



Universidad  
Continental

# Mecánica Vectorial

---

## Guía de Trabajo

---



## **Visión**

Ser una de las 10 mejores universidades privadas del Perú al año 2020, reconocidos por nuestra excelencia académica y vocación de servicio, líderes en formación integral, con perspectiva global; promoviendo la competitividad del país.

## **MISIÓN**

Somos una universidad privada, innovadora y comprometida con el desarrollo del Perú, que se dedica a formar personas competentes, íntegras y emprendedoras, con visión internacional; para que se conviertan en ciudadanos responsables e impulsen el desarrollo de sus comunidades, impartiendo experiencias de aprendizaje vivificantes e inspiradoras; y generando una alta valoración mutua entre todos los grupos de interés.

**Universidad Continental**

Material publicado con fines de estudio

Código: A0310

2017



## Presentación

El material está diseñado para orientar al estudiante en el desarrollo de aplicaciones prácticas relacionadas al avance teórico de la asignatura de Mecánica Vectorial.

La competencia a desarrollar es: Aplica los principios y leyes de la Estática y la Dinámica en la resolución de problemas en el análisis de partículas y cuerpos rígidos en equilibrio, para la determinación de fuerzas en estructuras, en el análisis de las fuerzas en vigas y cables, y en la comprensión del comportamiento dinámico de partículas y de cuerpos rígidos para la resolución de problemas aplicados a máquinas.

En general, contiene un compendio de contenidos temáticos concisos con sus respectivas guías de práctica para ser desarrolladas en forma secuencial pues está estructurada por unidades y temas de acuerdo al sílabo de la asignatura. Las cuatro unidades que estructuran este material desarrollan plenamente la competencia citada.

La elaboración de la presente guía es fruto de la investigación y reformulación de temas que han sido enriquecidos a partir de la revisión y contrastación de diversas fuentes del conocimiento, entre ellos los textos universitarios de mayor connotación mundial. Así mismo la valiosa experiencia docente ha permitido percibir la importancia del aprendizaje de esta asignatura pues trasciende en el estudiante tanto en su formación académica como en el estudio de diversas asignaturas posteriores en sus planes académicos de las cuales la Mecánica Vectorial representa una base sólida e imprescindible.

Es recomendable que el estudiante inicie el desarrollo de este material conceptualizando los principios y leyes teóricas, esto como consecuencia de un hábito de estudio permanente, para luego aplicar estos fundamentos en la resolución de problemas propuestos en las guías de práctica. La naturaleza de la Mecánica Vectorial y de la Ingeniería implican rigurosidad y precisión en los cálculos numéricos, así como reflexión en la interpretación de resultados, pues estos conocimientos consolidarán a la postre un desempeño laboral eficiente.

Agradecemos a todos los que hicieron posible esta publicación y de manera especial al Ing. Carlos Coaquira Rojo por su compromiso en bienestar de la comunidad estudiantil. Cualquier sugerencia que ayude a mejorar este material será bien recibida.



## ÍNDICE

	Pág.
PRESENTACIÓN	3
ÍNDICE	4
<b>PRIMERA UNIDAD</b>	
Tema N° 1: INTRODUCCION	6
Guía de práctica N° 1	13
Tema N° 2: EQUILIBRIO DE UNA PARTICULA	16
Guía de práctica N° 2	19
Tema N° 3: FUERZAS EN EL ESPACIO	21
Guía de práctica N° 3	24
Tema N° 4: CUERPOS RIGIDOS	29
Guía de práctica N° 4	34
<b>SEGUNDA UNIDAD</b>	
Tema N° 5: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN 2D	37
Guía de práctica N° 5	42
Tema N° 6: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN 3D (1)	45
Guía de práctica N° 6	50
Tema N° 7: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN 3D (2)	52
Guía de práctica N° 7	54
Tema N° 8: CENTROIDES Y CENTRO DE GRAVEDAD	56
Guía de práctica N° 8	62
<b>TERCERA UNIDAD</b>	
Tema N° 9: FUERZAS DISTRIBUIDAS	65



Guía de práctica N° 9	68
Tema N° 10: ARMADURAS	70
Guía de práctica N° 10	74
Tema N° 11: ARMAZONES Y MÁQUINAS	78
Guía de práctica N° 11	80
Tema N° 12: FUERZAS EN VIGAS	83
Guía de práctica N° 12	87
<b>CUARTA UNIDAD</b>	
Tema N° 13: MOMENTO DE INERCIA	89
Guía de práctica N° 13	95
Tema N° 14: CINEMÁTICA DE PARTICULAS	98
Guía de práctica 14	101
Tema N° 15: MOVIMIENTO CURVILINEO DE PARTICULAS	103
Guía de práctica N° 15	107
Tema N° 16: CINETICA DE PARTICULAS	109
Guía de práctica N° 16	111
ANEXOS	113
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ENLACES	119

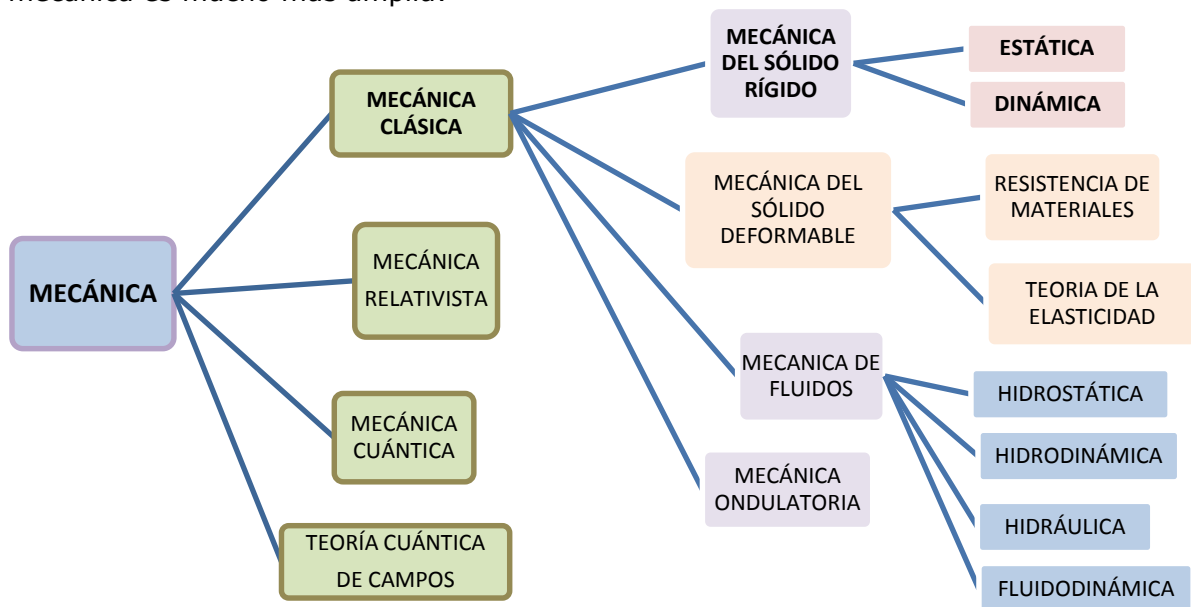


## PRIMERA UNIDAD TEMA N° 1: INTRODUCCIÓN

### 1.1 DEFINICIONES, PRINCIPIOS, LEYES Y UNIDADES.

#### MECÁNICA:

La mecánica es una rama de las ciencias físicas que estudia el estado de reposo o movimiento de los cuerpos que están sometidos a la acción de fuerzas. En general, esta materia puede dividirse a su vez en tres ramas: *mecánica de cuerpos rígidos*, *mecánica de cuerpos deformables* y *mecánica de fluidos*; sin embargo, la clasificación de la mecánica es mucho más amplia:



En este material estudiaremos la mecánica de cuerpos rígidos, la misma que es un requisito básico para el estudio de las otras ramas de la mecánica. La mecánica de cuerpos rígidos es esencial para el diseño y el análisis de muchos tipos de elementos estructurales, componentes mecánicos, mecanismos diversos, o dispositivos electrónicos que pueden encontrarse en la práctica de la ingeniería.

La mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos áreas: Estática y dinámica.

Estática: Estudia el equilibrio de los cuerpos, cuerpos en reposo o a velocidad constante.

Dinámica: Estudia el movimiento acelerado de los cuerpos.

Cantidades básicas: Son las siguientes cuatro:

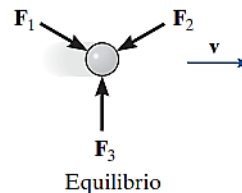
- *Longitud*: Usada para describir la posición de un punto en el espacio y describir el tamaño de un sistema físico. Define distancias y propiedades geométricas.
- *Tiempo*: El *tiempo* se concibe como una secuencia de eventos.
- *Masa*: Es una medición de una cantidad de materia usada para comparar la acción de un cuerpo con la de otro.
- *Fuerza*: Es la acción ejercida de un cuerpo sobre otro. La interacción puede darse por contacto físico o entre cuerpos separados como las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por completo con su magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación.

Idealizaciones importantes:

- *Partícula*: Es el modelo matemático de un cuerpo y se representa como un punto, se considera la masa del cuerpo, pero no sus dimensiones.
- *Cuerpo Rígido*: Es una combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí, tal que las propiedades del material no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo.
- *Fuerza concentrada*: Una *fuerza concentrada* representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo. Una carga puede representarse mediante una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la que se aplique la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Un ejemplo sería la fuerza de contacto entre una rueda y el suelo.

Principios fundamentales: Basados en la evidencia experimental permiten cimentar el estudio de la mecánica, estos son seis:

- *Principio de Transmisibilidad*: En toda la línea de acción de una fuerza su efecto externo ejercido, sobre un cuerpo rígido, es invariable.
- *Primera Ley de Newton*: Una partícula originalmente en reposo, o que se mueve en línea recta con velocidad constante, tiende a permanecer en este estado siempre que la partícula *no* se someta a una fuerza no balanceada.



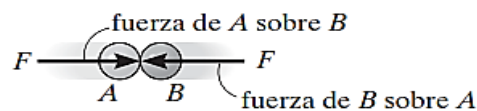
- *Segunda Ley de Newton*. Una partícula sobre la que actúa una *fuerza no balanceada* **F** experimenta una aceleración **a** que tiene la misma dirección que la fuerza y una magnitud directamente proporcional a la fuerza.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



Movimiento acelerado

- *Tercera Ley de Newton*: Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.



Acción-reacción

- *Ley del paralelogramo para la adición de fuerzas*: Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una fuerza llamada resultante.
- *Ley de gravitación de Newton*: Propone que dos partículas cualesquiera o cuerpos tienen una fuerza de atracción (gravitacional) que actúa entre ellos. Sin embargo, en el caso de una partícula localizada en la superficie de la Tierra, o cerca de ella, la única fuerza gravitacional que tiene alguna magnitud significativa es la que existe



entre la Tierra y la partícula. En consecuencia, esta fuerza, conocida como *peso*, será la única fuerza gravitacional que se considere en nuestro estudio de la mecánica.

## 1.2 UNIDADES DE MEDICIÓN

### Conversión de unidades:

En la siguiente tabla se muestran las unidades del SI y del sistema inglés de las cantidades básicas:

Nombre	Longitud	Tiempo	Masa	Fuerza
Sistema Internacional de Unidades SI	metro m	segundo s	kilogramo kg	newton* N $\left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}\right)$
Uso común en Estados Unidos FPS	pie pie	segundo s	slug* $\left(\frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{pie}}\right)$	libra lb

En la siguiente tabla vemos algunos factores de conversión:

Cantidad	Unidad de medida (FPS)	Es igual a	Unidad de medida (SI)
Fuerza	lb		4.448 N
Masa	slug		14.59 kg
Longitud	pie		0.304 8 m

### Sistema Internacional de Unidades

El sistema SI de unidades se usa de manera extensa en mediciones en ingeniería puesto que está destinado a convertirse en el estándar mundial para realizar mediciones. Conocer las reglas del SI así como parte de su terminología resulta relevante para la ingeniería.

- *Uso de prefijos:* Si una cantidad numérica es muy grande o muy pequeña, las unidades usadas para definir su tamaño pueden modificarse mediante el uso de un prefijo, en la tabla siguiente se muestran algunos prefijos:

	Forma exponencial	Prefijo	Símbolo SI
<i>Múltiplo</i>			
1 000 000 000	$10^9$	giga	G
1 000 000	$10^6$	mega	M
1 000	$10^3$	kilo	k
<i>Submúltiplo</i>			
0.001	$10^{-3}$	mili	m
0.000 001	$10^{-6}$	micro	$\mu$

- *Reglas básicas:*
  - ✓ Las cantidades definidas por varias unidades que son múltiplos de otras se separan mediante un *punto* para evitar la confusión con la notación de prefijos, como se observa en  $N = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$ . Asimismo, m.s significa metro-segundo (metro por segundo) en tanto que ms representa mili-segundo.





- ✓ Con excepción de la unidad base kilogramo, por lo general evite el uso de prefijos en el denominador de las unidades compuestas. Por ejemplo, no escriba N/mm, sino kN/m; asimismo, m/mg debe escribirse como Mm/kg.

### 1.3 ESCALARES Y VECTORES

Las cantidades físicas en ingeniería se definen mediante escalares y vectores.

