de las gráficas para $x > 0$.

7.4 Potencias de funciones trigonométricas

Introducción En la sección 5.2 vimos cómo integrar $\text{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$. En esta sección veremos cómo integrar potencias superiores de sen x y cos x, determinados productos de potencias de sen x y cos x, y productos de potencias de sec x y tan x. Las técnicas ilustradas en esta sección dependen de identidades trigonométricas.

Integrales de la forma $\int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx$ Para evaluar integrales del tipo

$$\int \text{sen}^m x\,\cos^n x\,dx, \tag{1}$$

distinguimos dos casos.

CASO I: *m* o *n* es un entero positivo impar

Primero suponemos que $m = 2k + 1$ en (1) es un entero positivo impar. Entonces:

- Empezamos por separar el factor sen x de $\text{sen}^{2k+1} x$, es decir, se escribe $\text{sen}^{2k+1} x = \text{sen}^{2k} x$ sen x, donde ahora $2k$ es par.
- Usamos la identidad pitagórica básica $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, para volver a escribir

$$\text{sen}^{2k} x = (\text{sen}^2 x)^k = (1 - \cos^2 x)^k.$$

- Desarrollamos el binomio $(1 - \cos^2 x)^k$.

De esta manera es posible expresar el integrando en (1) como una suma de potencias de cos x multiplicadas por sen x. Así, la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una de la cuales tiene la forma identificable

$$\int \cos^r x \,\text{sen}\, x\, dx = -\int \overbrace{(\cos x)^r}^{u^r} \overbrace{(-\text{sen}\, x\, dx)}^{du} = -\int u^r\, du.$$

Si $n = 2k + 1$ es un entero positivo impar en (1), entonces el procedimiento es el mismo, excepto que escribimos $\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cos x$, usamos $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, y escribimos la integral como una suma de integrales de la forma

$$\int \text{sen}^r x \cos x\, dx = \int \overbrace{(\text{sen}\, x)^r}^{u^r} \overbrace{(\cos x\, dx)}^{du} = \int u^r\, du.$$

Observamos que el exponente r no necesita ser un entero.

EJEMPLO 1 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\displaystyle\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx.$

Solución Empezamos por escribir la potencia de sen x como $\text{sen}^5 x = \text{sen}^4 x$ sen x:

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int \cos^2 x\, \text{sen}^4 x\, \text{sen}\, x\, dx \\
&= \int \cos^2 x (\text{sen}^2 x)^2 \,\text{sen}\, x\, dx && \leftarrow \text{reemplace } \text{sen}^2 x \text{ por } 1 - \cos^2 x \\
&= \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \,\text{sen}\, x\, dx \\
&= \int \cos^2 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\, \text{sen}\, x\, dx && \leftarrow \text{se escribe como tres integrales} \\
&= -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2} \overbrace{(-\text{sen}\, x\, dx)}^{du} + 2\int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4} \overbrace{(-\text{sen}\, x\, dx)}^{du} - \int \overbrace{(\cos x)^6}^{u^6} \overbrace{(-\text{sen}\, x\, dx)}^{du} \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\displaystyle\int \text{sen}^3 x\, dx.$

Solución Como en el ejemplo 1, volvemos a escribir la potencia de sen x como $\text{sen}^2 x$ sen x:

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^3 x\, dx &= \int \text{sen}^2 x\, \text{sen}\, x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)\, \text{sen}\, x\, dx \\
&= \int \text{sen}\, x\, dx + \int (\cos x)^2 (-\text{sen}\, x\, dx) \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Caso I de la integral (1)

Evalúe $\int \text{sen}^4 x \cos^3 x\,dx$.

Solución En esta ocasión volvemos a escribir la potencia de cos x como $\cos^2 x \cos x$:

$$\int \text{sen}^4 x \cos^3 x\,dx = \int \text{sen}^4 x \cos^2 x \cos x\,dx$$

$$= \int \text{sen}^4 x(1 - \text{sen}^2 x)\cos x\,dx \qquad \leftarrow \text{se escribe como dos integrales}$$

$$= \int \overbrace{(\text{sen}\,x)^4}^{u^4}\overbrace{(\cos x\,dx)}^{du} - \int \overbrace{(\text{sen}\,x)^6}^{u^6}\overbrace{(\cos x\,dx)}^{du}$$

$$= \frac{1}{5}\text{sen}^5 x - \frac{1}{7}\text{sen}^7 x + C.$$

■

CASO II: *m* y *n* son ambos enteros no negativos pares

Cuando m y n son enteros no negativos pares, la evaluación de (1) depende de las identidades trigonométricas

$$\text{sen}\,x\cos x = \frac{1}{2}\text{sen}\,2x, \quad \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \qquad (2)$$

En la sección 5.2 vimos las dos últimas identidades como las formas útiles para las fórmulas de la mitad de un ángulo para el seno y el coseno.

EJEMPLO 4 Uso de las identidades (2) en la integral (1)

Evalúe $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$.

Solución La integral se evaluará en dos formas. Empezamos por usar las fórmulas segunda y tercera en (2):

$$\int \text{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\cdot\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right]dx \qquad \leftarrow \begin{array}{l}\text{tercera identidad en (2)}\\ \text{con } x \text{ sustituida por } 2x\end{array}$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\text{sen}\,4x + C.$$

Solución alterna Ahora usamos la primera fórmula en (2):

$$\int \text{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = \int (\text{sen}\,x\cos x)^2\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\text{sen}\,2x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\,dx.$$

■

El resto de la solución es igual que antes.

Al restar los resultados en (4) y (5) se llega al resultado deseado:

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Integrales del tipo

$$\int \cot^m x \csc^n x\, dx \tag{6}$$

se manejan de manera análoga a (3). En este caso usamos la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.

Ejercicios 7.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

Fundamentos

En los problemas 1-40, evalúe la integral indefinida. Observe que algunas integrales no caen, hablando estrictamente, en ninguno de los casos considerados en esta sección. Usted debe evaluar estas integrales aplicando métodos previos.

1. $\int (\operatorname{sen} x)^{1/2}\cos x\, dx$
2. $\int \cos^4 5x \operatorname{sen} 5x\, dx$
3. $\int \cos^3 x\, dx$
4. $\int \operatorname{sen}^3 4x\, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^5 t\, dt$
6. $\int \cos^5 t\, dt$
7. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$
8. $\int \operatorname{sen}^5 2x \cos^2 2x\, dx$
9. $\int \operatorname{sen}^4 t\, dt$
10. $\int \cos^6 \theta\, d\theta$
11. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$
12. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$
13. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$
14. $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x\, dx$
15. $\int \tan^3 2t \sec^4 2t\, dt$
16. $\int (2 - \sqrt{\tan x})^2 \sec^2 x\, dx$
17. $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$
18. $\int \tan^2 3x \sec^2 3x\, dx$
19. $\int \tan^3 x (\sec x)^{-1/2}\, dx$
20. $\int \tan^3 \frac{x}{2}\sec^3\frac{x}{2}\, dx$
21. $\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx$
22. $\int \tan^5 x \sec x\, dx$
23. $\int \sec^5 x\, dx$
24. $\int \frac{1}{\cos^4 x}\, dx$
25. $\int \cos^2 x \cot x\, dx$
26. $\int \operatorname{sen} x \sec^7 x\, dx$
27. $\int \cot^{10} x \csc^4 x\, dx$
28. $\int (1 + \csc^2 t)^2\, dt$
29. $\int \frac{\sec^4(1-t)}{\tan^8(1-t)}\, dt$
30. $\int \frac{\operatorname{sen}^3\sqrt{t}\cos^2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$
31. $\int (1 + \tan x)^2 \sec x\, dx$
32. $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx$
33. $\int \tan^4 x\, dx$
34. $\int \tan^5 x\, dx$
35. $\int \cot^3 t\, dt$
36. $\int \csc^5 t\, dt$
37. $\int (\tan^6 x - \tan^2 x)\, dx$
38. $\int \cot 2x \csc^{5/2} 2x\, dx$
39. $\int x \operatorname{sen}^3 x^2\, dx$
40. $\int x \tan^8(x^2)\sec^2(x^2)\, dx$

En los problemas 41-46, evalúe la integral definida dada.

41. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\sqrt{\cos\theta}\, d\theta$
42. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\, dx$
43. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 2t\, dt$
44. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$
45. $\int_0^{\pi/4} \tan y \sec^4 y\, dy$
46. $\int_0^{\pi/3} \tan x \sec^{3/2} x\, dx$

En los problemas 47-52, use las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$$

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

para evaluar la integral trigonométrica dada.

47. $\int \operatorname{sen} x \cos 2x\, dx$
48. $\int \cos 3x \cos 5x\, dx$

49. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x \, dx$

50. $\int \frac{5 - 3 \operatorname{sen} 2x}{\sec 6x} \, dx$

51. $\int_0^{\pi/6} \cos 2x \cos x \, dx$

52. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \frac{3}{2}x \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \, dx$

53. Demuestre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

54. Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx.$

≡ Repaso de aplicaciones

En los problemas 55 y 56 se proporcionan las gráficas de $f(x) = \sec^2(x/2)$ (problema 55) y $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (problema 56). Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región R acotada por la función de f sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ alrededor del eje indicado.

55. El eje x:

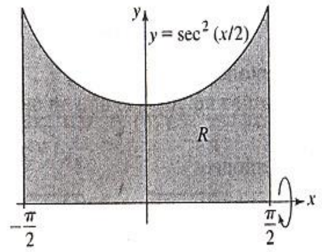


FIGURA 7.4.1 Región en el problema 55

56. La recta $y = 1$;

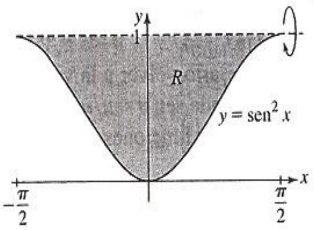


FIGURA 7.4.2 Región en el problema 56

57. Encuentre el área de la región R acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen}^3 x$ y $y = \cos^3 x$ sobre el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$. Vea la FIGURA 7.4.3.

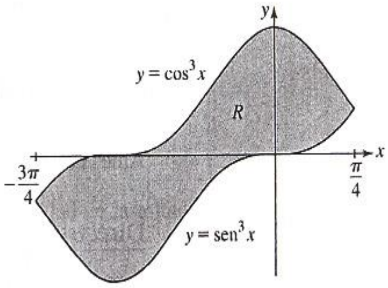


FIGURA 7.4.3 Gráficas para el problema 57

58. La gráfica de la ecuación $r = |\operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta|$ $0 \le \theta \le 2\pi$, encierra una región que es un modelo matemático para la forma de una hoja de castaño. Vea la FIGURA 7.4.4. En el capítulo 10 verá que el área acotada por esta gráfica está dada por $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, d\theta$. Encuentre esta área. [*Sugerencia*: Use una de las identidades dadas en las instrucciones para los problemas 47-52.]

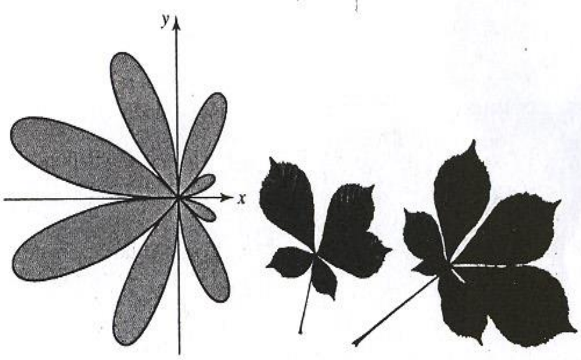


FIGURA 7.4.4 Región en el problema 58 — Hojas de castaño

≡ Problemas con calculadora/SAC

59. Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $y = \cos^3 x$, $y = \cos^5 x$ y $y = \cos^7 x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$. Use las gráficas para conjeturar los valores de las integrales definidas

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx, \quad \int_0^{\pi} \cos^5 x \, dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi} \cos^7 x \, dx.$$

60. En el problema 59, ¿cuál cree que es el valor de $\int_0^{\pi} \cos^n x \, dx$, donde n es un entero positivo impar? Demuestre su conjetura.

7.5 Sustituciones trigonométricas

Introducción Cuando un integrando contiene potencias enteras de x y potencias enteras de

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad \sqrt{a^2 + u^2} \quad \text{o} \quad \sqrt{u^2 - a^2}, a > 0 \tag{1}$$

podemos evaluar la integral por medio de sustituciones trigonométricas. Los tres casos que consideramos en esta sección dependen, a su vez, de las identidades pitagóricas fundamentales escritas en la forma:

$$1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta, \qquad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \qquad \text{y} \qquad \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta.$$

Balotario de Ejercicios Nº 4

Sustituciones Trigonométricas

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 405 y 406

Ejercicios 7.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-23.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-38, evalúe la integral indefinida dada por medio de una sustitución trigonométrica cuando así convenga. Usted debe evaluar algunas de las integrales sin una sustitución.

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$
2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}}\,dx$
4. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$
5. $\int x\sqrt{x^2+7}\,dx$
6. $\int (1-x^2)^{3/2}\,dx$
7. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$
8. $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$
9. $\int \frac{1}{(x^2-4)^{3/2}}\,dx$
10. $\int (9-x^2)^{3/2}\,dx$
11. $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$
12. $\int \frac{x}{25+x^2}\,dx$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$
14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-25}}\,dx$
15. $\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^2}}\,dx$
16. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$
17. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$
18. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$
19. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$
20. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$
21. $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\,dx$
22. $\int \frac{x^2}{(4+x^2)^{3/2}}\,dx$
23. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$
24. $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,dx$
25. $\int \frac{1}{(4+x^2)^{5/2}}\,dx$
26. $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{5/2}}\,dx$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx$
28. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
29. $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}\,dx$
30. $\int \frac{1}{(11-10x-x^2)^2}\,dx$
31. $\int \frac{x-3}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx$
32. $\int \frac{1}{(x^2+2x)^{3/2}}\,dx$
33. $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}\,dx$
34. $\int \frac{1}{4+(x-3)^2}\,dx$
35. $\int \frac{x^2}{x^2+16}\,dx$
36. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x}\,dx$
37. $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$
38. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

En los problemas 39-44, evalúe la integral definida dada.

39. $\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$
40. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
41. $\int_{0}^{5} \frac{1}{(x^2+25)^{3/2}}\,dx$
42. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$
43. $\int_{1}^{6/5} \frac{16}{x^4\sqrt{4-x^2}}\,dx$
44. $\int_{0}^{1/2} x^3(1+x^2)^{-1/2}\,dx$

En los problemas 45 y 46, use integración por partes seguida de una sustitución trigonométrica.

45. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
46. $\int x \cos^{-1} x\,dx$

☰ Repaso de aplicaciones

47. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{x\sqrt{3+x^2}}$. Encuentre el área bajo la gráfica sobre el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.
48. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = x^5\sqrt{1-x^2}$. Encuentre el área bajo la gráfica sobre el intervalo $[0, 1]$.
49. Demuestre que el área de un círculo dado por $x^2 + y^2 = a^2$ es πa^2.
50. Demuestre que el área de una elipse dada por $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ es πab.
51. La región descrita en el problema 47 gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
52. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{4}{4+x^2}$, $x = 2$ y $y = 0$ gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
53. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = x\sqrt{4+x^2}$, $x = 2$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
54. La región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x = 1$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
55. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \ln x$ sobre el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.
56. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ sobre el intervalo $[1, 2]$.
57. Una mujer, M, empezando en el origen, se mueve en la dirección del eje y positivo jalando una masa a lo largo de la curva C, denominada **tractriz**, indicada en la FIGURA 7.5.8. La masa, que inicialmente está sobre el eje x en

$(a, 0)$, es jalada por una cuerda de longitud constante a que mantiene durante todo el movimiento.

a) Demuestre que la ecuación diferencial de la tractriz es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

b) Resuelva la ecuación en el inciso *a*). Suponga que el punto inicial sobre el eje x es $(10, 0)$ y que la longitud de la cuerda es $a = 10$ pies.

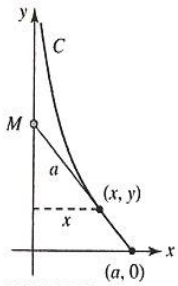


FIGURA 7.5.8 Tractriz en el problema 57

58. La región acotada por la gráfica de $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $r < a$, gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución o **toroide**. Vea la FIGURA 7.5.9.

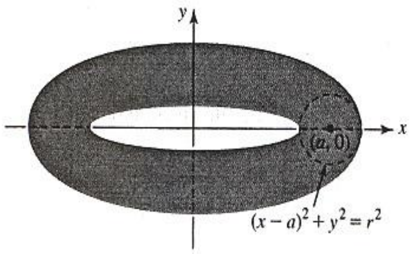


FIGURA 7.5.9 Toroide en el problema 58

59. Encuentre la fuerza del fluido sobre un lado de la placa vertical mostrada en la FIGURA 7.5.10. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

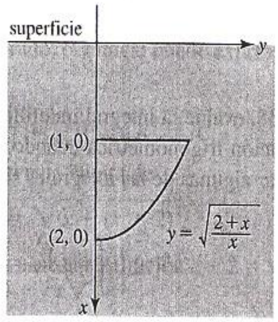


FIGURA 7.5.10 Placa sumergida en el problema 59

60. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

≡ Piense en ello

61. Evalúe las siguientes integrales por medio de una sustitución trigonométrica idónea.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x} - 1}\,dx$

62. Encuentre el área de la región en forma creciente mostrada en amarillo en la FIGURA 7.5.11. La región, fuera del círculo de radio a pero dentro del círculo de radio b, $a \neq b$, se denomina **luna**.

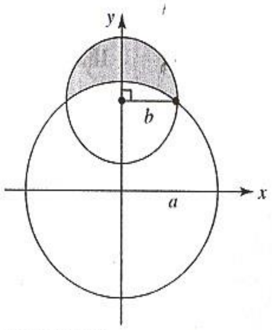


FIGURA 7.5.11 Luna en el problema 62

7.6 Fracciones parciales

Introducción Cuando se suman dos funciones racionales, por ejemplo $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, los términos se combinan por medio de un denominador común:

$$g(x) + h(x) = \frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x + 5}\left(\frac{x + 1}{x + 1}\right) + \frac{1}{x + 1}\left(\frac{x + 5}{x + 5}\right). \qquad (1)$$

Al sumar los denominadores en el miembro derecho de (1) obtenemos la función racional simple

$$f(x) = \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}. \qquad (2)$$

Ahora suponga que es necesario integrar la función f. Por supuesto, la solución es evidente: usamos la igualdad de (1) y (2) para escribir

$$\int \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}\,dx = \int \left[\frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1}\right] dx = 2\ln|x + 5| + \ln|x + 1| + C.$$

Balotario de Ejercicios Nº 5

Integración de fracciones simples y parciales

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 406, 407, 413 y 414

$(a, 0)$, es jalada por una cuerda de longitud constante a que mantiene durante todo el movimiento.

a) Demuestre que la ecuación diferencial de la tractriz es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

b) Resuelva la ecuación en el inciso *a*). Suponga que el punto inicial sobre el eje x es $(10, 0)$ y que la longitud de la cuerda es $a = 10$ pies.

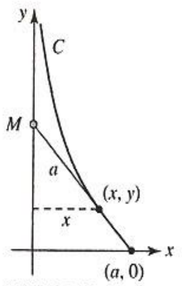


FIGURA 7.5.8 Tractriz en el problema 57

58. La región acotada por la gráfica de $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $r < a$, gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución o **toroide**. Vea la FIGURA 7.5.9.

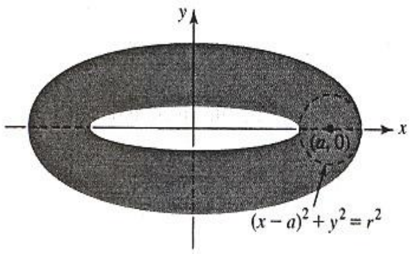


FIGURA 7.5.9 Toroide en el problema 58

59. Encuentre la fuerza del fluido sobre un lado de la placa vertical mostrada en la FIGURA 7.5.10. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

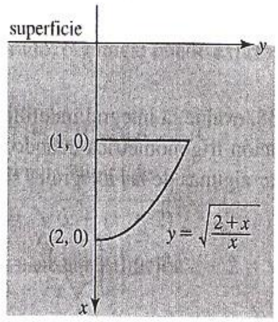


FIGURA 7.5.10 Placa sumergida en el problema 59

60. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

≡ Piense en ello

61. Evalúe las siguientes integrales por medio de una sustitución trigonométrica idónea.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x} - 1}\,dx$

62. Encuentre el área de la región en forma creciente mostrada en amarillo en la FIGURA 7.5.11. La región, fuera del círculo de radio a pero dentro del círculo de radio b, $a \neq b$, se denomina **luna**.

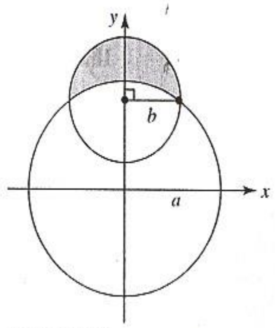


FIGURA 7.5.11 Luna en el problema 62

7.6 Fracciones parciales

Introducción Cuando se suman dos funciones racionales, por ejemplo $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, los términos se combinan por medio de un denominador común:

$$g(x) + h(x) = \frac{2}{x+5} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+5}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\left(\frac{x+5}{x+5}\right). \tag{1}$$

Al sumar los denominadores en el miembro derecho de (1) obtenemos la función racional simple

$$f(x) = \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}. \tag{2}$$

Ahora suponga que es necesario integrar la función f. Por supuesto, la solución es evidente: usamos la igualdad de (1) y (2) para escribir

$$\int \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}\,dx = \int \left[\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x+1}\right] dx = 2\ln|x + 5| + \ln|x + 1| + C.$$

Este ejemplo ilustra un procedimiento para integrar ciertas funciones racionales $f(x) = p(x)/q(x)$. Este método consiste en invertir el proceso ilustrado en (1); en otras palabras, empezamos con una función racional —como (2)— y la separamos en fracciones componentes más simples $g(x) = 2/(x+5)$ y $h(x) = 1/(x+1)$, denominadas **fracciones parciales**. Luego evaluamos la integral término a término.

Fracciones parciales El proceso algebraico para separar una expresión racional, como (2), en fracciones parciales se denomina **descomposición en fracciones parciales**. Por conveniencia supondremos que la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, $q(x) \neq 0$, es una **fracción propia** o una **expresión racional propia**; es decir, que el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. También supondremos que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En esta sección estudiaremos cuatro casos de descomposición en fracciones parciales.

Factores lineales distintos El siguiente hecho del álgebra se plantea sin demostración. Si el denominador $q(x)$ contiene un producto de n factores lineales distintos,

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n),$$

donde las a_i y b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene la suma

$$\frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores lineales $a_ix + b_i$.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}\,dx$.

Solución Se establece la hipótesis de que el integrando puede escribirse como

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Al combinar los términos del miembro derecho de la ecuación sobre un común denominador obtenemos

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)}.$$

Puesto que los denominadores son iguales, los numeradores de las dos expresiones deben ser idénticamente iguales:

$$2x + 1 = A(x+3) + B(x-1). \tag{3}$$

Puesto que la última línea es una identidad, los coeficientes de las potencias de x son los mismos

$$\overbrace{2x + 1x^0 = (A+B)x}^{\text{iguales}} + (3A - B)x^0$$

iguales

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 1 &= 3A - B. \end{aligned} \tag{4}$$

Al sumar las dos ecuaciones obtenemos $3 = 4A$, de modo que encontramos $A = \frac{3}{4}$. Luego, al sustituir este valor en cualquier ecuación de (4) obtenemos $B = \frac{5}{4}$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{x+3}.$$

$\int$ NOTAS DESDE EL AULA

Hay otra forma, denominada **método de encubrimiento**, para determinar los coeficientes en una descomposición en fracciones parciales en el caso especial cuando el denominador del integrando es el producto de factores lineales distintos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)}.$$

Este método se ilustrará por medio de un ejemplo específico. A partir del análisis anterior sabemos que existen constantes únicas A, B y C tales que

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}. \qquad (13)$$

Suponga que multiplicamos por $x - 1$, que se simplifica y luego se hace $x = 1$, a ambos miembros de esta última expresión. Puesto que los coeficientes de B y C son cero, obtenemos

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 2)(x + 3)}\right|_{x=1} = A \quad \text{o} \quad A = -1.$$

Escrito de otra forma,

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{\boxed{(x - 1)}(x - 2)(x + 3)}\right|_{x=1} = A$$

donde sombreamos o cubrimos el factor que se cancela cuando el miembro izquierdo de (13) se multiplica por $x - 1$. *Este factor cubierto no se evalúa* en $x = 1$. Luego, para obtener B y C simplemente evaluamos el miembro izquierdo de (13) mientras se cubren, a la vez, $x - 2$ y $x + 3$:

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)\boxed{(x - 2)}(x + 3)}\right|_{x=2} = B \quad \text{o} \quad B = \frac{11}{5}$$

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)\boxed{(x + 3)}}\right|_{x=-3} = C \quad \text{o} \quad C = -\frac{1}{5}.$$

Por tanto, obtenemos la descomposición

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{\frac{11}{15}}{x - 2} + \frac{-\frac{1}{5}}{x + 3}.$$

Ejercicios 7.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-23.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, escriba la forma idónea de la descomposición en fracciones parciales de la expresión dada. No evalúe los coeficientes.

