V i v e t u p r o p ó s i t o

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

GUÍA DE TRABAJO

VISIÓN

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

MISIÓN

Somos una universidad privada innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, integras y emprendedoras, con visión internacional, para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradores; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés

Universidad Continental.
Material publicado con fines de estudio
Primera edición CE
Código: A0022
2016

PRESENTACIÓN

El material está diseñado para orientar al estudiante, el desarrollo de aplicaciones prácticas relacionadas al avance teórico de la asignatura de Análisis Matemático I.

En general, los contenidos propuestos en el material de estudio, se divide en tres unidades: Límites y Continuidad, Derivadas y Aplicaciones de la Derivada. El material incluye ejercicios recopilados de los distintos libros citados en la bibliografía de la presente.

Se recomienda que el estudiante desarrolle cada uno de los balotarios de ejercicios de este material, pues le permitirá asimilar la parte teórica impartida en el aula. El material de estudio se complementará con las lecciones presenciales y del aula virtual.

Agradecemos a quienes con sus aportes y sugerencias han contribuido a la mejora de la presente edición, el que sólo tiene el valor de una introducción al mundo del cálculo infinitesimal.

Los Recopiladores

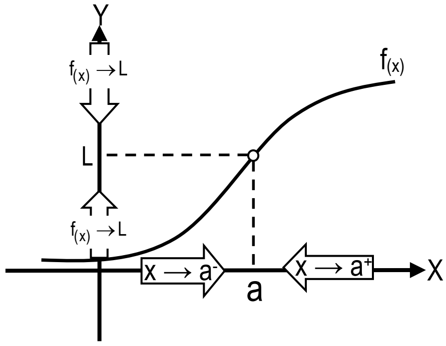
ÍNDICE

GUÍA DE PRÁCTICA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

PRIMERA UNIDAD

LÍMITES Y CONTINUIDAD

GUÍA DE PRÁCTICA N° 1: LÍMITES



DEFINICIÓN INFORMAL: Si $f_{(x)}$ se aproxima arbitrariamente a un número L cuando x tiende a un número "a" por cualquiera de los dos lados, entonces se dice que el límite de $f_{(x)}$ cuando x tiende a "a" es L. Este comportamiento se expresa simbólicamente como:

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} = L$$

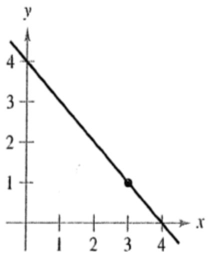
DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE:
Sea *f* una función definida en un intervalo abierto, excepto quizás en el número "a" en el intervalo. Entonces:

$\lim_{x \to a} f_{(x)} = L$ Significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

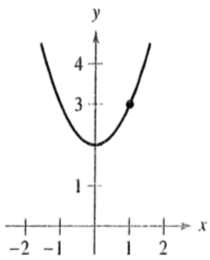
$\left|f_{(x)} - L\right| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$ o su equivalente: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|f_{(x)} - L\right| < \varepsilon$

En los ejercicios 9 a 18, utilizar la gráfica para encontrar el límite (si es que existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

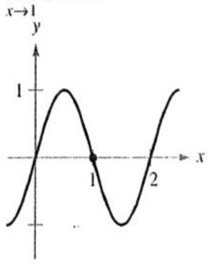
9. $\lim\limits_{x \to 3} (4 - x)$



10. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2)$

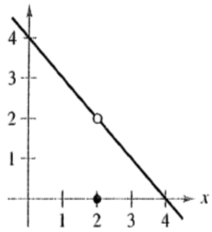


15. $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{sen} \pi x$



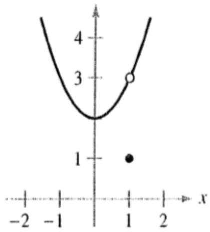
11. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

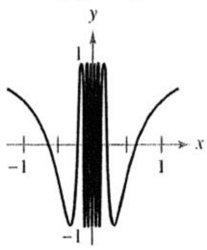


12. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

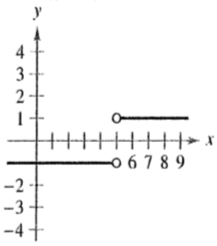
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



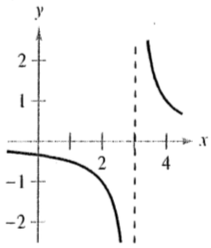
17. $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$



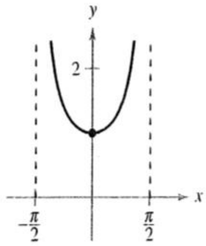
13. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x - 5|}{x - 5}$



14. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x - 3}$



16. $\lim\limits_{x \to 0} \sec x$



PROPIEDADES DE LOS LÍMITES:

1. Si: $f_{(x)} = c$ es una función constante, entonces:
$\lim_{x\to a} f_{(x)} = \lim_{x\to a} c = c$

2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

Si $\lim_{x\to a} f_{(x)}$ y $\lim_{x\to a} g_{(x)}$ existe, entonces:

3. $\lim_{x\to a}\left[f_{(x)} \pm g_{(x)}\right] = \lim_{x\to a} f_{(x)} \pm \lim_{x\to a} g_{(x)}$

4. $\lim_{x\to a}\left[f_{(x)} \cdot g_{(x)}\right] = \lim_{x\to a} f_{(x)} \cdot \lim_{x\to a} g_{(x)}$

5. $\lim_{x\to a} c.f_{(x)} = c \,.\, \lim_{x\to a} f_{(x)}$ donde "c" es una constante

6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \dfrac{\lim_{x\to a} f_{(x)}}{\lim_{x\to a} g_{(x)}}$; $\lim_{x\to a} f_{(x)} \neq 0$

II. **Calcule el límite de:**

1. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

2. $\lim_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{x^2+3x+2}$

3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{2-x^2+x}$

5. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+4x+4}{4-x^2}$

6. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{3-x-4x^2}$

7. $\lim_{x\to 6} \dfrac{x^2-6x}{x^2-7x+6}$

8. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x+6}{4x^2-36}$

9. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

10. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{1-x^2}$

11. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2-x}{x^2-4}$

12. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2-2x-24}{2x^2+13x+20}$

13. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{5x^2-23x+24}$

14. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{4x^2+x-14}$

15. $\lim_{x\to 4} \dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$

16. $\lim_{x\to 2} \dfrac{6x^2-7x-10}{4x^2-11x+6}$

17. $\lim_{x\to -3} \dfrac{4x^2+17x+15}{8x^2+19x-15}$

18. $\lim_{x\to 9} \dfrac{9-x}{\sqrt{x}-3}$

19. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{81-x^2}$

20. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$

21. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{13x-6x^2+15}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+4x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

23. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2-\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

24. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x+4}-3}$

25. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{x^3-1}$

26. $\lim_{x\to -3} \dfrac{6x^2+11x-21}{\sqrt{x^2+7}-4}$

27. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+5x-14}{3-\sqrt{2x^2+1}}$

28. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+\sqrt{2x^2-9}}{x^3+27}$

29. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{x-\sqrt{2x+8}}$

30. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+\sqrt{4x+21}}{x^2-9}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}$

32. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

33. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{x+7}-3}$

34. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-x}$

35. $\lim_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 02: LÍMITES LATERALES

LÍMITES LATERALES:

Si $f_{(x)}$ se aproxima a L cuando x tiende a c por la izquierda (x<c), se escribe $\lim\limits_{x\to c^-} f_{(x)} = L$.