*Cantidad escalar:*

Un *escalar* es cualquier cantidad física que se puede especificar por completo mediante su *magnitud o módulo*. La longitud, la masa, la energía y el volumen son ejemplos de cantidades escalares.

*Cantidad vectorial:*

Un *vector* es cualquier cantidad física que requiere tanto de *magnitud* como de *dirección* y *sentido* para su descripción completa. La fuerza, el desplazamiento, la velocidad y el impulso son ejemplos de cantidades vectoriales.

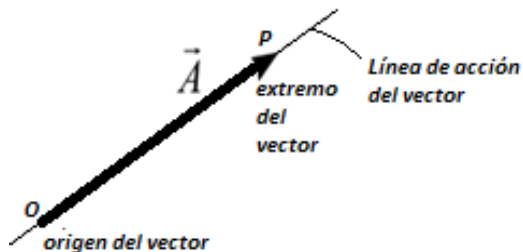
### 1.4 VECTOR

Los vectores son entes matemáticos cuya determinación exige el conocimiento de una magnitud, una dirección y un sentido.

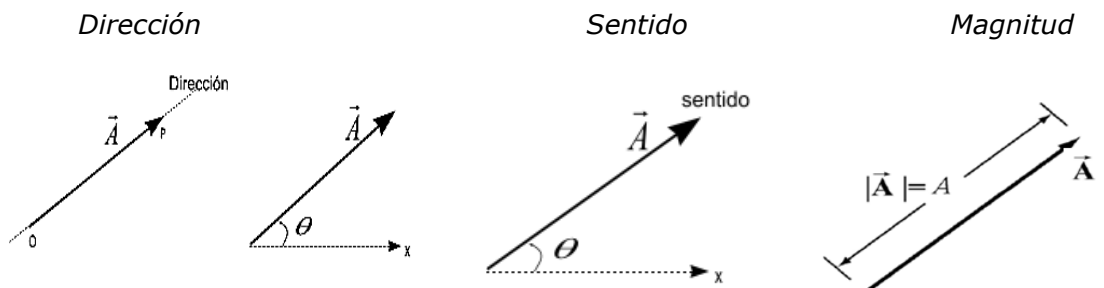
- ✓ Gráficamente un vector se representa por un **segmento de recta orientado**.
- ✓ Analíticamente se representa por una letra con una flecha encima.

$$\vec{A} = \text{Vector}$$
$$|\vec{A}| = A = \text{Magnitud del Vector } \vec{A}$$

**Elementos de un vector:**

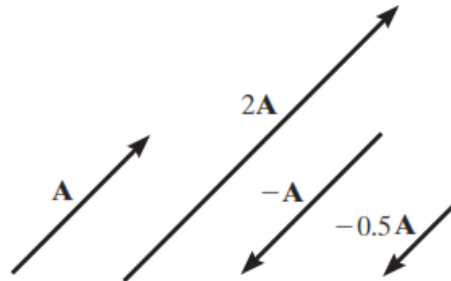


- ✓ *Dirección:* Gráficamente viene representada por la recta soporte o línea de acción. Representada en el plano por un ángulo de referencia.
- ✓ *Sentido:* Es el elemento que indica la orientación del vector, representada por la cabeza de flecha.
- ✓ *Magnitud:* Representa el valor numérico de la cantidad física a la cual se asocia la longitud del segmento de recta.



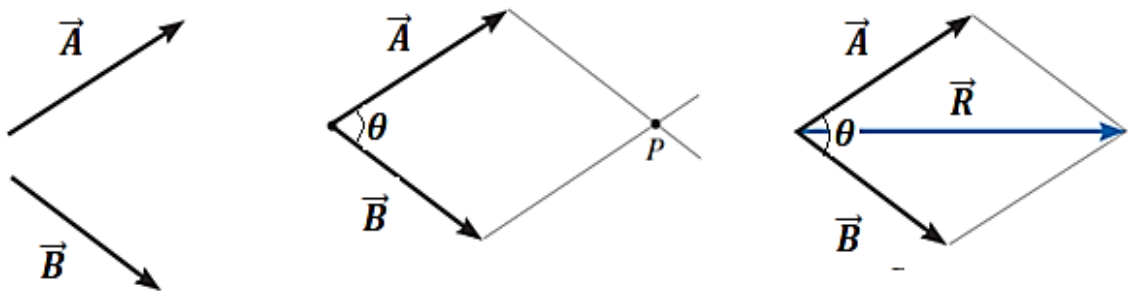
### 1.5 PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Si un vector se multiplica por un escalar positivo, su magnitud se incrementa en esa cantidad. Cuando se multiplica por un escalar negativo también cambiará el sentido de la dirección del vector. En la figura se muestran ejemplos gráficos de estas operaciones.



### 1.6 ADICION DE VECTORES

Todas las cantidades vectoriales obedecen la *ley del paralelogramo para la suma*. A manera de Ilustración, los dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de la figura adjunta aplicados en un punto se suman para formar un vector "resultante"  $\vec{R}$  aplicado en el mismo punto. Los vectores sumandos a manera de lados forman un paralelogramo sobre cuya diagonal se traza el vector resultante o suma.



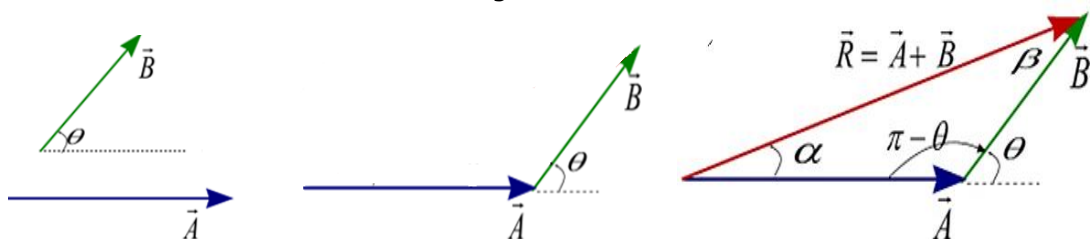
Se cumple la suma vectorial:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

Para determinar el módulo del vector suma podemos usar la ley de cosenos:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

Asimismo podemos sumar los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  con el método del triángulo, graficando un vector a continuación del otro y trazar la resultante uniendo el origen del trazo con el extremo libre del segundo vector.



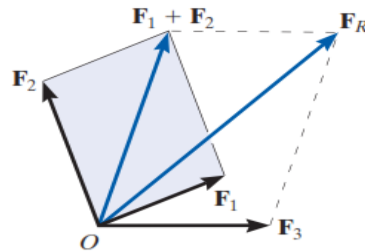
Para relacionar las magnitudes de los vectores usamos la ley de senos:

$$\frac{|\vec{R}|}{\text{sen}(\pi - \theta)} = \frac{|\vec{A}|}{\text{sen} \beta} = \frac{|\vec{B}|}{\text{sen} \alpha}$$

### 1.7 SUMA DE VARIAS FUERZAS

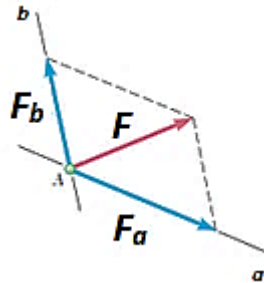
Si deben sumarse más de dos fuerzas, pueden llevarse a cabo aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo para obtener la fuerza resultante.

Por ejemplo, si tres fuerzas  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  actúan en un punto  $O$ , ver figura, se calcula la resultante de dos cualesquiera de las fuerzas, digamos  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , y luego esta resultante se suma a la tercera fuerza, dando la resultante de las tres fuerzas; es decir:  $\mathbf{F}_R = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_3$ .



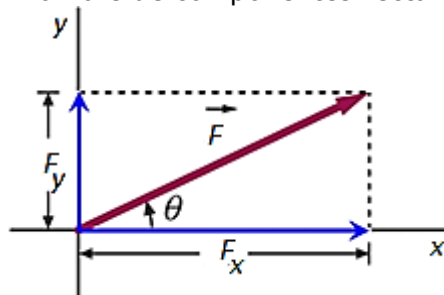
### 1.8 DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Una fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre una partícula puede ser reemplazada por dos o más fuerzas que en conjunto produzcan el mismo efecto sobre la partícula. Estas fuerzas se denominan componentes de la fuerza original  $\mathbf{F}$ , y al proceso de sustituirlas en lugar de  $\mathbf{F}$  se le llama descomposición de la fuerza  $\mathbf{F}$  en sus componentes.



### 1.9 COMPONENTES RECTANGULARES DE UN VECTOR

En muchos problemas será conveniente descomponer el vector  $\vec{F}$  en sus componentes perpendiculares entre sí, luego el vector puede representarse como la suma de dos vectores que se encuentran sobre los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente. Estos vectores reciben el nombre de componentes rectangulares del vector  $\vec{F}$ .

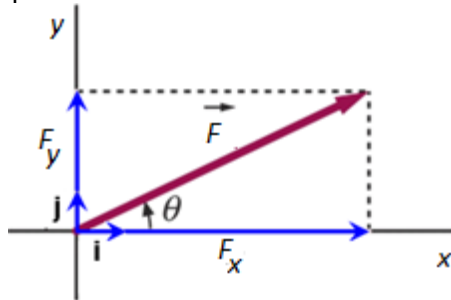


- ✓  $F_x$  es la componente del vector  $F$  en el eje  $x$ .
- ✓  $F_y$  es la componente del vector  $F$  en el eje  $y$ .

Se cumple:

$$F_x = F \cos\theta \quad F_y = F \sin\theta \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

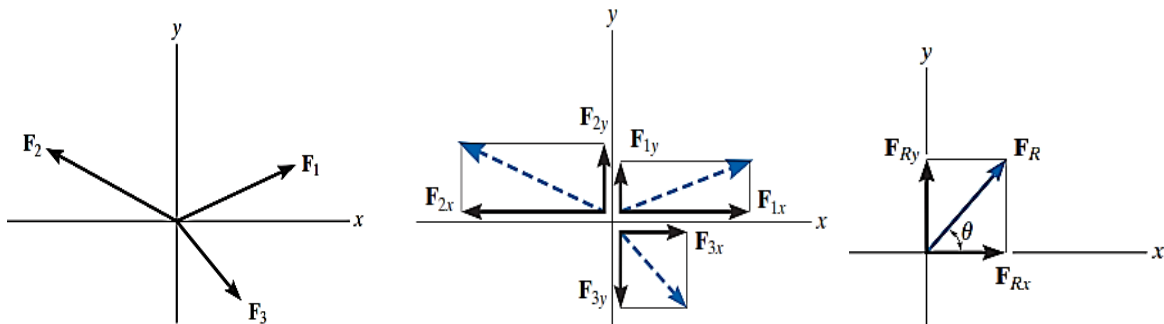
Podemos usar *vectores unitarios*, vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$ , representados por  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , respectivamente, luego el vector  $F$  y sus componentes se escriben así.



$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

### 1.10 SUMA DE UN SISTEMA DE FUERZAS COPLANARES

Dado un conjunto de fuerzas coplanares se puede obtener una solución analítica para obtener la fuerza resultante, esto mediante la descomposición de cada fuerza en sus componentes rectangulares.



Luego la suma de fuerzas está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j} \\ &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j} \\ &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x \\ F_{Ry} &= \sum F_y \end{aligned}$$

La magnitud y dirección de la fuerza resultante están dadas por:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad \theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$



## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 1

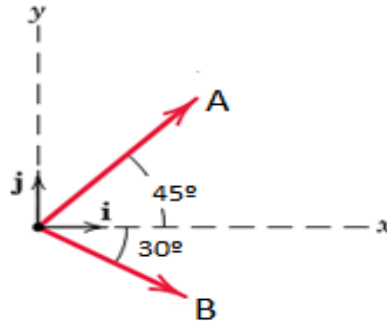
### TEMA N° 1: Fuerzas en el plano

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

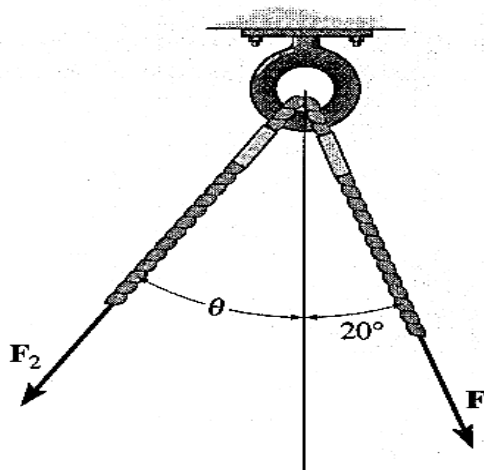
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada y con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

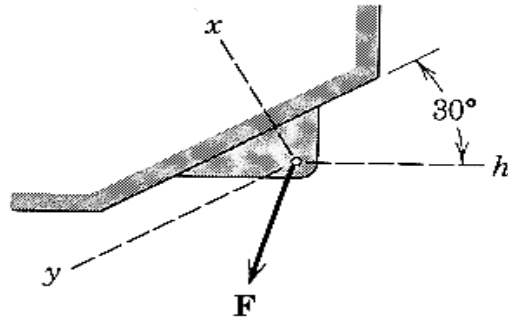
1. Para los vectores A y B de 4 y 3 unidades respectivamente.
  - a) Determine la magnitud del vector suma S.
  - b) Calcule el ángulo entre el vector suma y el eje positivo x.
  - c) Escriba el vector suma S en forma cartesiana, usando vectores unitarios, además de su vector unitario.