1. $\dfrac{x - 1}{x^2 + x}$
2. $\dfrac{9x - 8}{(x - 3)(2x - 5)}$
3. $\dfrac{x^3}{(x - 1)(x + 2)^3}$
4. $\dfrac{2x^2 - 3}{x^3 + 6x^2}$
5. $\dfrac{4}{x^3(x^2 + 3)}$
6. $\dfrac{-x^2 + 3x + 7}{(x + 2)^2(x^2 + x + 1)}$
7. $\dfrac{2x^3 - x}{(x^2 + 9)^2}$
8. $\dfrac{3x^2 - x + 4}{x^4 + 2x^3 + x}$

En los problemas 9-42, use fracciones parciales para evaluar la integral dada.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x - 2)}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{x(2x + 3)}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{2x^2 - x}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{3x + 10}{x^2 + 2x}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 - 16}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 25}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2 + 5x + 2}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x + 5}{(x + 4)(x^2 - 1)}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 - x}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{1}{(4x^2-1)(x+7)}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{4t^2+3t-1}{t^3-t^2}\,dt$
22. $\displaystyle\int \frac{2x-11}{x^3+2x^2}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{t-1}{t^4+6t^3+9t^2}\,dt$
25. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)^3}\,dx$
26. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2-4)^2}\,dx$
27. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+6x+5)^2}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}\,dx$
29. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-x+9}{x^5+2x^4}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x(x-3)^2(x+2)^2}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x^2+3)}\,dx$
33. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$
34. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x^2+4)}\,dx$
35. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx$
36. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+13x^2+36}\,dx$
37. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$
38. $\displaystyle\int \frac{81}{x^4+27x}\,dx$
39. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{4x+12}{(x-2)(x^2+4x+8)}\,dx$
41. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x^2+4)^2}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$

En los problemas 43 y 44, proceda como en el ejemplo 7 para evaluar la integral dada.

43. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-3}{x^4+8x^2+16}\,dx$
44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\,dx$

En los problemas 45 y 46, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral dada.

45. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+4}{(x+1)^2}\,dx$
46. $\displaystyle\int \frac{x^5-10x^3}{x^4-10x^2+9}\,dx$

En los problemas 47-54, evalúe la integral definida dada.

47. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$
48. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$
49. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x-1}{(x+3)^2}\,dx$
50. $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x+6}{x(x+1)^2}\,dx$
51. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}\,dx$
52. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+8x^2+16}\,dx$
53. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}\,dx$
54. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^5+4x^4+5x^3}\,dx$

En los problemas 55-58, evalúe la integral definida dada usando primero la sustitución indicada seguida por fracciones parciales.

55. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx;\quad u^2 = 1-x^2$
56. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx;\quad u^2 = \frac{x-1}{x+1}$
57. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx;\quad u^3 = x+1$
58. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx;\quad u^6 = x$

≡ Repaso de aplicaciones

En los problemas 59 y 60, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

59. $y = \dfrac{1}{x^2+2x-3};\quad [2,4]$
60. $y = \dfrac{x^3}{(x^2+1)(x^2+2)};\quad [0,4]$

En los problemas 61 y 62, encuentre el área acotada por la gráfica de la función dada y el eje x sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

61. $y = \dfrac{x}{(x+2)(x+3)};\quad [-1,1]$
62. $y = \dfrac{3x^3}{x^3-8};\quad [-2,1]$

En los problemas 63-66, encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada en el primer cuadrante por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor del eje indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada.

63. $y = \dfrac{2}{x(x+1)},\ x=1,\ x=3,\ y=0;$ eje x
64. $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+4)}},\ x=0,\ x=2,\ y=0;$ eje x
65. $y = \dfrac{4}{(x+1)^2},\ x=0,\ x=1,\ y=0;$ eje y
66. $y = \dfrac{8}{(x^2+1)(x^2+4)},\ x=0,\ x=1,\ y=0;$ eje y

≡ Piense en ello

En los problemas 67-70, evalúe la integral dada haciendo primero la sustitución seguida de una descomposición en fracciones parciales.

67. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 2}\,dx$
68. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \cos^3 x}\,dx$
69. $\displaystyle\int \frac{e^t}{(e^t+1)^2(e^t-2)}\,dt$
70. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^3}\,dt$

SEGUNDA UNIDAD

Integral Definida

Balotario de Ejercicios Nº 6

La Integral Definida: Área. Sumas de Riemann y la integral definida. Teorema del Valor Medio para integrales

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 295, 296, 297, 298, 300, 303 y 304 *a*) Si $t(0) = 0$, demuestre que el tiempo necesario para que el péndulo vaya de B a P es

$$t(s) = \sqrt{\frac{L}{g}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{s}{s_C}\right).$$

b) Use el resultado del inciso *a*) para determinar el tiempo de recorrido de B a C.

c) Use *b*) para determinar el periodo T del péndulo; es decir, el tiempo para hacer una oscilación de A a C y de regreso a A.

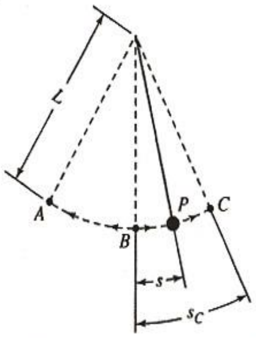


FIGURA 5.2.1 Péndulo en el problema 63

≡ Piense en ello

64. Encuentre una función $y = f(x)$ para la cual $f(\pi/2) = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = \cos^3 x$. [*Sugerencia*: $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$.]

En los problemas 65 y 66, use las identidades en (25) para evaluar la integral indefinida dada.

65. $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$ **66.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

En los problemas 67 y 68, evalúe la integral indefinida dada.

67. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-16}}\, dx$ **68.** $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx$

En los problemas 69 y 70, evalúe la integral indefinida dada.

69. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\, dx$ **70.** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} 2x}\, dx$

En los problemas 71-74, evalúe la integral indefinida dada. Suponga que f es una función diferenciable.

71. $\displaystyle\int f'(8x)\, dx$ **72.** $\displaystyle\int xf'(5x^2)\, dx$

73. $\displaystyle\int \sqrt{f(2x)}f'(2x)\, dx$ **74.** $\displaystyle\int \frac{f'(3x+1)}{f(3x+1)}\, dx$

75. Evalúe $\displaystyle\int f''(4x)\, dx$ si $f(x) = \sqrt{x^4+1}$.

76. Evalúe $\displaystyle\int \left\{\int \sec^2 3x\, dx\right\} dx$.

5.3 El problema de área

▮ Introducción Así como la derivada es motivada por el problema geométrico de construir una tangente a una curva, el problema histórico que conduce a la definición de integral definida es el problema de encontrar un área. En específico, tenemos interés en la siguiente versión de este problema:

- Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$.

El área de esta región se denomina **área bajo la gráfica** de f sobre el intervalo $[a, b]$. El requerimiento de que f sea no negativa sobre $[a, b]$ significa que ninguna parte de esta gráfica sobre el intervalo está por abajo del eje x. Vea la FIGURA 5.3.1.

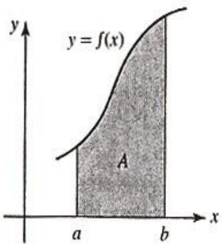


FIGURA 5.3.1 Área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$

Antes de continuar con la solución del problema de área es necesario hacer una breve digresión para analizar una notación útil para una suma de números como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \qquad \text{y} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Notación sigma Sea a_k un número real que depende de un entero k. La suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ se denota por el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$; esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Puesto que $\sum$ es la letra griega mayúscula *sigma*, (1) se denomina **notación sigma** o **notación de suma**. La variable k se denomina **índice de la suma**. Así,

termina con este valor de k

$$\text{el símbolo } \Sigma \text{ indica la suma de } a_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k$$

empieza con el valor indicado de k

es la suma de todos los números de la forma a_k cuando k asume los valores sucesivos $k = 1$, $k = 2, \ldots,$ y termina con $k = n$.

EJEMPLO 1 Uso de la notación sigma

La suma de los diez primeros enteros pares

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 18 + 20$$

puede escribirse de manera abreviada como $\sum_{k=1}^{10} 2k$. La suma de los diez enteros positivos impares

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 17 + 19$$

puede escribirse como $\sum_{k=1}^{10}(2k - 1)$. ■

El índice de la suma no necesita empezar en el valor $k = 1$; por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Observe que la suma de los diez enteros positivos impares en el ejemplo 1 también puede escribirse como $\sum_{k=0}^{9}(2k + 1)$. Sin embargo, en un análisis general siempre se supone que el índice de la suma empieza en $k = 1$. Esta suposición responde más a razones de conveniencia que de necesidad. El índice de la suma a menudo se denomina **variable ficticia**, puesto que el símbolo en sí carece de importancia; lo que importa son los valores enteros sucesivos del índice y la suma correspondiente. En general,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{10} 4^k = \sum_{i=1}^{10} 4^i = \sum_{j=1}^{10} 4^j = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{10}.$$

Propiedades A continuación se presenta una lista de algunas propiedades importantes de la notación sigma.

Teorema 5.3.1 Propiedades de la notación sigma

Para enteros positivos m y n,

i) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, donde c es cualquier constante

ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

iii) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k,\ m < n.$

La demostración de la fórmula *i)* es una consecuencia inmediata de la ley distributiva. Por supuesto, *ii)* del teorema 5.3.1 se cumple para la suma de más de tres términos; por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Fórmulas de sumas especiales Para tipos especiales de sumas indicadas, particularmente sumas que implican potencias de enteros positivos del índice de la suma (como sumas de enteros positivos consecutivos, cuadrados sucesivos, cubos sucesivos, etc.) es posible encontrar una fórmula que proporcione el valor numérico verdadero de la suma. Para efectos de esta sección, centraremos la atención en las cuatro fórmulas siguientes.

Teorema 5.3.2 Fórmulas de sumas

Para n un entero positivo y c cualquier constante,

i) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ *ii)* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

iii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *iv)* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Las fórmulas *i)* y *ii)* pueden justificarse fácilmente. Si c es una constante, es decir, independiente del índice de la suma, entonces $\Sigma_{k=1}^{n} c$ significa $c + c + c + \cdots + c$. Puesto que hay n c, tenemos $\Sigma_{k=1}^{n} c = n \cdot c$, que es *i)* del teorema 5.3.2. Luego, la suma de los n primeros enteros positivos puede escribirse como $\Sigma_{k=1}^{n} k$. Si esta suma se denota por la letra S, entonces

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n. \tag{2}$$

En forma equivalente, $S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1.$ (3)

Si sumamos (2) y (3) con los primeros términos correspondientes, luego los segundos términos, y así sucesivamente, entonces

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ términos de } n+1} = n(n+1).$$

Al despejar S obtenemos $S = n(n+1)/2$, que es *ii)*. Usted debe poder obtener las fórmulas *iii)* y *iv)* con las sugerencias que se proporcionan en los problemas 55 y 56 en los ejercicios 5.3.

EJEMPLO 2 Uso de fórmulas de suma

Encuentre el valor numérico de $\Sigma_{k=1}^{20} (k+5)^2$.

Solución Al desarrollar $(k+5)^2$ y usar *i*) y *ii*) del teorema 5.3.1, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2 = \sum_{k=1}^{20}(k^2+10k+25) \quad \leftarrow \text{se eleva al cuadrado el binomio}$$
$$= \sum_{k=1}^{20}k^2 + 10\sum_{k=1}^{20}k + \sum_{k=1}^{20}25. \quad \leftarrow i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 5.3.1}$$

Con la identificación $n = 20$, por las fórmulas de sumas *iii*), *ii*) y *i*) del teorema 5.3.2, respectivamente, se concluye

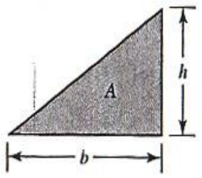
$$\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2 = \frac{20(21)(41)}{6} + 10\frac{20(21)}{2} + 20 \cdot 25 = 5\,470. \qquad \blacksquare$$

La notación sigma y las fórmulas de sumas anteriores se usarán de inmediato en el siguiente análisis.

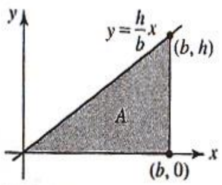
Área de un triángulo Suponga por el momento que no se conoce ninguna fórmula para calcular el área A del triángulo rectángulo proporcionado en la FIGURA 5.3.2*a*). Al superponer un sistema rectangular de coordenadas sobre el triángulo, como se muestra en la figura 5.3.2*b*), se ve que el problema es el mismo que encontrar el área en el primer cuadrante acotada por las líneas rectas $y = (h/b)x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = b$. En otras palabras, deseamos encontrar el área bajo la gráfica de $y = (h/b)x$ sobre el intervalo $[0, b]$.

Al usar rectángulos, la FIGURA 5.3.3 indica tres formas diferentes de *aproximar* el área A. Por conveniencia, seguiremos con mayor detalle el procedimiento sugerido en la figura 5.3.3*b*). Empezamos al dividir el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = b/n$. Si el punto fronterizo derecho de estos intervalos se denota por x_k^*, entonces

$$x_1^* = \Delta x = \frac{b}{n}$$
$$x_2^* = 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$x_3^* = 3\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^* = n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b.$$

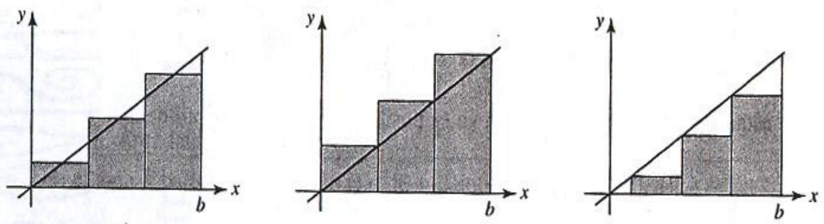


a) Triángulo rectángulo



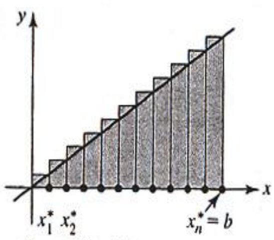
b) Triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas

FIGURA 5.3.2 Encuentre el área A del triángulo rectángulo

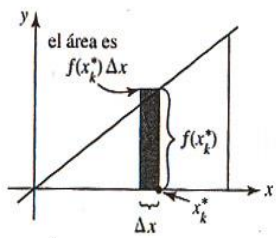


a) *b*) *c*)

FIGURA 5.3.3 Aproximación del área A usando tres rectángulos



a) n rectángulos



b) Área de un rectángulo general

FIGURA 5.3.4 El área A del triángulo es aproximada por la suma de las áreas de n rectángulos

Como se muestra en la FIGURA 5.3.4*a*), ahora construimos un rectángulo de longitud $f(x_k^*)$ y ancho Δx sobre cada uno de estos n subintervalos. Puesto que el área de un rectángulo es *largo* × *ancho*, el área de cada rectángulo es $f(x_k^*)\Delta x$. Vea la figura 5.3.4*b*). La suma de las áreas de los n rectángulos es una aproximación al número A. Escribimos

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

o en notación sigma,

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{4}$$

Parece válido que reduzcamos el error introducido por este método de aproximación (el área de cada rectángulo es mayor que el área bajo la gráfica sobre un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) al dividir el intervalo $[0, b]$ en subdivisiones más finas. En otras palabras, esperamos que una mejor aproximación a A pueda obtenerse usando más y más rectángulos ($n \to \infty$) de anchos decrecientes ($\Delta x \to 0$). Luego,

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n} \cdot k \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$

de modo que con ayuda de la fórmula de suma *ii*) del teorema 5.3.2, (4) se vuelve

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h}{n} \cdot k\right)\frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{bh}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Finalmente, al hacer $n \to \infty$ en el miembro derecho de (5), obtenemos la fórmula conocida para el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}bh.$$

El problema general Ahora pasaremos del ejemplo precedente específico al problema general de encontrar el área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ que es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Como se muestra en la FIGURA 5.3.5*a*), también suponemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. Como sugiere la figura 5.3.5*b*), el área A puede aproximarse al sumar las áreas de n rectángulos que se construyen sobre el intervalo. A continuación se resume un procedimiento posible para determinar A:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervaloss $[x_{k-1}, x_k]$, donde

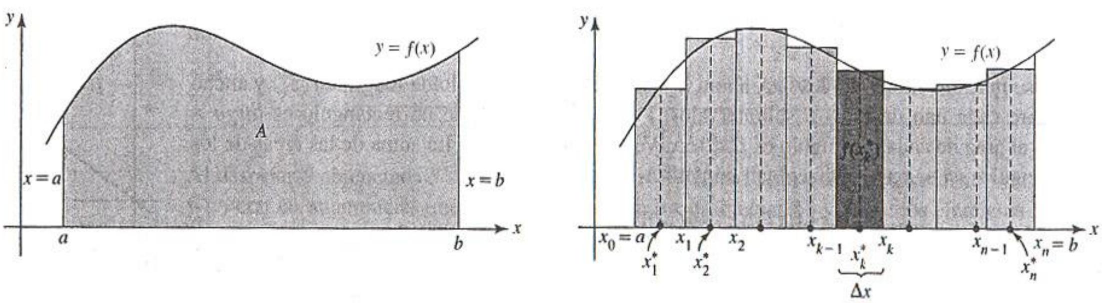
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

  de modo que cada subintervalo tiene el mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta colección de números se denomina **partición regular** del intervalo $[a, b]$.
- Escoja un número x_k^* en cada uno de los n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y forme los n productos $f(x_k^*)\Delta x$. Puesto que el área de un rectángulo es largo × ancho, $f(x_k^*)\Delta x$ es el área del rectángulo de largo $f(x_k^*)$ y ancho Δx construido sobre el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra**.
- La suma de las áreas de los n rectángulos

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x,$$

  representa una aproximación al valor del área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$.

Con estas notas preliminares, ahora ya es posible definir el concepto de área bajo una gráfica.



a) Área A bajo la gráfica *b*) n rectángulos

FIGURA 5.3.5 Encuentre el área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$

Definición 5.3.1 Área bajo una gráfica

Sea f continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. El **área A bajo la gráfica** de f sobre el intervalo se define como

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x. \tag{6}$$

Es posible demostrar que cuando f es *continua*, el límite en (6) siempre existe sin importar el método usado para dividir $[a, b]$ en subintervalos; es decir, los subintervalos pueden tomarse o no de modo que su ancho sea el mismo, y los puntos x_k^* pueden escogerse en forma arbitraria en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. No obstante, si los subintervalos no tienen el mismo ancho, entonces en (6) es necesario un tipo diferente de límite. Necesitamos sustituir $n \to \infty$ por el requerimiento de que la longitud del subintervalo más ancho tienda a cero.

Una forma práctica de (6) Para usar (6), suponga que escogemos x_k^* como se hizo en el análisis de la figura 5.3.4; a saber: sea x_k^* el **punto fronterizo derecho** de cada subintervalo. Puesto que el ancho de cada uno de los n subintervalos de igual ancho es $\Delta x = (b - a)/n$, tenemos

$$x_k^* = a + k\Delta x = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Luego, para $k = 1, 2, \ldots, n$ tenemos

$$\begin{aligned}
x_1^* &= a + \Delta x = a + \frac{b-a}{n}\\
x_2^* &= a + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)\\
x_3^* &= a + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_n^* &= a + n\Delta x = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b.
\end{aligned}$$

Al sustituir $a + k(b - a)/n$ por x_k^* y $(b - a)/n$ por Δx en (6), se concluye que el área A también está dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}. \tag{7}$$

Observamos que puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, $n \to \infty$ implica $\Delta x \to 0$.

EJEMPLO 3 Área usando (7)

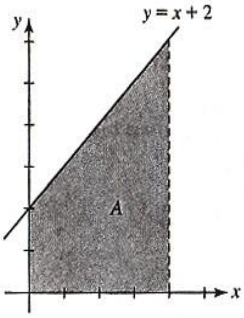
Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = x + 2$ sobre el intervalo $[0, 4]$.

Solución El área está acotada por el trapezoide indicado en la FIGURA 5.3.6*a*). Al identificar $a = 0$ y $b = 4$, encontramos

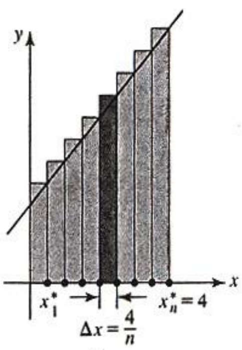
$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$

Así, (7) se vuelve

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n} + 2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1\right]. \quad \leftarrow \text{por las propiedades } i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 5.3.1}
\end{aligned}$$



a)



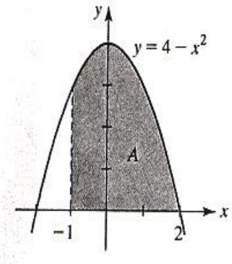
b)

FIGURA 5.3.6 Área bajo la gráfica en el ejemplo 3

Luego, por las fórmulas de suma *i*) y *ii*) del teorema 5.3.2, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 2n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{2}\,\frac{n(n+1)}{n^2} + 8\right] \quad \leftarrow \text{se divide entre } n^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[8\left(1+\frac{1}{n}\right)+8\right] \\ &= 8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) + 8\lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 8 + 8 = 16 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

■



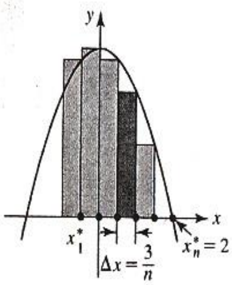


FIGURA 5.3.7 Área bajo la gráfica en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área usando (7)

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

Solución El área se indica en la FIGURA 5.3.7*a*). Puesto que $a = -1$ y $b = 2$, se concluye que

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}.$$

A continuación se revisarán los pasos que llevan a (7). El ancho de cada rectángulo está dado por $\Delta x = (2-(-1))/n = 3/n$. Luego, empezando en $x = -1$, el punto fronterizo derecho de los n subintervalos es

$$\begin{aligned} x_1^* &= -1 + \frac{3}{n} \\ x_2^* &= -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{6}{n} \\ x_3^* &= -1 + 3\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{9}{n} \\ &\vdots \\ x_n^* &= -1 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 2. \end{aligned}$$

Entonces, la longitud de cada rectángulo es

$$\begin{aligned} f(x_1^*) &= f\left(-1+\frac{3}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{3}{n}\right]^2 \\ f(x_2^*) &= f\left(-1+\frac{6}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{6}{n}\right]^2 \\ f(x_3^*) &= f\left(-1+\frac{9}{n}\right) = 4 - \left[-1+\frac{9}{n}\right]^2 \\ &\vdots \\ f(x_n^*) &= f\left(-1+\frac{3n}{n}\right) = f(2) = 4 - (2)^2 = 0. \end{aligned}$$

El área del k-ésimo rectángulo es *largo* × *ancho*:

$$f(x_k^*)\frac{3}{n} = \left(4 - \left[-1 + k\frac{3}{n}\right]^2\right)\frac{3}{n} = \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n}.$$

Al sumar las áreas de los n rectángulos obtenemos una aproximación al área bajo la gráfica sobre el intervalo: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(3/n)$. A medida que el número n de rectángulos crece sin límite, obtenemos

59. Use (7) y la fórmula de suma

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

para encontrar el área bajo la gráfica de $f(x) = 16 - x^4$ sobre $[-2, 2]$.

60. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre $[0, 1]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^2$ sobre $[0, 1]$. Lleve a cabo sus ideas.

61. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ sobre $[0, 8]$ al considerar el área bajo la gráfica de $y = x^3$ sobre $0 \le x \le 2$.