De la misma manera, si $f_{(x)}$ se aproxima a M cuando x tiende a c por la derecha (c<x), entonces $\lim\limits_{x\to c^+} f_{(x)} = M$

TEOREMA: $\exists \lim\limits_{x\to a} f_{(x)} = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f_{(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} f_{(x)} = L$

I. Determine los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2-x}{x^2-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

5) $\lim\limits_{x\to 3^-} f_{(x)}$, donde $f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} & x \le 3 \\ \dfrac{12-2x}{3} & x > 3 \end{cases}$

6) $\lim\limits_{x\to 2} f_{(x)}$, donde $f_{(x)} = \begin{cases} x^2-4x+6 & ;\ x<2 \\ -x^2+4x-2; & x \ge 2 \end{cases}$

7) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x+3)|x-2|}{x-2}$

8) $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x^2-5x-24}{|x+3|}$

9) $\lim\limits_{x\to 6^+} \dfrac{|6-x|}{2x^2-9x-18}$

10) $\lim\limits_{x\to 2} f_{(x)}$, donde $f_{(x)} = \begin{cases} x^2-2x & ;x<2 \\ 1 & ;x=2 \\ x^2-6x+8 & ;x>2 \end{cases}$

11) Calcule si existe $\lim\limits_{x\to 1} f_{(x)}$ donde:

$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2+3 & \text{si } x \le 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

12) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{|3+x|}{x^3+27}$

13) $\lim\limits_{x\to 0} f_{(x)}$, donde $f_{(x)} = \begin{cases} x^2 & x<0 \\ 2 & x=0 \\ \sqrt{x}-1 & x>0 \end{cases}$

14) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

15) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f_{(x)}$ donde:

$$f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} & ;\ x>1 \\ \dfrac{x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{x-1} & ;\ x<1 \end{cases}$$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 03: LÍMITES INFINITOS

LÍMITES INFINITOS:

Se dice que $\lim_{x\to c} f_{(x)}$ es un límite infinito si $f_{(x)}$ aumenta o disminuye ilimitadamente cuando $x \to c$. Técnicamente, este límite no existe, pero se puede dar más información acerca del comportamiento de la función escribiendo:

$$\lim_{x\to c} f_{(x)} = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to c} f_{(x)} = -\infty$$

I. Determine los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{-x^2}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{4x}{9-x^2}$

3) $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{x^3-x^2-6x}{x^2+4x+4}$

4) $\lim_{x\to -7^-} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}}$

5) $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

6) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x^2-4}$

7) $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x-5}$

8) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

9) $\lim_{x\to 7^-} \dfrac{\sqrt{49-x^2}}{6x^2-40x-14}$

10) $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{x^3+1}{x^2+2x+1}$

11) $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{64-x^3}{x^2-8x+16}$

12) $\lim_{x\to -6^+} \dfrac{6-35x-6x^2}{x^2+12x+36}$

13) $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{5-\sqrt{x^2+9}}{x^2-8x+16}$

14) $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{5-\sqrt{x^2+16}}{x^2+6x+9}$

15) $\lim_{x\to -5^-} \dfrac{\sqrt{x^2-16}-3}{x^2+10x+25}$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 04: LÍMITES AL INFINITO

LÍMITES AL INFINITO:
Si los valores de la función $f_{(x)}$ tiende a un número L cuando x aumenta sin límite, se escribe:

$$\lim_{x \to +\infty} f_{(x)} = L$$

De manera similar se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} f_{(x)} = M$$

Cuando los valores de la función $f_{(x)}$ tiende a un número M cuando x disminuye sin límite.

TEOREMAS DEL RECÍPROCO DE LA POTENCIA:
Para A y k, constantes, con k > 0

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \quad y \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{A}{x^k} = 0$$

I. Calcule los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 7x + 5}{x^3 + 2x + 1}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - 2x^2}{3x - 1}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 4x - 3}$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6 - 4x^2 + x^3}{4 + 5x - 7x^2}$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - x^3}{x^3 + x + 1}$

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7 - 2x - x^4}{9 - 3x^4 + 2x^2}$

8) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{3x^2 - x}}$

10) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$

11) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}$

12) $\lim\limits_{x \to \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1})$

13) $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

14) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 - x})$

15) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\dfrac{x}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4}x^2 + x})$

II. Calcule las asíntotas horizontales:

1) $f_{(x)} = \dfrac{3x - 7}{4x - \sqrt{9x^2 + 2x}}$

2) $f_{(x)} = \dfrac{39x}{8x + \sqrt{25x^2 - 3x}}$

3) $f_{(x)} = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

4) $f_{(x)} = \dfrac{\sqrt{9x^2 - 2}}{2x + 1}$

5) $f_{(x)} = x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 05: CONTINUIDAD DE FUNCIONES

DEFINICIÓN:
Una Función es **continua** en a si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:
1. $f_{(a)}$ existe.
2. $\lim_{x\to a} f_{(x)}$ existe.
3. $\lim_{x\to a} f_{(x)} = f_{(a)}$

I. Utilice la definición de continuidad de funciones para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

1. $f_{(x)} = x^3 - 5x \quad ; \quad x = 2$
2. $f_{(x)} = \dfrac{x-3}{5x} \quad ; \quad x = -3$
3. $g_{(x)} = \sqrt{2-3x} \quad ; \quad x = 0$
4. $f_{(x)} = \dfrac{x}{8} \quad ; \quad x = 2$
5. $h_{(x)} = \dfrac{x+3}{x-3} \quad ; \quad x = -3$
6. $f_{(x)} = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad x = -1$

II. Determine si la función es continua en los puntos dados

7. $f_{(x)} = \dfrac{x+4}{x-2}\ ;\ -2, 0$
8. $f_{(x)} = \dfrac{x-3}{x^2-9}\ ;\ 3, -3$
9. $f_{(x)} = \begin{cases} x+2 & ; \text{ si } x \geq 2 \\ x^2 & ; \text{ si } x < 2 \end{cases}$
10. $f_{(x)} = \begin{cases} -2x & ; x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 1 & ; x > 2 \end{cases}$

III. Encontrar la constante "a" o constantes "a" y "b", tales que la función sea continua en toda la recta real

11. $f_{(x)} = \begin{cases} x^3 & ; x \leq 2 \\ ax^2 & ; x > 2 \end{cases}$
12. $f_{(x)} = \begin{cases} 2 & ; x \leq -1 \\ ax + b & ; -1 < x < 3 \\ -2 & ; x \geq 3 \end{cases}$
13. $g_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} & ; x \neq a \\ 8 & ; x = a \end{cases}$

SEGUNDA UNIDAD

DERIVADAS

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 06: Reglas básicas de derivación

DEFINICIÓN:
La **derivada** de una función f es la función denotada como f' (se lee "f prima) y definida por:

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

Siempre que este límite exista.

REGLA BÁSICA 1: DERIVADA DE UNA CONSTANTE

Si c es una constante, entonces:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

REGLA BÁSICA 2: DERIVADA DE xª

Si a es cualquier número real, entonces:

$$\frac{d}{dx}(x^a) = a\,x^{a-1}$$

REGLA BÁSICA 3: DERIVADA DEL FACTOR CONSTANTE

Si f es una función diferenciable c una constante, entonces:

$$\frac{d}{dx}(c\,f_{(x)}) = cf'_{(x)}$$

REGLA BÁSICA 4: DERIVADA DE UNA SUMA O UNA FIFERENCIA

Si f y g son una funciones diferenciable, entonces:

$$\frac{d}{dx}(f_{(x)} \pm g_{(x)}) = f'_{(x)} \pm g'_{(x)}$$

Determine la derivada de las siguientes funciones:

1. $f_{(x)} = 8$
2. $f_{(x)} = \dfrac{3}{5}$
3. $f_{(x)} = \pi$
4. $f_{(x)} = x^5$
5. $y = x^8$
6. $f_{(x)} = x^{-6}$
7. $y = 4x^{-10}$
8. $y = \dfrac{2}{x^4}$
9. $f_{(x)} = \dfrac{-3}{2x^5}$
10. $f_{(x)} = \sqrt[3]{x^2}$
11. $y = \sqrt[5]{x^7}$
12. $y = 2\sqrt[4]{x^3}$
13. $f_{(x)} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
14. $y = \dfrac{5}{2\sqrt[3]{x^4}}$
15. $f_{(x)} = \dfrac{5}{2\sqrt[4]{x^3}}$
16. $y = 3x^2 - 5x + 11$
17. $f_{(x)} = 8x^3 - 12x^2 + 4x - 6$
18. $y = -3x^3 - 2x^{-2} + x - 12$
19. $f_{(x)} = 6x^{\frac{2}{3}} - 8x^{-\frac{1}{4}}$
20. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$
21. $f_{(x)} = \dfrac{4}{(3x)^3}$
22. $y = \dfrac{-5}{(2x^4)}$
23. $y = 3(x-2)^2$
24. $f_{(x)} = 4(2x+5)^2$
25. $f_{(x)} = 6(3x-2)^3$

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

26. $y = 4x^2 + 5x + 6$; $x = 1$

27. $y = \dfrac{1 - x^2}{5}$; $x = 4$

28. $y = -\sqrt[3]{x}$; $x = 8$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 07: Derivadas de productos y cocientes