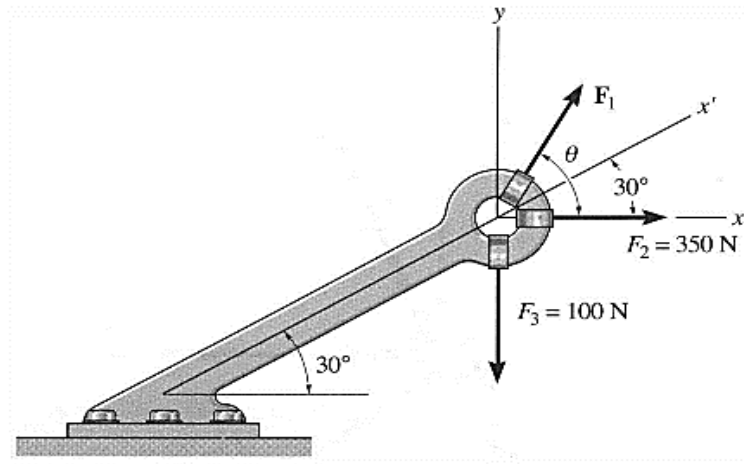
2. Dados los vectores  $F_1$  y  $F_2$  mostrados en la figura.
  - a) Si la magnitud de la resultante es de 1 kN y dirigida verticalmente hacia abajo siendo  $\theta = 30^\circ$ , determine las magnitudes de  $F_1$  y  $F_2$ .
  - b) Si los vectores  $F_1$  y  $F_2$  son de magnitudes 3 y 5 kN respectivamente, y la magnitud de la resultante en este caso es de  $F_R = 7$  kN, determine la medida del ángulo  $\theta$  ( que forma  $F_2$  y la vertical) y la medida del ángulo que forma el vector resultante  $F_R$  y la vertical.



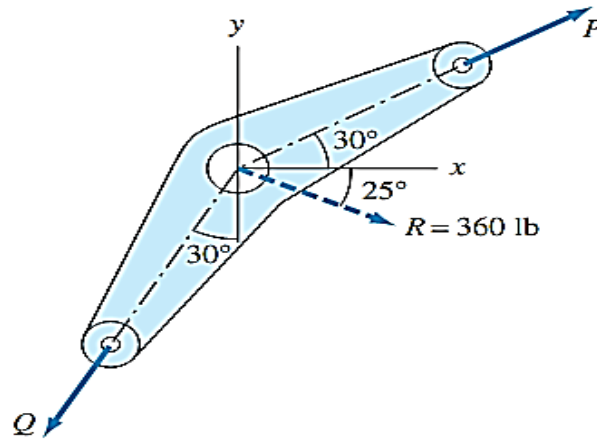
3. La fuerza  $\mathbf{F}$  expresada con sus componentes rectangulares está dada por la expresión:  $\vec{F} = -40\vec{i} + 60\vec{j}$  N.
  - a) Determine la magnitud de  $\vec{F}$  y su dirección respecto al eje  $y$ .
  - b) Determine las magnitudes de las componentes no rectangulares de  $\vec{F}$  en las direcciones  $y$  y  $h$ .



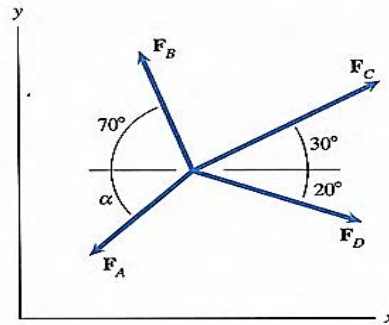
4. Determine la magnitud y la dirección  $\theta$  de  $\mathbf{F}_1$  de tal modo que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje  $x'$  positivo y tenga una magnitud de  $F_R = 600\text{N}$ .



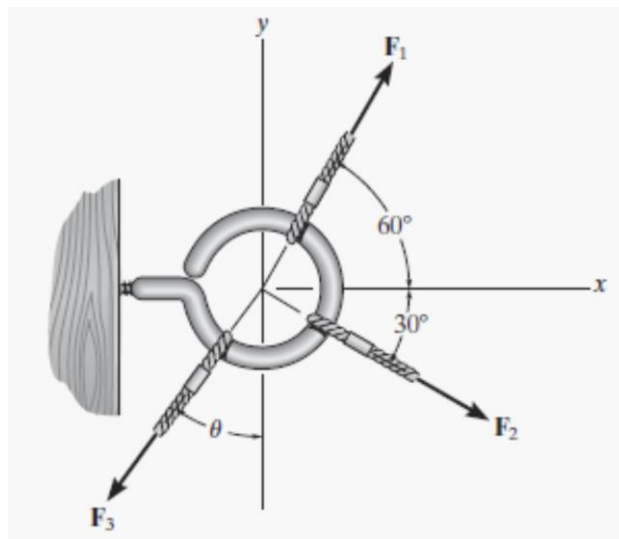
5. Si  $\vec{R}$  es la resultante de los vectores  $\vec{P}$  y  $\vec{Q}$  en cada caso determine las magnitudes de P y Q.



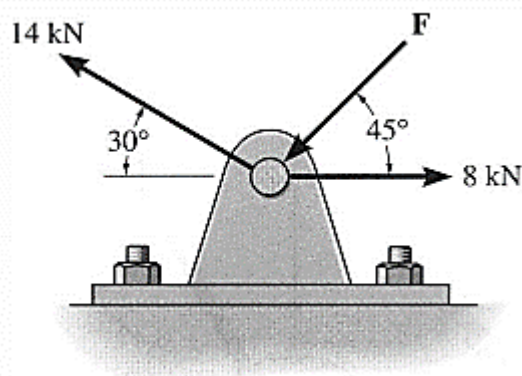
6. Las cuatro fuerzas concurrentes mostradas tiene una suma vectorial igual a cero. Se sabe que los módulos de las fuerzas  $F_B$ ,  $F_C$  y  $F_D$  son  $800\text{lb}$ ,  $1000\text{lb}$  y  $900\text{lb}$  respectivamente. Determine la magnitud de  $F_A$  y la medida del ángulo  $\alpha$ .



7. Las tres fuerzas concurrentes que actúan sobre la armella producen una fuerza resultante  $F_R = 0$ . Si  $F_2 = 2/3 F_1$  y  $F_1$  debe estar a  $90^\circ$  de  $F_2$  como se muestra en la figura, determine la magnitud requerida de  $F_3$ , expresada en términos de  $F_1$  y del ángulo  $\theta$ .



8. Determine la magnitud de la fuerza  $\mathbf{F}$  de manera que la fuerza resultante de las tres fuerzas sea tan pequeña como sea posible. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante?



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler,** R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler.** (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Estática. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

## TEMA N° 2: EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA



### 2.1 Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue: "Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento)".



### 2.2 Condición para el equilibrio de una partícula en el plano

Una partícula está en *equilibrio* si permanece en reposo y en un principio estaba en reposo, o si tiene una velocidad constante y originalmente estaba en movimiento. No obstante, más a menudo, el término "equilibrio" o, de manera más específica, "equilibrio estático" se usa para describir un objeto en reposo.

Para mantener el equilibrio, es *necesario* satisfacer la primera ley del movimiento de Newton, la cual requiere que la *fuerza resultante* que actúa sobre una partícula sea igual a *cero*. Esta condición puede ser establecida matemáticamente como:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Para un cuerpo en equilibrio en dos dimensiones:

$$\sum F = (\sum F_x)\hat{i} + (\sum F_y)\hat{j} = 0$$

Ecuación que se cumple si se verifica que:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$



### 2.3 Diagrama de cuerpo libre

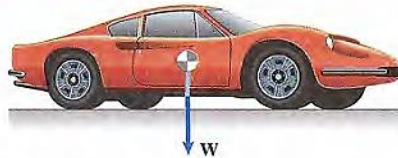
Para aplicar la ecuación de equilibrio debemos tomar en cuenta *todas* las fuerzas conocidas y desconocidas que actúan *sobre* la partícula. La mejor manera de hacer esto es pensar en la partícula como aislada y "libre" de su entorno. Un dibujo que muestra la partícula junto con *todas* las fuerzas que actúan sobre ella se denomina *diagrama de cuerpo libre (DCL)*.

Entre las fuerzas más comunes para analizar el equilibrio de partículas tenemos:

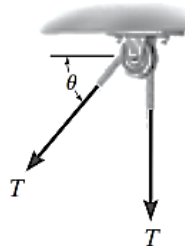
- a) **Fuerza gravitacional:** Debida a la interacción con el planeta, se representa por un vector dirigido hacia abajo. A su magnitud se le denomina comúnmente peso ( $W$ ). La magnitud del peso de un cuerpo se relaciona con su masa así:

$$W = mg$$

Unidades en el SI:  $W$  = Peso (en newton)  
 $m$  = Masa (en kilogramos)  
 $g$  = Aceleración de la gravedad =  $9.81 \text{ m/s}^2$

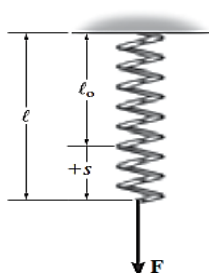


- b) **Fuerzas en cables y poleas:** Para partículas supondremos que todos los cables (o cuerdas) tienen un peso insignificante y que no se pueden deformar. Además, un cable puede soportar *sólo* una tensión o fuerza de "jalón" que actúa en la dirección del cable. La fuerza de tensión desarrollada en un *cable continuo* que pasa sobre una polea sin fricción, debe tener una magnitud *constante* para mantener al cable en equilibrio. En la figura el cable se somete a una tensión  $T$  en toda su longitud.



- c) **Fuerzas en resortes:** Si un *resorte elástico lineal* (o cuerda) de longitud no deformada  $l_0$  se usa como soporte de una partícula, su longitud cambiará en proporción directa a la fuerza  $F$  que actúe sobre él, figura adjunta. Una característica que define la "elasticidad" de un resorte es la **constante de resorte o rigidez,  $k$** . La magnitud de la fuerza ejercida en un resorte elástico lineal que tiene una rigidez  $k$  y está deformado (alargado o acortado) una distancia igual a  $s = l - l_0$ , medida desde su posición *sin carga*, es:

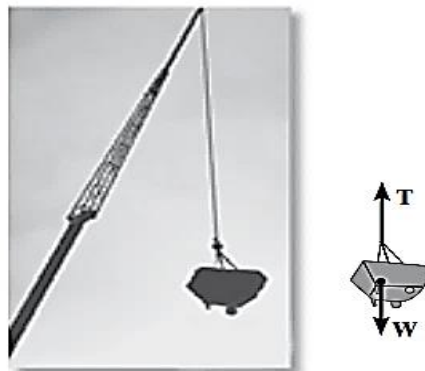
$$F = k s$$



**Procedimiento para trazar el DCL de una partícula:**

- 1º Trace un perfil delineado. Imagine que la partícula está *aislada* o “liberada” de su entorno al trazar su perfil delineado.
- 2º Muestre todas las fuerzas. Indique sobre este bosquejo *todas* las fuerzas que *actúan sobre la partícula*. Éstas pueden ser *fuerzas activas*, que tienden a poner la partícula en movimiento, o *fuerzas reactivas*, que son el resultado de las restricciones o soportes que tienden a evitar el movimiento.
- 3º Identifique cada una de las fuerzas. Las fuerzas que son *conocidas* deben ser marcadas con sus propias magnitudes y direcciones. Para representar las magnitudes y direcciones de las fuerzas desconocidas se usan letras.

Ejemplo de DCL: La cubeta se mantiene en equilibrio mediante el cable, e intuitivamente sabemos que la fuerza en el cable debe ser igual al peso de la cubeta. Al trazar un diagrama de cuerpo libre de la cubeta podemos entender por qué esto es así. Este diagrama muestra que sólo hay dos fuerzas que *actúan sobre la cubeta*, a saber, su peso **W** y la fuerza **T** del cable.



**2.4 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el plano**

1º Diagrama de cuerpo libre.

- ✓ Establezca los ejes *x*, *y* en cualquier orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas.
- ✓ Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.