62. *a*) Suponga que $y = ax^2 + bx + c \ge 0$ sobre el intervalo $[0, x_0]$. Demuestre que el área bajo la gráfica sobre $[0, x_0]$ está dada por

$$A = a\frac{x_0^3}{3} + b\frac{x_0^2}{2} + cx_0.$$

b) Use el resultado en el inciso *a*) para encontrar el área bajo la gráfica de $y = 6x^2 + 2x + 1$ sobre el intervalo $[2, 5]$.

63. Una fórmula de suma para la suma de los n términos de una sucesión geométrica finita $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right).$$

Use esta fórmula de suma, (8) de esta sección, y la regla de L'Hôpital para encontrar el área bajo la gráfica de $y = e^x$ sobre $[0, 1]$.

64. Un poco de historia En un curso de física para principiantes todo mundo sabe que la distancia de un cuerpo que cae es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. **Galileo Galilei** (1564-1642) fue el primero en descubrir este hecho. Galileo encontró que la distancia que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional a un entero positivo impar. Por tanto, la distancia total s que una masa se mueve en n segundos, con n un entero positivo, es proporcional a $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$. Demuestre que esto es lo mismo que afirmar que la distancia total que se mueve una masa hacia abajo en un plano inclinado es proporcional al tiempo transcurrido n.

5.4 La integral definida

Introducción En la sección previa vimos que el área bajo la gráfica de una función continua no negativa f sobre un intervalo $[a, b]$ se definía como el límite de una suma. En esta sección verá que el mismo tipo de proceso límite conduce al concepto de **integral definida**.

Sea $y = f(x)$ una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

Considere los siguientes cuatro pasos:

- Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de anchos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \qquad (1)$$

  La colección de números (1) se denomina **partición** del intervalo y se denota por P.
- Sea $\|P\|$ el mayor número de los n anchos de los subintervalos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. El número $\|P\|$ se denomina **norma** de la partición P.
- Escoja un número x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ como se muestra en la FIGURA 5.4.1. Los n números $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*$ se denominan **puntos muestra** en estos subintervalos.
- Forme la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \qquad (2)$$

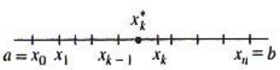


FIGURA 5.4.1 Punto muestra x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$

Sumas del tipo proporcionado en (2) que corresponden a varias particiones de $[a, b]$ se denominan **sumas de Riemann** en honor del famoso matemático alemán **Georg Friedrich Bernhard Riemann**.

Aunque el procedimiento anterior parece muy semejante a los pasos que llevan a la definición de área bajo una gráfica dada en la sección 5.3, hay algunas diferencias importantes. Observe que una suma de Riemann (2) no requiere que f sea continua o no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Así, (2) no necesariamente representa una aproximación al área bajo una gráfica. Tenga en cuenta que "área bajo una gráfica" se refiere *al área acotada entre la gráfica de una función continua no negativa y el eje x*. Como se muestra en la FIGURA 5.4.2, si $f(x) < 0$ para alguna x en $[a, b]$, una suma de Riemann puede contener términos $f(x_k^*)\Delta x_k$, donde $f(x_{k1}^*) < 0$. En este caso, los productos $f(x_k^*)\Delta x_k$ son números que son los negativos de las áreas de rectángulos trazados abajo del eje x.

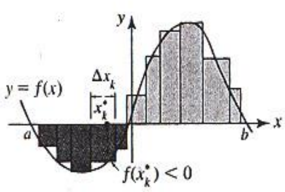


FIGURA 5.4.2 La función f es positiva y negativa sobre el intervalo $[a, b]$

EJEMPLO 1 Una suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para $f(x) = x^2 - 4$ sobre $[-2, 3]$ con cinco subintervalos determinados por $x_0 = -2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{7}{4}$, $x_5 = 3$ y $x_1^* = -1$, $x_2^* = -\frac{1}{4}$, $x_3^* = \frac{1}{2}$, $x_4^* = \frac{3}{2}$, $x_5^* = \frac{5}{2}$. Encuentre la norma de la partición.

Solución En la FIGURA 5.4.3 se muestra que los números x_k, $k = 0, 1, \ldots, 5$ determinan cinco subintervalos $[-2, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \frac{7}{4}]$ y $[\frac{7}{4}, 3]$ del intervalo $[-2, 3]$ y un punto muestra x_k^* (en rojo) dentro de cada subintervalo.

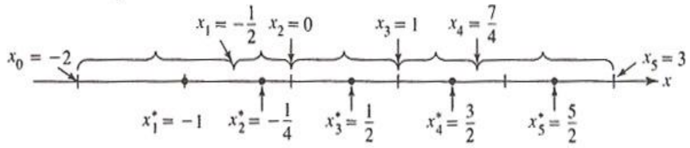


FIGURA 5.4.3 Cinco subintervalos y puntos muestra en el ejemplo 1

Luego, evalúe la función f de cada punto muestra y determine el ancho de cada subintervalo:

$$f(x_1^*) = f(-1) = -3, \qquad \Delta x_1 = x_1 - x_0 = - = \frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2}$$

$$f(x_2^*) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{63}{16}, \qquad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(x_3^*) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}, \qquad \Delta x_3 = x_3 - x_2 = 1 - 0 = 1$$

$$f(x_4^*) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}, \qquad \Delta x_4 = x_4 - x_3 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$$

$$f(x_5^*) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}, \qquad \Delta x_5 = x_5 - x_4 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}.$$

Entonces, la **suma de Riemann** para esta partición y esa elección del punto muestra es

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5$$
$$= (-3)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{63}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{15}{4}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{279}{32} \approx -8.72.$$

Al analizar los valores de los cinco Δx_k observamos que la norma de la partición es $\|P\| = \frac{3}{2}$. ■

Para una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$, hay un número finito de posibles sumas de Riemann para una partición dada P del intervalo, puesto que los números x_k^* pueden escogerse arbitrariamente en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

EJEMPLO 2 Otra suma de Riemann

Calcule la suma de Riemann para la función del ejemplo 1 si la partición de $[-2, 3]$ es la misma pero los puntos muestra son $x_1^* = -\frac{3}{2}$, $x_2^* = -\frac{1}{8}$, $x_3^* = \frac{3}{4}$, $x_4^* = \frac{3}{2}$ y $x_5^* = 2.1$.

Solución Sólo es necesario calcular f en los nuevos puntos muestra, puesto que los números Δx_k son los mismos que antes:

$$f(x_1^*) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$f(x_2^*) = f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{255}{64}$$

$$f(x_3^*) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{55}{16}$$

$$f(x_4^*) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$f(x_5^*) = f(2.1) = 0.41.$$

Ahora la suma de Riemann es

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + f(x_3^*)\Delta x_3 + f(x_4^*)\Delta x_4 + f(x_5^*)\Delta x_5$$
$$= \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{255}{64}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{55}{16}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + (0.41)\left(\frac{5}{4}\right) \approx -8.85. \blacksquare$$

Tenemos interés en un tipo especial de límite de (2). Si las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ están próximas a un número L para *toda* partición P de $[a, b]$ para la cual la norma $\|P\|$ esté cerca de cero, entonces escribimos

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = L \tag{3}$$

y se dice que L es la **integral definida** de f sobre el intervalo $[a, b]$. En la siguiente definición se introduce un nuevo símbolo para el número L.

Definición 5.4.1 La integral definida

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida de f de a a b**, que se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$, se define como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{4}$$

Si el límite en (4) existe, se dice que la función f es **integrable** sobre el intervalo. Los números a y b en la definición precedente se denominan **límite inferior** y **límite superior de integración**, respectivamente. La función f se denomina **integrando**. El símbolo integral $\int$, según lo usaba Leibniz, es una S alargada que representa la palabra *suma*. También observe que $\|P\| \to 0$ siempre implica que el número de subintervalos n se vuelve infinito ($n \to \infty$). No obstante, como se muestra en la FIGURA 5.4.4, el hecho de que $n \to \infty$ no necesariamente implica $\|P\| \to 0$.

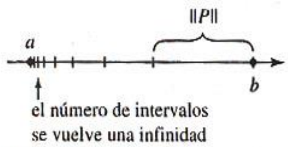


FIGURA 5.4.4 Una infinidad de subintervalos no implica $\|P\| \to 0$.

Integrabilidad En los dos teoremas siguientes se plantean condiciones que son suficientes para que una función f sea integrable sobre un intervalo $[a, b]$. No se proporcionan las demostraciones de estos teoremas.

Teorema 5.4.1 Continuidad implica integrabilidad

Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; es decir, f es integrable sobre el intervalo.

Hay funciones definidas para cada valor de x en $[a, b]$ para las cuales el límite en (4) no existe. También, si la función f no está definida para todos los valores de x en el intervalo, la integral definida *puede* no existir; por ejemplo, después se verá por qué una integral como $\int_{-3}^{2}(1/x)dx$ no existe. Observe que $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$ y no está acotada sobre el intervalo. Sin embargo, a partir de este ejemplo no debe concluirse que cuando una función f tiene una discontinuidad en $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ necesariamente no existe. La continuidad de una función sobre $[a, b]$ es condición *suficiente* pero *no necesaria* para garantizar la existencia de $\int_a^b f(x)\,dx$. El conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ es un subconjunto del conjunto de funciones que son integrables sobre el intervalo.

El siguiente teorema proporciona otra condición suficiente para integrabilidad sobre $[a, b]$.

Teorema 5.4.2 Condiciones suficientes para integrabilidad

Si una función f está acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, si existe una constante positiva B tal que $-B \leq f(x) \leq B$ para toda x en el intervalo y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable sobre el intervalo.

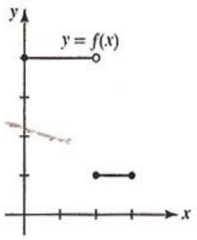


FIGURA 5.4.5 La integral definida de f sobre $[0, 3]$ existe

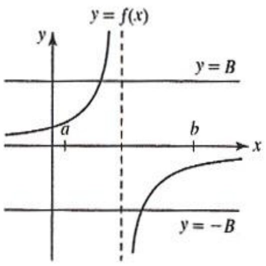


FIGURA 5.4.6 La función f no está acotada sobre $[a, b]$

Cuando una función f está acotada, su gráfica completa debe estar entre dos rectas horizontales, $y = B$ y $y = -B$. En otras palabras, $|f(x)| \leq B$ para toda x en $[a, b]$. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

mostrada en la FIGURA 5.4.5 es discontinua en $x = 2$ pero está acotada sobre $[0, 3]$, puesto que $|f(x)| \leq 4$ para toda x en $[0, 3]$. (Para el caso, $1 \leq f(x) \leq 4$ para toda x en $[0, 3]$ muestra que f está acotada sobre el intervalo.) Por el teorema 5.4.2 se concluye que $\int_0^3 f(x)\,dx$ existe. La FIGURA 5.4.6 muestra la gráfica de una función f que no está acotada sobre un intervalo $[a, b]$. Sin importar cuán grande sea el número B escogido, la gráfica de f no puede estar confinada a la región entre las rectas horizontales $y = B$ y $y = -B$.

Partición regular Si se sabe que una integral definida existe (por ejemplo, el integrando f es continuo sobre $[a, b]$), entonces:

- El límite en (4) existe para cualquier forma posible de partición $[a, b]$ y para toda forma posible de escoger x_k^* en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

En particular, al escoger los subintervalos del mismo ancho y los puntos muestra como los puntos fronterizos derechos de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, es decir,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

la expresión (4) puede escribirse en forma alterna como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \tag{5}$$

Recuerde por la sección 5.3 que una partición P de $[a, b]$ donde los subintervalos tienen el mismo ancho se denomina **partición regular**.

Área Tal vez usted concluya que los planteamientos de $\int_a^b f(x)\,dx$ dados en (4) y (5) son exactamente los mismos que (6) y (7) de la sección 5.3 para el caso general de encontrar el área bajo la curva $y = f(x)$ sobre $[a, b]$. En cierta forma esto es correcto; no obstante, la definición 5.4.1 es un concepto más general puesto que, como ya se observó, no estamos requiriendo que f sea continua sobre $[a, b]$ o que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo. Por tanto, una *integral definida no necesita ser un área*. Entonces, ¿qué es una integral definida? Por ahora, acepte el hecho de que una integral definida es simplemente un número real. Compare esto con la integral indefinida, que es una función (o una familia de funciones). El área bajo la gráfica de una función continua no negativa, ¿es una integral definida? La respuesta es *sí*.

Teorema 5.4.3 El área como integral definida

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, entonces el **área A bajo la gráfica** sobre $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

EJEMPLO 3 El área como integral definida

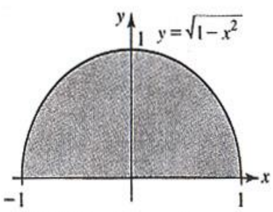


FIGURA 5.4.7 Área en el ejemplo 3

Considere la integral definida $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$. El integrando es continuo y no negativo, de modo que la integral definida representa el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. Debido a que la gráfica de la función f es el semicírculo superior de $x^2 + y^2 = 1$, el área bajo la gráfica es la región sombreada en la FIGURA 5.4.7. Por geometría sabemos que el área de un círculo de radio r es πr^2, y así con $r = 1$ el área del semicírculo y, por tanto, el valor de la integral definida, es

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{1}{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Definición 5.4.2

Por el inciso *i*) de la definición 5.4.2,

$$\text{los límites de integración} \rightarrow \quad \int_1^1 (x^3 + 3x)\,dx = 0. \quad \leftarrow \text{son los mismos}$$

■

EJEMPLO 7 Otro repaso al ejemplo 4

En el ejemplo 4 vimos que $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$. Por el inciso *ii*) de la definición 5.4.2 se concluye que

$$\int_1^{-2} x^3\,dx = -\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

■

En el siguiente teorema se enumeran algunas de las propiedades básicas de la integral definida. Estas propiedades son análogas a las propiedades de la notación sigma proporcionadas en el teorema 5.3.1, así como a las propiedades de la integral indefinida que se analizaron en la sección 5.1.

Teorema 5.4.4 Propiedades de la integral definida

Si f y g son funciones integrables sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

i) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, donde k es cualquier constante

ii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

El teorema 5.4.4*ii*) se extiende a cualquier suma finita de funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

La variable independiente x en una integral definida se denomina **variable ficticia** de integración. El valor de la integral no depende del símbolo usado. En otras palabras,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(r)\,dr = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt \qquad (9)$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 8 Otro repaso al ejemplo 4

Por (9), no importa qué símbolo se use como la variable de integración:

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{1} r^3\,dr = \int_{-2}^{1} s^3\,ds = \int_{-2}^{1} t^3\,dt = -\frac{15}{4}.$$

■

Teorema 5.4.5 Propiedad aditiva del intervalo

Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los números a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (10)$$

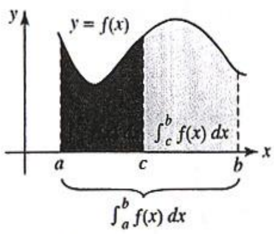


FIGURA 5.4.9 Las áreas son aditivas

Resulta fácil interpretar la propiedad aditiva del intervalo dada en el teorema 5.4.5 en el caso especial en que f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Como se ve en la FIGURA 5.4.9, el área bajo la gráfica de f sobre $[a, c]$ más el área bajo la gráfica del intervalo adyacente $[c, b]$ es la misma que el área bajo la gráfica de f sobre todo el intervalo $[a, b]$.

Nota: La conclusión del teorema 5.4.5 se cumple cuando a, b y c son tres números *cualesquiera* en un intervalo cerrado. En otras palabras, no es necesario tener el orden $a < c < b$ como se muestra en la figura 5.4.9. Además, el resultado en (10) se extiende a cualquier número finito de números $a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el intervalo. Por ejemplo, para un intervalo cerrado que contiene a los números a, b, c_1 y c_2,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Posdata: Un poco de historia **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866) nació en Hanover, Alemania, en 1826. Fue hijo de un ministro luterano. Aunque era cristiano devoto, Riemann no se inclinó por seguir la vocación de su padre y abandonó el estudio de teología en la Universidad de Gotinga para seguir una carrera de estudios en los que su genio era evidente: matemáticas. Es probable que el concepto de sumas de Riemann haya sido resultado de un curso sobre integral definida que tomó en la universidad; este concepto refleja su intento por asignar un significado matemático preciso a la integral definida de Newton y Leibniz. Después de presentar su examen doctoral sobre los fundamentos de las funciones de una variable compleja al comité examinador en la Universidad de Gotinga, Karl Friedrich Gauss, el "príncipe de las matemáticas", dedicó a Riemann un elogio bastante singular: "La disertación ofrece pruebas concluyentes. . . de una mente creativa, activa, verdaderamente matemática. . . de fértil originalidad". Riemann, como muchos otros estudiantes promisorios de la época, era de constitución frágil. Falleció a los 39 años de edad, de pleuresía. Sus originales contribuciones a la geometría diferencial, topología, geometría no euclidiana y sus intrépidas investigaciones concernientes a la naturaleza del espacio, la electricidad y el magnetismo anunciaron el trabajo de Einstein en el siglo siguiente.


Riemann

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

El procedimiento bosquejado en (5) tenía una utilidad limitada como medio práctico para calcular una integral definida. En la siguiente sección se introducirá un teorema que permite encontrar el número $\int_a^b f(x)\,dx$ de manera mucho más fácil. Este importante teorema constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Ejercicios 5.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

Fundamentos

En los problemas 1-6, calcule la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ para la partición dada. Especifique $\|P\|$.

1. $f(x) = 3x + 1$, $[0, 3]$, cuatro subintervalos; $x_0 = 0, x_0 = 1, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{7}{3}, x_4 = 3; x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{4}{3}, x_3^* = 2, x_4^* = \frac{8}{3}$

2. $f(x) = x - 4$, $[-2, 5]$, cinco subintervalos; $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$; $x_1^* = -\frac{3}{2}$, $x_2^* = -\frac{1}{2}, x_3^* = 0, x_4^* = 2, x_5^* = 4$

3. $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$ cuatro subintervalos: $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$; $x_1^* = -\frac{3}{4}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{1}{2}$, $x_4^* = \frac{7}{8}$

4. $f(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, tres subintervalos; $x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}, x_3 = 3; x_1^* = \frac{5}{4}, x_2^* = \frac{7}{4}, x_3^* = 3$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$, tres subintervalos; $x_0 = 0, x_1 = \pi$, $x_2 = 3\pi/2, x_3 = 2\pi; x_1^* = \pi/2, x_2^* = 7\pi/6, x_3^* = 7\pi/4$

6. $f(x) = \cos x$, $[-\pi/2, \pi/2]$, cuatro subintervalos; $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = -\pi/4$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi/3$, $x_4 = \pi/2$; $x_1^* = -\pi/3, x_2^* = -\pi/6, x_3^* = \pi/4, x_4^* = \pi/3$

7. Dada $f(x) = x - 2$ sobre $[0, 5]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con cinco subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, \ldots, 5$, el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

8. Dada $f(x) = x^2 - x + 1$ sobre $[0, 1]$, calcule la suma de Riemann usando una partición con tres subintervalos de la misma longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, 3$, el punto fronterizo izquierdo de cada subintervalo.

En los problemas 9 y 10, sea P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Escriba las sumas dadas como una integral definida sobre el intervalo indicado.

9. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{9 + (x_k^*)^2}\,\Delta x_k$; $[-2, 4]$

10. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan x_k^*)\Delta x_k$; $[0, \pi/4]$

En los problemas 11 y 12, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* el punto fronterizo de cada subintervalo. Escriba la suma dada como una integral definida.

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$; $[0, 2]$

12. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{3k}{n}\right)^3 \frac{3}{n}$; $[1, 4]$

En los problemas 13-18, use (5) y las fórmulas de suma en el teorema 5.3.2 para evaluar la integral definida dada.

13. $\displaystyle\int_{-3}^{1} x\,dx$

14. $\displaystyle\int_{0}^{3} x\,dx$

15. $\displaystyle\int_{1}^{2} (x^2 - x)\,dx$

16. $\displaystyle\int_{-2}^{3} (x^2 - 4)\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 1)\,dx$ **18.** $\displaystyle\int_0^2 (3 - x^3)\,dx$

En los problemas 19 y 20, proceda como en los problemas 13-18 para obtener el resultado dado.

19. $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ **20.** $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

21. Use el problema 19 para evaluar $\displaystyle\int_{-1}^3 x\,dx.$

22. Use el problema 20 para evaluar $\displaystyle\int_{-1}^3 x^2\,dx.$

En los problemas 23 y 24, use el teorema 5.4.6 para evaluar la integral definida dada.

23. $\displaystyle\int_3^6 4\,dx$ **24.** $\displaystyle\int_{-2}^5 (-2)\,dx$

En los problemas 25-38, use la definición del teorema 5.4.2 y los teoremas 5.4.4, 5.4.5 y 5.4.6 para evaluar la integral definida dada. Donde sea idóneo, use los resultados obtenidos en los problemas 21 y 22.

25. $\displaystyle\int_4^{-2} \frac{1}{2}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int_5^5 10x^4\,dx$

27. $\displaystyle -\int_3^{-1} 10x\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_{-1}^3 (3x + 1)\,dx$

29. $\displaystyle\int_3^{-1} t^2\,dt$ **30.** $\displaystyle\int_{-1}^3 (3x^2 - 5)\,dx$

31. $\displaystyle\int_{-1}^3 (-3x^2 + 4x - 5)\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_{-1}^3 6x(x - 1)\,dx$

33. $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2\,dx + \int_0^3 x^2\,dx$ **34.** $\displaystyle\int_{-1}^{1.2} 2t\,dt - \int_3^{1.2} 2t\,dt$

35. $\displaystyle\int_0^4 x\,dx + \int_0^4 (9 - x)\,dx$

36. $\displaystyle\int_{-1}^0 t^2\,dt + \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 u^2\,du$

37. $\displaystyle\int_0^3 x^3\,dx + \int_3^0 t^3\,dt$

38. $\displaystyle\int_{-1}^{-1} 5x\,dx - \int_3^{-1} (x - 4)\,dx$

En los problemas 39-42, evalúe la integral definida usando la información dada.

39. $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$ si $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 6$ y $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx = 8.5$

40. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$ si $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = 2.4$ y $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx = -1.7$

41. $\displaystyle\int_{-1}^2 [2f(x) + g(x)]\,dx$ si

$\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,dx = 3.4$ y $\displaystyle\int_{-1}^2 3g(x)\,dx = 12.6$

42. $\displaystyle\int_{-2}^2 g(x)\,dx$ si

$\displaystyle\int_2^{-2} f(x)\,dx = 14$ y $\displaystyle\int_{-2}^2 [f(x) - 5g(x)]\,dx = 24$

En los problemas 43 y 44, evalúe las integrales definidas

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_b^d f(x)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_a^d f(x)\,dx$

usando la información en la figura dada.

43.

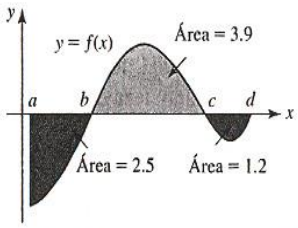


FIGURA 5.4.14 Gráfica para el problema 43

44.

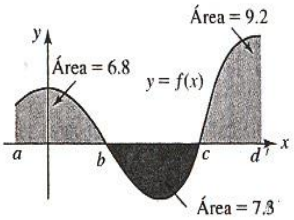


FIGURA 5.4.15 Gráfica para el problema 44

En los problemas 45-48, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Trace esta región.

45. $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x + 3)\,dx$ **46.** $\displaystyle\int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx$

47. $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ **48.** $\displaystyle\int_{-2}^0 \sqrt{x + 2}\,dx$

En los problemas 49-52, la integral dada representa el área bajo una gráfica sobre un intervalo dado. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área.

49. $\displaystyle\int_{-2}^4 (x + 2)\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_0^3 |x - 1|\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ **52.** $\displaystyle\int_{-3}^3 \left(2 + \sqrt{9 - x^2}\right)dx$

En los problemas 53-56, la integral dada representa la siguiente área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Trace esta región.

53. $\displaystyle\int_0^5 (-2x + 6)\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_{-1}^2 (1 - x^2)\,dx$

55. $\displaystyle\int_{-1/2}^3 \frac{4x}{x + 1}\,dx$ **56.** $\displaystyle\int_0^{5\pi/2} \cos x\,dx$

Balotario de Ejercicios Nº 7

Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo.
Cambio de variable para integrales definidas.
Integración por partes para integrales definidas

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 305, 306, 313, 314 y 315

En los problemas 57-60, la integral dada representa el área con signo entre una gráfica y el eje x sobre un intervalo. Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar el área neta con signo.