REGLA 5: DERIVADA DE UN PRODUCTO

Si f y g son funciones diferenciables, entonces :

$$\frac{d}{dx}\left(f_{(x)}g_{(x)}\right) = f'_{(x)}g_{(x)} + f_{(x)}g'_{(x)}$$

REGLA 6: DERIVADA DE UN COCIENTE

Si f y g son funciones diferenciables y $g_{(x)} \neq 0$, entonces :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right) = \frac{f'_{(x)}g_{(x)} - f_{(x)}g'_{(x)}}{(g_{(x)})^2}$$

Diferencie las funciones:

1) $f_{(x)} = (2x^2 - 3x)(4x^2 + 4x - 5)$

2) $C_{(I)} = (2I^2 - 3)(3I^2 - 4I + 1)$

3) $y = \dfrac{3 - 2x - x^2}{x^2 - 1}$

4) $f_{(x)} = \dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$

5) $g_{(x)} = \dfrac{1}{x^{100} + 7}$

6) $y = \dfrac{(9x - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

7) $y = \dfrac{6}{x - 1}$; $x = 3$

8) $f_{(x)} = \dfrac{x + 5}{x^2}$; $x = 1$

9) $y = \dfrac{x - 1}{x(x^2 + 1)}$; $x = 2$

10) $y = (2x + 3)\left[2(x^4 - 5x^2 + 4)\right]$: $(0, 24)$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 08: Derivadas de orden superior

Se sabe que la derivada de una función $y = f_{(x)}$ es en sí misma una función, $f'_{(x)}$. Cuando se diferencia $f'_{(x)}$, la función resultante se llama **segunda derivada** de f con respecto a x. Ésta se denota como $f''_{(x)}$, lo cual se lee como "f doble prima de x". De manera similar, la derivada de la segunda derivada se llama **tercera derivada** y se escribe $f'''_{(x)}$. Continuando de esta manera, se obtienen derivadas de **orden superior**.

Tabla 12.3

Primera derivada:	y'	$f'(x)$	$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{d}{dx}(f(x))$	$D_x y$
Segunda derivada:	y''	$f''(x)$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$D_x^2 y$
Tercera derivada:	y'''	$f'''(x)$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$	$\dfrac{d^3}{dx^3}(f(x))$	$D_x^3 y$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$	$\dfrac{d^4}{dx^4}(f(x))$	$D_x^4 y$

Encuentre las derivadas que se indiquen:

1. $y = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2$; y'''
2. $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; y'''
3. $y = 8 - x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$
4. $y = -x - x^2$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$
5. $y = \dfrac{1}{x}$; y'''
6. $f_{(q)} = \dfrac{1}{2q^4}$; $f'''_{(q)}$
7. $f_{(x)} = \sqrt{x}$; $f''_{(x)}$
8. $y = \dfrac{1}{2x+3}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$
9. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; y''
10. $y = 2x^{1/2}$; y'''

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 09: Regla de la cadena

REGLA 5: REGLA DE LA CADENA

Si y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, entonces y es una función diferenciable de x y :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Determine la derivada de las siguientes funciones:

1) $f_{(x)}=3(4x^2-3)^5$

2) $y=2(3x^3+2x)^8$

3) $y=5\sqrt{3x^2-4x}$

4) $y=8\sqrt[3]{(2x+4)^2}$

5) $f_{(x)}=3x^2(4x^2-5)^6$

6) $y=(x^2+2)(3x^2-5)^9$

7) $f_{(x)}=(2x-7)(4x^2-6)^7$

8) $g_{(x)}=\dfrac{3}{(4-9x)^4}$

9) $y=\dfrac{6}{(3x^3-5)^7}$

10) $f_{(x)}=\dfrac{4x^2}{(3x-5)^6}$

11) $y=\dfrac{5x^3}{(2x+3)^5}$

12) $f_{(x)}=3\sqrt[3]{9x^2+4}$

13) $y=\dfrac{2}{\sqrt[4]{4-x^2}}$

14) $f_{(x)}=3x^2\sqrt{4x-7}$

15) $y=\dfrac{1}{2}x^2\sqrt{16-x^2}$

16) $f_{(x)}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+4}}$

17) $f_{(x)}=\dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-2x}}$

18) $y=\dfrac{4x^3}{\sqrt{3x^2-2x}}$

19) $y=6x^2\sqrt{2x^2-3x}$

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dedo

20) $y=(x^2-7x-8)^3$ cuando $x=8$

21) $y=\sqrt{x+2}$; cuando $x=7$

22) $y=\sqrt[3]{(x^2-8)^2}$; cuando $x=3$

23) $y=\dfrac{\sqrt{7x+2}}{x+1}$; cuando $x=1$

24) $f_{(x)}=\dfrac{6x^2}{\sqrt{x^2-64}}$; cuando $x=10$

25) $y=3x^2\sqrt{25-x^2}$; cuando $x=4$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 10: Análisis Marginal

Calcule el costo marginal de las siguientes funciones de costo:

1. $C_{(x)} = 100 + 2x$
2. $C_{(x)} = 0.0001x^3 - 0.09x^2 + 20x + 1200$
3. $C_{(x)} = 40 + (\ln 2)x^2$
4. $C_{(x)} = 10^{-6}x^3 - (3 \times 10^{-3})x^2 + 36x + 2000$

Calcule el ingreso marginal de las siguientes funciones de ingreso.

5. $R_{(x)} = x - 0.01x^2$
6. $R_{(x)} = 5x - 0.01x^{5/2}$
7. $R_{(x)} = 0.1x - 10^{-3}x^2 - 10^{-5}x^{5/2}$
8. $R_{(x)} = 100x - (\log 5)x^3(1 + \sqrt{x})$

9. Si la ecuación de demanda es $x + 4p = 100$, calcule el ingreso marginal, $R_{(x)}$.

10. Si la ecuación de demanda es $\sqrt{x} + p = 10$, calcule el ingreso marginal.

11. Si la ecuación de demanda es $x^{3/2} + 50p = 100$, calcule el ingreso marginal cuando p = 16.

12. Si la ecuación de demanda es $10p + x + 0.01x^2 = 700$, calcule el ingreso marginal cuando $p = 10$

13. Si en el ejercicio 9, la función de costo es $C_{(x)} = 100 + 5x$, calcule la utilidad marginal.
14. Si en el ejercicio 10, la función de costo es $C_{(x)} = 60 + x$, calcule la utilidad marginal.

15. Si en el ejercicio 11, la función de costo es $C_{(x)} = 50 + x^{3/2}$, evalúe la utilidad marginal cuando:
    a) p = 16   b) x = 25

16. Si en ejercicio 12, la función de costo es $C_{(x)} = 1000 + 0,01x^2$ evalúe la función de utilidad si:

    a) x = 100   b) p = 10

17. En el ejercicio 13, encuentre el valor de x tal que $p'_{(x)} = 0$ y calcule la utilidad correspondiente. Ésta representa la utilidad máxima que puede obtenerse por la venta del artículo en cuestión. Determine el precio p que da está utilidad máxima.

18. En el ejercicio 14, encuentre el valor de x tal que $p'_{(x)} = 0$ y calcule la utilidad correspondiente. Ésta representa la utilidad máxima que puede obtenerse por la venta del artículo en cuestión. Determine el precio p que da está utilidad máxima.

19. Cuando una peluquera fija una cuota de \$4 por corte de cabello, advierte que el número de clientes que atiende en una semana es de 100, en promedio. Al elevar la tarifa a \$5, el número de clientes por semana baja a 80. Suponiendo una ecuación de demanda lineal entre el precio y el número de clientes, determine la función de ingreso marginal. Encuentre entonces el precio que produce un ingreso marginal igual a cero.