2º Aplique las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

- ✓ Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo.
- ✓ Como la magnitud de una fuerza siempre es una cantidad positiva, si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 2

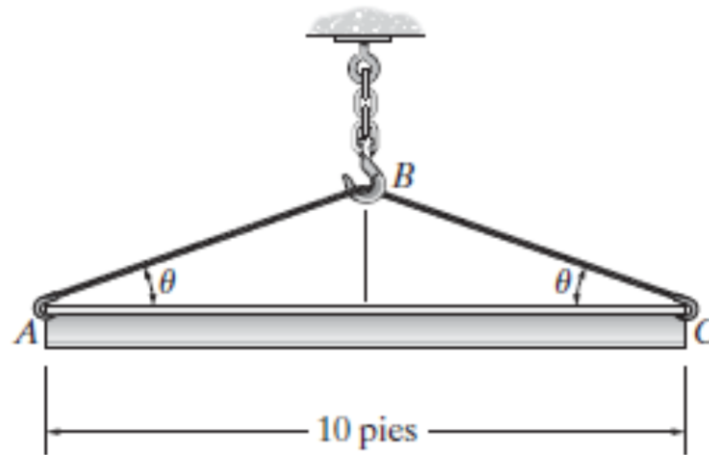
### Tema: Equilibrio de una partícula en el plano

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

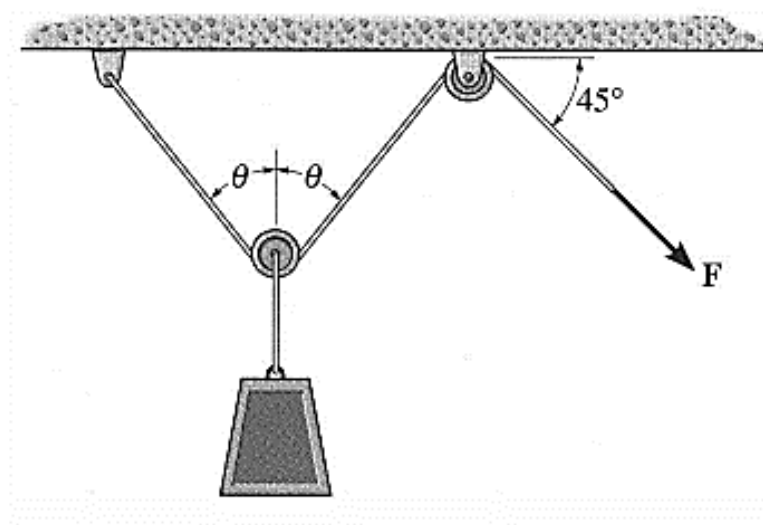
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

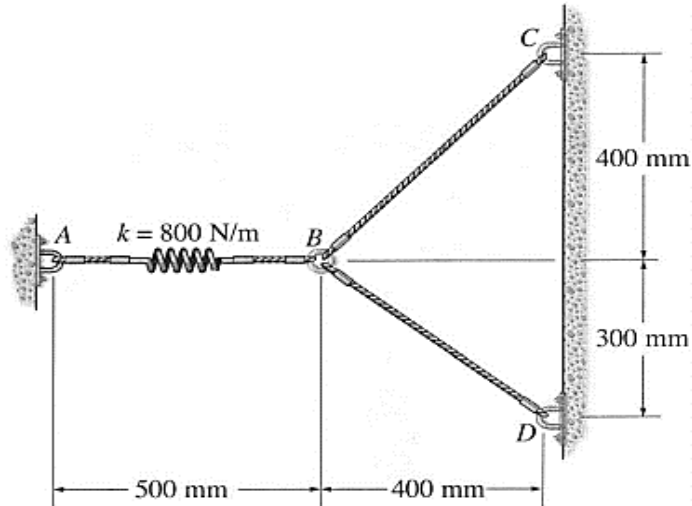
1. La viga tiene un peso de 700 lb. Determine el cable ABC más corto que puede usarse para levantarla, si la fuerza máxima que puede soportar el cable es de 1500 lb.



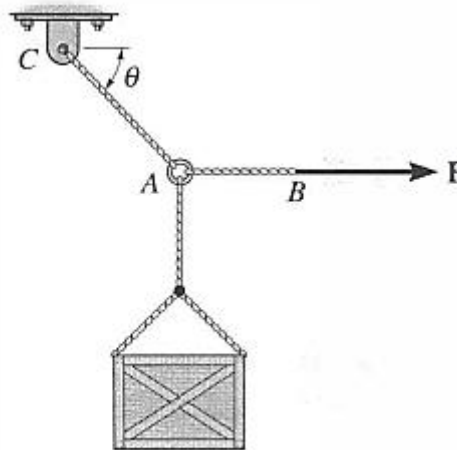
2. La carga tiene una masa de 15 kg y es levantada por el sistema de poleas mostrado. Determine la fuerza  $F$  en la cuerda como función del ángulo  $\theta$ . Grafique la función de fuerza  $F$  versus el ángulo  $\theta$  para  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ .



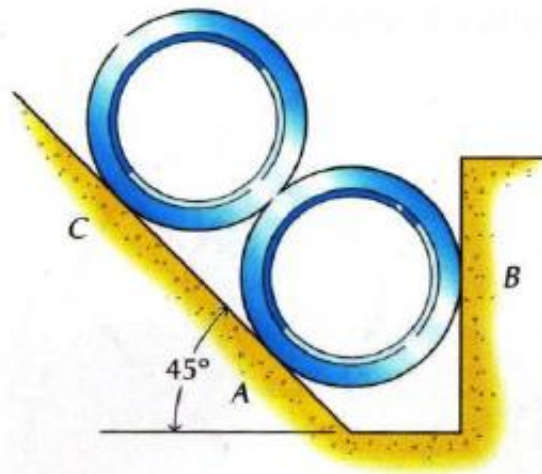
3. El resorte tiene una rigidez  $k = 800 \text{ N/m}$  y longitud no alargada de 200 mm. Determine la fuerza en los cables BC y CD cuando el resorte se mantiene en la posición mostrada.



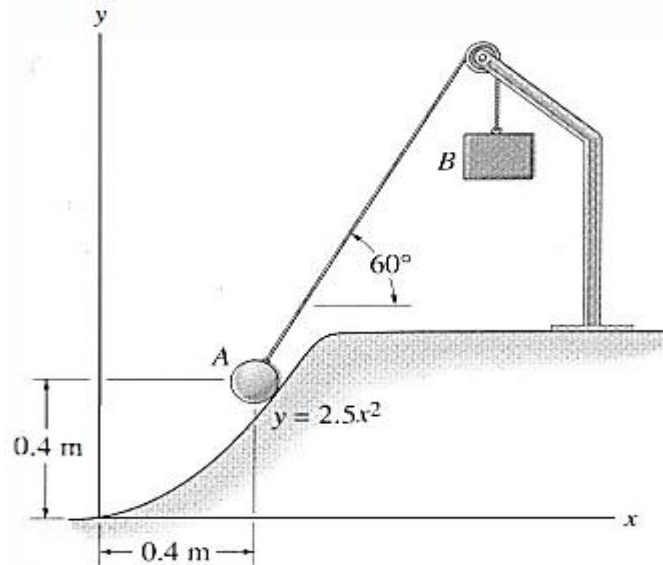
4. El cajón de  $500 \text{ lb}$  va a ser levantado usando las cuerdas AB y AC. Cada cuerda puede resistir una tensión máxima de  $2500 \text{ lb}$  antes de romperse. Si AB siempre permanece horizontal, determine el ángulo  $\theta$  más pequeño con que el cajón puede ser levantado.



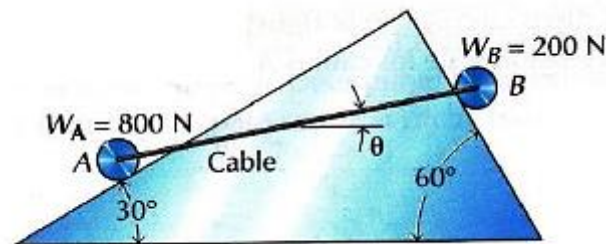
5. Determinar las fuerzas que ejercen los apoyos sobre las tuberías, de  $100 \text{ lb}$  de peso cada una, en los contactos A, B y C. Supóngase lisas todas las superficies.



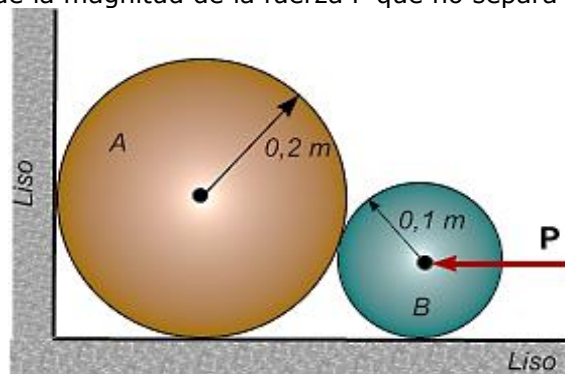
6. Una esfera de  $4 \text{ kg}$  descansa sobre la superficie parabólica lisa mostrada. Determine la fuerza normal que ejerce la esfera sobre la superficie y la masa  $m_B$  del bloque B necesaria para mantenerla en la posición de equilibrio que aparece en la figura.



7. Dos cuerpos A y B que pesan 800 N y 200 N, respectivamente, se mantienen en equilibrio sobre superficies perpendiculares mediante un cable flexible que los une y que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal, según se indica en la figura. Hallar las reacciones de las superficies sobre los cuerpos, la tensión del cable y el ángulo  $\theta$ . Suponer ausencia de rozamiento en todas las superficies.



8. Los cilindros lisos A y B tienen masas de 100 y 30 kg, respectivamente. (a) Calcule todas las fuerzas que actúan sobre A cuando la magnitud de la fuerza P es 2000 N, (b) Calcule el valor máximo de la magnitud de la fuerza P que no separa al cuerpo A del suelo.



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler, R.C.** (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler.** (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

### TEMA N° 3: FUERZAS Y EQUILIBRIO EN EL ESPACIO



#### 3.1 Vectores cartesianos en el espacio:

Las operaciones del álgebra vectorial, cuando se aplican a la resolución de problemas en *tres dimensiones*, se simplifican considerablemente si primero se representan los vectores en forma vectorial cartesiana, lo cual servirá para encontrar la fuerza resultante de un sistema de fuerzas concurrentes.

*Vector unitario:* Vector de magnitud unitaria que indica la dirección y sentido de algún vector dado, luego para  $\vec{A}$ :

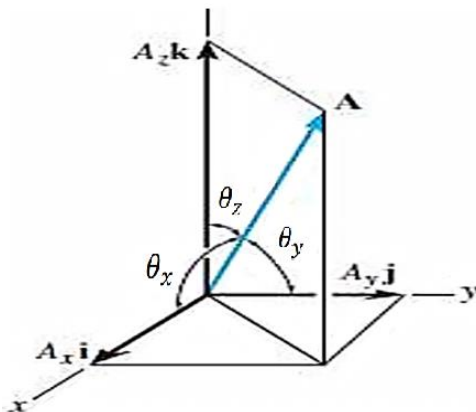
$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

*Vectores unitarios cartesianos.*

En tres dimensiones, el conjunto de vectores unitarios cartesianos  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , se usa para designar las direcciones de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.

#### 3.2 Representación de un vector cartesiano en tres dimensiones:

*Representación gráfica de un vector cartesiano en el espacio*



*Forma cartesiana de un vector*

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

*Magnitud de un vector cartesiano*

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

*Dirección de un vector cartesiano*

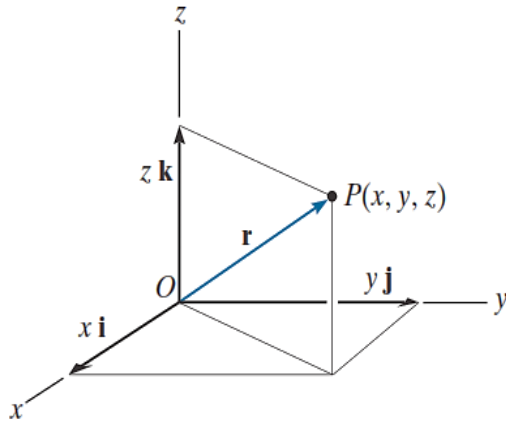
Dada por los cosenos directores:

$$\cos \theta_x = \frac{A_x}{A} \quad \cos \theta_y = \frac{A_y}{A} \quad \cos \theta_z = \frac{A_z}{A}$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

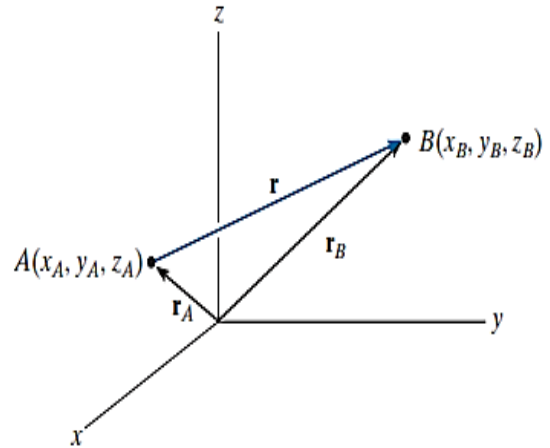
**3.3 Vector de Posición:** Se define como un vector fijo que localiza un punto en el espacio en relación con otro punto.

Desde el origen hasta un punto P.



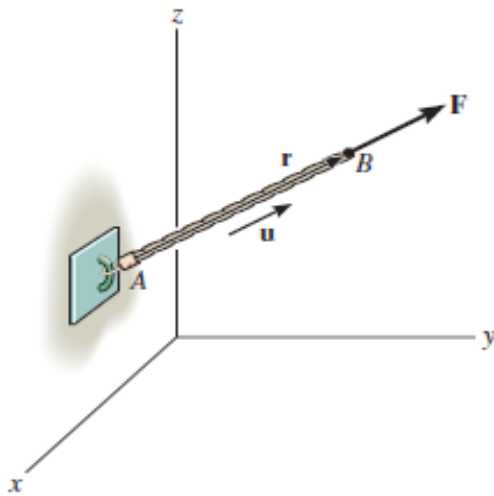
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Desde un punto A hasta otro punto B.



$$\vec{r} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

**3.4 Vector fuerza en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción:**



$$\vec{F} = |F| \hat{u}_{AB}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|}$$

**3.5 Suma de fuerzas concurrentes en el espacio:**

La suma de dos o más vectores se simplifican considerablemente si los vectores se expresan en términos de sus componentes cartesianas.