57. $\int_{-1}^{4} 2x\,dx$

58. $\int_{0}^{8}\left(\frac{1}{2}x - 2\right)dx$

59. $\int_{-1}^{1}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)dx$

60. $\int_{-1}^{2}(1 - |x|)\,dx$

En los problemas 61-64, la función f se define como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 3 \\ 3, & x > 3. \end{cases}$$

Use fórmulas idóneas de geometría para encontrar la integral definida dada.

61. $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

62. $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

63. $\int_{-4}^{5} f(x)\,dx$

64. $\int_{0}^{10} f(x)\,dx$

En los problemas 65-68, use el teorema 5.4.7 para establecer la desigualdad dada.

65. $\int_{-1}^{0} e^{x}\,dx \le \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$

66. $\int_{0}^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx \ge 0$

67. $1 \le \int_{0}^{1} (x^3 + 1)^{1/2}\,dx \le 1.42$

68. $-2 \le \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx \le 0$

En los problemas 69 y 70, compare las dos integrales dadas por medio de un símbolo de desigualdad $\le$ o $\ge$.

69. $\int_{0}^{1} x^2\,dx,\quad \int_{0}^{1} x^3\,dx$

70. $\int_{0}^{1} \sqrt{4 + x^2}\,dx,\quad \int_{0}^{1} \sqrt{4 + x}\,dx$

≡ Piense en ello

71. Si f es integrable sobre el intervalo $[a, b]$, entonces también lo es f^2. Explique por qué $\int_a^b f^2(x)\,dx \ge 0$.

72. Considere la función definida para toda x en el intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional}. \end{cases}$$

Demuestre que f no es integrable sobre $[-1, 1]$, es decir, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ no existe. [*Sugerencia*: El resultado en (11) puede ser útil.]

73. Evalúe la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ usando una partición de $[0, 1]$ donde los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ están definidos por $[(k-1)^2/n^2, k^2/n^2]$ y escogiendo x_k^* como el punto fronterizo derecho de cada subintervalo.

74. Evalúe la integral definida $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ usando una partición regular de $[0, \pi/2]$ y escogiendo x_k^* como el punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Use los resultados conocidos

i) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$

ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n \operatorname{sen}(\pi/4n)} = \dfrac{4}{\pi}$.

5.5 Teorema fundamental del cálculo

Introducción Al final de la sección 5.4 se indicó que hay una forma más sencilla para evaluar una integral definida que calculando el límite dé una suma. Esta "manera más sencilla" se logra por medio del **teorema fundamental del cálculo**. En esta sección verá que hay dos formas de este importante teorema: la primera forma, que se presenta a continuación, permite evaluar muchas integrales definidas.

Teorema fundamental del cálculo: primera forma En el siguiente teorema se ve que el concepto de antiderivada de una función continua constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Teorema 5.5.1 Teorema fundamental del cálculo: forma de antiderivada

Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Se presentarán dos demostraciones del teorema 5.5.1. En la demostración que se proporciona se usa la premisa básica de que una integral definida es un límite de una suma. Después que se demuestre la segunda forma del teorema fundamental del cálculo, se volverá al teorema 5.5.1 y se presentará una demostración alterna.

DEMOSTRACIÓN Si F es una antiderivada de f, entonces por definición $F'(x) = f(x)$. Puesto que F es diferenciable sobre (a, b), el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) garantiza que existe un x_k^* en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) de la partición P:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{o} \quad F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Luego, para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ con el último resultado obtenemos

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= f(x_1^*)\,\Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(x_2^*)\,\Delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) &= f(x_3^*)\,\Delta x_3 \\ &\vdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(x_n^*)\,\Delta x_n. \end{aligned}$$

Si sumamos las columnas precedentes,

$$[F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(b) - F(x_{n-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

vemos que la suma de todos los términos, menos los dos sin color en el miembro izquierdo de la igualdad, es igual a 0, con lo cual tenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Pero $\lim_{\|P\|\to 0}[F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$, de modo que el límite de (2) cuando $\|P\| \to 0$ es

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \qquad (3)$$

Por la definición 5.4.1, el miembro derecho de (3) es $\int_a^b f(x)\,dx$. ■

La diferencia $F(b) - F(a)$ en (1) suele representarse por el símbolo $F(x)\Big]_a^b$, es decir,

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\substack{\text{integral}\\ \text{definida}}} = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\substack{\text{integral}\\ \text{indefinida}}}\Bigg]_a^b = F(x)\Bigg]_a^b.$$

Puesto que el teorema 5.5.1 indica que F es *cualquier* antiderivada de f, siempre es posible escoger la constante de integración C como igual a cero. Observe que si $C \neq 0$, entonces

$$(F(x) + C)\Bigg]_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)\Bigg]_a^b.$$

EJEMPLO 1 Uso de (1)

En el ejemplo 4 de la sección 5.4 se apeló a la definición más bien larga de integral definida para demostrar que $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\frac{15}{4}$. Puesto que $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una antiderivada de $f(x) = x^3$, a partir de (1) obtenemos inmediatamente

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-2)^4 = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$ ■

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. En consecuencia, (1) del teorema 5.5.1 proporciona

$$\int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$ ■

antiderivada $\int f(x)\,dx$ *no* puede expresarse en términos de *funciones elementales*: sumas, productos, cocientes y potencias de funciones polinomiales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales. La simple función continua $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ no tiene antiderivada que sea una función elemental. Sin embargo, aunque por el teorema 5.4.1 es posible afirmar que la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx$ existe, el teorema 5.5.1 no es de ninguna ayuda para encontrar su valor. La integral $\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx$ se denomina **no elemental**. Las integrales no elementales son importantes y aparecen en muchas aplicaciones como teoría de probabilidad y óptica. A continuación se presentan algunas integrales no elementales:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \quad \int \operatorname{sen} x^2\,dx, \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{y} \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Vea los problemas 71 y 72 en los ejercicios 5.5.

Ejercicios 5.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-19.

Fundamentos

En los problemas 1-42, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.1 para evaluar la integral definida dada.

1. $\int_3^7 dx$
2. $\int_2^{10} (-4)\,dx$
3. $\int_{-1}^2 (2x+3)\,dx$
4. $\int_{-5}^4 t^2\,dt$
5. $\int_1^3 (6x^2-4x+5)\,dx$
6. $\int_{-2}^1 (12x^5-36)\,dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$
8. $\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta$
9. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 3t\,dt$
10. $\int_{1/2}^1 \operatorname{sen} 2\pi x\,dx$
11. $\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{u^2}\,du$
12. $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\,dx$
13. $\int_{-1}^1 e^x\,dx$
14. $\int_0^2 (2x-3e^x)\,dx$
15. $\int_0^2 x(1-x)\,dx$
16. $\int_3^2 x(x-2)(x+2)\,dx$
17. $\int_{-1}^1 (7x^3-2x^2+5x-4)\,dx$
18. $\int_{-3}^{-1} (x^2-4x+8)\,dx$
19. $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$
20. $\int_2^4 \frac{x^2+8}{x^2}\,dx$
21. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$
22. $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$
23. $\int_{-4}^{12} \sqrt{z+4}\,dz$
24. $\int_0^{7/2} (2x+1)^{-1/3}\,dx$
25. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$
26. $\int_{-2}^1 \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt$
27. $\int_{1/2}^1 \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\,dx$
28. $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{1+4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
29. $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$
30. $\int_{-1}^1 \frac{u^3+u}{(u^4+2u^2+1)^5}\,du$
31. $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\,dx$
32. $\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x\csc x^2 \cot x^2\,dx$
33. $\int_{-1/2}^{3/2} (x-\cos\pi x)\,dx$
34. $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$
35. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x\cos x\,dx$
37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos\theta}{(\theta+\operatorname{sen}\theta)^2}\,d\theta$
38. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x+\tan x)^2\,dx$
39. $\int_0^{3/4} \operatorname{sen}^2 \pi x\,dx$
40. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$
41. $\int_1^5 \frac{1}{1+2x}\,dx$
42. $\int_{-1}^1 \tan x\,dx$

En los problemas 43-48, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.2 para encontrar la derivada indicada.

43. $\frac{d}{dx}\int_0^x te^t\,dt$
44. $\frac{d}{dx}\int_1^x \ln t\,dt$
45. $\frac{d}{dt}\int_2^t (3x^2-2x)^6\,dx$
46. $\frac{d}{dx}\int_x^9 \sqrt[3]{u^2+2}\,du$
47. $\frac{d}{dx}\int_3^{6x-1} \sqrt{4t+9}\,dt$
48. $\frac{d}{dx}\int_\pi^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t^2\,dt$

En los problemas 49 y 50, use el teorema fundamental del cálculo proporcionado en el teorema 5.5.2 para encontrar $F'(x)$. [*Sugerencia*: Use dos integrales.]

49. $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \frac{1}{t^3+1}\,dt$
50. $F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{5x} \sqrt{t^2+1}\,dt$

En los problemas 51 y 52, compruebe el resultado dado al evaluar primero la integral definida y luego diferenciando.

51. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x (6t^2 - 8t + 5)\,dt = 6x^2 - 8x + 5$

52. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\pi^t \operatorname{sen}\frac{x}{3}\,dx = \operatorname{sen}\frac{t}{3}$

53. Considere la función $f(x) = \int_1^x \ln(2t+1)\,dt$. Encuentre el valor funcional indicado.

a) $f(1)$ *b)* $f'(1)$
c) $f''(1)$ *d)* $f'''(1)$

54. Suponga que $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ y $G'(x) = f(x)$. Encuentre la expresión dada.

a) $G(x^2)$ *b)* $\dfrac{d}{dx}G(x^2)$

c) $G(x^3 + 2x)$ *d)* $\dfrac{d}{dx}G(x^3 + 2x)$

En los problemas 55 y 56, evalúe $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$ para la función f dada.

55. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$

En los problemas 57-60, evalúe la integral definida de la función f continua por partes.

57. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

58. $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

59. $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < -1 \\ 4, & -1 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

60. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es la función entero mayor

En los problemas 61-66, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral definida dada.

61. $\displaystyle\int_{-3}^1 |x|\,dx$

62. $\displaystyle\int_0^4 |2x - 6|\,dx$

63. $\displaystyle\int_{-8}^3 \sqrt{|x| + 1}\,dx$

64. $\displaystyle\int_0^2 |x^2 - 1|\,dx$

65. $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi |\operatorname{sen} x|\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,dx$

En los problemas 67-70, proceda como en el inciso *b)* del ejemplo 9 y evalúe la integral definida dada usando la sustitución u indicada.

67. $\displaystyle\int_{1/2}^e \frac{(\ln 2t)^5}{t}\,dt$; $u = \ln 2t$

68. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{(\tan^{-1} x)(1 + x^2)}\,dx$; $u = \tan^{-1} x$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{e^{-2x} + 1}\,dx$; $u = e^{-2x} + 1$

70. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$; $u = x^2$

≡ Aplicaciones

71. En matemáticas aplicadas, algunas funciones importantes se definen en términos de integrales no elementales. Una de estas funciones especiales se denomina **función error**, que se define como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

a) Demuestre que $\operatorname{erf}(x)$ es una función creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}[1 + \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(x)]$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,$$

y que $y(0) = 1$.

72. Otra función especial definida por una integral no elemental es la **función integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

La función $\operatorname{Si}(x)$ tiene una infinidad de puntos fronterizos relativos.

a) Encuentre los cuatro primeros números críticos para $x > 0$. Use la prueba de la segunda derivada para determinar si estos números críticos corresponden a un máximo o a un mínimo relativo.

b) Use un SAC para obtener la gráfica de $\operatorname{Si}(x)$. [*Sugerencia*: En *Mathematica*, la función integral seno se denota por SinIntegral[x].]

≡ Piense en ello

En los problemas 73 y 74, sean P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Determine el valor del límite dado.

73. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n (2x_k^* + 5)\,\Delta x_k$; $[-1, 3]$

74. $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n \cos\frac{x_k^*}{4}\,\Delta x_k$; $[0, 2\pi]$

En los problemas 75 y 76, sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Establezca el resultado dado.

75. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \operatorname{sen} x_k^* = 2$; $[0, \pi]$

76. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n x_k^* = 0$; $[-1, 1]$

En los problemas 77 y 78, evalúe la integral definida dada.

77. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{\int_{1}^{x} 12t^2\,dt\right\}dx$ **78.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\left\{\int_{0}^{t} \operatorname{sen} x\,dx\right\}dt$

79. Demuestre la prueba de la función par, teorema 5.5.4.

80. Suponga que f es una función impar definida sobre un intervalo $[-4, 4]$. Además, suponga que f es diferenciable sobre el intervalo, $f(-2) = 3.5$, que f tiene ceros en -3 y 3 y números críticos -2 y 2.

a) ¿Cuál es $f(0)$?

b) Trace la gráfica aproximada de f.

c) Suponga que F es una función definida sobre $[-4, 4]$ por $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$. Encuentre $F(-3)$ y $F(3)$.

d) Trace una gráfica aproximada de F.

e) Encuentre los números críticos y los puntos de inflexión de F.

81. Determine si el siguiente razonamiento es correcto:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\,dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\,dt)$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\operatorname{sen} t\,dt) \leftarrow \begin{cases} u = \cos t \\ du = -\operatorname{sen} t\,dt \end{cases}$$

$$= -\int_{0}^{0} \sqrt{1-u^2}\,du = 0. \leftarrow \begin{cases} \text{Teorema 5.5.3} \\ \text{Definición 5.4.2}i) \end{cases}$$

82. Calcule las derivadas.

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}x\int_{1}^{2x}\sqrt{t^3+7}\,dt$ *b*) $\displaystyle\frac{d}{dx}x\int_{1}^{4}\sqrt{t^3+7}\,dt$

≡ Problemas con calculadora/SAC

83. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de $f(x) = \cos^3 x$ y $g(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

b) Con base en su interpretación de área neta con signo, use las gráficas del inciso *a*) para conjeturar los valores de $\int_0^{2\pi}\cos^3 x\,dx$ y $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 x\,dx$.

≡ Proyectos

84. Integración por dardos En este problema se ilustra un método para aproximar el área bajo una gráfica al "lanzar dardos". Suponga que deseamos encontrar el área A bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$ sobre el intervalo $[0, 1]$; es decir, se quiere aproximar $A = \int_0^1 \cos^3(\pi x/2)\,dx$.

Si se lanza, sin ningún intento particular de ser experto, un gran número de dardos, por ejemplo N, hacia el blanco cuadrado de 1×1 mostrado en la FIGURA 5.5.6 y n dardos se insertan en la región roja bajo la gráfica de $f(x) = \cos^3(\pi x/2)$, entonces es posible demostrar que la probabilidad de que un dardo se inserte en la región está dada por la relación de dos áreas:

$$\frac{\text{área de la región}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{A}{1}.$$

Además, esta probabilidad teórica es aproximadamente la misma que la probabilidad empírica n/N:

$$\frac{A}{1} \approx \frac{n}{N} \quad \text{o} \quad A \approx \frac{n}{N}.$$

Para simular el lanzamiento de dardos hacia el blanco, use un SAC como *Mathematica* y su función de números aleatorios para generar una tabla de N pares ordenados (x, y), $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

a) Sea $N = 50$. Trace los puntos y la gráfica de f sobre el mismo conjunto de ejes coordenados. Use la figura para contar el número de éxitos n. Construya por lo menos 10 tablas diferentes de puntos aleatorios y gráficas. Para cada gráfica calcule la razón n/N.

b) Repita el inciso *a*) para $N = 100$.

c) Use el SAC para encontrar el valor exacto del área A y compare este valor con las aproximaciones obtenidas en los incisos *a*) y *b*).

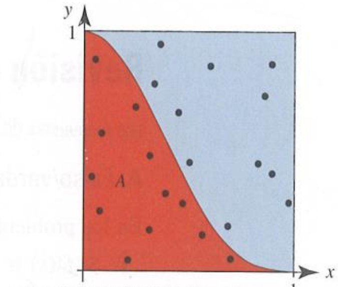


FIGURA 5.5.6 Blanco en el problema 84

85. Derrame de petróleo en expansión Un modelo matemático que puede usarse para determinar el tiempo t necesario para que un derrame de petróleo se evapore está dado por la fórmula

$$\frac{RT}{Pv} = \int_0^t \frac{KA(u)}{V_0}\,du,$$

donde $A(u)$ es el área del derrame en el instante u, RT/Pv es un término termodinámico adimensional, K es un coeficiente de transferencia de masa y V_0 es el volumen inicial del derrame.

a) Suponga que el derrame de petróleo se expande en forma circular cuyo radio inicial es r_0. Vea la FIGURA 5.5.7. Si el radio r del derrame crece a razón $dr/dt = C$ (en metros por segundo), resuelva para t en términos de los otros símbolos.

b) Valores típicos para RT/Pv y K son 1.9×10^6 (para el tridecano) y 0.01 mm/s, respectivamente. Si $C = 0.01\ \text{m/s}^2$, $r_0 = 100$ m y $V_0 = 10\,000\ \text{m}^3$, determine en cuánto tiempo se evapora el petróleo.

c) Use el resultado en el inciso *b*) para determinar al área final del derrame de petróleo.

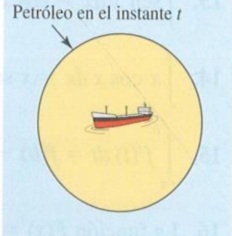


FIGURA 5.5.7 Derrame circular del petróleo en el problema 85

TERCERA UNIDAD

Aplicaciones de la Integral Definida

Balotario de Ejercicios Nº 8

Aplicaciones de la Integral : Movimiento rectilíneo y Área de una región de una función y entre dos curvas

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 322, 323, 324, 325, 326, 327, 331 y 332

6.1 Otro repaso al movimiento rectilíneo

Introducción El capítulo 4, *Aplicaciones de la derivada*, empezó con el concepto de movimiento rectilíneo. Si $s = f(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces sabemos que

$$\text{velocidad} = v(t) = \frac{ds}{dt} \qquad \text{y} \qquad \text{aceleración} = a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Como una consecuencia inmediata de la definición de la antiderivada, las cantidades s y v pueden escribirse como integrales indefinidas

$$s(t) = \int v(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad v(t) = \int a(t)\,dt. \tag{1}$$

Si se conocen la **posición inicial** $s(0)$ y la **velocidad inicial** $v(0)$, es posible encontrar valores específicos de las constantes de integración usadas en (1).

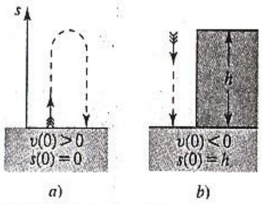


FIGURA 6.1.1 Condiciones iniciales

Recuerde que cuando el cuerpo se mueve horizontalmente sobre una recta, la dirección positiva es hacia la derecha. Para movimiento en una recta vertical, tomamos la dirección positiva hacia arriba. Como se muestra en la FIGURA 6.1.1, si una flecha se dispara hacia arriba desde el nivel del suelo, entonces las **condiciones iniciales** son $s(0) = 0$, $v(0) > 0$, mientras que si la flecha se dispara hacia abajo desde una altura inicial, por ejemplo h metros del suelo, entonces las condiciones iniciales son $s(0) = h$, $v(0) < 0$. Sobre un cuerpo que se mueve en una recta vertical cerca de la superficie terrestre, como la flecha disparada hacia arriba, actúa la fuerza de gravedad. Esta fuerza provoca la aceleración de los cuerpos. Cerca de la superficie de la Tierra se supone que la aceleración debida a la gravedad, $a(t) = -g$, es una constante. La magnitud g de esta aceleración es aproximadamente

$$32 \text{ pies/s}^2, \quad 9.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{o bien,} \quad 980 \text{ cm/s}^2.$$

EJEMPLO 1 Movimiento de un proyectil

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 49 m/s. ¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ s? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire el proyectil? ¿Cuál es la velocidad de impacto?

Solución Si se empieza con $a(t) = -9.8$, por integración indefinida obtenemos

$$v(t) = \int (-9.8)\,dt = -9.8t + C_1. \tag{2}$$

A partir de la condición inicial dada $v(0) = 49$, vemos que (2) implica $C_1 = 49$. Por tanto,

$$v(t) = -9.8t + 49,$$

y así $v(2) = -9.8(2) + 49 = 29.4$ m/s. Observe que $v(2) > 0$ implica que el proyectil se desplaza hacia arriba.

Luego, la altitud del proyectil, medida a partir del nivel del suelo, es la integral indefinida de la función velocidad,

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (-9.8t + 49)\,dt = -4.9t^2 + 49t + C_2. \tag{3}$$

Puesto que el proyectil inicia su movimiento a partir del nivel del suelo, $s(0) = 0$ y (3) proporcionan $C_2 = 0$. Por tanto,

$$s(t) = -4.9t^2 + 49t. \tag{4}$$

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, $v(t) = 0$. Luego, al resolver $-9.8t + 49 = 0$ obtenemos $t = 5$. Por (4) encontramos que la altura correspondiente es $s(5) = 122.5$ m.

Finalmente, para encontrar el instante en que el proyectil choca contra el suelo, resolvemos $s(t) = 0$ o $-4.9t^2 + 49t = 0$. Cuando la última ecuación se escribe como $-4.9t(t - 10) = 0$, vemos que el proyectil permanece en el aire 10 s. La velocidad de impacto es $v(10) = -49$ m/s. ■

Cuando se ignora la resistencia del aire, la magnitud de la velocidad de impacto (rapidez) es la misma que la velocidad inicial hacia arriba desde el nivel del suelo. Vea el problema 32 en los ejercicios 6.1. Esto no es cierto cuando tomamos en consideración la resistencia del aire.

EJEMPLO 2 Movimiento de un proyectil

Una pelota de tenis se lanza verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pies con una velocidad inicial de 8 pies/s. ¿Cuál es la velocidad de impacto si la pelota golpea en la cabeza a una persona de 6 pies de estatura? Vea la FIGURA 6.1.2.

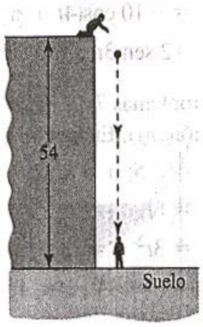


FIGURA 6.1.2 Lanzamiento de la pelota en el ejemplo 2

Solución En este caso $a(t) = -32$, $s(0) = 54$ y, puesto que la pelota se lanza hacia abajo, $v(0) = -8$. Luego,

$$v(t) = \int (-32)\, dt = -32t + C_1.$$

Al usar la velocidad inicial $v(0) = -8$ encontramos $C_1 = -8$. En consecuencia,

$$v(t) = -32t - 8.$$

Al continuar encontramos

$$s(t) = \int (-32t - 8)\, dt = -16t^2 - 8t + C_2.$$

Cuando $t = 0$, sabemos que $s = 54$ y así la última ecuación implica $C_2 = 54$. Entonces

$$s(t) = -16t^2 - 8t + 54.$$

Para determinar el instante que corresponde a $s = 6$, resolvemos

$$-16t^2 - 8t + 54 = 6.$$

Al simplificar obtenemos $-8(2t - 3)(t + 2) = 0$ y $t = \frac{3}{2}$. Entonces, la velocidad de la pelota cuando golpea a la persona es $v\left(\frac{3}{2}\right) = -56$ pies/s. ■

Distancia La **distancia total** que un objeto recorre rectilíneamente en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dada por la integral definida

$$\text{distancia total} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt. \tag{5}$$

En (5) se requiere el valor absoluto porque el objeto puede moverse a la izquierda, de modo que durante algún tiempo tiene velocidad negativa.

EJEMPLO 3 Distancia recorrida

La función de posición de un objeto que se mueve sobre una recta de coordenadas es $s(t) = t^2 - 6t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[0, 9]$.

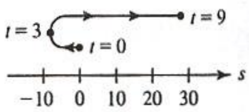


FIGURA 6.1.3 Representación del movimiento del objeto en el ejemplo 3

Solución La función velocidad $v(t) = ds/dt = 2t - 6 = 2(t - 3)$ muestra que el movimiento es como se indica en la FIGURA 6.1.3; a saber: $v < 0$ para $0 \le t < 3$ (movimiento a la izquierda) y $v \ge 0$ para $3 \le t \le 9$ (movimiento a la derecha). Entonces, por (5) la distancia recorrida es

$$\begin{aligned} \int_0^9 |2t - 6|\, dt &= \int_0^3 |2t - 6|\, dt + \int_3^9 |2t - 6|\, dt \\ &= \int_0^3 -(2t - 6)\, dt + \int_3^9 (2t - 6)\, dt \\ &= (-t^2 + 6t)\Big]_0^3 + (t^2 - 6t)\Big]_3^9 = 45 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Por supuesto, el último resultado debe ser consistente con la cifra obtenida al simplemente contar las unidades en la figura 6.1.3 entre $s(0)$ y $s(3)$, y entre $s(3)$ y $s(9)$. ■

Ejercicios 6.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-6, un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t)$. Encuentre la función posición $s(t)$.