20. El editor de una revista descubre que si fija un precio de \$1 a su revista, vende 20 000 ejemplares al mes; sin embargo, si el precio fijado es de \$1.50, sus ventas sólo serán por 15 000 ejemplares. El costo de producir cada ejemplar es de \$0.80 y tiene costos fijos de \$10 000 al mes. Suponiendo una ecuación de demanda lineal, calcule su función de utilidad marginal y determine el precio de la revista que haga la utilidad marginal igual a cero. Evalúe la utilidad misma cuando el precio es:

    a) \$1.80   b) \$1.90   c) \$2

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 11: Derivadas implícitas

Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita:

1. $x^2 + 4y^2 = 4$
2. $3x^2 + 6y^2 = 1$
3. $5y^2 - 2x^2 = 10$
4. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3$
5. $x^{1/5} + y^{1/5} = 4$
6. $x^3 - y^3 = 3x^2y - 3xy^2$
7. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$
8. $5x^3 + 6xy + 7y^3 = 0$
9. Calcule la derivada de $(x+y)^3 = x^3 + y^3$

   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

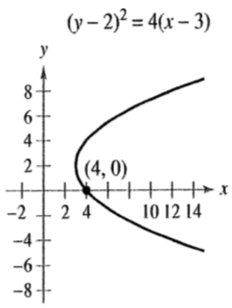
   $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
10. $y^2 = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$
11. Determine la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,1)$ a la gráfica de la relación implícita $(x^2+y^2)^2 = 4x^2y$

    $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

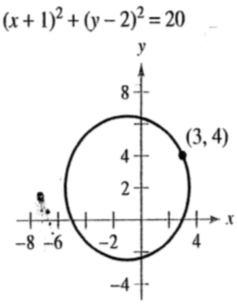
    $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
12. Determine la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(2,-\dfrac{1}{2}\right)$ a la gráfica de la relación implícita $xy^2 - x^2y + y - x = 0$

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado

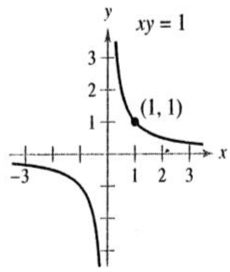
33. Parábola



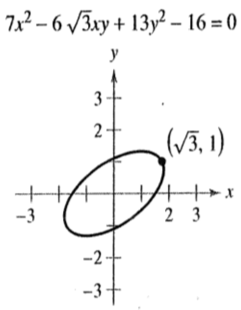
34. Circunferencia



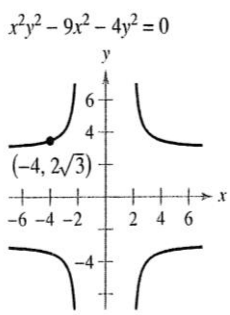
35. Hipérbola rotada



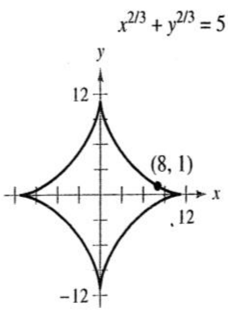
36. Elipse rotada



37. Cruciforme



38. Astroide



GUÍA DE PRÁCTICAS N° 12: Derivada de la función exponencial

$\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u.u'$ $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u.u'.\ln a$

Diferencie las funciones:

1. $y = 4e^{2x^2-4}$
2. $f_{(x)} = -3e^{3x^2+5}$
3. $y = e^{x^2}$
4. $f_{(x)} = 6e^{3x^2-5}$
5. $f_{(x)} = 8.6^{x^3+8x}$
6. $y = x.e^x$
7. $y = 3x^4e^{-x}$
8. $y = (3x^2-4x)e^{-3x}$
9. $y = 12x^2 5^{3x^3+3}$
10. $y = (x-3)^2e^{2x}$
11. $f_{(x)} = 4x^3.e^{5x^2-7}$
12. $f_{(x)} = \dfrac{3x^2}{e^{2x^2-4}}$
13. $y = \dfrac{4}{e^{2x^3-3x}}$
14. $f_{(x)} = \dfrac{12}{5^{2x^3+8x}}$
15. $y = \dfrac{e^x}{2x+1}$
16. $y = \dfrac{3x^2}{e^{2x^2-4}}$
17. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto dado:

18. $f_{(x)} = e^{1-x}$; $(1,1)$
19. $y = e^{-2x+x^2}$ $(2,1)$
20. $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$; $(1,e)$
21. $y = xe^x - e^x$; $(1,0)$

$\bar{c}$ es el costo promedio de producir q unidades de cierto artículo. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores dados de q.

22. $\bar{c} = \dfrac{7000\ e^{q/700}}{q}$; $q = 350$, $q = 700$
23. $\bar{c} = \dfrac{850}{q} + 4000\dfrac{e^{(2q+6)/800}}{q}$; $q = 97$, $q = 197$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 13: Derivada de la función logarítmica

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{u'}{u} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{u'}{\ln a \cdot u}$$

1. Derive: $y = \ln(4x^2 + 11)$

2. Derive: $f_{(x)} = \log_5(5x^2 - 11)$

3. Derive: $y = 6\log(3x^2 - 5x)$

4. Derive: $f_{(x)} = 8.\ln(3x^3 + 5x)$

5. Derive: $2x^3 \log_5 3x^2$

6. Derive $8x^2 . \ln(x^2 + x - 2)$

7. Derive: $f_{(x)} = \dfrac{\ln x}{x^2}$

8. Derive: $y = \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$

9. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \ln\left(\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{(x+1)^3}}\right)$

10. Derive $f_{(x)} = e^{4x^2} \ln(2x+1)$

11. Derive: $f_{(x)} = 6e^{2x-3} . \ln\sqrt[3]{(3x-2)^2}$

12. Derive: $f_{(x)} = 9x^2 . \ln\sqrt[3]{(3x-5)^2}$

13. Derive: $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

14. Derive: $y = \ln\left[\dfrac{(2x+3)\sqrt{x-5}}{e^{4x}}\right]$

15. Derive: $y = \ln\left[\dfrac{e^{3x^2-5}\sqrt{3x^2+6}}{(x+2)^5}\right]$

16. Derive: $y = \ln\left[\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}\right]$

17. Derive: $y = (3x^2)^{(4x^2-3)}$

18. Derive: $y = x^{(3x^3-5)}$

19. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = (2x+5)^{(3x^2)}$

20. Derive: $y = \dfrac{(2x-5)^7 \sqrt[3]{(3x+2)^2}}{e^{6x^3}}$

21. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 - 3x - 3)$ cuando $x = 4$

22. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\ln x - x$ en el punto donde $x = 1$

23. Encuentre la función de ingreso marginal si la función de demanda es $p = \dfrac{25}{\ln(q+2)}$

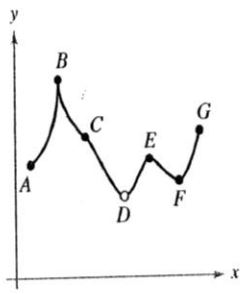
TERCERA UNIDAD

APLICACIONES DE LA DERIVADA

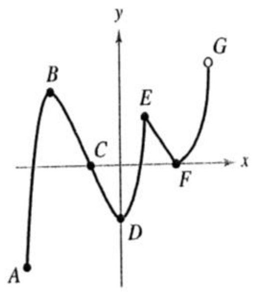
GUÍA DE PRÁCTICAS N° 14: Extremos de una función

En los ejercicios 1 y 2, decidir si cada punto indicado es un máximo o mínimo absoluto, un máximo o mínimo relativo o cualesquiera de los dos.

1.

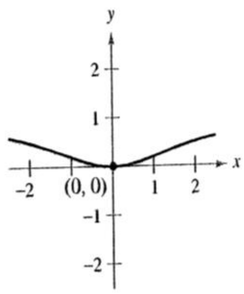


2.

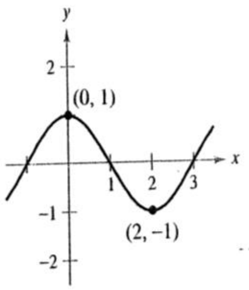


En los ejercicios 3 a 8, determinar el valor de la derivada (si ésta existe) en cada extremo indicado.