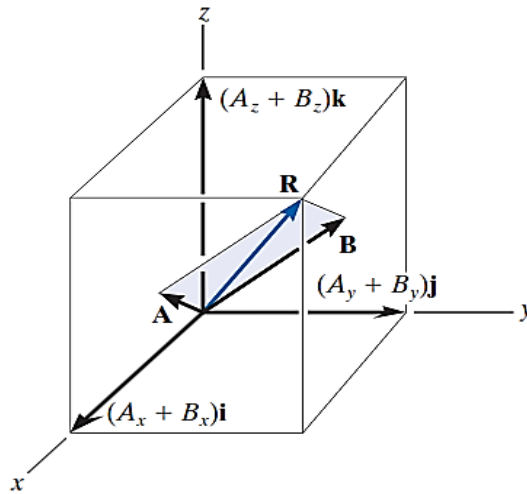
Dados los vectores:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \quad \mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

El vector resultante  $\mathbf{R}$  está dado por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$





Si esto se generaliza y se aplica a un sistema de varias fuerzas concurrentes, entonces la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas presentes en el sistema y puede escribirse como:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} + \sum F_z \hat{k}$$

De la cual se desprende:

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z$$

Luego, la magnitud y dirección de la resultante viene dada por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

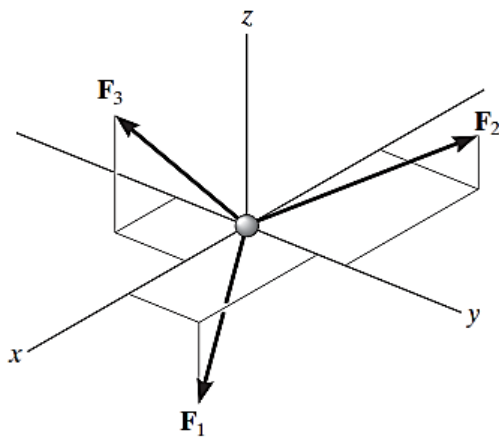
### 3.6 Equilibrio de una partícula en el espacio:







En el caso de un sistema de fuerza tridimensional, como el de la figura siguiente, podemos descomponer las fuerzas en sus respectivas componentes  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , de manera que para el equilibrio se debe cumplir:



$$\sum \vec{F} = \left(\sum F_x\right)\hat{i} + \left(\sum F_y\right)\hat{j} + \left(\sum F_z\right)\hat{k} = 0$$

Para satisfacer esta ecuación se requiere que:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0$$

Por tanto, estas tres ecuaciones establecen que la *suma algebraica* de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula a lo largo de cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero.

**Procedimiento para el análisis del equilibrio de partículas en el espacio:**

1º Se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Marque todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas sobre el diagrama.

2º Escribir las ecuaciones de equilibrio. Expresar primero cada fuerza como un vector cartesiano en el diagrama de cuerpo libre, sustituya esos vectores en  $\sum \vec{F} = 0$ , y después iguale a cero las componentes  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ . Si la solución para una fuerza da un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado en el diagrama de cuerpo libre.



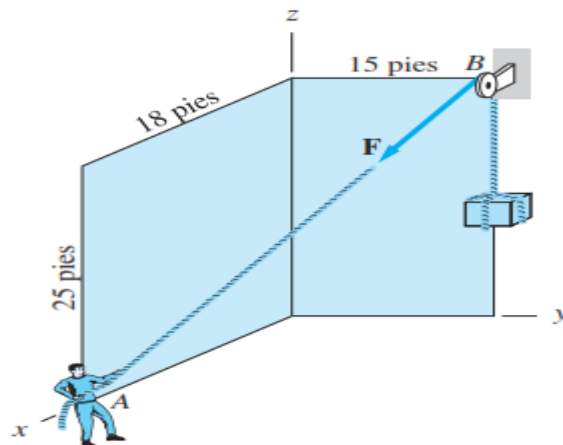
### PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 3 Tema: Fuerzas y Equilibrio en el espacio

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

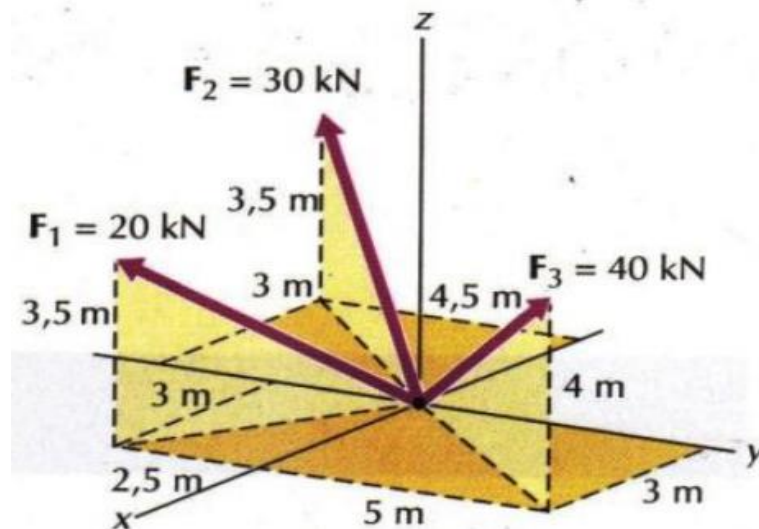
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

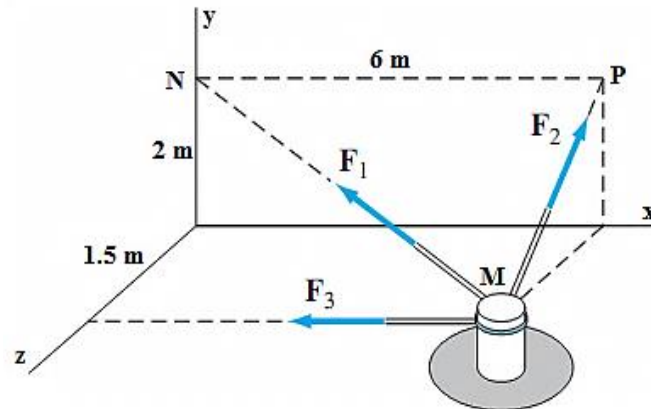
1. Si la magnitud de la tensión en el cable es de 120 lb, determine la expresión cartesiana de  $F$ .



2. Determinar el módulo de la resultante de las tres fuerzas representadas en la figura.

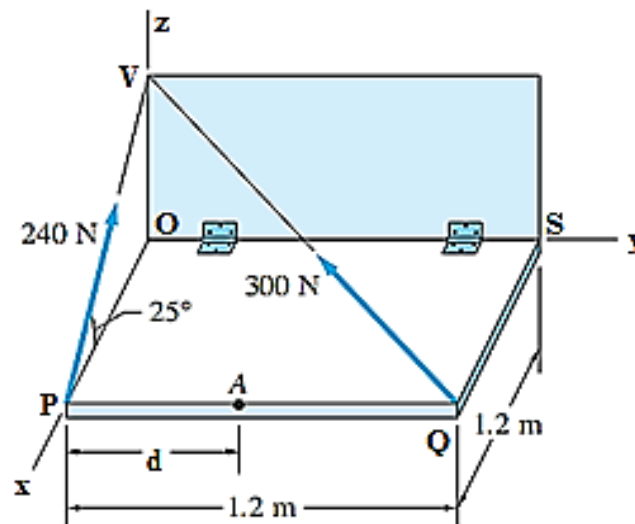


3. Según la figura tres cuerdas son atadas al poste en M. Las fuerzas en las cuerdas son  $F_1 = 130 \text{ N}$ ,  $F_2 = 37.5 \text{ N}$  y  $F_3 = 30 \text{ N}$ . Determine:
  - a) La expresión cartesiana del vector fuerza resultante  $R$  de las tensiones en la cuerda.
  - b) La magnitud y dirección de la resultante  $R$  de las tensiones dadas.
  - c) Las coordenadas del punto en el cual la línea de  $R$  que interseca al plano  $yz$ .

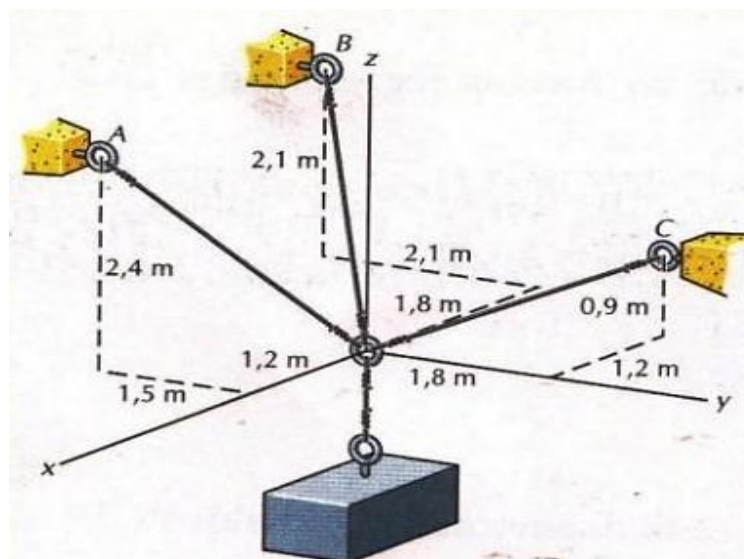


4. La puerta PQSO es sostenida en el plano horizontal por dos cables PV y QV. Determinar:

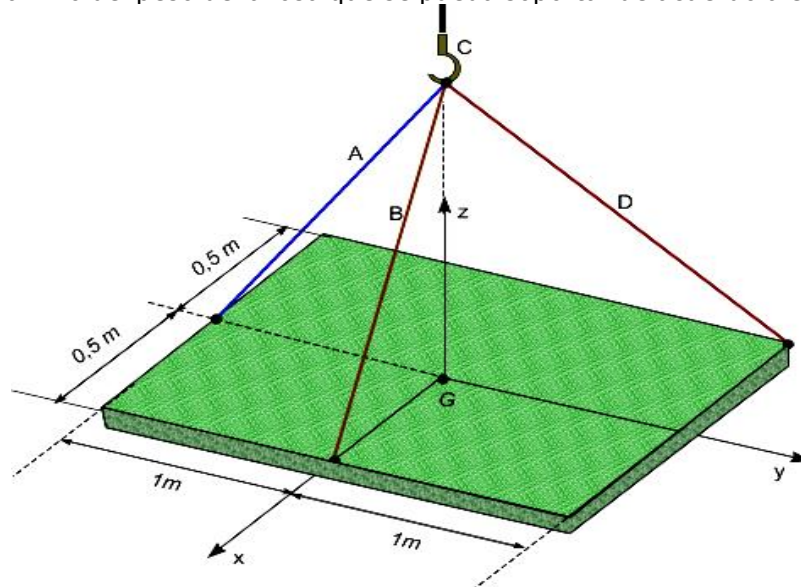
- Una fuerza equivalente  $R$ , que pase por el punto A, que reemplace a las dos fuerzas en los alambres.
- Determine la coordenada  $d$  del punto A.



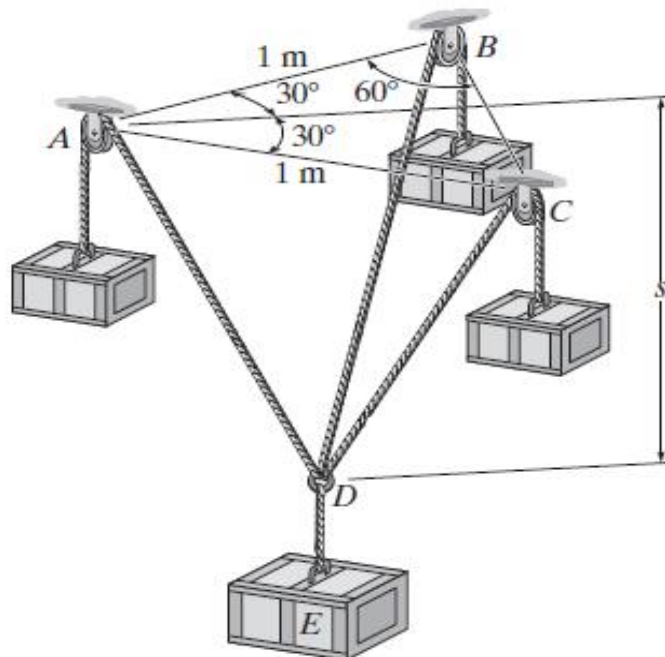
5. Un bloque está suspendido de un sistema de cables tal como se indica en la figura. El peso del bloque es 500 N. Determinar las tensiones en los cables A, B y C.



6. La losa de granito de 500 N mostrada en la figura está siendo bajada lentamente por un gancho en el extremo del cable C. Los cables A, B y D están fijos a la losa y al gancho. Si la distancia del gancho a la superficie de la losa es de 2 m. Determine:
- Las expresiones cartesianas de las tensiones.
  - Se sabe que la tensión máxima que puede soportar cada cable es de 500N. Determine el valor máximo del peso de la losa que se pueda soportar de acuerdo a esta condición.



7. Cada uno de los tres bloques exteriores tiene una masa de 2 kg, y el bloque central E tiene una masa de 3 kg. Determine la flecha  $s$  necesaria para el equilibrio del sistema.