1. $v(t) = 6$; $s = 5$ cuando $t = 2$

2. $v(t) = 2t + 1$; $s = 0$ cuando $t = 1$

3. $v(t) = t^2 - 4t$; $s = 6$ cuando $t = 3$

4. $v(t) = \sqrt{4t + 5}$; $s = 2$ cuando $t = 1$

5. $v(t) = -10\cos(4t + \pi/6)$; $s = \frac{5}{4}$ cuando $t = 0$

6. $v(t) = 2$ sen $3t$; $s = 0$ cuando $t = \pi$

En los problemas 7-12, un cuerpo se mueve en línea recta con aceleración $a(t)$. Encuentre $v(t)$ y $s(t)$.

7. $a(t) = -5$; $v = 4$ y $s = 2$ cuando $t = 1$

8. $a(t) = 6t$; $v = 0$ y $s = -5$ cuando $t = 2$

9. $a(t) = 3t^2 - 4t + 5$; $v = -3$ y $s = 10$ cuando $t = 0$

10. $a(t) = (t-1)^2$; $v = 4$ y $s = 6$ cuando $t = 1$

11. $a(t) = 7t^{1/3} - 1$; $v = 50$ y $s = 0$ cuando $t = 8$

12. $a(t) = 100\cos 5t$; $v = -20$ y $s = 15$ cuando $t = \pi/2$

En los problemas 13-18, un objeto se mueve en línea recta según la función posición dada. Si s se mide en centímetros, encuentre la distancia total recorrida por el objeto en el instante de tiempo indicado.

13. $s(t) = t^2 - 2t$; $[0, 5]$

14. $s(t) = -t^2 + 4t + 7$; $[0, 6]$

15. $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$; $[0, 4]$

16. $s(t) = t^4 - 32t^2$; $[1, 5]$

17. $s(t) = 6$ sen πt; $[1, 3]$

18. $s(t) = (t-3)^2$; $[2, 7]$

≡ Aplicaciones

19. El conductor de un automóvil que se desplaza en línea recta a velocidad constante de 60 mi/h aparta por 2 s la vista de la carretera. ¿Cuántos pies recorre el automóvil en este instante?

20. Una pelota se deja caer (a partir del reposo) desde una altura de 144 pies. ¿En cuánto tiempo la pelota llega al suelo? ¿A qué velocidad choca contra el suelo?

21. Un huevo se suelta desde la parte superior de un edificio y choca contra el suelo después de 4 s desde que fue soltado. ¿Cuál es la altura del edificio?

22. Una piedra se deja caer en un pozo y el choque de ésta con el agua se escucha 2 s después. Si la velocidad del sonido en el aire es 1 080 pies/s, encuentre la profundidad del pozo.

23. Una flecha se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5 m/s. ¿A qué altura llega?

24. ¿Cuán alto llegaría la flecha en el problema 23 en el planeta Marte, donde $g = 3.6$ m/s?

25. Una pelota de golf se lanza verticalmente hacia arriba desde el borde del techo de un edificio de 384 pies de altura con una velocidad inicial de 32 pies/s. ¿En qué instante golpea la pelota el suelo?

26. En el problema 25, ¿cuál es la velocidad de la pelota de golf cuando pasa frente a un observador situado en una ventana situada a 256 pies del suelo?

27. Una persona arroja un malvavisco hacia abajo con una velocidad inicial de 16 pies/s desde una ventana que está a 102 pies del nivel del suelo. Si el malvavisco golpea la cabeza de una persona de 6 pies de estatura, ¿cuál es la velocidad de impacto?

28. La persona cuya cabeza fue golpeada en el problema 27 sube hasta la parte superior de una escalera de 22 pies de altura y arroja una roca verticalmente con una velocidad inicial de 96 pies/s. Si la roca choca contra el culpable en el piso a 102 pies, ¿cuál es la velocidad de impacto?

≡ Piense en ello

29. En marzo de 1979, la sonda espacial *Voyager 1* fotografió la erupción de un volcán activo en Io, una de las lunas de Júpiter. Encuentre la velocidad de lanzamiento de una roca desde el volcán Loki si la roca alcanza una altitud de 200 km por arriba de la cima del volcán. En Io, la aceleración debida a la gravedad es $g = 1.8$ m/s^2.

30. Como se muestra en la FIGURA 6.1.4, desde un punto a 30 pies de un poste de 25 pies de altura se arroja verticalmente hacia abajo una pelota desde una altura de 25 pies con una velocidad inicial de 2 pies/s.

a) Encuentre la razón en que la sombra de la pelota se mueve hacia la base del poste.

b) Encuentre la razón en que la sombra de la pelota se mueve hacia la base del poste en $t = \frac{1}{2}$.

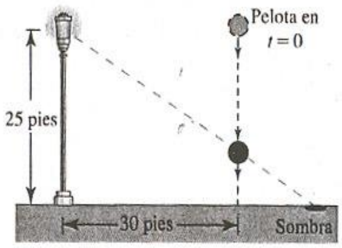


FIGURA 6.1.4 Poste en el problema 30

31. Si un cuerpo se mueve rectilíneamente con aceleración constante a y $v = v_0$ cuando $s = 0$, demuestre que

$$v^2 = v_0^2 + 2as. \left[\textit{Sugerencia: } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.\right]$$

32. Demuestre que, cuando se ignora la resistencia del aire, un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo choca de nuevo contra el suelo con una velocidad igual a la velocidad inicial v_0.

33. Suponga que la aceleración debida a la gravedad en un planeta es igual a la mitad de la aceleración en la Tierra. Demuestre que una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie del planeta alcanza una altura máxima que es igual al doble de la altura en la Tierra cuando se aplica la misma velocidad inicial.

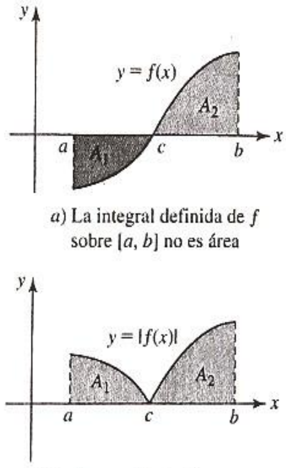
34. En el problema 33, suponga que la velocidad inicial de la pelota sobre el planeta es v_0 y que la velocidad inicial de la pelota sobre la Tierra es $2v_0$. Compare las alturas máximas alcanzadas. Determine la velocidad inicial de la pelota sobre la Tierra (en términos de v_0) de modo que la máxima altura alcanzada sea la misma que sobre el planeta.

6.2 Otro repaso al área

Introducción Si f es una función que asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Como vio en la sección 5.4, el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como al *área neta con signo* entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$. En esta sección investigamos dos problemas de área:

- Encontrar el **área total** de una región acotada por la gráfica de f y el eje x sobre un intervalo $[a, b]$.
- Encontrar el **área de la región** acotada entre dos gráficas sobre un intervalo $[a, b]$.

Veremos que el primer problema es justo un caso especial del segundo problema.



a) La integral definida de f sobre $[a, b]$ no es área

b) La integral definida de $|f|$ sobre $[a, b]$ es área

FIGURA 6.2.1 El área total es $A = A_1 + A_2$

Área total Suponga que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$ y que $f(x) < 0$ sobre $[a, c)$ y que $f(x) \geq 0$ sobre $[c, b]$. El **área total** es el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Para encontrar esta área se emplea el valor absoluto de la función $y = |f(x)|$, que es no negativa para toda x en $[a, b]$. Recuerde que $|f(x)|$ está definida por partes. Para la función f que se muestra en la FIGURA 6.2.1*a*), $f(x) < 0$ sobre el intervalo $[a, c)$ y $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[c, b]$. Por tanto,

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{para } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{para } f(x) \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Como se muestra en la figura 6.2.1*b*), la gráfica de $y = |f(x)|$ sobre el intervalo $[a, c)$ se obtiene al reflejar esa porción de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Sobre el intervalo $[c, b]$, donde $f(x) \geq 0$, las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ son las mismas. Para encontrar el área total $A = A_1 + A_2$ mostradas en la figura 6.2.1*b*) usamos la propiedad aditiva del intervalo de la integral definida junto con (1):

◀ Vea el teorema 5.4.5.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|\,dx &= \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^c (-f(x))\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Las ideas del análisis precedente se resumen en la siguiente definición.

Definición 6.2.1 Área total

Si $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces el **área total** A acotada por su gráfica y el eje x sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Área total

Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$.

Solución Por (2) se tiene

$$A = \int_{-2}^{1} |x^3|\,dx.$$

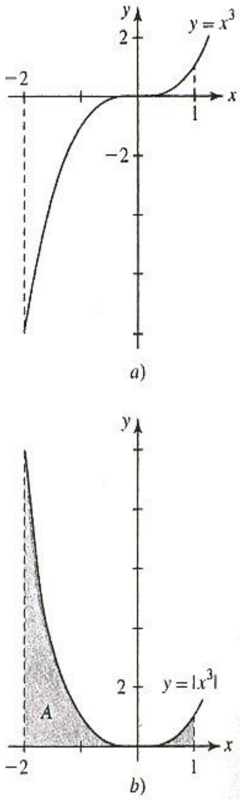


FIGURA 6.2.2 Gráfica de la función y área en el ejemplo 1

En la FIGURA 6.2.2 comparamos la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = |x^3|$. Puesto que $x^3 < 0$ para $x < 0$, se tiene sobre $[-2, 1]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -x^3, & -2 \leq x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, por (2) de la definición 6.2.1, el área que se busca es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} |x^3|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} |x^3|\, dx + \int_{0}^{1} |x^3|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} (-x^3)\, dx + \int_{0}^{1} x^3\, dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4\Big]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{1} \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 = \frac{17}{4}. \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 2 Área total

Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje x sobre $[-2, 2]$.

Solución Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ se muestran en la FIGURA 6.2.3. Luego, por la figura 6.2.3*a*), vemos que sobre $[-2, 2]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -(x^2 + 2x), & -2 \le x < 0 \\ x^2 + 2x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

En consecuencia, el área total acotada por la gráfica de f sobre el intervalo $[-2, 2]$ y el eje x es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} |x^2 + 2x|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} |x^2 + 2x|\, dx + \int_{0}^{2} |x^2 + 2x|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} -(x^2 + 2x)\, dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 2x)\, dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big]_{-2}^{0} + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big]_{0}^{2} \\ &= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{8}{3} + 4\right) - 0 = 8. \end{aligned}$$ ■

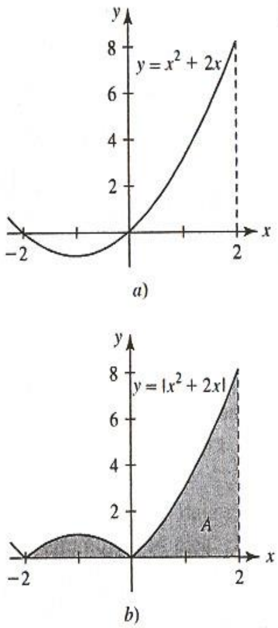


FIGURA 6.2.3 Gráfica y área en el ejemplo 2

Área acotada por dos gráficas El análisis anterior es un caso especial del problema más general de encontrar el **área de la región acotada** entre la gráfica de dos funciones f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Vea la FIGURA 6.2.4*a*). El área *bajo* la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como el área de la región

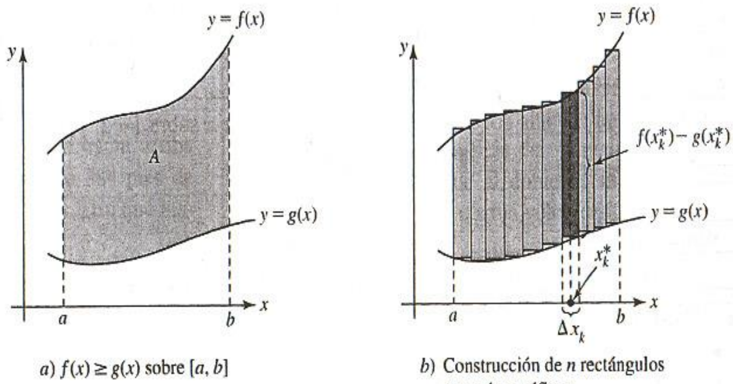


FIGURA 6.2.4 Área A acotada entre dos gráficas

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

Como se mencionó en la introducción, en este capítulo veremos diferentes interpretaciones de la integral definida. En cada sección veremos una variedad de la integral definida, dentro del párrafo *Construyendo una integral*. Antes de memorizar estas fórmulas de integrales, usted debe estar al tanto de que el resultado obtenido en general no es aplicable a toda situación geométrica o física concebible. Por ejemplo, como vimos en el ejemplo 7, para encontrar el área de una región en el plano puede resultar más conveniente integrar con respecto a y y así poder construir una integral totalmente diferente. En lugar de aplicar a ciegas una fórmula, usted debe tratar de comprender el proceso y la práctica de construir integrales al analizar la geometría de cada problema.

Ejercicios 6.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-22, encuentre el área total acotada por la gráfica de la función dada y el eje x en el intervalo dado.

1. $y = x^2 - 1$; $[-1, 1]$
2. $y = x^2 - 1$; $[0, 2]$
3. $y = x^3$; $[-3, 0]$
4. $y = 1 - x^3$; $[0, 2]$
5. $y = x^2 - 3x$; $[0, 3]$
6. $y = -(x + 1)^2$; $[-1, 0]$
7. $y = x^3 - 6x$; $[-1, 1]$
8. $y = x^3 - 3x^2 + 2$; $[0, 2]$
9. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; $[0, 3]$
10. $y = x(x + 1)(x - 1)$; $[-1, 1]$
11. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$; $[\frac{1}{2}, 3]$
12. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$; $[1, 2]$
13. $y = \sqrt{x} - 1$; $[0, 4]$
14. $y = 2 - \sqrt{x}$; $[0, 9]$
15. $y = \sqrt[3]{x}$; $[-2, 3]$
16. $y = 2 - \sqrt[3]{x}$; $[-1, 8]$
17. $y = \operatorname{sen} x$; $[-\pi, \pi]$
18. $y = 1 + \cos x$; $[0, 3\pi]$
19. $y = -1 + \operatorname{sen} x$; $[-3\pi/2, \pi/2]$
20. $y = \sec^2 x$; $[0, \pi/3]$
21. $y = \begin{cases} x, & -2 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$; $[-2, 1]$
22. $y = \begin{cases} x + 2, & -3 \le x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$; $[-3, 2]$

En los problemas 23-50, encuentre el área de la región acotada por la gráfica de las funciones dadas.

23. $y = x, y = -2x, x = 3$
24. $y = x, y = 4x, x = 2$
25. $y = x^2, y = 4$
26. $y = x^2, y = x$
27. $y = x^3, y = 8, x = -1$
28. $y = x^3, y = \sqrt[3]{x}$, primer cuadrante
29. $y = 4(1 - x^2), y = 1 - x^2$
30. $y = 2(1 - x^2), y = x^2 - 1$
31. $y = x, y = 1/x^2, x = 3$
32. $y = x^2, y = 1/x^2, y = 9$, primer cuadrante
33. $y = -x^2 + 6, y = x^2 + 4x$
34. $y = x^2, y = -x^2 + 3x$
35. $y = x^{2/3}, y = 4$
36. $y = 1 - x^{2/3}, y = x^{2/3} - 1$
37. $y = x^2 - 2x - 3, y = 2x + 2$, sobre $[-1, 6]$
38. $y = -x^2 + 4x, y = \frac{3}{2}x$
39. $y = x^3, y = x + 6, y = -\frac{1}{2}x$
40. $x = y^2, x = 0, y = 1$
41. $x = -y, x = 2 - y^2$
42. $x = y^2, x = 6 - y^2$
43. $x = y^2 + 2y + 2, x = -y^2 - 2y + 2$
44. $x = y^2 - 6y + 1, x = -y^2 + 2y + 1$
45. $y = x^3 - x, y = x + 4, x = -1, x = 1$
46. $x = y^3 - y, x = 0$
47. $y = \cos x, y = \operatorname{sen} x, x = 0, x = \pi/2$
48. $y = 2 \operatorname{sen} x, y = -x, x = \pi/2$
49. $y = 4 \operatorname{sen} x, y = 2$, sobre $[\pi/6, 5\pi/6]$
50. $y = 2 \cos x, y = -\cos x$, sobre $[-\pi/2, \pi/2]$

En los problemas 51 y 52, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones. Trace las dos regiones que tienen el área dada por la integral.

51. $\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{x} + x)\,dx$
52. $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3 - x\right)dx$

En los problemas 53 y 54, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones sobre un intervalo. Evalúe la integral dada y trace la región.

53. $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{3}{x + 1} - 4x\right| dx$
54. $\displaystyle\int_{-1}^1 |e^x - 2e^{-x}|\,dx$

En los problemas 55-58, use el hecho de que el área de un círculo de radio r es πr^2 para evaluar la integral definida dada. Trace una región cuya área esté dada por la integral definida.

55. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$
56. $\displaystyle\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx$
57. $\displaystyle\int_{-2}^2 (1 + \sqrt{4 - x^2})\,dx$
58. $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x + 3 - \sqrt{1 - x^2})\,dx$

59. Establezca una integral definida que represente el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$. Use la idea que se utilizó en los problemas 55-58 para evaluar la integral definida.

60. Encuentre el área del triángulo con vértices en (1, 1), (2, 4) y (3, 2).

61. Considere la región acotada por las gráficas de $y^2 = -x - 2$, $y = 2$, $y = -2$ y $y = 2(x - 1)$. Calcule el área de la región al integrar con respecto a x.

62. Calcule el área de la región dada en el problema 61 al integrar con respecto a y.

63. Considere la región acotada por las gráficas de $y = 2e^x - 1$, $y = e^x$ y $y = 2$ mostradas en la FIGURA 6.2.12. Exprese el área de la región como integrales definidas primero usando integración con respecto a x y luego usando integración con respecto a y. Escoja una de estas integrales para encontrar el área.

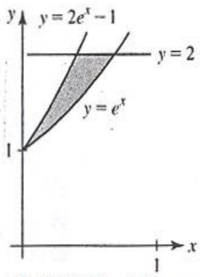


FIGURA 6.2.12 Gráficas para el problema 63

≡ Problemas con calculadora/SAC

64. Use una calculadora o un SAC para aproximar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas mostradas en la FIGURA 6.2.13. Encuentre un valor aproximado del área de la región.

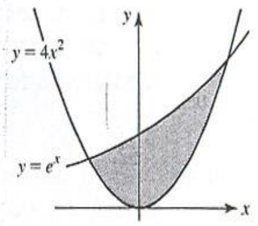


FIGURA 6.2.13 Gráficas para el problema 64

≡ Piense en ello

65. El segmento de recta entre Q y R mostrado en la FIGURA 6.2.14 es tangente a la gráfica de $y = 1/x$ en el punto P. Demuestre que el área del triángulo QOR es independiente de las coordenadas de P.

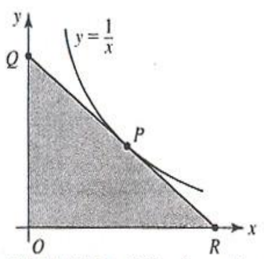


FIGURA 6.2.14 Triángulo en el problema 65

66. Un trapezoide está acotado por las gráficas de $f(x) = Ax + B$, $x = a$, $x = b$ y $x = 0$. Muestre que el área del trapezoide es $\dfrac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$.

67. Exprese el área de la región sombreada mostrada en la FIGURA 6.2.15 en términos del número a. Trate de ser un poco perspicaz.

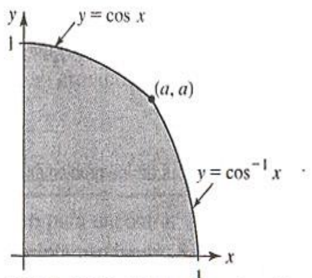


FIGURA 6.2.15 Gráficas para el problema 67

68. Suponga que los dos brochazos de pintura mostrados en la FIGURA 6.2.16 se hacen de una sola pasada usando una brocha de ancho k, $k > 0$, sobre el intervalo $[a, b]$. En la figura 6.2.16b) se supone que la región pintada en rojo es paralela al eje x. ¿Cuál brochazo tiene mayor área? Argumente su respuesta con una demostración matemática sólida. ¿Puede plantear un principio general?

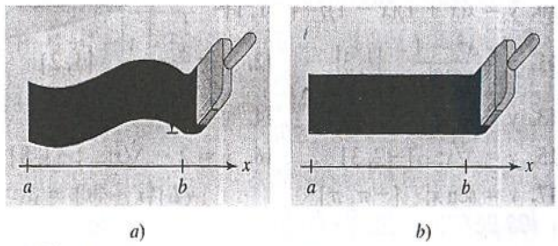


FIGURA 6.2.16 Brochazos de pintura en el problema 68

≡ Proyectos

69. El área más grande Los puntos A y B están sobre una recta y los puntos C y D están sobre una recta paralela a la primera recta. Los puntos en la FIGURA 6.2.17a) forman un rectángulo $ABCD$. Los puntos C y D se mueven a la izquierda como se muestra en la figura 6.2.17b) de modo que $ABC'D'$ forme un paralelogramo. Analice: ¿cuál tiene mayor área, el rectángulo $ABCD$ o el paralelogramo $ABC'D'$?

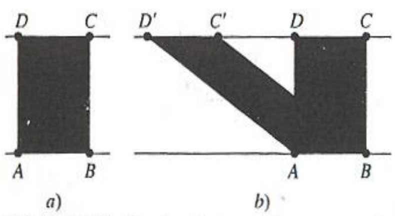


FIGURA 6.2.17 Rectángulo y paralelogramo en el problema 69

70. Principio de Cavalieri Escriba un reporte breve acerca del principio de Cavalieri. Analice los problemas 68 y 69 en su reporte.

Balotario de Ejercicios Nº 9

Calculo de volúmenes por el método de los discos y capas cilíndricas

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 338, 339, 344 y 345

Revolución alrededor de una recta El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución cuando una región se hace girar alrededor de un eje que no es un eje de coordenadas.

EJEMPLO 6 Eje de revolución que no es un eje de coordenadas

Encuentre el volumen V del sólido que se forma al girar la región alrededor de la recta $x = 4$ que se muestra en el ejemplo 2.

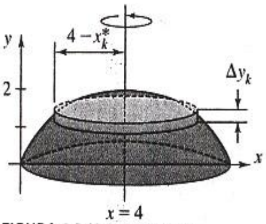


FIGURA 6.3.13 Sólido de revolución en el ejemplo 6

Solución El sólido de revolución en forma de domo se muestra en la FIGURA 6.3.13. Por inspección de la figura vemos que un elemento rectangular horizontal de ancho Δy_k que es perpendicular a la recta vertical $x = 4$ genera un disco sólido cuando gira alrededor de ese eje. El radio r de ese disco es

$$r = (\text{valor } x \text{ más a la derecha}) - (\text{valor } x \text{ más a la izquierda}) = 4 - x_k^*,$$

y entonces su volumen es

$$V_k = \pi(4 - x_k^*)^2\,\Delta y_k.$$

Para expresar x en términos de y se usa $y = \sqrt{x}$ para obtener $x_k^* = (y_k^*)^2$. En consecuencia,

$$V_k = \pi(4 - (y_k^*)^2)^2\,\Delta y_k.$$

Eso conduce a la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^2 (4 - y^2)^2\,dy \\ &= \pi\int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)\,dy \\ &= \pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right)\Bigg]_0^2 = \frac{256}{15}\pi. \end{aligned}$$

■

Ejercicios 6.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

≡ Fundamentos

En los problemas 1 y 2, use el método de las rebanadas para encontrar el volumen del sólido si se proporcionan sus secciones transversales perpendiculares a un diámetro de una base circular. Suponga que el radio de la base es 4.

1.

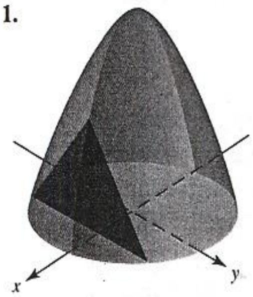


FIGURA 6.3.14 Las secciones transversales son triángulos equiláteros

2.

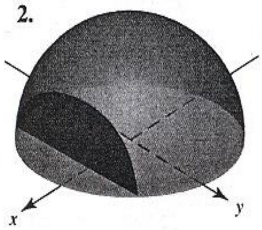


FIGURA 6.3.15 Las secciones transversales son semicírculos

3. La base de un sólido está acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 4$ en el plano xy. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son rectángulos para los cuales la altura es cuatro veces la base. Encuentre el volumen del sólido.