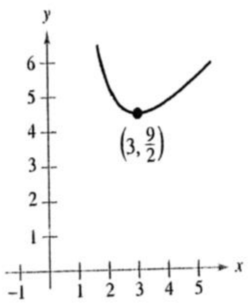
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$



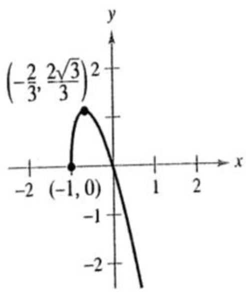
4. $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$



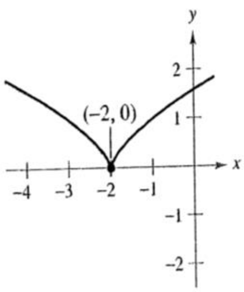
5. $f(x) = x + \dfrac{27}{2x^2}$



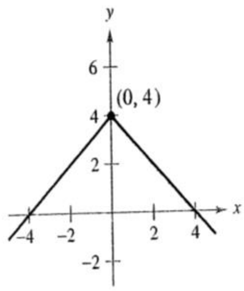
6. $f(x) = -3x\sqrt{x + 1}$



7. $f(x) = (x + 2)^{2/3}$

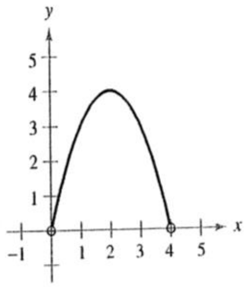


8. $f(x) = 4 - |x|$

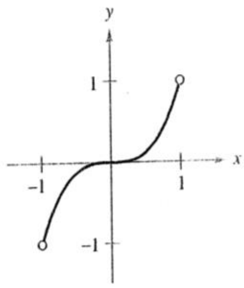


En los ejercicios 9 a 12, aproximar los puntos críticos de la función que se muestra en la gráfica. Determinar si la función tiene un máximo relativo, mínimo relativo, máximo absoluto, mínimo absoluto o ninguno de éstos en cada número crítico sobre el intervalo indicado.

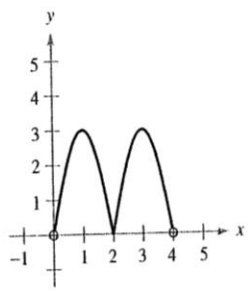
9.



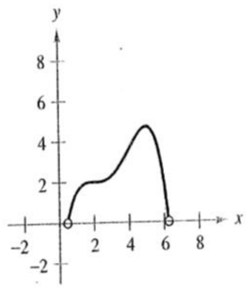
10.



11.



12.



En los ejercicios 13 a 18, determinar cualesquiera de los puntos críticos de la función.

13. $f(x) = x^2(x - 3)$

14. $g(x) = x^2(x^2 - 4)$

15. $g(t) = t\sqrt{4 - t},\ t < 3$

16. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

17. $h(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$
$0 < x < 2\pi$

18. $f(\theta) = 2 \sec \theta + \tan \theta$
$0 < \theta < 2\pi$

En los ejercicios 19 a 36, ubicar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado.

19. $f(x) = 2(3 - x),\ [-1, 2]$

20. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{3},\ [0, 5]$

21. $f(x) = -x^2 + 3x,\ [0, 3]$

22. $f(x) = x^2 + 2x - 4,\ [-1, 1$

23. $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2,\ [-1, 2]$

24. $f(x) = x^3 - 12x,\ [0, 4]$

25. $y = 3x^{2/3} - 2x,\ [-1, 1]$

26. $g(x) = \sqrt[3]{x},\ [-1, 1]$

27. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 3},\ [-1, 1]$

28. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1},\ [-2, 2]$

29. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2},\ [0, 1]$

30. $h(t) = \dfrac{t}{t - 2},\ [3, 5]$

31. $y = 3 - |t - 3|,\ [-1, 5]$

32. $f(x) = [\![x]\!],\ [-2, 2]$

33. $f(x) = \cos \pi x,\ \left[0, \dfrac{1}{6}\right]$

34. $g(x) = \sec x,\ \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

35. $y = \dfrac{4}{x} + \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right),\ [1, 2]$

36. $y = x^2 - 2 - \cos x,\ [-1, 3]$

En los ejercicios 37 a 40, localizar los extremos absolutos de la función (si existen) sobre cada intervalo.

37. $f(x) = 2x - 3$

a) $[0, 2]$ *b)* $[0, 2)$

c) $(0, 2]$ *d)* $(0, 2)$

38. $f(x) = 5 - x$

a) $[1, 4]$ *b)* $[1, 4)$

c) $(1, 4]$ *d)* $(1, 4)$

39. $f(x) = x^2 - 2x$

a) $[-1, 2]$ *b)* $(1, 3]$

c) $(0, 2)$ *d)* $[1, 4)$

40. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

a) $[-2, 2]$ *b)* $[-2, 0)$

c) $(-2, 2)$ *d)* $[1, 2)$

En los ejercicios 41 a 44, dibujar la gráfica de la función. Luego localizar los extremos absolutos de la misma sobre el intervalo indicado.

41. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & 0 \le x \le 1 \\ 4x^2, & 1 < x \le 3 \end{cases}, \quad [0, 3]$

42. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & 1 \le x < 3 \\ 2 - 3x, & 3 \le x \le 5 \end{cases}, \quad [1, 5]$

43. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}, \quad (1, 4]$

44. $f(x) = \dfrac{2}{2 - x}, \quad [0, 2)$

En los ejercicios 45 y 46, utilizar una calculadora para representar gráficamente la función. Localizar después los extremos absolutos de la función sobre el intervalo dado.

45. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x + 1, \quad [-1, 3]$

46. $f(x) = \sqrt{x} + \cos\dfrac{x}{2}, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 47 y 48, *a)* usar un sistema de álgebra por computadora para representar la función y aproximar cualesquiera extremos absolutos sobre el intervalo dado. *b)* Utilizar la calculadora para determinar cualesquiera puntos críticos y emplear éstos para encontrar todos los extremos absolutos no ubicados en los puntos extremos o terminales. Comparar los resultados con los del apartado *a*).

47. $f(x) = 3.2x^5 + 5x^3 - 3.5x, \quad [0, 1]$

48. $f(x) = \dfrac{4}{3}x\sqrt{3 - x}, \quad [0, 3]$

En los ejercicios 49 y 50, utilizar un sistema de álgebra por computadora para encontrar el valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo cerrado.

49. $f(x) = \sqrt{1 + x^3}, \quad [0, 2]$

50. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad \left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$

En los ejercicios 51 y 52, utilizar un sistema de álgebra por computadora para determinar el valor máximo de $|f^4(x)|$ en el intervalo cerrado.

51. $f(x) = (x + 1)^{2/3}, \quad [0, 2]$ **52.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad [-1, 1]$

Desarrollo de conceptos

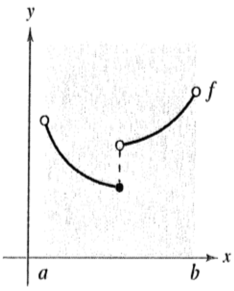
En los ejercicios 53 y 54, la gráfica de una función sobre el intervalo $[-2, 5]$ tiene las siguientes características.

53. Máximo absoluto en $x = -2$, mínimo absoluto en $x = 1$, máximo relativo en $x = 3$

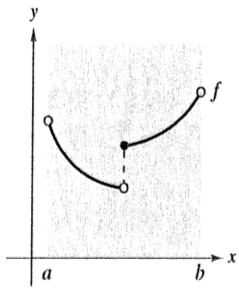
54. Mínimo relativo en $x = -1$, número crítico en $x = 0$, pero ningún extremo, máximo absoluto en $x = 2$, mínimo absoluto en $x = 5$

En los ejercicios 55 a 58, determinar a partir de la gráfica si f tiene un mínimo en el intervalo abierto (a, b).

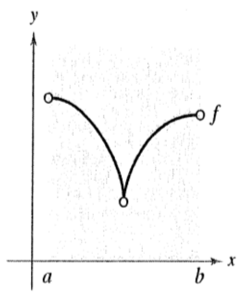
55. *a)*



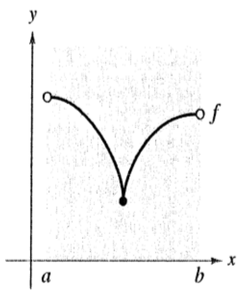
b)



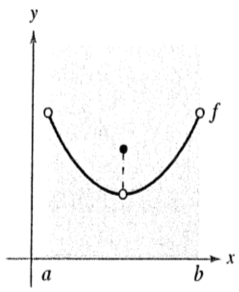
56. *a)*



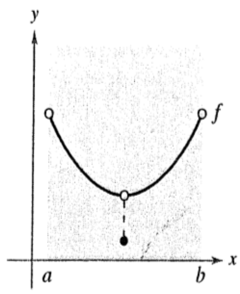
b)



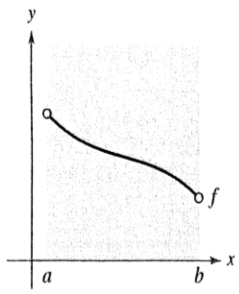
57. *a)*



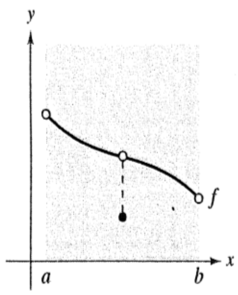
b)



58. *a)*



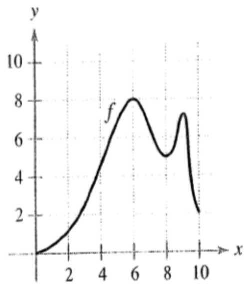
b)



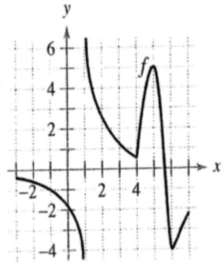
GUÍA DE PRÁCTICAS N° 15: Funciones crecientes y decrecientes

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f para determinar *a*) el intervalo abierto más grande sobre el cual f es creciente y *b*) el intervalo abierto más grande sobre el cual f es decreciente.