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.**, (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.  
**Hibbeler**, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.  
**Bedford Fowler**. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

## TEMA N° 4: CUERPOS RIGIDOS



Un *cuerpo rígido* puede considerarse como una combinación de un gran número de partículas donde todas éstas permanecen a una distancia fija entre sí, tanto antes como después de la aplicación de una carga. Este modelo es importante porque las propiedades del material de todo cuerpo que se supone rígido, no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. En la mayoría de los casos, las deformaciones reales que ocurren en estructuras, máquinas, mecanismos, etcétera, son relativamente pequeñas, y el supuesto de cuerpo rígido resulta adecuado para el análisis.

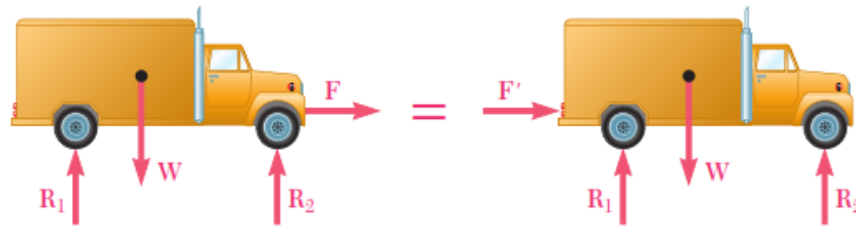
Los efectos de las fuerzas dependen no sólo de sus magnitudes y direcciones, sino también de los *momentos* que ejercen. El momento de una fuerza es una medida de su tendencia a causar giros. Los momentos causan el giro de maquinaria como la manivela de un barco de vela, las ruedas de un vehículo, los cigüeñales y las turbinas. Aun si la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, éstas pueden ejercer un momento, que se denomina par. Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido a las fuerzas externas y pares actuantes en él es igual a cero. Antes de continuar con el estudio del diagrama de cuerpo libre y del equilibrio, es necesario conocer sobre los momentos, los pares, y el concepto de sistemas equivalentes de fuerzas y momentos.

### 4.1 Cuerpos Rígidos y Principio de Transmisibilidad.

En toda la línea de acción de una fuerza su efecto externo ejercido, sobre un cuerpo rígido, es invariable. Luego, el Principio de Transmisibilidad establece que las condiciones de equilibrio o movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza  $F$  que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza  $F'$  que tiene la misma magnitud, dirección y sentido,

pero que actúa en un punto distinto, siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción.

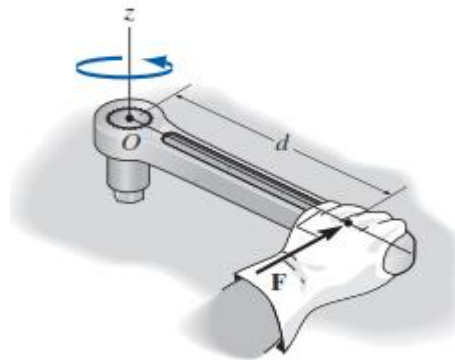
Las dos fuerzas,  $F$  y  $F'$ , tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son equivalentes. las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de ben ser representadas por una clase de vector diferente, el *vector deslizante*.



#### 4.2 Momento de una fuerza

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo, ésta producirá una tendencia a que el cuerpo gire alrededor de un punto que no está en la línea de acción de la fuerza. Esta tendencia a girar se conoce en ocasiones como *par de torsión*, pero con mayor frecuencia se denomina el momento de una fuerza o simplemente el *momento*. Tal es el caso de la llave de torsión que se usa para desenroscar el perno de la figura adjunta. Si se aplica una fuerza al maneral de la llave ésta tenderá a girar el perno alrededor del punto  $O$  (o el eje  $z$ ).

La magnitud del momento es directamente proporcional a la magnitud de  $F$  y a la distancia perpendicular o *brazo de momento*  $d$ . Cuanto más grande sea la fuerza o más grande sea el brazo de momento, mayor será el momento o el efecto de giro. Las unidades del momento son el producto de las unidades de fuerza y distancia, es decir, N.m o lb.pie.



#### 4.3 Formulación escalar del momento de una fuerza con respecto a un punto:

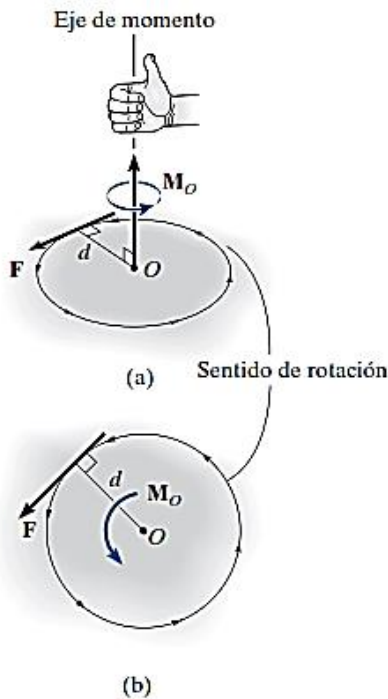
Considerando la figura siguiente, el vector momento  $M_o$  con respecto al punto  $O$ , o con respecto a un eje que pase por  $O$  y sea perpendicular al plano, tiene magnitud y dirección específicas.

*Magnitud.* La magnitud de  $M_o$  es:

$$M_o = F d$$

donde  $d$  representa el *brazo de momento* o *distancia perpendicular* desde el eje en el punto  $O$  hasta la línea de acción de la fuerza.





**Dirección.** La dirección de  $\mathbf{M}_o$  está definida por su *eje de momento*, el cual es perpendicular al plano que contiene la fuerza  $\mathbf{F}$ , y por su brazo de momento  $d$ .

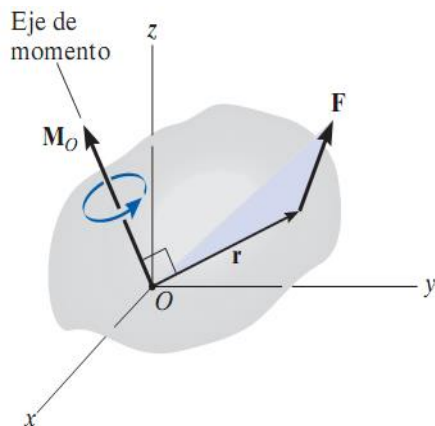
Para establecer el sentido de dirección de  $\mathbf{M}_o$  se utiliza la regla de la mano derecha. De acuerdo con esta regla, el curvado natural de los dedos de la mano derecha cuando éstos se doblan sobre la palma representa la tendencia para la rotación.

En dos dimensiones, este vector se representa con la flecha curva como en la figura *b*.

Por consiguiente, el sentido de rotación puede ser anti horario (positivo) u horario (negativo)

**4.4 Formulación vectorial del momento de una fuerza respecto a un punto:**

El momento de una fuerza  $\mathbf{F}$  con respecto al punto  $O$ , es decir, con respecto al eje del momento que pasa por  $O$  y es perpendicular al plano que contiene a  $O$  y a  $\mathbf{F}$ , puede expresarse por el producto vectorial.



$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

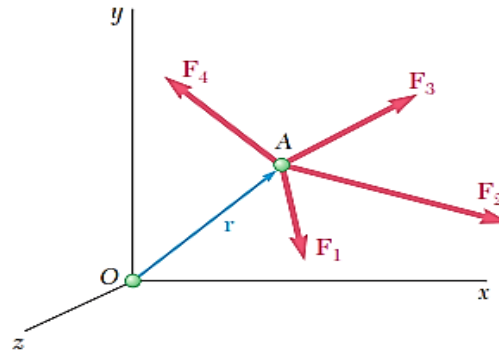
$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Aquí  $\vec{r}$  representa un vector de posición trazado desde  $O$  hasta cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de  $\mathbf{F}$ .

**4.5 Principio de momentos o Teorema de Varignon:**

“El momento con respecto a un punto dado  $O$  de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto  $O$ ”.

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots$$



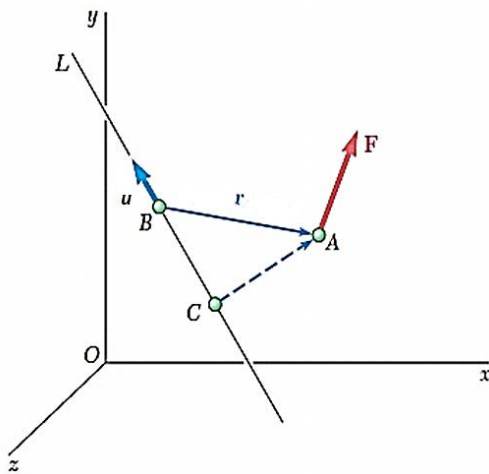
#### 4.6 Momento de una fuerza con respecto a un eje:

El momento de una fuerza respecto a un eje  $L$  se puede obtener:

$$M_{\text{eje}} = \vec{\mu} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

$\vec{\mu}$  es el vector unitario del eje  $L$

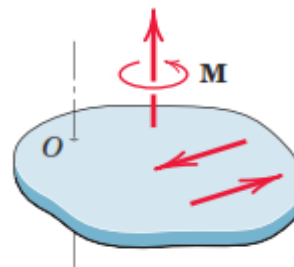
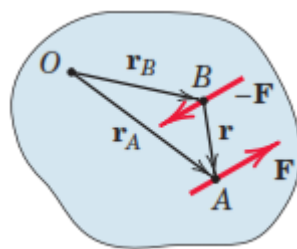
$\vec{r}$  es el vector de posición trazado desde cualquier punto del eje a un punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza.



$$M_{\text{eje}} = \begin{vmatrix} \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

#### 4.7 Momento de un par

Se dice que *dos fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$  que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par*. Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originarán una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, éstas sí tenderán a hacer lo rotar.



$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

El momento de un par se da por la suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto  $O$ :

$\mathbf{r}$ : Vector de posición que va del punto  $B$  al punto  $A$  cualesquiera.

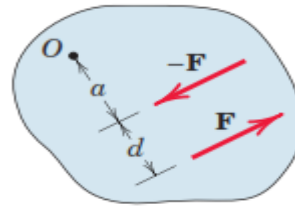




En la siguiente figura se verifica que la magnitud del momento par está dada por:

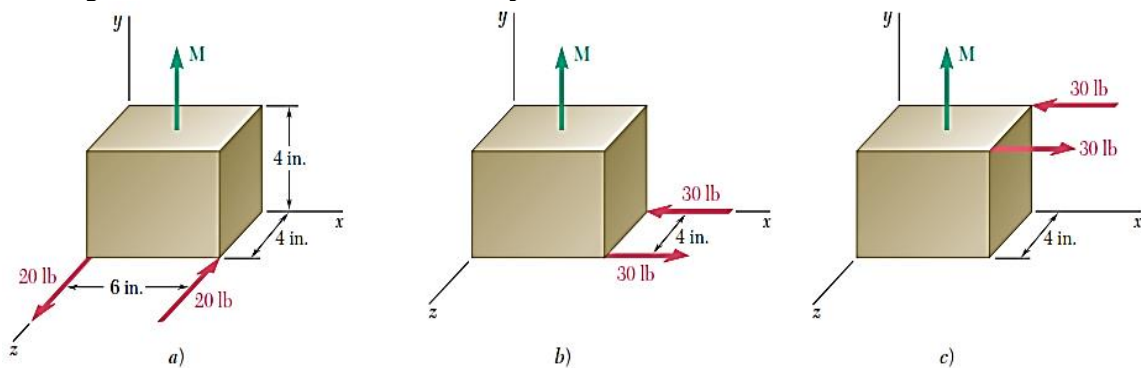
$$M = F(a + d) - Fa$$

$$M = Fd$$



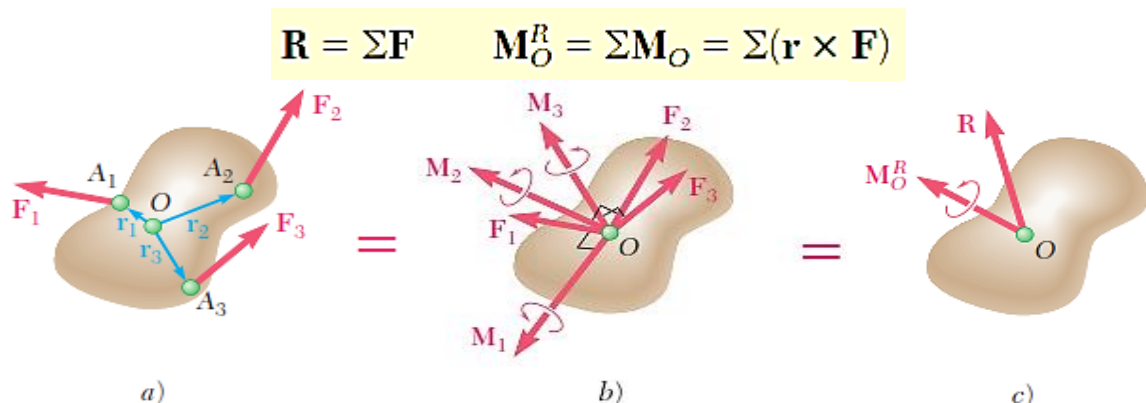
#### 4.8 Pares equivalentes

Se sabe que los vectores momento de los pares son vectores libres, se pueden sumar o restar independientemente de su posición en el espacio. Luego, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento  $\mathbf{M}$  (la misma dirección y la misma magnitud  $M = 120 \text{ lb} \cdot \text{in}$ ), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.