4. La base de un sólido está acotada por la curva $y = 4 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros. Encuentre el volumen del sólido.

5. La base de un sólido es un triángulo isósceles cuya base y altura miden, respectivamente, 4 y 5 pies. Las secciones transversales perpendiculares a la altura son semicírculos. Encuentre el volumen del sólido.

6. Por el centro de una esfera sólida de radio $r = 2$ pies se perfora un orificio de 1 pie de radio. Encuentre el volumen del sólido restante. Vea la FIGURA 6.3.16.

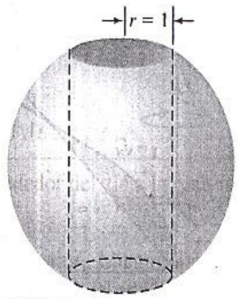


FIGURA 6.3.16 Orificio a través de la esfera en el problema 6

7. La base de un sólido es un triángulo isósceles recto formado por los ejes de coordenadas y la recta $x+y=3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

8. Suponga que la pirámide que se muestra en la FIGURA 6.3.17 tiene altura h y base cuadrada de área B. Demuestre que el volumen de la pirámide está dado por $A = \frac{1}{3}hB$. [*Sugerencia*: Sea b la longitud de un lado de la base cuadrada.]

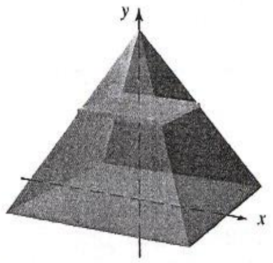


FIGURA 6.3.17 Pirámide en el problema 8

En los problemas 9-14, consulte la FIGURA 6.3.18. Use el método del disco o arandela para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada alrededor de la recta indicada.

9. R_1 alrededor de OC
10. R_1 alrededor de OA
11. R_2 alrededor de OA
12. R_2 alrededor de OC
13. R_1 alrededor de AB
14. R_2 alrededor de AB

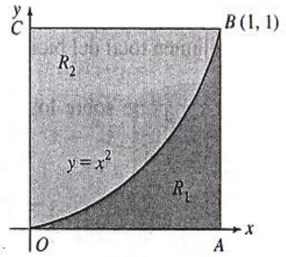


FIGURA 6.3.18 Regiones para los problemas 9-14

En los problemas 15-40, use el método del disco o de la arandela para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor de la recta o eje que se indica.

15. $y = 9 - x^2, y = 0$; eje x
16. $y = x^2 + 1, x = 0, y = 5$; eje y
17. $y = \dfrac{1}{x}, x = 1, y = \dfrac{1}{2}$; eje y
18. $y = \dfrac{1}{x}, x = \dfrac{1}{2}, x = 3, y = 0$; eje x
19. $y = (x-2)^2, x = 0, y = 0$; eje x
20. $y = (x+1)^2, x = 0, y = 0$; eje y
21. $y = 4 - x^2, y = 1 - \frac{1}{4}x^2$; eje x
22. $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1, x = 0$, primer cuadrante; eje y
23. $y = x, y = x + 1, x = 0, y = 2$; eje y
24. $x + y = 2, x = 0, y = 0, y = 1$; eje x
25. $y = \sqrt{x-1}, x = 5, y = 0$; $x = 5$
26. $x = y^2, x = 1$; $x = 1$
27. $y = x^{1/3}, x = 0, y = 1$; $y = 2$
28. $x = -y^2 + 2y, x = 0$; $x = 2$
29. $x^2 - y^2 = 16, x = 5$; eje y
30. $y = x^2 - 6x + 9, y = 9 - \frac{1}{2}x^2$; eje x
31. $x = y^2, y = x - 6$; eje y
32. $y = x^3 + 1, x = 0, y = 9$; eje y
33. $y = x^3 - x, y = 0$; eje x
34. $y = x^3 + 1, x = 1, y = 0$; eje x
35. $y = e^{-x}, x = 1, y = 1$; $y = 2$
36. $y = e^x, y = 1, x = 2$; eje x
37. $y = |\cos x|, y = 0, 0 \le x \le 2\pi$; eje x
38. $y = \sec x, x = -\pi/4, x = \pi/4, y = 0$; eje x
39. $y = \tan x, y = 0, x = \pi/4$; eje x
40. $y = \operatorname{sen} x, y = \cos x, x = 0$, primer cuadrante; eje x

≡ Piense en ello

41. Relea los problemas 68-70 acerca del principio de Cavalieri, en los ejercicios 6.2. A continuación muestre que los cilindros circulares de la FIGURA 6.3.19 tienen el mismo volumen.

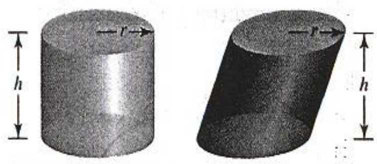


FIGURA 6.3.19 Cilindros en el problema 41

42. Considere el cilindro circular recto de radio a que se muestra en la FIGURA 6.3.20. Un plano inclinado a un ángulo θ con respecto a la base del cilindro pasa por un diámetro de la base. Encuentre el volumen de la cuña resultante que se corta del cilindro cuando

a) $\theta = 45°$ *b)* $\theta = 60°$.

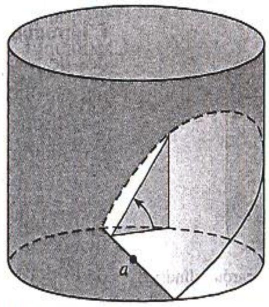


FIGURA 6.3.20 Cilindro y cuña en el problema 42

A partir de la última línea se observa que el volumen del sólido es la integral definida

$$V = 2\pi\int_1^3 (-y^3 + 3y^2 + y - 3)\,dy$$
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4}y^4 + y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 3y\right)\Big]_1^3$$
$$= 2\pi\left[\left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9\right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3\right)\right] = 8\pi. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 6.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, consulte la FIGURA 6.4.7. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada alrededor de la recta indicada.

1. R_1 alrededor de OC
2. R_1 alrededor de OA
3. R_2 alrededor de BC
4. R_2 alrededor de OA
5. R_1 alrededor de AB
6. R_2 alrededor de AB

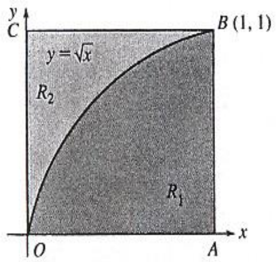


FIGURA 6.4.7 Regiones para los problemas 1-6

En los problemas 7-30, use el método de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor de la recta o eje que se indica.

7. $y = x, x = 0, y = 5$; eje x
8. $y = 1 - x, x = 0, y = 0$; $y = -2$
9. $y = x^2, x = 0, y = 3$, primer cuadrante; eje x
10. $y = x^2, x = 2, y = 0$; eje y
11. $y = x^2, x = 1, y = 0$; $x = 3$
12. $y = x^2, y = 9$; eje x
13. $y = x^2 + 4, x = 0, x = 2, y = 2$; eje y
14. $y = x^2 - 5x + 4, y = 0$; eje y
15. $y = (x - 1)^2, y = 1$; eje x
16. $y = (x - 2)^2, y = 4$; $x = 4$
17. $y = x^{1/3}, x = 1, y = 0$; $y = -1$
18. $y = x^{1/3} + 1, y = -x + 1, x = 1$; $x = 1$
19. $y = x^2, y = x$; eje y
20. $y = x^2, y = x$; $x = 2$
21. $y = -x^3 + 3x^2, y = 0$, primer cuadrante; eje y
22. $y = x^3 - x, y = 0$, segundo cuadrante; eje y
23. $y = x^2 - 2, y = -x^2 + 2, x = 0$, segundo y tercer cuadrantes; eje y
24. $y = x^2 - 4x, y = -x^2 + 4x$; $x = -1$
25. $x = y^2 - 5y, x = 0$; eje x
26. $x = y^2 + 2, y = x - 4, y = 1$; eje x
27. $y = x^3, y = x + 6, x = 0$; eje y
28. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{1 - x}, y = 0$; eje x
29. $y = \operatorname{sen} x^2, x = 0, y = 1$; eje y
30. $y = e^{x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$; eje y

En los problemas 31-36, la región en el inciso *a*) gira alrededor del eje indicado, generando el sólido que vemos en el inciso *b*). Escoja entre los métodos del disco, de la arandela o de los cascarones para encontrar el volumen del sólido de revolución.

31.

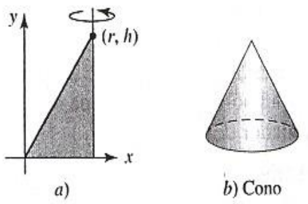


FIGURA 6.4.8 Región y sólido para el problema 31

32.

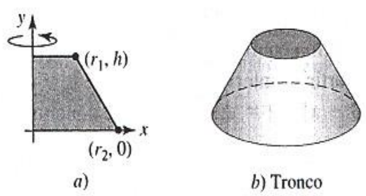


FIGURA 6.4.9 Región y sólido para el problema 32

33.

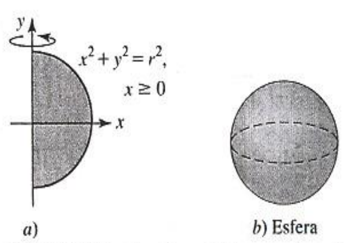
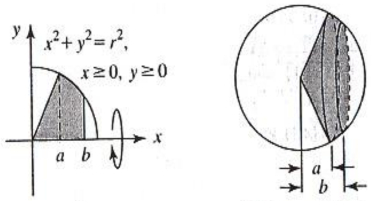


FIGURA 6.4.10 Región y sólido para el problema 33

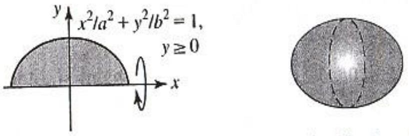
34.



a) *b)* Sector esférico

FIGURA 6.4.11 Región y sólido para el problema 34

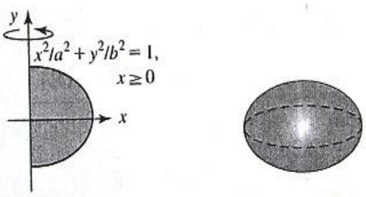
35.



a) *b)* Esferoide alargado

FIGURA 6.4.12 Región y sólido para el problema 35

36.



a) *b)* Esferoide achatado

FIGURA 6.4.13 Región y sólido para el problema 36

≡ Aplicaciones

37. Un cubo cilíndrico de radio r que contiene un líquido gira alrededor del eje y con velocidad angular constante ω. Es posible mostrar que la sección transversal del líquido está dada por $y = \omega^2x^2/(2g)$, $-r \leq x \leq r$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del líquido en el líquido giratorio dado que la altura del cubo es h. Vea la FIGURA 6.4.14.

38. En el problema 37, determine la velocidad angular ω para la cual el fluido entra en contacto con el fondo del cubo. ¿Cuál es el volumen V correspondiente del líquido?

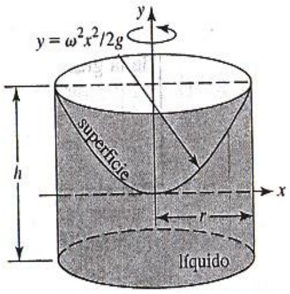


FIGURA 6.4.14 Cubo en los problemas 37 y 38

6.5 Longitud de una gráfica

Introducción Si una función $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua sobre un intervalo $[a, b]$, entonces se dice que la gráfica es **suave** y f se denomina **función suave**. Como el nombre lo implica, una gráfica suave carece de picos. En el análisis que sigue se establece una fórmula formal de la **longitud** L, o **longitud de arco**, de una gráfica suave sobre un intervalo $[a, b]$. Vea la FIGURA 6.5.1.

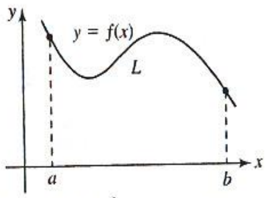


FIGURA 6.5.1 Determinación de la longitud L de la gráfica de f sobre $[a, b]$

Construcción de una integral Sean f que tiene una gráfica suave sobre $[a, b]$ y P una partición arbitraria del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Como de costumbre, sean Δx_k el ancho del k-ésimo subintervalo y $\|P\|$ el ancho del subintervalo más grande. Como se muestra en la FIGURA 6.5.2*a*), es posible aproximar la longitud de la gráfica sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ al encontrar la longitud L_k de la cuerda entre los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por la figura 6.5.2*b*), la longitud L_k se obtiene a partir del teorema de Pitágoras:

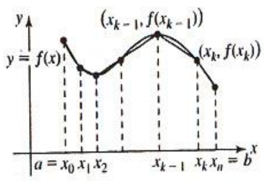
$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \qquad (1)$$

Por el teorema del valor medio (sección 4.4) sabemos que en cada subintervalo abierto x_k^* existe un número (x_{k-1}, x_k) tal que

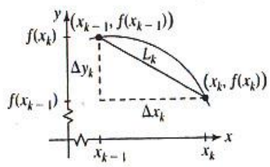
$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \qquad \text{o bien,} \qquad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Al usar la última ecuación, $f(x_k) - f(x_{k-1})$ sustituimos en (1) y simplificamos:

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(x_k^*)]^2(x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2(1 + [f'(x_k^*)]^2)} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k. \end{aligned}$$



a) n cuerdas



b) Acercamiento a la cuerda sobre el k-ésimo subintervalo

FIGURA 6.5.2 Aproximación de la longitud de una gráfica al sumar las longitudes de cuerdas

Balotario de Ejercicios Nº 10

Longitud de Arco y superficie de revolución

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 345, 346, 347, 348, 349, 350 y 351

34.

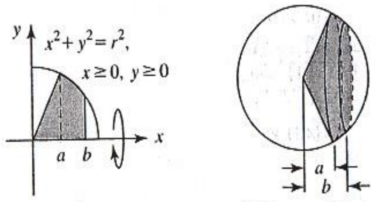


FIGURA 6.4.11 Región y sólido para el problema 34

35.

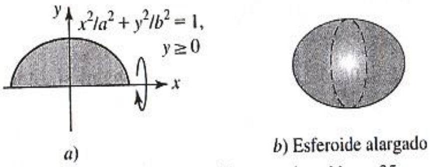


FIGURA 6.4.12 Región y sólido para el problema 35

36.

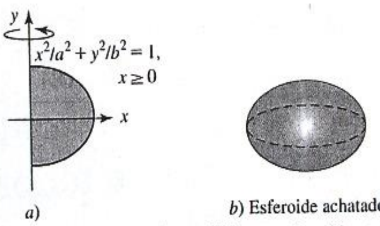


FIGURA 6.4.13 Región y sólido para el problema 36

≡ Aplicaciones

37. Un cubo cilíndrico de radio r que contiene un líquido gira alrededor del eje y con velocidad angular constante ω. Es posible mostrar que la sección transversal del líquido está dada por $y = \omega^2 x^2/(2g)$, $-r \leq x \leq r$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del líquido en el líquido giratorio dado que la altura del cubo es h. Vea la FIGURA 6.4.14.

38. En el problema 37, determine la velocidad angular ω para la cual el fluido entra en contacto con el fondo del cubo. ¿Cuál es el volumen V correspondiente del líquido?

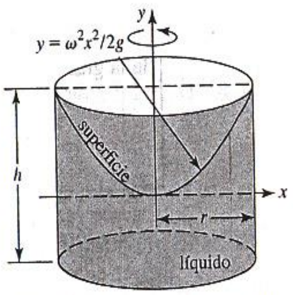


FIGURA 6.4.14 Cubo en los problemas 37 y 38

6.5 Longitud de una gráfica

Introducción Si una función $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua sobre un intervalo $[a, b]$, entonces se dice que la gráfica es **suave** y f se denomina **función suave**. Como el nombre lo implica, una gráfica suave carece de picos. En el análisis que sigue se establece una fórmula formal de la **longitud** L, o **longitud de arco**, de una gráfica suave sobre un intervalo $[a, b]$. Vea la FIGURA 6.5.1.

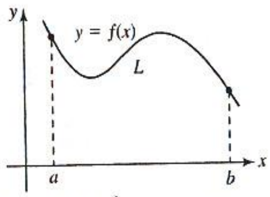


FIGURA 6.5.1 Determinación de la longitud L de la gráfica de f sobre $[a, b]$

Construcción de una integral Sean f que tiene una gráfica suave sobre $[a, b]$ y P una partición arbitraria del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Como de costumbre, sean Δx_k el ancho del k-ésimo subintervalo y $\|P\|$ el ancho del subintervalo más grande. Como se muestra en la FIGURA 6.5.2a), es posible aproximar la longitud de la gráfica sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ al encontrar la longitud L_k de la cuerda entre los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por la figura 6.5.2b), la longitud L_k se obtiene a partir del teorema de Pitágoras:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \qquad (1)$$

Por el teorema del valor medio (sección 4.4) sabemos que en cada subintervalo abierto x_k^* existe un número (x_{k-1}, x_k) tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \qquad \text{o bien,} \qquad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Al usar la última ecuación, $f(x_k) - f(x_{k-1})$ sustituimos en (1) y simplificamos:

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(x_k^*)]^2(x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2(1 + [f'(x_k^*)]^2)} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k. \end{aligned}$$

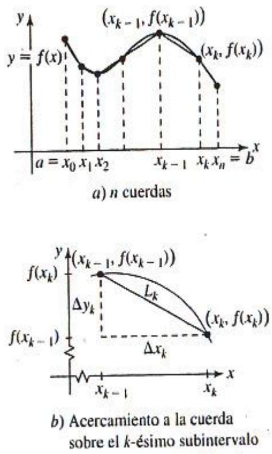


FIGURA 6.5.2 Aproximación de la longitud de una gráfica al sumar las longitudes de cuerdas

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k$$

representa la longitud de la curva poligonal que une $(a, f(a))$ y $(b, f(a))$, y proporciona una aproximación a la longitud total de la gráfica de $[a, b]$. Cuando $\|P\| \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (2)$$

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición de la longitud de la gráfica sobre el intervalo.

Definición 6.5.1 Longitud de arco

Sea f una función para la cual f' es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces la **longitud** L de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (3)$$

La fórmula para la longitud de arco (3) también se escribe como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (4)$$

Se dice que una gráfica que tiene longitud de arco es **rectificable**.

EJEMPLO 1 Longitud de una curva

Encuentre la longitud de la gráfica $y = 4x^{3/2}$ del origen $(0, 0)$ al punto $(1, 4)$.

Solución La gráfica de la función sobre el intervalo $[0, 1]$ se muestra en la FIGURA 6.5.3. Luego,

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{1/2}$$

es continua sobre el intervalo. En consecuencia, por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [6x^{1/2}]^2}\, dx \\ &= \int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}\, dx \\ &= \frac{1}{36}\int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}(36\, dx) \\ &= \frac{1}{54}(1 + 36x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{54}[37^{3/2} - 1] \approx 4.1493. \end{aligned}$$

■

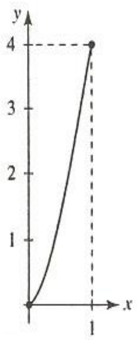


FIGURA 6.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1

Diferencial de longitud de arco Si C es una curva suave definida por $y = f(x)$, entonces la longitud de arco entre un punto inicial $(a, f(a))$ y un punto variable $(x, f(x))$, donde $a \le x \le b$, está dada por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt, \qquad (5)$$

donde t representa una variable de integración ficticia. Resulta evidente que el valor de la integral en (5) depende de x, por lo que se denomina **función de longitud de arco**. Luego, por (10) de la sección 5.5, $ds/dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y, en consecuencia,

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (6)$$

La última función se denomina **diferencial de la longitud de arco** y puede usarse para aproximar longitudes de curvas. Con $dy = f'(x)\,dx$, (6) puede escribirse como

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \text{o bien,} \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \tag{7}$$

En la FIGURA 6.5.4 se muestra que la diferencial ds puede interpretarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos dx y dy.

Si (3) se escribe $L = \int ds$ para abreviar y la curva C se define por $x = g(y)$, $c \le y \le d$, entonces la última expresión en (7) puede usarse para resolver ds/dy:

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \text{o} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

Por tanto, la integración con respecto a y análoga de (4) es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy. \tag{8}$$

Vea los problemas 17 y 18 en los ejercicios 6.5.

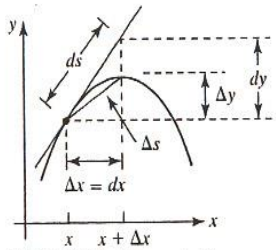


FIGURA 6.5.4 Interpretación geométrica de la diferencial de la longitud de arco

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, la integral en (3) lleva a problemas en los cuales se requieren técnicas especiales de integración. Vea el capítulo 7. Pero aun con estos procedimientos ulteriores, *no siempre* es posible evaluar la integral indefinida $\int\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ en términos de las conocidas funciones elementales, incluso para algunas de las funciones más simples como $y = x^2$. Vea el problema 45 en los ejercicios 7.8.

Ejercicios 6.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre la longitud de la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica.

1. $y = x$; $[-1, 1]$

2. $y = 2x + 1$; $[0, 3]$

3. $y = x^{3/2} + 4$; $[0, 1]$

4. $y = 3x^{2/3}$; $[1, 8]$

5. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$; $[1, 4]$

6. $(y + 1)^2 = 4(x + 1)^3$; $[-1, 0]$

7. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$; $[1, 4]$

8. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$; $[2, 4]$

9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$; $[2, 3]$

10. $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$; $[1, 2]$

11. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$; $[1, 8]$

12. $y = \begin{cases} x - 2, & 2 \le x < 3 \\ (x - 2)^{2/3}, & 3 \le x < 10; \\ \frac{1}{2}(x - 6)^{3/2}, & 10 \le x \le 15 \end{cases}$ $[2, 15]$

En los problemas 13-16 establezca, pero no evalúe, una integral para la longitud de la función dada sobre el intervalo indicado.

13. $y = x^2$; $[-1, 3]$

14. $y = 2\sqrt{x + 1}$; $[-1, 3]$

15. $y = \operatorname{sen} x$; $[0, \pi]$

16. $y = \tan x$; $[-\pi/4, \pi/4]$

En los problemas 17 y 18, use (8) para encontrar la longitud de la gráfica de la ecuación dada sobre el intervalo indicado.

17. $x = 4 - y^{2/3}$; $[0, 8]$

18. $5x = y^{5/2} + 5y^{-1/2}$; $[4, 9]$

19. Considere la longitud de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante.

a) Muestre que el uso de (3) conduce a un integrando discontinuo.

b) Suponga que el teorema fundamental del cálculo puede usarse para evaluar la integral obtenida en el inciso *a*) y encuentre la longitud total de la gráfica.

20. Establezca, pero no intente evaluar, una integral que proporcione la longitud total de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$.

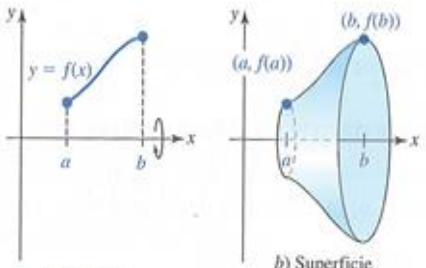
21. Dado que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, encuentre el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

22. Use la diferencial de la longitud de arco (6) para aproximar la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{4}x^4$ desde $(2, 4)$ hasta $(2.1, 4.862025)$. [*Sugerencia*: Revise (13) de la sección 4.9.]