1.

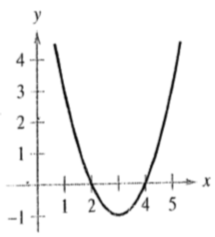


2.

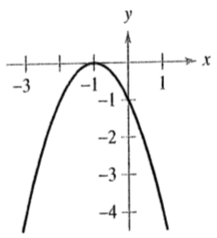


En los ejercicios 3 a 16, identificar los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.

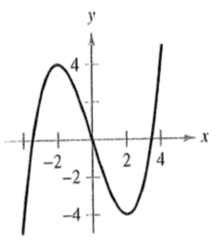
3. $f(x) = x^2 - 6x + 8$



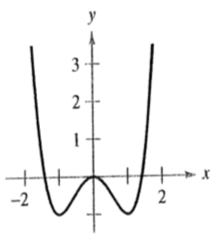
4. $y = -(x+1)^2$



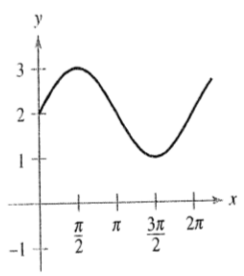
5. $y = \dfrac{x^3}{4} - 3x$



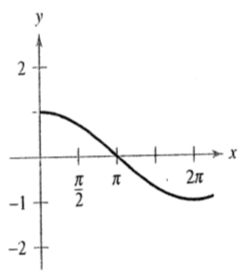
6. $f(x) = x^4 - 2x^2$



7. $f(x) = \operatorname{sen} x + 2,\ 0 < x < 2\pi$



8. $h(x) = \cos\dfrac{x}{2},\ 0 < x < 2\pi$



9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

10. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

11. $g(x) = x^2 - 2x - 8$

12. $h(x) = 27x - x^3$

13. $y = x\sqrt{16 - x^2}$

14. $y = x + \dfrac{4}{x}$

15. $y = x - 2\cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

16. $f(x) = \cos^2 x - \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

En los ejercicios 17 a 38, *a*) encontrar los puntos críticos de f (si los hay), *b*) determinar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, *c*) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y *d*) utilizar una calculadora para confirmar los resultados.

17. $f(x) = x^2 - 6x$

18. $f(x) = x^2 + 8x + 10$

19. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

20. $f(x) = -(x^2 + 8x + 12)$

21. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

22. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

23. $f(x) = x^2(3 - x)$

24. $f(x) = (x+2)^2(x-1)$

25. $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{5}$

26. $f(x) = x^4 - 32x + 4$

27. $f(x) = x^{1/3} + 1$

28. $f(x) = x^{2/3} - 4$

29. $f(x) = (x-1)^{2/3}$

30. $f(x) = (x-1)^{1/3}$

31. $f(x) = 5 - |x - 5|$

32. $f(x) = |x + 3| - 1$

33. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

34. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

36. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2}$

37. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$

38. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

En los ejercicios 39 a 46, considerar la función sobre el intervalo $(0, 2\pi)$. Para cada función, *a*) encontrar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, *b*) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y *c*) utilizar una calculadora para confirmar los resultados.

39. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$

40. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

41. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

42. $f(x) = x + 2\operatorname{sen} x$

43. $f(x) = \cos^2(2x)$

44. $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x$

45. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$

46. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}$

En los ejercicios 47 a 52, *a*) utilizar un sistema de álgebra por computadora para derivar la función, *b*) dibujar las gráficas de f y f' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas sobre el intervalo indicado, *c*) encontrar los puntos críticos de f en el intervalo abierto y *d*) determinar el (los) intervalo(s) sobre el cual f' es positiva y el (los) intervalo(s) sobre el cual es negativa. Comparar el comportamiento de f y el signo de f'.

47. $f(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}, \quad [-3, 3]$

48. $f(x) = 10\left(5 - \sqrt{x^2 - 3x + 16}\right), \quad [0, 5]$

49. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t, \quad [0, 2\pi]$

50. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}, \quad [0, 4\pi]$

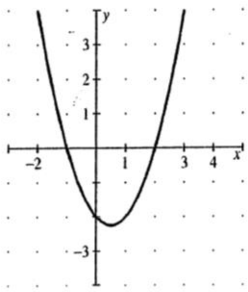
51. $f(x) = -3\operatorname{sen}\dfrac{x}{3}, \quad [0, 6\pi]$

52. $f(x) = 2\operatorname{sen} 3x + 4\cos 3x, \quad [0, \pi]$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 16: Concavidad

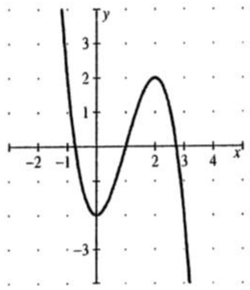
En los ejercicios 1 a 10, determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

1. $y = x^2 - x - 2$



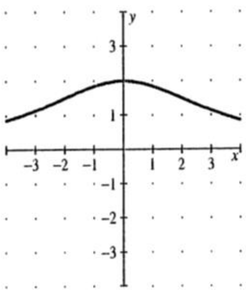
Generada por Derive

2. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$



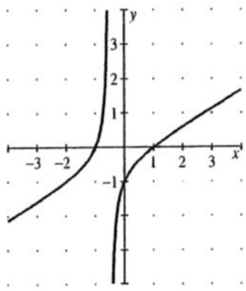
Generada por Derive

3. $f(x) = \dfrac{24}{x^2 + 12}$



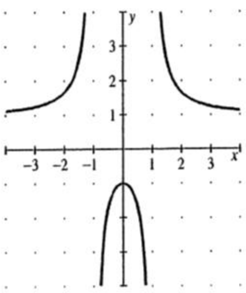
Generada por Derive

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$



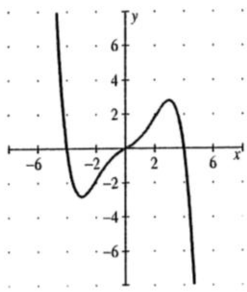
Generada por Derive

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$



Generada por Derive

6. $y = \dfrac{-3x^5 + 40x^3 + 135x}{270}$



Generada por Derive

7. $g(x) = 3x^2 - x^3$

8. $h(x) = x^5 - 5x + 2$

9. $y = 2x - \tan x, \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

10. $y = x + \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}, \quad (-\pi, \pi)$

En los ejercicios 11 a 26, encontrar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de la función.

11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

12. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

13. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

14. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$

15. $f(x) = x(x - 4)^3$

16. $f(x) = x^3(x - 4)$

17. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

18. $f(x) = x\sqrt{x + 1}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

21. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}, \quad [0, 4\pi]$

22. $f(x) = 2\csc\dfrac{3x}{2}, \quad (0, 2\pi)$

23. $f(x) = \sec\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad (0, 4\pi)$

24. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

25. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, 2\pi]$

26. $f(x) = x + 2\cos x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 27 a 40, encontrar todos los extremos relativos. Utilizar el criterio de la segunda derivada donde sea conveniente.

27. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

28. $f(x) = x^2 + 3x - 8$

29. $f(x) = (x - 5)^2$

30. $f(x) = -(x - 5)^2$

31. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

32. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

33. $g(x) = x^2(6 - x)^3$

34. $g(x) = -\frac{1}{8}(x + 2)^2(x - 4)^2$

35. $f(x) = x^{2/3} - 3$

36. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

37. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

38. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

39. $f(x) = \cos x - x, \quad [0, 4\pi]$

40. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 41 a 44, recurrir a un sistema algebraico por computadora para analizar la función sobre el intervalo que se indica. *a*) Encontrar la primera y la segunda derivadas de la función. *b*) Determinar cualesquiera extremos relativos y puntos de inflexión. *c*) Representar gráficamente f, f' y f'' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas y establecer la relación entre el comportamiento de f y los signos de f' y f''.

41. $f(x) = 0.2x^2(x - 3)^3, \quad [-1, 4]$

42. $f(x) = x^2\sqrt{6 - x^2}, \quad [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

43. $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x, \quad [0, \pi]$

44. $f(x) = \sqrt{2x}\operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi]$

Desarrollo de conceptos

45. Considerar a una función f tal que f' es creciente. Dibujar gráficas de f para *a*) $f' < 0$ y *b*) $f' > 0$.

46. Considerar a una función f tal que f' es decreciente. Dibujar gráficas de f para *a*) $f' < 0$ y *b*) $f' > 0$.

47. Dibujar la gráfica de una función f tal que *no* tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ aun cuando $f''(c) = 0$.

48. S representa las ventas semanales de un producto. ¿Qué puede decirse de S' y S'' en relación con cada uno de los siguientes enunciados?

a) El ritmo de cambio de las ventas está creciendo.

b) Las ventas están creciendo a un ritmo más lento.

c) El ritmo de cambio de las ventas es constante.

d) Las ventas están estables.

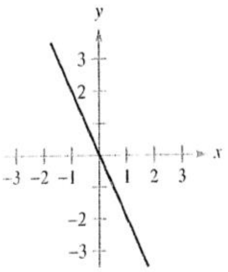
e) Las ventas están declinando, pero a una velocidad menor.

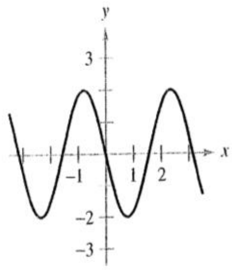
f) Las ventas se han desplomado y han empezado a crecer.

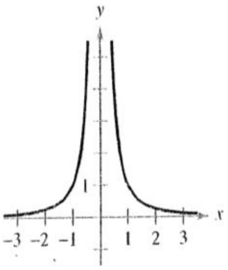
GUÍA DE PRÁCTICAS N° 17: Análisis de gráficas

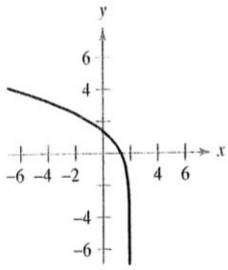
En los ejercicios 1 a 4, hacer que corresponda la gráfica de f en la columna izquierda con la de su derivada en la columna derecha.

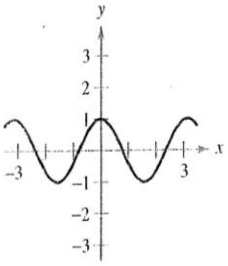
Gráfica de f | *Gráfica de f'*

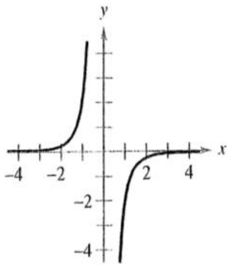
1.


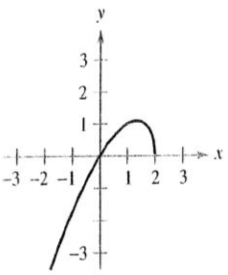
a)


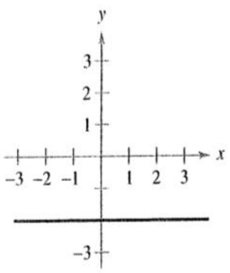
2.


b)


3.


c)


4.


d)


5. ***Razonamiento gráfico*** La gráfica de f se presenta en la figura.

   a) ¿Para qué valores de x es $f'(x)$ cero? ¿Positiva? ¿Negativa?
   b) ¿Para qué valores de x es $f''(x)$ cero? ¿Positiva? ¿Negativa?
   c) ¿En qué intervalo es f' una función creciente?
   d) ¿Para qué valor de x es $f'(x)$ mínima? Para este valor de x, ¿cómo se compara el ritmo de cambio de f con el ritmo de cambio de f para otros valores de x? Explicar.

6. ***Razonamiento gráfico*** Identificar los números reales x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 en la figura tales que cada una de las siguientes afirmaciones sea verdadera.

   a) $f'(x) = 0$ *b)* $f''(x) = 0$
   c) $f'(x)$ no existe.
   d) f tiene un máximo relativo.
   e) f tiene un punto de inflexión.

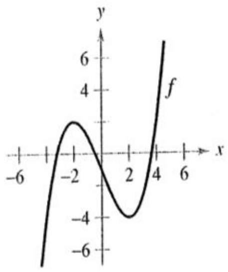


Figura para 5

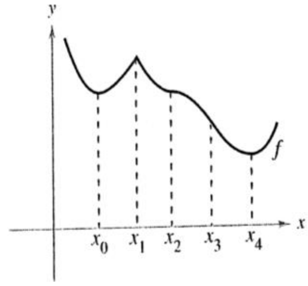


Figura para 6

En los ejercicios 7 a 34, analizar y dibujar una gráfica de la función. Indicar todas las intersecciones, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Utilizar una calculadora para verificar los resultados.

7. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$
8. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
9. $y = \dfrac{1}{x - 2} - 3$
10. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$
11. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$
12. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$
13. $g(x) = x + \dfrac{4}{x^2 + 1}$
14. $f(x) = x + \dfrac{32}{x^2}$
15. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$
16. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$
17. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$
18. $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 5}{x - 2}$
19. $y = x\sqrt{4 - x}$
20. $g(x) = x\sqrt{9 - x}$
21. $h(x) = x\sqrt{9 - x^2}$
22. $y = x\sqrt{16 - x^2}$
23. $y = 3x^{2/3} - 2x$
24. $y = 3(x - 1)^{2/3} - (x - 1)^2$
25. $y = x^3 - 3x^2 + 3$
26. $y = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$
27. $y = 2 - x - x^3$
28. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^3 + 2$
29. $y = 3x^4 + 4x^3$
30. $y = 3x^4 - 6x^2 + \frac{5}{3}$
31. $y = x^5 - 5x$
32. $y = (x - 1)^5$
33. $y = |2x - 3|$
34. $y = |x^2 - 6x + 5|$

En los ejercicios 35 a 38, utilizar un sistema algebraico por computadora para analizar y representar gráficamente la función. Identificar todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

35. $f(x) = \dfrac{20x}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x}$
36. $f(x) = 5\left(\dfrac{1}{x - 4} - \dfrac{1}{x + 2}\right)$
37. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}$
38. $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

En los ejercicios 39 a 46, dibujar una gráfica de la función sobre el intervalo dado. Utilizar una calculadora para verificar la gráfica.

39. $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{18} \operatorname{sen} 3x, \quad 0 \le x \le 2\pi$
40. $y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 18: Razones de cambio

1. Cuando el precio de cierto artículo es “p” dólares por unidad, el fabricante está dispuesto a ofertar “x” cientos de unidades, donde:
   $3p^2 - x^2 = 12$
   ¿Con qué rapidez cambia la oferta cuando el precio es de $4 por unidad y se incrementa a una razón de 87 centavos de dólar por mes?

2. Cuando el precio de cierto artículo es “p” dólares por unidad, los clientes demandan “x” cientos de unidades de dicho producto, donde: $x^2 + 3px + p^2 = 79$.
   ¿Con qué rapidez cambia la demanda con respecto al tiempo cuando el precio es $ 5 por unidad y disminuye a una razón de 30 centavos de dólar por mes? e interprete su resultado.

3. Cuando el precio de cierto artículo es “p” dólares por unidad, los clientes demandan “x” cientos de unidades de dicho producto, donde: $x^2 + 3px + p^2 = 79$.
   ¿Con qué rapidez cambia el precio con respecto al tiempo cuando la demanda es de 300 unidades y aumenta a una razón de 27 unidades por mes? e interprete su resultado.

4. El gerente de una compañía determina que cuando se producen q cientos de unidades de cierto bien, el costo de producción es C miles de dólares, donde:
   $$C^2 - 3q^3 = 4275$$
   Cuando se producen 1 500 unidades, el nivel de producción se incrementa a una razón de 20 unidades por semana. ¿Cuál es el costo en este momento y a qué razón cambia?