#### 4.8 Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema equivalente de fuerza y momento par.

Considérese un sistema de fuerzas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$  que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , definidos por los vectores de posición  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ , etc. (figura a). La fuerza  $\mathbf{F}_1$  puede ser trasladada de  $A_1$  a un punto dado  $O$ , si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento  $\mathbf{M}_1$ , igual al momento  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$  de  $\mathbf{F}_1$  con respecto a  $O$ . Si se repite este procedimiento con  $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ , se obtiene el sistema mostrado en la figura b, que consta de: las fuerzas originales, ahora actuando en  $O$ , y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante  $\mathbf{R}$ . De manera similar, los vectores de par  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots$  pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector de par  $\mathbf{M}_O^R$ . Por tanto, cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado  $O$ . (figura c).





## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 4

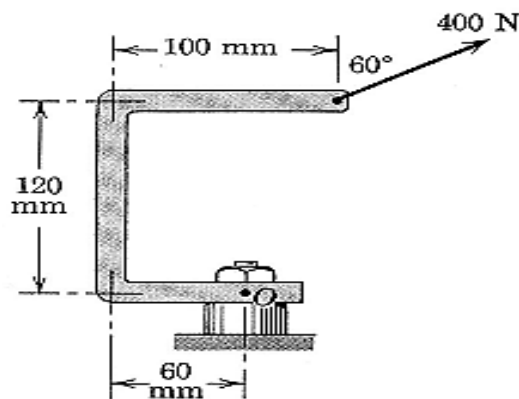
### Tema: Cuerpos Rígidos –Momento de fuerza

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

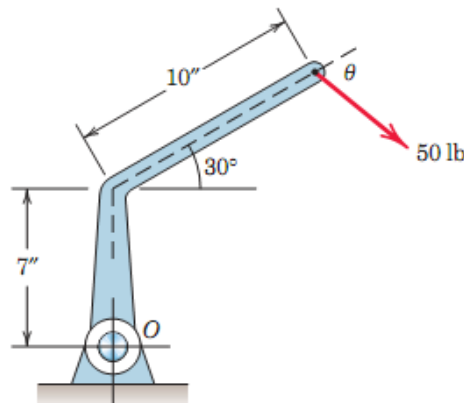
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

**INSTRUCCIONES:** Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

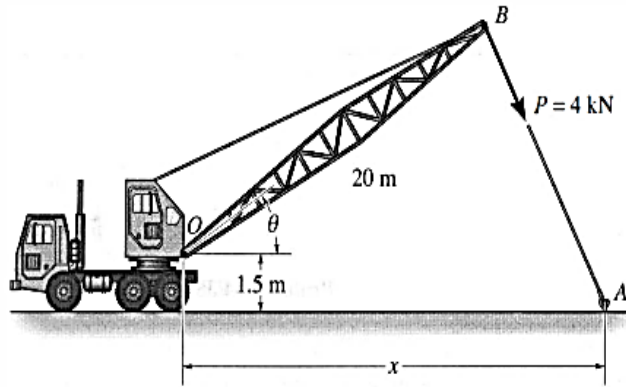
1. Determine, respecto a O:
  - a) El momento de fuerza en forma escalar usando su brazo de palanca.
  - b) El momento de fuerza en forma escalar usando componentes de F.
  - c) El momento de fuerza en forma vectorial.



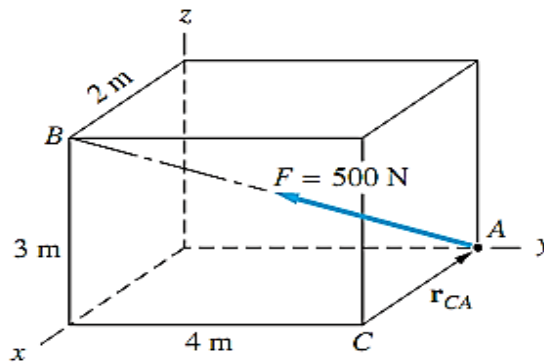
2. Determine el valor del ángulo  $\theta$  que hace máximo el momento de la fuerza (50 lb) respecto al punto O. Además, calcular el valor de los momentos de esta fuerza respecto a O y respecto al punto de doblez del brazo.



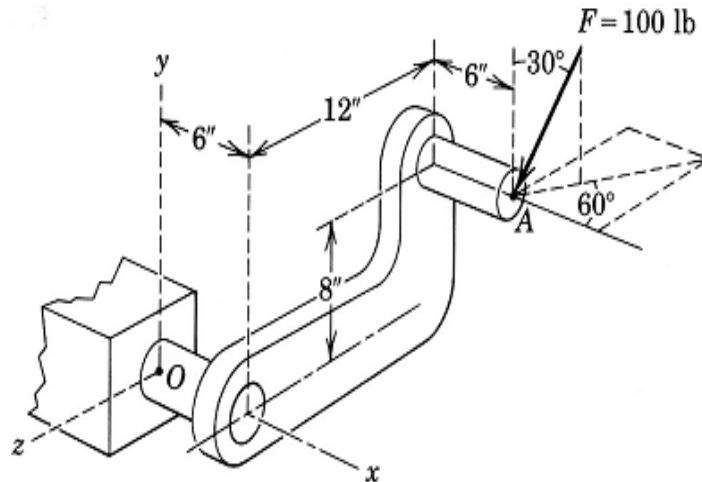
3. El cable del remolque ejerce una fuerza  $P = 4\text{ kN}$  en el extremo del aguilón de 20m de longitud de la grúa.
  - a) Si el ángulo  $\theta = 30^\circ$ , determine la posición x del gancho localizado en A de modo que esta fuerza produzca el máximo momento con respecto al punto O, además calcule el valor de este momento.
  - b) Si  $x=25\text{ m}$ , determine el ángulo  $\theta$  de modo que esta fuerza produzca un momento máximo con respecto al punto O, además calcule el valor de este momento.



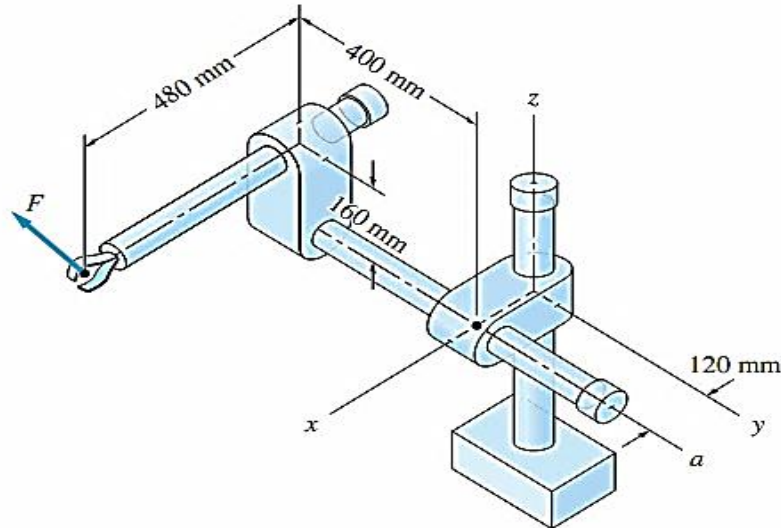
4. Determine:
- a) El momento de la fuerza  $F$  alrededor del origen.
  - b) El momento de la fuerza  $F$  alrededor del punto  $C$ .
  - c) La distancia perpendicular desde  $C$  hasta la línea de acción de  $F$ .



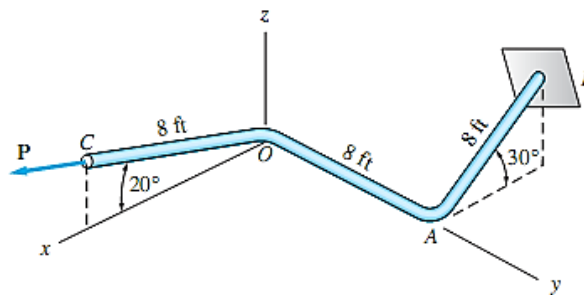
5. Determine:
- a) El momento de fuerza (en forma vectorial) de  $F$  respecto al origen.
  - b) El momento de Fuerza (en forma vectorial) de  $F$  respecto al eje  $x$ .



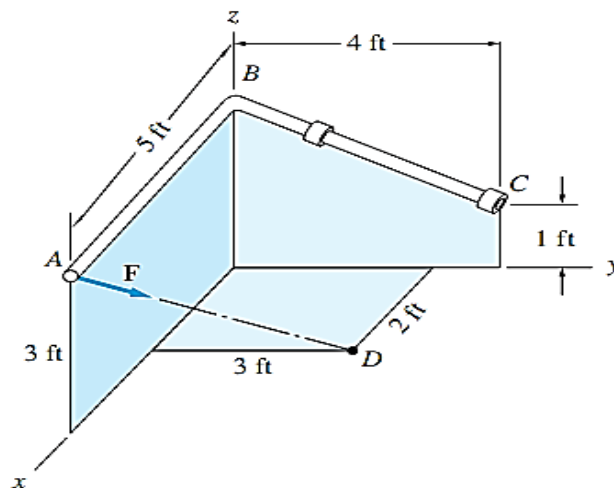
6. La fuerza  $F = 12i - 8j + 6k$  N es aplicada en la pinza del brazo como se muestra. Determine:
- a) El momento de  $F$  respecto al eje  $a$ .
  - b) El momento de  $F$  respecto al eje  $z$ .



7. El momento de la fuerza  $P$  respecto del eje  $AB$  es  $600 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ . Determine:  
a) La magnitud de  $P$ .  
b) El momento de fuerza de  $P$  respecto al eje  $y$ .



8. Determine la magnitud de la fuerza  $F$  dada la magnitud de su momento de fuerza respecto al eje  $BC$  de valor  $150 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ .



### Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler,** R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler.** (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

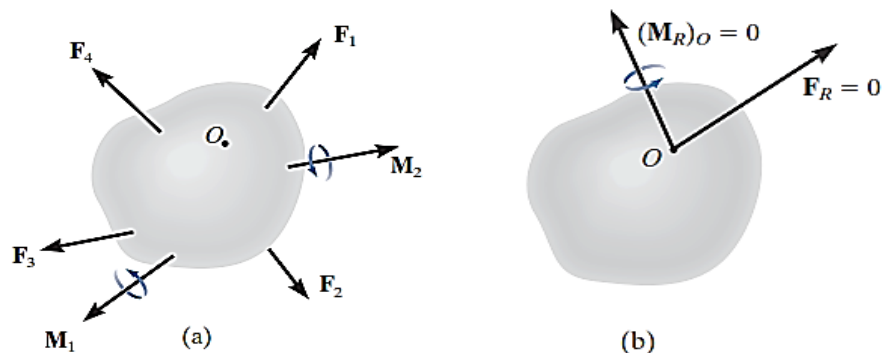
## SEGUNDA UNIDAD

### TEMA N° 5: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS



Ya hemos aprendido que la estática es el análisis de cuerpos en equilibrio, incluidos los puentes, las presas y los edificios. Ahora que ya hemos aprendido a calcular momentos, podemos enfrentarnos a problemas de equilibrio más interesantes. En este tema establecemos las ecuaciones de equilibrio y describimos modelos sencillos de los diversos tipos de soportes utilizados en ingeniería. Luego mostramos cómo usar las ecuaciones de equilibrio para obtener información respecto a los sistemas de fuerzas y momentos que actúan sobre los cuerpos.

#### 5.1 Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido



El sistema mostrado de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo (figura a) puede reducirse a una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en cualquier punto arbitrario  $O$  sobre el cuerpo o fuera de él (figura b). La condición para el equilibrio es que tanto la fuerza como el momento de par resultantes sean iguales a cero. Matemáticamente, el equilibrio de un cuerpo se expresa como:

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$



- ✓ La primera de estas ecuaciones establece que la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a *cero*. Ello verifica *traslación nula*.
- ✓ La segunda ecuación establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas en el sistema con respecto al punto *O*, añadida a todos los momentos de par es igual a *cero*. Con lo cual se verifica *rotación nula*.

### 5.2 Equilibrio en dos dimensiones:

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos. Por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre diferentes vigas y estructuras planas, pinzas, algunas grúas y otras máquinas, así como ciertos tipos de puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

#### Ecuaciones escalares de equilibrio en dos dimensiones.




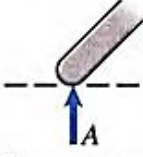
Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema bidimensional de fuerzas y momentos (momentos perpendiculares al plano), se encuentran relacionadas por tres ecuaciones escalares de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_{cualquier\ punto} = 0$$

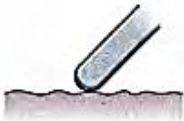
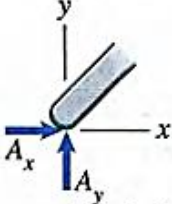

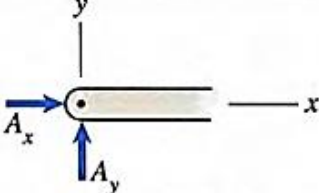

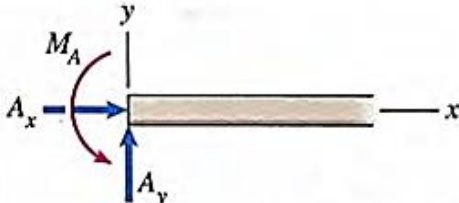


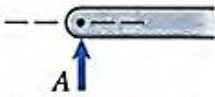
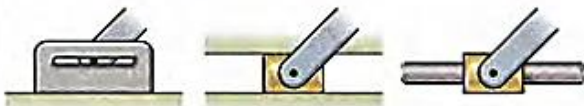
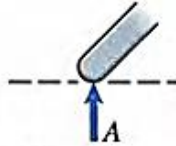
#### Soportes:

Algunos tipos muy comunes de soportes se representan con modelos estilizados llamados convenciones de soporte. Los soportes reales a menudo se parecen a los modelos estilizados; pero, aunque no se parecieran, los representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.