6.6 Área de una superficie de revolución

Introducción Como se ha visto en las secciones 6.3 y 6.4, cuando una gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de revolución. En esta sección tenemos interés en encontrar el área S de la superficie correspondiente; es decir, una **superficie de revolución** sobre $[a, b]$ como se muestra en la FIGURA 6.6.1*b*).



a) Gráfica *b*) Superficie

FIGURA 6.6.1 Superficie de revolución

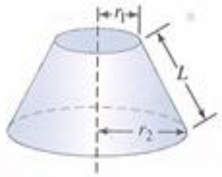


FIGURA 6.6.2 Tronco de un cono

Construcción de una integral Antes de construir una integral definida para la definición del área de una superficie de revolución, se requiere una fórmula para el área lateral (excluyendo las partes superior e inferior) de un *tronco* de un cono circular recto. Vea la FIGURA 6.6.2. Si r_1 y r_2 son los radios de las partes superior e inferior y L es la altura oblicua, entonces el área lateral está dada por

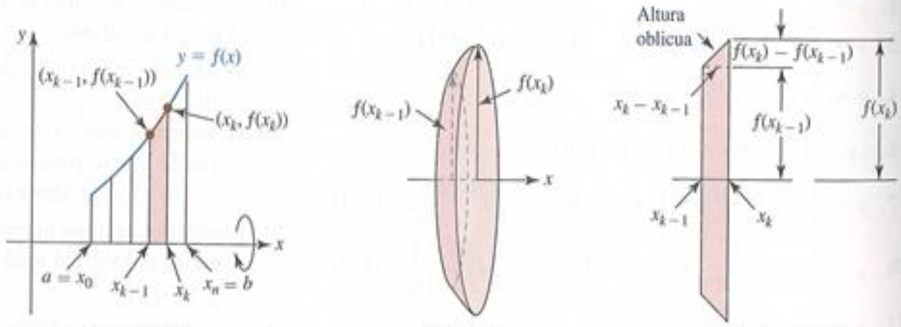
$$\pi(r_1 + r_2)L. \tag{1}$$

Vea el problema 17 en los ejercicios 6.6. Ahora suponga que $y = f(x)$ es una función suave y que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[a, b]$. Sea P una partición del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Luego, si unimos con una cuerda los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ mostrados en la FIGURA 6.6.3*a*), formamos un trapezoide. Cuando el trapezoide gira alrededor del eje x, genera un tronco de un cono con radios $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$. Vea la figura 6.6.3*b*). Como se muestra en la sección transversal en la figura 6.6.3*c*), la altura oblicua puede obtenerse a partir del teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$



a) Trapezoide *b*) Tronco *c*) Vista lateral del tronco

FIGURA 6.6.3 Aproximación del área de la superficie de revolución al sumar áreas de troncos

Así, por (1) el área superficial de este elemento es

$$\begin{aligned} S_k &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\,\Delta x_k, \end{aligned}$$

donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Esta última cantidad es una aproximación al área verdadera de la superficie de revolución sobre el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Luego, así como en el análisis de la longitud de arco, se invoca el teorema del valor medio para derivadas a fin de afirmar que en el intervalo abierto x_k^* hay un (x_{k-1}, x_k) tal que

$$f'(x_k^*) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \pi \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k$$

es una aproximación al área S sobre $[a, b]$. Esto sugiere que el área superficial S está dada por el límite de la suma de Riemann:

$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \pi \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Puesto que también se espera que $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$ tiendan al límite común $f(x)$ cuando $\|P\| \to 0$, tenemos $f(x_k) + f(x_{k-1}) \to 2f(x)$.

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición del área de la superficie de revolución sobre el intervalo.

Definición 6.6.1 Área de una superficie de revolución

Sean f una función para la cual f' es continua y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$. El **área** S de la superficie que se obtiene al girar la gráfica de f sobre el intervalo alrededor del eje x está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \qquad (3)$$

EJEMPLO 1 Área de una superficie

Encuentre el área S de la superficie que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje x.

Solución Se tiene $f(x) = x^{1/2}, f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$, y por (3)

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx \\
&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx \\
&= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\pi \int_1^4 (4x+1)^{1/2}(4\,dx) = \frac{1}{6}\pi(4x+1)^{3/2}\Big]_1^4 \\
&= \frac{1}{6}\pi[17^{3/2} - 5^{3/2}] \approx 30.85.
\end{aligned}$$

Vea la FIGURA 6.6.4. ■

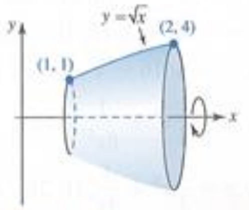


FIGURA 6.6.4 Superficie de revolución alrededor del eje x en el ejemplo 1

Revolución alrededor del eje *y* Es posible mostrar que si la gráfica de una función continua $y = f(x)$ sobre $[a, b]$, $0 \le a < b$, gira alrededor del eje y, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \qquad (4)$$

Así como en (3), en (4) se supone que $f'(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 2 Área de una superficie

Encuentre el área S de la superficie que se forma cuando la gráfica de $y = x^{1/3}$ sobre el intervalo $[0, 8]$ gira alrededor del eje y.

Solución Se tiene $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, de modo que por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^8 x\sqrt{1 + \frac{1}{9}x^{-4/3}}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^8 x\sqrt{\frac{9x^{4/3} + 1}{9x^{4/3}}}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^8 x^{1/3}\sqrt{9x^{4/3} + 1}\,dx. \end{aligned}$$

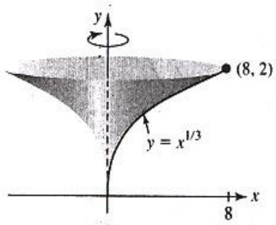


FIGURA 6.6.5 Superficie de revolución alrededor del eje y en el ejemplo 2

La última integral se evaluará al revisar el método de sustitución u. Si hacemos $u = 9x^{4/3} + 1$, entonces $du = 12x^{1/3}\,dx$, $dx = \frac{1}{12}x^{-1/3}\,du$, $x = 0$ implica $u = 1$, y $x = 8$ proporciona $u = 145$. En consecuencia,

$$S = \frac{1}{18}\pi \int_1^{145} u^{1/2}\,du = \frac{1}{27}\pi u^{3/2}\Big]_1^{145} = \frac{1}{27}\pi(145^{3/2} - 1^{3/2}) \approx 203.04.$$

Vea la FIGURA 6.6.5. ■

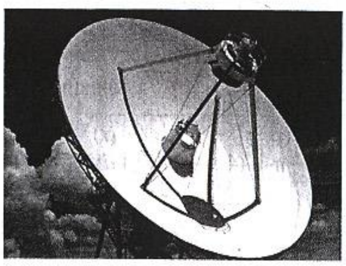
Ejercicios 6.6 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el área de la superficie que se forma al girar cada gráfica sobre el intervalo dado alrededor del eje indicado.

1. $y = 2\sqrt{x}$, $[0, 8]$; eje x
2. $y = \sqrt{x + 1}$, $[1, 5]$; eje x
3. $y = x^3$, $[0, 1]$; eje x
4. $y = x^{1/3}$, $[1, 8]$; eje y
5. $y = x^2 + 1$, $[0, 3]$; eje y
6. $y = 4 - x^2$, $[0, 2]$; eje y
7. $y = 2x + 1$, $[2, 7]$; eje x
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$, $[0, \sqrt{7}]$; eje y
9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$, $[1, 2]$; eje y
10. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$, $[1, 2]$; eje x
11. *a)* La forma de una antena de disco es una parábola que gira alrededor de un eje de simetría, denominada **paraboloide de revolución**. Encuentre el área superficial de una antena de radio r y profundidad h que obtenemos al girar la gráfica de $f(x) = r\sqrt{1 - x/h}$ alrededor del eje x. Vea la FIGURA 6.6.6.

    b) La profundidad de una antena de disco varía de 10 a 20% de su radio. Si la profundidad h de la antena del inciso *a)* es 10% del radio, muestre que el área superficial de la antena es aproximadamente la misma que el área de un círculo de radio r. ¿Cuál es el error porcentual en este caso?


Las antenas de disco son paraboloides de revolución

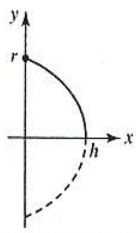


FIGURA 6.6.6 Gráfica de f en el problema 11

12. La superficie formada por dos planos paralelos que cortan una esfera de radio r se denomina **zona esférica**. Encuentre el área de la zona esférica que se muestra en la FIGURA 6.6.7.

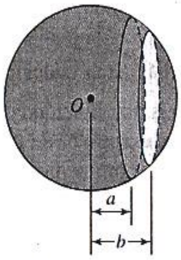


FIGURA 6.6.7 Zona esférica en el problema 12

13. La gráfica de $y = |x + 2|$ sobre $[-4, 2]$, mostrada en la FIGURA 6.6.8, gira alrededor del eje x. Encuentre el área S de la superficie de revolución.

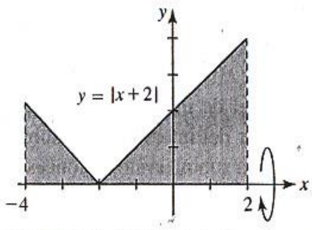


FIGURA 6.6.8 Gráfica de la función en el problema 13

14. Encuentre el área de superficie que se forma al girar $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $[-a, a]$, alrededor del eje x.

≡ Piense en ello

15. Demuestre que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura oblicua L es πrL. [*Sugerencia*: Cuando un cono se corta por el lado y se aplana forma un sector circular con área $\frac{1}{2}L^2\theta$.]

16. Use el problema 15 para mostrar que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura h está dada por $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Obtenga el mismo resultado usando (3) o (4).

17. Use el problema 15 para obtener la fórmula (1). [*Sugerencia*: Considere un cono completo de radio r_2 y altura oblicua L_2. Corte la parte cónica superior. Puede ser de ayuda considerar triángulos semejantes.]

18. Muestre que el área superficial del tronco de un cono circular recto de radios r_1 y r_2 y altura h está dada por $\pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

19. Sea $y = f(x)$ una función no negativa continua sobre $[a, b]$ cuya primera derivada es continua sobre el intervalo. Demuestre que si la gráfica de f gira alrededor de una recta horizontal $y = L$, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x) - L|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

20. Use el resultado del problema 19 para encontrar una integral definida que proporcione el área de la superficie que se forma al girar $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$, alrededor de la recta $y = 4$. No evalúe.

≡ Proyectos

21. Una vista desde el espacio

a) Desde una nave espacial en órbita alrededor de la Tierra a una distancia h de la superficie terrestre, un astronauta puede observar sólo una porción A_s del área total del área superficial de la Tierra, A_e. Vea la FIGURA 6.6.9*a*). Encuentre una fórmula para la expresión fraccionaria A_s/A_e como una función de h. En la figura 6.6.9*b*) se muestra la Tierra en sección transversal como un círculo con centro C y radio R. Sean los ejes x y y como se muestra y sean y_B y $y_E = R$ las coordenadas y de los puntos B y E, respectivamente.

b) ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra ve un astronauta desde una altura de 2 000 km? Considere que el radio terrestre es $R = 6\,380$ km.

c) ¿A qué altura h el astronauta ve un cuarto de la superficie de la Tierra?

d) ¿Cuál es el límite de A_s/A_e cuando la altura h crece sin cota ($h \to \infty$)? ¿Por qué la respuesta tiene sentido intuitivo?

e) ¿Qué porcentaje de la superficie terrestre ve un astronauta desde la Luna si $h = 3.76 \times 10^5$ km?

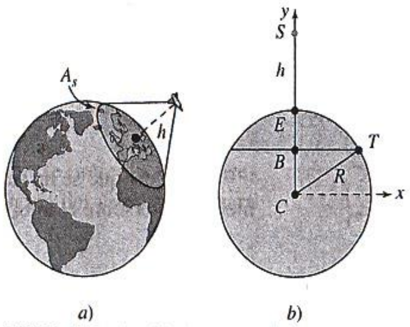


FIGURA 6.6.9 Porción de la superficie terrestre en el problema 21

6.7 Valor promedio de una función

Introducción Todos los estudiantes saben qué es un promedio. Si un estudiante presenta cuatro exámenes en un semestre y sus calificaciones porcentuales son 80, 75, 85 y 92%, entonces su promedio puntaje es

$$\frac{80 + 75 + 85 + 92}{4}$$

Balotario de Ejercicios Nº 11

Integrales impropias. Definición. Integrales impropias con límites de integración infinitos. Integrales impropias con discontinuidades infinitas

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 415, 418, 421 y 422

71. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = e^x$ sobre el intervalo $[0, \ln 2]$. [*Sugerencia*: Evalúe la integral empezando con una sustitución.]

72. Explique por qué una descomposición en fracciones parciales podría ser innecesaria o inadecuada para la integral dada. Analice cómo es posible evaluar estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx$ ***b***) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+4}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+5)^2}\,dx$ ***d***) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}\,dx$

73. Aunque para evaluar

$$\int \frac{x^5}{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}\,dx$$

puede usarse descomposición en fracciones parciales, sería necesario resolver 20 ecuaciones en 20 incógnitas. Evalúe la integral usando una técnica de integración más sencilla.

74. ¿Por qué la respuesta al problema 53 podría obtenerse *sin ningún trabajo*?

7.7 Integrales impropias

Introducción Hasta el momento, en el estudio de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, entendíamos que

- los límites de integración eran números finitos, y que
- la función f era *continua* sobre $[a, b]$ o, en caso de ser discontinua, que estaba *acotada* sobre el intervalo.

Cuando se omite una de estas dos condiciones, se dice que la integral resultante es una **integral impropia**. En el siguiente análisis, primero consideramos integrales de funciones que están definidas y son continuas sobre intervalos no acotados; en otras palabras,

- por lo menos uno de los límites de integración es ∞ o $-\infty$.

Después de eso examinamos integrales sobre intervalos acotados de funciones que se vuelven no acotadas sobre un intervalo. En el segundo tipo de integral impropia,

- el integrando f tiene una *discontinuidad infinita* en algún número en el intervalo de integración.

Integrales impropias: intervalos no acotados Si el integrando f está definido sobre un intervalo no acotado, hay tres **integrales impropias** posibles con límites de integración infinitos. Sus definiciones se resumen como sigue:

Definición 7.7.1 Intervalos no acotados

i) Si f es continua sobre $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

ii) Si f es continua sobre $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

iii) Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Cuando los límites (1) y (2) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, se dice que las integrales **divergen**. En (3) la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge en el supuesto de que *ambas* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ y $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ convergen. Si cualquiera de $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ o $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

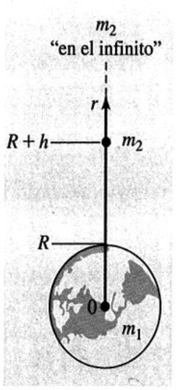


FIGURA 7.7.2 Masa m_2 levantada hasta el "infinito" en el ejemplo 8

donde R es el radio del planeta. Así, la cantidad de trabajo realizado para levantar m_2 hasta una distancia ilimitada o "infinita" desde la superficie del planeta es

$$\begin{aligned} W &= \int_R^{\infty} \frac{km_1m_2}{r^2}\,dr \\ &= km_1m_2 \lim_{b\to\infty} \int_R^b r^{-2}\,dr \\ &= km_1m_2 \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{R}\right] \\ &= \frac{km_1m_2}{R}. \end{aligned}$$

Vea la **FIGURA 7.7.2**. A partir de los datos en el ejemplo 2 de la sección 6.8 se concluye que el trabajo realizado para levantar una carga útil de 5 000 kg hasta una "distancia infinita" desde la superficie terrestre es

$$W = \frac{(6.67\times 10^{-11})(6.0\times 10^{24})(5\,000)}{6.4\times 10^{6}} \approx 3.13\times 10^{11} \text{ joules.}$$

Recuerde que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Además, si $F'(x) = f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo, no es posible evaluar una integral como

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \tag{4}$$

mediante el mismo procedimiento, puesto que $f(x) = 1/x^2$ tiene una discontinuidad infinita en $[-2, 1]$. Vea la **FIGURA 7.7.3**. En otras palabras, para la integral en (4), el "procedimiento"

$$-x^{-1}\Big]_{-2}^{1} = (-1) - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

carece de sentido. Por tanto, se tiene otro tipo de integral que demanda un tratamiento especial.

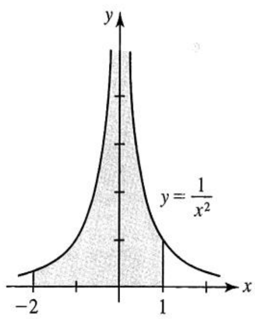


FIGURA 7.7.3 $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = 1/x^2$

Integrales impropias: discontinuidades infinitas De una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ también se dice que es **impropia** si f no está acotada sobre $[a, b]$, es decir, si f tiene una discontinuidad infinita en algún número en el intervalo de integración. Hay tres **integrales impropias** posibles de este tipo. Sus definiciones se resumen a continuación.

Definición 7.7.2 Discontinuidades infinitas

i) Si f es continua sobre $[a, b)$ y $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to b^-$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx. \tag{5}$$

ii) Si f es continua sobre $(a, b]$ y $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^+$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s\to a^+} \int_s^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

iii) Si $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to c$ para alguna c en (a, b) y f es continua en todos los demás números en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Cuando los límites en (5) y (6) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, entonces se dice que la integral **diverge**. En (7) la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge siempre que *ambas* $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ convergen. Si cualquiera de $\int_a^c f(x)\,dx$ o $\int_c^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

iii) Para ejemplos, problemas y gráficas como la figura 7.7.1, los estudiantes a menudo quedan con la impresión de que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ es una condición necesaria para que la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converja. Esto no es así. Cuando llegue a los ejercicios 9.3 trabaje el problema 70.

iv) Es posible que una integral tenga límites de integración infinitos y un integrando con una discontinuidad infinita. Para determinar si una integral como

$$\underset{\text{el integrando es discontinuo en } x=1 \to}{\overset{\text{límite infinito} \to}{}} \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

converge, la integración se interrumpe en algún punto de continuidad conveniente del integrando; por ejemplo, $x = 2$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = I_1 + I_2. \qquad (9)$$

I_1 e I_2 son integrales impropias; I_1 es del tipo dado en (6) e I_2 es del tipo dado en (1). Si ambas I_1 *e* I_2 convergen, entonces la integral original converge. Vea los problemas 85 y 86 en los ejercicios 7.7.

v) El integrando de $\int_a^b f(x)\,dx$ también puede tener discontinuidades infinitas tanto en $x = a$ como en $x = b$. En este caso la integral impropia se define en forma análoga a (7). Si un integrando f tiene una discontinuidad infinita en varios números en (a, b), entonces la integral impropia se define mediante una extensión natural de (7). Vea los problemas 87 y 88 en los ejercicios 7.7.

vi) Algunas veces ocurren cosas raras cuando se trabaja con integrales impropias. Es posible girar una región con área infinita alrededor de un eje y el volumen resultante del sólido de revolución puede ser finito. Un ejemplo bastante famoso de esta clase se proporciona en el problema 89 de los ejercicios 7.7.

Ejercicios 7.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

1. $\int_3^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$

2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

3. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$

4. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.01}}\,dx$

5. $\int_{-\infty}^3 e^{2x}\,dx$

6. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx$

7. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

8. $\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

9. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

10. $\int_e^\infty \ln x\,dx$

11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

13. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx$

14. $\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{3x+1}}\,dx$

15. $\int_2^\infty ue^{-u}\,du$

16. $\int_{-\infty}^3 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

17. $\int_{2/\pi}^\infty \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}\,dx$

18. $\int_{-\infty}^\infty te^{-t^2}\,dt$

19. $\int_{-1}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

20. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

21. $\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$

22. $\int_{-\infty}^0 e^x \cos 2x\,dx$

23. $\int_{1/2}^\infty \frac{x+1}{x^3}\,dx$

24. $\int_0^\infty (e^{-x} - e^{-2x})^2\,dx$

25. $\int_1^\infty \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx$

26. $\int_3^\infty \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+9}\right]dx$

27. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx$

28. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

29. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$

30. $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

En los problemas 31-52, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

31. $\int_0^5 \frac{1}{x}\,dx$

32. $\int_0^8 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$

33. $\int_0^1 \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.01}}\,dx$

35. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

36. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

37. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{5/3}}\, dx$

38. $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx$

39. $\int_{0}^{2} (x-1)^{-2/3}\, dx$

40. $\int_{0}^{27} \frac{e^{x^{1/3}}}{x^{2/3}}\, dx$

41. $\int_{0}^{1} x \ln x\, dx$

42. $\int_{1}^{e} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

43. $\int_{0}^{\pi/2} \tan t\, dt$

44. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{\tan \theta}}\, d\theta$

45. $\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\, dx$

46. $\int_{0}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\, dx$

47. $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$

48. $\int_{0}^{3} \frac{1}{x^2-1}\, dx$

49. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

50. $\int_{0}^{2} \frac{e^w}{\sqrt{e^w-1}}\, dw$

51. $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\, dx$

52. $\int_{0}^{1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right] dx$

En los problemas 53 y 54, use una sustitución para evaluar la integral dada.

53. $\int_{12}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+4)}\, dx$

54. $\int_{1}^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$

☰ Repaso de aplicaciones

En los problemas 55-58, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.

55. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$; $[1, \infty)$

56. $f(x) = \frac{10}{x^2+25}$; $(-\infty, 5]$

57. $f(x) = e^{-|x|}$; $(-\infty, \infty)$

58. $f(x) = |x|^3 e^{-x^4}$; $(-\infty, \infty)$

59. Encuentre el área de la región que está acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x-1}$ y $y = -1/\sqrt{x-1}$ sobre el intervalo $[1, 5]$.

60. Considere la región que está acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x+2}$ y $y = 0$ sobre el intervalo $[-2, 1]$.

a) Demuestre que el área de la región es finita.

b) Demuestre que el sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje x tiene volumen infinito.

61. Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

Determine si el área de la región acotada por estas gráficas sobre el intervalo $[0, 1]$ es finita.

62. Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = xe^{-x}$ y $y = 0$ sobre $[0, \infty)$ alrededor del eje x.

63. Encuentre el trabajo realizado contra la gravedad al levantar una carga de 10 000 kg hasta una distancia infinita por arriba de la superficie de la Luna. [*Sugerencia:* Revise la página 357 de la sección 6.8.]

64. El trabajo realizado por una fuerza externa para mover una prueba de carga q_0 radialmente desde el punto A hasta el punto B en el campo eléctrico de una carga q se define como

$$W = -\frac{qq_0}{4\pi e_0}\int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\, dr.$$

Vea la FIGURA 7.7.7.

a) Demuestre que $W = \frac{qq_0}{4\pi e_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$.

b) Encuentre el trabajo realizado para llevar la carga de prueba hasta una distancia infinita del punto B.

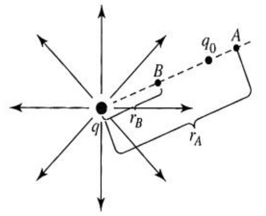


FIGURA 7.7.7 Carga en el problema 64

La **transformada de Laplace** de una función $y = f(x)$, definida por la integral

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$$

es muy útil en algunas áreas de las matemáticas aplicadas. En los problemas 65-72, encuentre la transformada de Laplace de la función e imponga una restricción sobre s para la cual la integral converja.

65. $f(x) = 1$

66. $f(x) = x$

67. $f(x) = e^x$

68. $f(x) = e^{-5x}$

69. $f(x) = \operatorname{sen} x$

70. $f(x) = \cos 2x$

71. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

72. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 3 \\ e^{-x}, & x \ge 3 \end{cases}$

73. Una **función de densidad de probabilidad** es cualquier función no negativa f definida sobre un intervalo $[a, b]$ para la cual $\int_a^b f(x)\, dx = 1$. Compruebe que para $k > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ke^{-kx}, & x \ge 0 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

74. Otra integral de matemáticas aplicadas es la **función gamma**:

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \qquad x > 0.$$

a) Demuestre que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

b) Use el resultado en el inciso *a)* para demostrar que

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!,$$

donde el símbolo $n!$ se lee "n factorial". Debido a esta propiedad, la función gamma se denomina **función factorial generalizada**.

CUARTA UNIDAD

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Balotario de Ejercicios Nº 12

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Compilado y adaptado de:

Dennis G. Zill y Warren S. Cálculo de una Variable: Trascendentes Tempranas. Cuarta edición. Mc Graw Hill. China. Pag.: 440, 441, 442, 444, 445, 446, 447, 448 y 449

8.1 Ecuaciones separables

Introducción En varios conjuntos de ejercicios previos se pidió comprobar que una función dada satisface una **ecuación diferencial**. En términos generales, una ecuación diferencial es una ecuación que implica una función y desconocida y una o más derivadas de y. Las ecuaciones diferenciales se clasifican por el **orden** de la derivada más alta que aparece en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{derivada de orden más alto}} + 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0 \tag{1}$$

Por supuesto, a menudo se usan símbolos diferentes. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \text{sen } 2t$$

también es una ecuación diferencial de segundo orden.

es un ejemplo de ecuación diferencial de **segundo orden**, mientras que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{2}$$

es una ecuación diferencial de **primer orden**. Al usar la notación "primada", las ecuaciones diferenciales en (1) y (2) pueden escribirse como $y'' + 4y' + 8y = 0$ y $y' = -x/y$, respectivamente. Aunque esta notación es más fácil de escribir e imprimir, la notación de Leibniz usada en (1) y (2) suele preferirse a menudo porque muestra con claridad la variable independiente.