5. Cuando el precio de cierto artículo es p dólares por unidad, el fabricante está dispuesto a ofertar “x” miles de unidades, donde:
   $$x^2 - 2x\sqrt{p} - p^2 = 31$$
   ¿Con qué rapidez cambia la oferta cuando el precio es de $9 por unidad y se incrementa a una razón de 20 centavos de dólar por semana?

6. El radio de un círculo está creciendo a razón de 3 centímetros por minuto. Calcule el ritmo de cambio del área cuando r = 6cm

7. El radio de una esfera está creciendo a razón de 2 pulgadas por minuto. Calcule el ritmo de cambio del volumen cuando r = 24 pulgadas.

8. Se infla un globo esférico con gas a razón de 800 centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué ritmo está aumentando su radio en el momento en el que éste está a 30 cm?

9. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 centímetros por segundo. ¿A qué ritmo está aumentando el volumen cuando cada arista mide 30 cm?

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 19: Optimización

1. Un fabricante de equipos de sonido estéreo determina que con el fin de vender "x" unidades de un nuevo modelo, el precio por unidad debe ser: $p = 1000 - x$ soles. El fabricante también determina que el costo total de producir "x" unidades está dada por: $C_{(x)} = 3000 + 20x$ soles.
   a) ¿Cuántas unidades debe producir y vender la compañía con el fin de maximizar las utilidades?
   b) ¿Cuál es la utilidad máxima?
   c) ¿Qué precio por unidad se debe cobrar con el fin de obtener esta utilidad máxima?

2. El costo de producir "q" artículos es $C_{(q)} = q^3 + 5q + 162$ soles y el precio "p" al que se puede vender cada artículo es $p_{(q)} = 180 - 2q$ soles. Determine el nivel de producción "q" que maximicé la utilidad y calcule la utilidad máxima e interprete sus resultados.

3. Raggs, una firma de confecciones determina que con el fin de vender "x" prendas, el precio por cada una debe ser: $p = 150 - 0.5x$ soles. También determina que el costo de producir "x" prendas está dado por: $C_{(x)} = 4000 + 0.25x^2$ soles.

   a) ¿Cuántas unidades debe producir y vender la firma con el fin de maximizar las utilidades?
   b) ¿Cuál es la utilidad máxima?
   c) ¿Qué precio por prenda debe cobrarse con el fin de producir esta máxima utilidad?

4. El administrador de un conjunto habitacional de 80 departamentos quiere determinar que renta cobrar por cada uno. Sabe que una renta de $200 mantendrá todos los departamentos ocupados. Sin embargo, en promedio, 1 departamento permanecerá vacante por cada incremento de $20 en la renta.
   a) Sea "x" el número de incrementos de $20. Encuentre una expresión para la renta de cada departamento.
   b) Encuentre una expresión para el número de departamentos rentados
   c) Encuentre una expresión para el ingreso total.
   d) ¿Qué valor de "x" conduce a un ingreso máximo?
   e) ¿Cuál es el ingreso máximo?

5. Suponga que usted es propietario de un hotel de 40 habitaciones. Todas las habitaciones son ocupadas cuando cobra $20 al día por habitación. Por cada incremento de "2" dólares en la tasa diaria, hay 2 habitaciones desocupadas. ¿Cuánto debe cobrar por habitación con el fin de maximizar la utilidad? y ¿cuánto es la utilidad máxima?

6. Cuando el propietario de un teatro cobra $3 por cada entrada, se presenta una asistencia promedio de 100 personas. Por cada $0.10 de incremento en la entrada, hay una pérdida de 1 cliente del número promedio. ¿Qué valor por entrada se debe cobrar con el fin de maximizar los ingresos? ¿cuánto es el ingreso máximo?

7. El administrador de un huerto de duraznos está tratando de decidir cuándo recoger éstos. Si se recoge ahora, la producción promedio por árbol será de 100 kilogramos, que pueden venderse a 6 soles el kilogramo. Experiencias anteriores muestran que la producción por árbol se incrementará aproximadamente 5 kilogramos por semana, mientras que el precio disminuirá aproximadamente 0,2 soles por kilogramo cada semana.
   Sea "x" el número de semanas que el administrador debería esperar:
   A) Encuentre una expresión para el ingreso total por árbol.
   B) ¿Cuándo deberían recogerse los duraznos para producir un ingreso máximo?
   C) ¿Cuánto es el ingreso máximo?
   D) Encuentre el ingreso por kilogramo.
   E) Encuentre el número de kilos por árbol.

8. Una granja productora de manzanas obtiene un promedio de 30 canastas de manzanas por árbol cuando se plantan 20 árboles en un acre de terreno. Cada vez que se plante un árbol más por acre, la producción disminuye 1 canasta por árbol debido a la congestión adicional. ¿Cuántos árboles se deben plantar con el fin de obtener la mayor producción? y ¿cuánto es la máxima producción?

9. En la planeación de un pequeño restaurante, se estima que se tendrá una ganancia de $5 por asiento si el número de estos es entre 60 y 80, inclusive. Por otra parte, la ganancia en cada asiento disminuirá en 5 centavos de dólar por cada asiento en exceso de 80.
   a) Encuentre el número de asientos que producirá la ganancia máxima
   b) ¿Cuál es la ganancia máxima?

10. Un club local está organizando un vuelo a Hawai. El costo de vuelo es de $425 por persona para 75 pasajeros, con un descuento de $5 por pasajero por cada pasajero en exceso de 75.
   a) Encuentre el número de pasajeros que maximizará el ingreso obtenido en el vuelo.
   b) Encuentre el ingreso máximo

GUÍA DE PRÁCTICAS N° 20: Regla de L´Hospital

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 1 a 4, completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite. Usar una calculadora para hacer la gráfica de la función y apoyar el resultado.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan x - (\ \ /4)}{x-1}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+3}$

24. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-1}{x^2+2x+3}$

25. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$

26. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{x+2}$

27. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{e^{x/2}}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

29. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

30. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

BÁSICA

Haeussler Ernest, Paul Richard y Richard Woor. *Matemáticas para la administración y economía. Decima tercera E*dición. Mexico. Editorial Pearson Educación, 2015. UBICACIÓN: Biblioteca UCCI: 519–H14– 2015.

COMPLEMENTARIA

- **Arya, Jagdish y Lardner, Robin. 2009.** Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Quinta edición. México. Prentice Hall. pág. 832
- **Espinoza Ramos, Eduardo. 2012.** *Análisis Matemático I. Sexta* edición. Lima : Educkperú. pág. 771.
- **Hoffmann Laurence, Bradley, Rosen. 2006.** Cálculo Aplicado para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Octava edición. México. McGraw Hill. pág. 978
- **Howard Anton. 2009.** Cálculo de una Variable. Segunda edición. México. Limusa Wiley. Pág. 888
- **James, Stewart. 2008.** *Cálculo: Trascendentes Tempranas. Sexta edición*. Mexico. Cengage Learning. pág. 1138.
- **Larson Ron, Hostetler Robert P. y Edwards Bruce. 2010.** Cálculo Esencial. Mexico. Cengage Learning. pág. 865.
- **Larson Ron y Edwards Bruce. 2010.** Cálculo 1: De una variable. China. Novena edición. McGraw Hill. pág. 694.
- **Leithold, Louis. 1998.** *El Calculo. Séptima edición.* México : Oxford. Pág 1360.
- **Lial Margaret.** Matemáticas para la administración y la economía. Septima edición. México. Pearson Educación. Pág 720.
- **Tan, S. T. 2009.** *Matemáticas para la administración y economía . Segunda edición*. Mexico : Thomson editores. pág. 992.

RECURSOS DIGITALES

- Froeschl P. Thomas Calculus, Tent Edition, Annotated Instructors Edition. The American Mathematical Monthly 2002; 109(7): 679 – 679.
  http://search, proquest. Com/docview/203738053?accountid=146219
- Heriberto ER,Hector Torres – Silva. Matemática E. Ingeniería: Nuevas Conexiones/mathematics and Engineering: New Connections. Ingeniare:Revista Chilena de Ingeniería 2007 15(3):216 – 219.
  http://search, proquest. Com/docview/
- Cálculo diferencial.
  http://www.youtube.com/watch?v=igXtj49xxSY