La exploración del tema de las ecuaciones diferenciales suele comenzar con el estudio de cómo *resolverlas*. Una **solución** de una ecuación diferencial es una función $y(x)$ suficientemente diferenciable, definida de manera explícita o implícita que, cuando se sustituye en la ecuación, se reduce a una identidad sobre algún intervalo. La forma natural de denominar la gráfica $y(x)$ es **curva solución**.

Como se mencionó al inicio del capítulo, aquí estudiaremos métodos de solución y algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales de *primer orden*. A partir de este momento establecemos la hipótesis de que una ecuación diferencial se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{3}$$

Las funciones de dos variables se analizarán en detalle en el capítulo 13.

donde F es una función de dos variables x y y. La función F se denomina **función pendiente** y (3) se denomina **forma normal** de la ecuación diferencial. En un punto (x, y) sobre la curva solución de la ecuación diferencial, el valor $F(x, y)$ proporciona la pendiente de una recta tangente.

Una definición En la sección 5.1 ya se ha resuelto un tipo simple de ecuación diferencial de primer orden. Recuerde que la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{4}$$

puede resolverse al encontrar la antiderivada más general de g; es decir,

$$y = \int g(x)\,dx.$$

Por ejemplo, una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = 2x + e^{-3x}$$

está dada por

$$y = \int (2x + e^{-3x})\,dx = x^2 - \frac{1}{3}e^{-3x} + C.$$

Ecuaciones de la forma en (4) son justo un caso especial de una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = F(x, y)$, donde la función F se puede factorizar en un producto de una función x por una función de y.

Definición 8.1.1 Ecuación diferencial separable

Se dice que una **ecuación diferencial separable de primer orden** es cualquier ecuación $dy/dx = F(x, y)$ que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y). \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Una ecuación diferencial separable

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{6}$$

es separable, puesto que el miembro derecho de la igualdad puede reescribirse de nuevo como el producto de una función de x por una función de y:

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{-x}^{g(x)} \cdot \overbrace{\frac{1}{y}}^{f(y)}.$$

■

Observe que cuando $f(y) = 1$ en (5) se obtiene (4). De manera análoga a las ecuaciones diferenciales de la forma (4), una ecuación diferencial separable también puede resolverse por integración.

Antes de resolver una ecuación separable, la reescribimos en términos de diferenciales; por ejemplo, la ecuación (6) puede escribirse en la forma diferencial

$$y\,dy = -x\,dx.$$

Asimismo, al dividir entre $f(y)$, (5) puede volver a escribirse como

$$p(y)\,dy = g(x)\,dx,$$

donde por razones de conveniencia en la notación hemos escrito $p(y) = 1/f(y)$. Luego, si $y = \phi(x)$ denota una solución de (5), debemos tener

$$p(\phi(x))\,\phi'(x) = g(x)$$

y entonces, por integración,

$$\int p(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int g(x)\,dx. \tag{7}$$

Pero $dy = \phi'(x)\,dx$, de modo que (7) es lo mismo que

$$\int p(y)\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \text{o bien,} \qquad H(y) = G(x) + C,$$

donde $H(y)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $p(y) = 1/f(y)$ y $g(x)$, respectivamente, y C es una constante. Puesto que C es arbitraria, $H(y) = G(x) + C$ representa una **familia de soluciones de un parámetro**. El parámetro es la constante arbitraria C.

Nota: En la integración de una ecuación separable no es necesario usar dos constantes, porque si se escribe $H(y) + C_1 = G(x) + C_2$, entonces la diferencia $C_2 - C_1$ puede sustituirse por una sola constante C.

A continuación resumimos el análisis.

Directrices para resolver una ecuación diferencial separable

i) Primero, determine si una ecuación diferencial de primer orden es en realidad separable. Es decir, ¿la ecuación diferencial puede escribirse en la forma dada en (5)?

ii) Si la ecuación diferencial es separable, entonces vuelva a escribirla en forma diferencial:

$$p(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

iii) Integre ambos miembros de la forma diferencial. Integre el miembro izquierdo con respecto a y y el miembro derecho con respecto a x.

Antes de ilustrar el método de solución presentado, debe saber que muchas ecuaciones diferenciales de primer orden no son separables. Por ejemplo, ninguna de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$$

es separable.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación diferencial separable

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

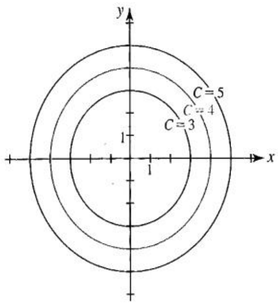


FIGURA 8.1.1 Familia de círculos en el ejemplo 2

Solución La ecuación diferencial dada se vuelve a escribir en la forma

$$y\,dy = -x\,dx$$

y al integrar ambos miembros se obtiene

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

Así, una familia de soluciones de un parámetro está definida por $x^2 + y^2 = C^2$. Aquí se ha escogido sustituir la constante arbitraria $2C_1$ por C^2 porque la ecuación $x^2 + y^2 = C^2$ representa una familia de círculos centrados en el origen con radio $C > 0$. Vea la FIGURA 8.1.1.

Las soluciones de la ecuación diferencial son las funciones definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = C^2$, $C > 0$. ■

Problema con valor inicial A menudo tenemos interés por resolver una ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = F(x, y)$ sujeta a una condición lateral prescrita $y(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son números reales arbitrarios especificados de manera arbitraria. El problema

$$\textit{Resolver:} \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0$$

se denomina **problema con valor inicial (PVI)**. La condición lateral $y(x_0) = y_0$ se denomina **condición inicial**. En términos geométricos, se está buscando por lo menos una solución de la ecuación diferencial sobre un intervalo I que contiene a x_0 tal que la curva solución pase por el punto (x_0, y_0). Desde un punto de vista práctico, a menudo esto conlleva al problema de determinar un valor específico de la constante C en una familia de soluciones.

EJEMPLO 3 Un problema con valor inicial

Resuelva el problema con valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, $\;y(4) = -3$.

Solución Por el ejemplo 2, una familia de soluciones para la ecuación diferencial dada es $x^2 + y^2 = C^2$. Cuando $x = 4$, entonces, $y = -3$, de modo que con $16 + 9 = C^2$ se obtiene $C = 5$. Por tanto, el PVI determina $x^2 + y^2 = 25$. Es a causa de su sencillez que podemos resolver la última ecuación para una función o solución explícita que satisface la condición inicial. Al despejar y se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Ya que la gráfica debe ser la de una función y la gráfica de esta función debe contener al punto $(4, -3)$, debemos tomar la raíz cuadrada negativa. En otras palabras, la solución es $y = -\sqrt{25 - x^2}$ definida sobre el intervalo $(-5, 5)$. En la figura 8.1.1, la curva solución es el semicírculo inferior del círculo que se muestra en azul. ■

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C_1$$
$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x+C_1} = e^{C_1}e^x$$
$$\frac{y}{1-y} = C_2e^x. \quad \leftarrow C_2 = \pm e^{C_1}$$

Al resolver para y se obtiene

$$y = \frac{C_2e^x}{1+C_2e^x} \qquad \text{o bien,} \qquad y = \frac{1}{1+Ce^{-x}}, \tag{9}$$

donde hemos sustituido $1/C_2$ por C. Luego, al sustituir $x = 0$ y $y = \frac{1}{3}$ en la última ecuación se llega a $C = 2$. La solución del problema con valor inicial es

$$y = \frac{1}{1+2e^{-x}}. \tag{10}$$

En la FIGURA 8.1.2 se ilustran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones dadas en (9) para valores positivos y negativos de C. Las gráficas a color representan soluciones de esa ecuación diferencial que están definidas sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. La gráfica de la solución dada en (10) es la curva azul en la figura. ■

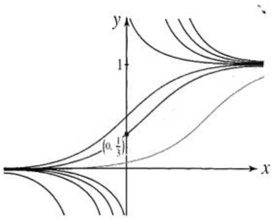


FIGURA 8.1.2 Familia de curvas solución en el ejemplo 6

Ejercicios 8.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-20, resuelva por separación de variables la ecuación diferencial dada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$

2. $\dfrac{dy}{dt} = (t+1)^2$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{5y^4}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{1+x}{1+y}\right)^2$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+5x^2}{x^2 \operatorname{sen} y}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = y^3 \cos x$

9. $x\dfrac{dy}{dx} = 4y$

10. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

12. $e^xy\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

13. $\left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2\dfrac{dy}{dx} = y\ln x$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

15. $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

16. $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q-70)$

17. $\dfrac{dP}{dt} = 5P - P^2$

18. $\dfrac{dX}{dt} = (10-X)(50-X)$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$

En los problemas 21-26, resuelva el problema con valor inicial dado.

21. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(xy)^2}, \quad y(1) = 3$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+\sec^2 x}{2y}, \quad y(0) = -2$

23. $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2+1), \quad x(\pi/4) = 1$

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}, \quad y(2) = 2$

25. $x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$

26. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \dfrac{5}{2}$

En los problemas 27 y 28, resuelva el problema con valor inicial dado. Escriba la solución como una función *algebraica* explícita $y = f(x)$ (vea las *Notas desde el aula* en la sección 1.3). Quizá sea necesario usar una identidad trigonométrica.

27. $\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

28. $(1+x^4)\dfrac{dy}{dx} + x + 4xy^2 = 0, \quad y(1) = 0$

En los problemas 29-32, use el hecho de que $y = k$ sobre $(-\infty, \infty)$ es una función constante si y sólo si $dy/dx = 0$ para determinar si la ecuación diferencial dada tiene soluciones constantes. Resuelva la ecuación diferencial dada. Suponga que k es cualquier número real.

29. $x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 18$

30. $2\dfrac{dy}{dx} = 5y + 40$

31. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y - 20$

32. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 2y + 4$

En los problemas 33 y 34, proceda como en los problemas 29-32 para determinar si la ecuación diferencial dada tiene soluciones constantes. Resuelva la ecuación diferencial y luego encuentre una solución cuya gráfica pase por el punto indicado.

33. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$,

a) (0, 1) *b*) (0, 0) *c*) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

34. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 9$,

a) (0, 0) *b*) (0, 3) *c*) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Piense en ello

35. Sin resolver, explique por qué el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0$$

no tiene solución para $y_0 < 0$.

36. Una solución de una ecuación diferencial que no es miembro de la familia de soluciones de la ecuación se denomina **solución singular**. Vuelva a analizar los problemas 29, 31, 33 y 34 y encuentre cualquier solución singular. En el ejemplo 6, ¿cuál sería la solución del PVI si la condición inicial cambia a $y(0) = 1$?

37. En el ejemplo 3 se afirmó que la solución $y = -\sqrt{25 - x^2}$ está definida sobre el intervalo $(-5, 5)$. ¿Por qué sería incorrecto decir que la solución está definida sobre el intervalo cerrado $[-5, 5]$?

8.2 Ecuaciones lineales

Introducción Continuamos la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden al examinar ecuaciones lineales. Las ecuaciones diferenciales lineales constituyen una familia especialmente "amigable" de ecuaciones diferenciales en el sentido de que, dada una ecuación lineal, ya sea de primer orden o de orden superior, siempre hay una posibilidad aceptable de encontrar alguna clase de solución de la ecuación que se busque. Las ecuaciones diferenciales no lineales, especialmente las ecuaciones de orden mayor que o igual a dos, a menudo son imposibles de resolver en términos de funciones elementales.

La técnica para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden, como una ecuación separable, consiste en la integración; pero se integra sólo después que la ecuación original se ha multiplicado por una función especial denominada *factor de integración*.

Una definición Empezamos con la definición de ecuación lineal de primer orden. Cuando lea la siguiente definición tenga en cuenta las siguientes propiedades esenciales:

- En una ecuación diferencial lineal la variable dependiente y su derivada son de primer grado; es decir, la potencia de cada término que implica a la variable dependiente es 1, y cada coeficiente depende cuando mucho de una sola variable independiente.

Definición 8.3.1 Ecuación lineal

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación $dy/dx = F(x, y)$ que puede plantearse en la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{1}$$

Por supuesto, las funciones $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ en (1) pueden ser constantes.

Si una ecuación diferencial de primer orden no es lineal, se dice que es **no lineal**.

EJEMPLO 1 Lineal/no lineal

a) Por comparación directa con (1), vemos que las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 6 \quad \text{y} \quad x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$$

son ecuaciones diferenciales de primer orden.

b) Las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son no lineales:

$$x\frac{dy}{dx} = \overset{\text{la potencia no es 1}}{\overset{\downarrow}{y^2}} \quad \text{y} \quad \overset{\text{el coeficiente depende de } y}{\overset{\downarrow}{y}}\frac{dy}{dx} = 2y + \cos x.$$

■

Es importante observar que no toda ecuación diferencial de primer orden puede resolverse por el método de separación de variables. La ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x$$

no es separable. Por tanto, se requiere un nuevo procedimiento para resolver ecuaciones lineales.

Forma normal o estándar Al dividir (1) entre el coeficiente principal $a_1(x)$ se obtiene la siguiente forma más útil de una ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \qquad (2)$$

La ecuación (2) se denomina **forma normal** o **estándar** de una ecuación diferencial lineal (1). Buscamos soluciones de (2) sobre un intervalo I para el cual P y f sean continuas. La ecuación (2) tiene la propiedad de que cuando se multiplica por la función $e^{\int P(x)\,dx}$, el miembro izquierdo de (2) se convierte en la derivada del producto $e^{\int P(x)\,dx}y$. Para ver esto, observemos que la regla del producto y la regla de la cadena proporcionan

Por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int P(x)\,dx}\frac{d}{dx}\int P(x)\,dx = e^{\int P(x)\,dx}P(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}e^{\int P(x)\,dx}\\ &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y.\end{aligned} \qquad (3)$$

Por tanto, si ambos miembros de (2) se multiplican por $e^{\int P(x)\,dx}$, obtenemos

$$\overbrace{e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y}^{\text{Esto es } \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right]} = e^{\int P(x)\,dx}f(x).$$

Al comparar el miembro izquierdo de la última ecuación con el resultado en (3), se concluye que la última ecuación es lo mismo que

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}f(x). \qquad (4)$$

La forma de la ecuación (4) constituye la clave para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Podemos simplemente integrar ambos miembros de (4) con respecto a x. La función $e^{\int P(x)\,dx}$ que hace posible esto se denomina **factor de integración** para la ecuación diferencial. A continuación se presenta el procedimiento.

Directrices para resolver ecuaciones diferenciales lineales

i) Escriba la ecuación dada en la forma normal (2); es decir, por división haga que el coeficiente de dy/dx sea la unidad.

ii) Identifique $P(x)$ (el coeficiente de y) y encuentre el factor de integración

$$e^{\int P(x)\,dx}.$$

iii) Multiplique la ecuación obtenida en el paso *i*) por el factor de integración.

iv) El miembro izquierdo de la ecuación en el paso *iii*) es la derivada del factor de integración y la variable dependiente:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}f(x).$$

v) Integre ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso *iv*).

En la sección 8.1 resolvimos la ecuación $dy/dx - ky = 0$ por separación de variables, pero puesto que la ecuación diferencial es lineal, también es posible resolverla con el procedimiento anterior.

EJEMPLO 2 Uso de un factor de integración

La ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0,$$

k una constante, ya está en forma normal (2). Al identificar $P(x) = -k$, el factor de integración es $e^{\int(-k)dx} = e^{-kx}$ y, después de multiplicar la ecuación por este factor, vemos que

$$e^{-kx}\frac{dy}{dx} - ke^{-kx}y = 0 \cdot e^{-kx} \qquad \text{es lo mismo que} \qquad \frac{d}{dx}[e^{-kx}y] = 0.$$

◀ Es necesario usar una constante de integración para calcular $e^{\int P(x)\,dx}$.

Al integrar ambos miembros de la última ecuación con respecto a x, con

$$\int \frac{d}{dx}[e^{-kx}y]\,dx = \int 0\,dx$$

obtenemos $e^{-kx}y = C$. A partir de esta última expresión obtenemos la misma familia de soluciones $y = Ce^{kx}$ que en el ejemplo 4 de la sección 8.1. ■

Recuerde que en el análisis de (2) se afirmó que se buscaba una solución de una ecuación lineal sobre un intervalo I para el cual P y f fueran continuas. A medida que usted trabaje el siguiente ejemplo, observe que P y f son continuas sobre el intervalo $(0, \infty)$.

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación diferencial lineal sobre un intervalo

Resuelva $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

Solución Al dividir entre x obtenemos la forma normal

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x. \qquad (5)$$

A partir de esta forma es posible identificar $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5e^x$ y observar que P y f son continuas para $x > 0$, es decir, sobre $(0, \infty)$. Por tanto, el factor de integración es

puede usarse $\ln x$ en lugar de $\ln|x|$ porque $x > 0$

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

◀ La identidad $e^{\ln N} = N$ es útil para calcular el factor de integración.

Luego, (5) se multiplica por x^{-4},

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x \qquad \text{y obtenemos} \qquad \frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x.$$

Al usar integración por partes en el miembro derecho de

$$\int \frac{d}{dx}[x^{-4}y]\,dx = \int xe^x\,dx$$

obtenemos la solución definida sobre $(0, \infty)$:

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + C \qquad \text{o bien,} \qquad y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4.$$ ■

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación diferencial lineal sobre un intervalo

Resuelva $(x^2 - 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

Solución La ecuación se escribe en forma normal

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 - 9}y = 0 \qquad (6)$$

y se identifica $P(x) = x/(x^2 - 9)$. Aunque P es continua sobre $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y sobre $(3, \infty)$, esta ecuación se resolverá sobre los intervalos primero y tercero. Sobre estos intervalos, el factor de integración es

$$e^{\int x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\int 2x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2-9)} = e^{\ln\sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9}.$$

Luego de multiplicar la forma normal (6) por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2-9}\,y\right] = 0 \qquad \text{y al integrar se obtiene} \qquad \sqrt{x^2-9}\,y = C.$$

Para $(-\infty, -3)$ o para $(3, \infty)$, la solución de la ecuación es $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2-9}}$. ■

EJEMPLO 5 Problema con valor inicial

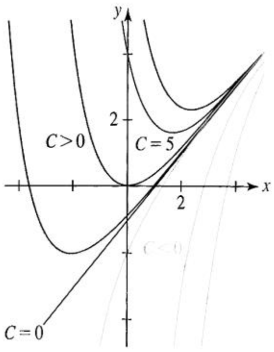


FIGURA 8.2.1 Familia de curvas solución en el ejemplo 5. La solución del PVI se muestra en azul.

Resuelva el problema con valor inicial $\dfrac{dy}{dx} + y = x$, $y(0) = 4$.

Solución La ecuación ya está en forma normal, y $P(x) = 1$ y $f(x) = 1$ son continuas sobre $(-\infty, \infty)$. El factor de integración es $e^{\int dx} = e^x$, de modo que al integrar

$$\frac{d}{dx}[e^x y] = xe^x$$

obtenemos $e^x y = xe^x - e^x + C$. Al resolver esta última ecuación para y obtenemos la familia de soluciones

$$y = x - 1 + Ce^{-x}. \tag{7}$$

Pero por la condición inicial se sabe que $y = 4$ cuando $x = 0$. La sustitución de estos valores en (7) implica $C = 5$. Por tanto, la solución del problema sobre $(-\infty, \infty)$ es $y = x - 1 + 5e^{-x}$ y es la curva azul que se muestra en la **FIGURA 8.2.1**. ■

Resulta interesante observar que cuando x se vuelve sin límite en la dirección positiva, la gráfica de *todos* los miembros de la familia de soluciones (7) para $C > 0$ o $C < 0$ están próximos a la gráfica de $y = x - 1$, que se muestra en negro en la figura 8.2.1. En efecto, $y = x - 1$ es la solución de la ecuación diferencial en el ejemplo 5 que corresponde a $C = 0$ en (7). Este comportamiento asintótico puede atribuirse al hecho de que el término Ce^{-x} en (7) se vuelve despreciable para valores crecientes de x; es decir, $e^{-x} \to 0$ cuando $x \to \infty$. Se dice que Ce^{-x} es un **término transitorio**. Aunque este comportamiento no es característico de todas las familias de soluciones de ecuaciones lineales (vea el ejemplo 3), el concepto de transitoriedad a menudo es importante en problemas de aplicación.

$\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$ NOTAS DESDE EL AULA

Si resolvemos (5) sobre un intervalo en el que P y f son continuas, es posible demostrar que una familia de soluciones de un parámetro de la ecuación produce todas las soluciones de la ecuación diferencial definidas sobre el intervalo. En el ejemplo 3, las funciones $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5e^x$ son continuas sobre el intervalo $(0, \infty)$. En este caso, *toda* solución de $dy/dx - (4/x)y = x^5e^x$ sobre $(0, \infty)$ puede obtenerse a partir de $y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$ para elecciones adecuadas de la constante C. Por ello, la familia de soluciones $y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$ se denomina **solución general** de la ecuación diferencial.

Ejercicios 8.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-25.

Fundamentos

En los problemas 1-22, resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 4y$
2. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 1$
4. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$
5. $\dfrac{dy}{dt} + y = e^{3t}$
6. $\dfrac{dy}{dt} = y + e^t$

7. $y' + 3x^2y = x^2$

8. $y' + 2xy = x^3$

9. $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = 1$

10. $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 2x$

11. $(1 + e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^xy = 0$

12. $(1 - x^3)\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y$

13. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$

14. $\dfrac{dy}{dx} + y = \cos(e^x)$

15. $\cos x\dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 1$

16. $\operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \sec^2 x$

17. $\dfrac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2\cos x$

18. $\dfrac{dr}{d\theta} + (\sec\theta)r = \cos\theta$

19. $(x + 2)^2\dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

20. $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

21. $x^2\dfrac{dy}{dx} + x(x + 2)y = e^x$

22. $x\dfrac{dy}{dx} + (x + 1)y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

En los problemas 23-32, resuelva el problema con valor inicial dado.

23. $\dfrac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = -4$

24. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 3y, \quad y(0) = \frac{1}{3}$

25. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x, \quad y(1) = 2$

26. $x\dfrac{dy}{dx} + y = 4x + 1, \quad y(1) = 8$

27. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2, \quad y(5) = 1$

28. $x(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + xy = 1, \quad y(1) = 10$

29. $(t + 1)\dfrac{dx}{dt} + x = \ln t, \quad x(1) = 10$

30. $y' + (\tan t)y = \cos^2 t, \quad y(0) = -1$

31. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E, i(0) = i_0, L, R$ y E son constantes

32. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m), T(0) = T_0, k, T_m$ y T_0 son constantes

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 33 y 34, antes de intentar resolver el problema con valor inicial dado, revise los problemas 71 y 72 en los ejercicios 5.5.

33. ***a***) Exprese la solución del problema con valor inicial dado $y' - 2xy = 2, y(0) = 1$, en términos de la **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

b) Use tablas o un SAC para calcular $y(2)$. Use un SAC para graficar la solución sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

34. La **función integral seno** está definida por

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

a) Demuestre que la solución del problema con valor inicial $x^3y' + 2x^2y = 10 \operatorname{sen} x$, $y(1) = 0$ es

$$y = 10x^{-2}[\operatorname{Si}(t) - \operatorname{Si}(1)].$$

b) Use tablas o un SAC para calcular $y(2)$. Use un SAC para graficar la solución sobre el intervalo $(0, \infty)$.

≡ Piense en ello

35. Encuentre una solución continua del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0.$$

Grafique f y la solución del PVI. [*Sugerencia*: Resuelva el problema en dos partes y use continuidad para hacer corresponder las partes de su solución.]

36. Explique por qué no necesitamos usar una constante de integración al calcular un factor de integración $e^{\int P(x)dx}$ para una ecuación diferencial lineal.

37. En el ejemplo 4 resolvimos la ecuación diferencial dada sobre los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$. Encuentre una solución de la ecuación diferencial sobre el intervalo $(-3, 3)$.

38. Suponga que $P(t)$ representa la población de una especie animal en un entorno en el instante t. Si el símbolo $\propto$ significa "proporcional a", en lenguaje coloquial proporcione una explicación física de la declaración matemática

$$\frac{dP}{dt} \propto P.$$

39. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales se encuentra en el estudio de un tipo especial de una serie de elementos radiactivos:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes. Resuelva el sistema sujeto a $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

40. La ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

forma parte de una clase de ecuaciones diferenciales no lineales denominada **ecuaciones de Bernoulli**.

a) Use la sustitución $y = u^{-1}$ para demostrar que la ecuación de Bernoulli dada se vuelve

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x.$$

b) Encuentre una solución de la ecuación de Bernoulli dada al resolver la ecuación diferencial en el inciso a).