#### MODELADO DE SOPORTES USADOS EN APLICACIONES BIDIMENSIONALES

Soportes	Reacciones
 Cuerda o cable      Resorte	 Una fuerza colineal
 Contacto con una superficie lisa	 Una fuerza normal



Soportes	Reacciones
 <p data-bbox="331 517 794 551">Contacto con una superficie rugosa</p>	 <p data-bbox="951 517 1310 551">Dos componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="424 790 679 824">Soporte de pasador</p>	 <p data-bbox="943 790 1310 824">Dos componentes de fuerza</p>
 <p data-bbox="427 1081 679 1115">Soporte empotrado</p>	 <p data-bbox="887 1081 1374 1115">Dos componentes de fuerza y un par</p>
 <p data-bbox="427 1249 667 1283">Soporte de rodillo</p>  <p data-bbox="400 1417 687 1451">Soportes equivalentes</p>	 <p data-bbox="1007 1328 1254 1361">Una fuerza normal</p>
 <p data-bbox="363 1659 735 1693">Pasador guiado o deslizador</p>	 <p data-bbox="1015 1659 1262 1693">Una fuerza normal</p>

**Diagrama de cuerpo libre:**

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido o cualquier grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deben darse los siguientes pasos:

1º *Trace el contorno:*

Idealice el cuerpo *aislado* o recortado "libre" de sus restricciones y conexiones, y delinee (en un bosquejo) su contorno.

2º Muestre todas las fuerzas y momentos de par.

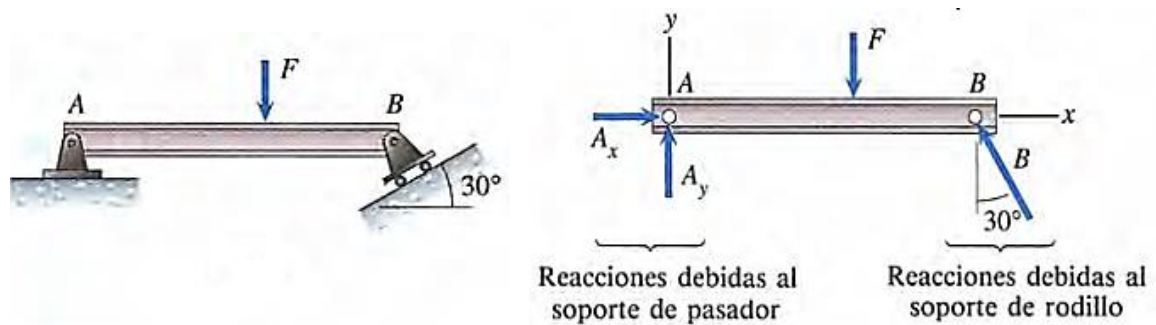
Identifique todas las *fuerzas externas* conocidas y desconocidas y los momentos de par que *actúan sobre el cuerpo*. Las que por lo general se encuentran se deben a (1) cargas aplicadas, (2) reacciones que ocurren en los soportes o en puntos de contacto con otros cuerpos, y (3) el peso del cuerpo.

3º Identifique cada carga y las dimensiones dadas.

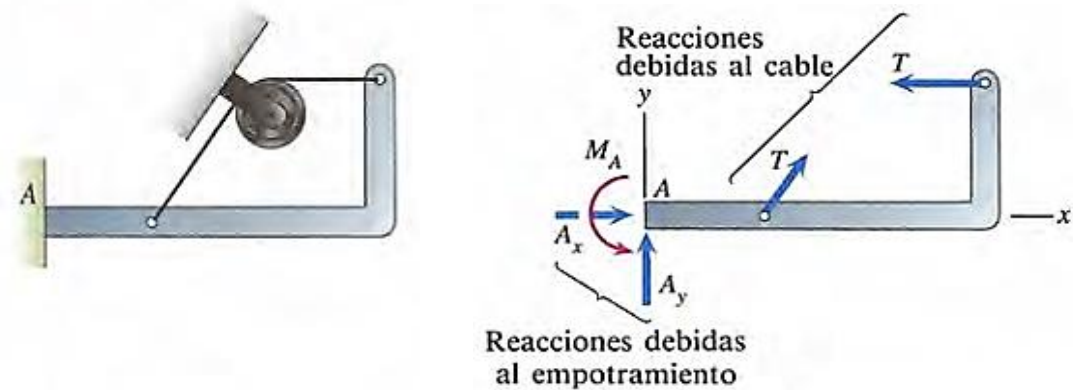
Las fuerzas y los momentos de par que se conocen deben marcarse con sus propias magnitudes y direcciones. Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

*Ejemplos de DCL:*

a) Viga ingrávida soportada por un pasador y un rodillo.



b) Cuerpo ingrávido soportado por un empotramiento y un cable unido a él en dos puntos.



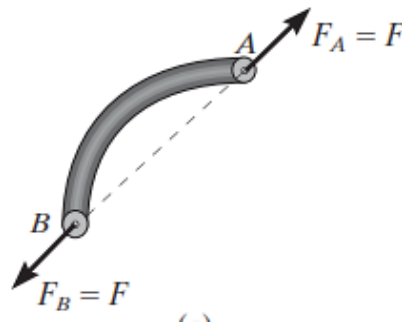
### 8.3. Equilibrio en elementos de dos y tres fuerzas.

Elemento de dos fuerzas:

El elemento tiene fuerzas aplicadas en sólo dos puntos sobre el elemento. Un ejemplo se muestra en la figura adjunta. Para satisfacer el equilibrio de fuerzas,  $\mathbf{F}_A$  y  $\mathbf{F}_B$  deben tener la misma magnitud,  $F_A = F_B = F$ , pero dirección opuesta.

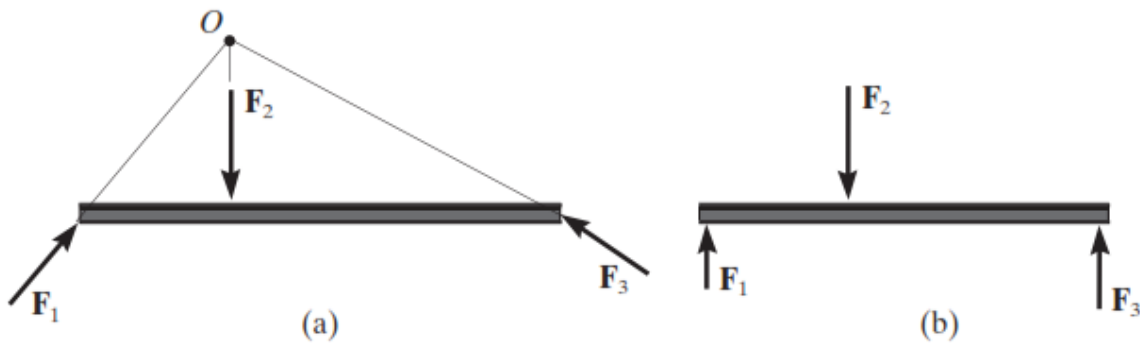
Por lo tanto, para que cualquier elemento de dos fuerzas esté en equilibrio, las dos fuerzas que actúan sobre él *deben tener la misma magnitud, actuar en direcciones opuestas y tener la misma línea de acción, dirigida a lo largo de la línea que une los puntos donde actúan estas fuerzas.*





Elemento de tres fuerzas:

Si un elemento está sometido a sólo *tres fuerzas*, se denomina *elemento de tres fuerzas*. El equilibrio de momento se puede satisfacer sólo si las tres fuerzas forman un sistema de fuerzas *concurrentes* o *paralelas*. Para ilustrar esto, considere el elemento sometido a las tres fuerzas  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$ , que se muestra en la figura a. Si las líneas de acción de  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  se intersecan en el punto  $O$ , entonces la línea de acción de  $\mathbf{F}_3$  también debe pasar por el punto  $O$ , de modo que las fuerzas satisfagan  $\sum M_o = 0$ . Como caso especial, si las tres fuerzas son paralelas, figura b, la ubicación del punto de intersección,  $O$ , se aproximará al infinito.



Luego, para el caso de elementos a dos y tres fuerzas analizar el equilibrio implica establecer ecuaciones que no requiere del trazo de vectores componentes siendo su solución respaldada por la geometría del problema.

**5.4 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el plano:**

1º *Diagrama de cuerpo libre.*

- ✓ Establezca los ejes  $x$ ,  $y$  en cualquier orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de par conocidas y desconocidas.
- ✓ Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.
- ✓ Indique las dimensiones necesarias.

2º *Aplique las ecuaciones de equilibrio:*  $\sum F_x = 0$     $\sum F_y = 0$     $\sum M_{cualquier\ punto} = 0$

- ✓ Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo. Los momentos de par son positivos si tienen rotación antihoraria.
- ✓ Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza o momento de par es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 5

### Tema: Equilibrio de Cuerpos Rígidos en 2D

Sección : .....  
 Docente : Escribir el nombre del docente  
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

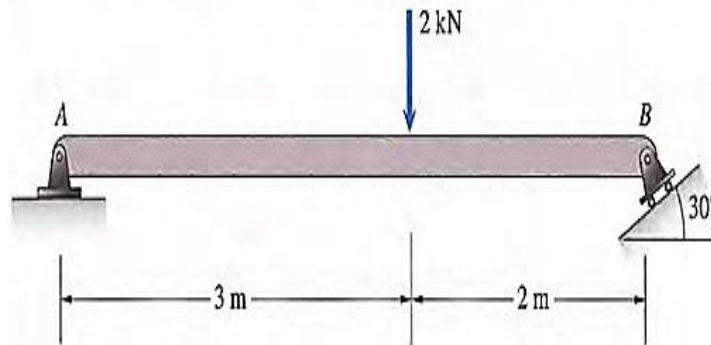
Apellidos : .....  
 Nombres : .....  
 Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
 Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

**INSTRUCCIONES:** Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

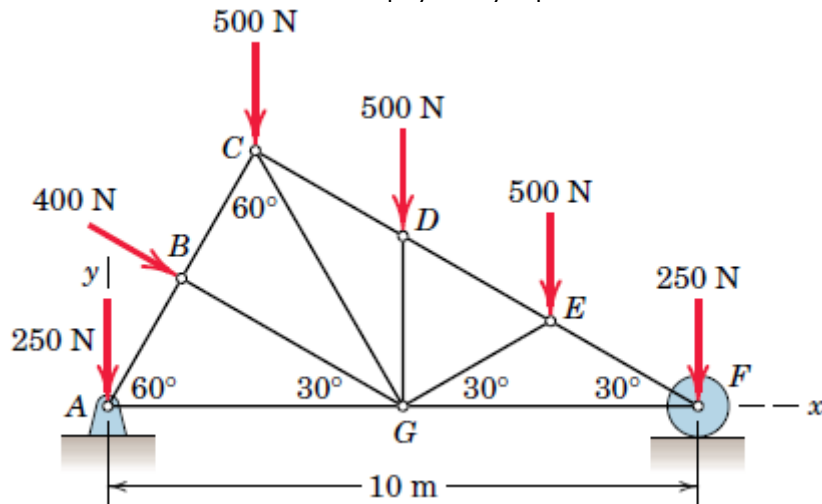
1. La viga mostrada tiene soportes de pasador y rodillo, y está sometida a una fuerza de 2kN.

Determine:

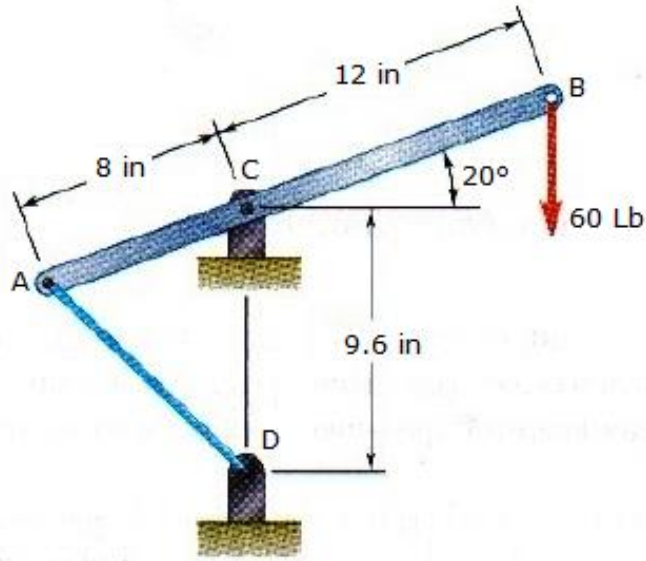
- El valor de las reacciones en los soportes A y B.
- Si la viga pesa 3kN, considérela homogénea, y reemplazamos la fuerza de 2kN por otra de 4kN que forme  $30^\circ$  con la horizontal a la derecha aplicada sobre el mismo punto, determine el incremento en cada una de las reacciones.



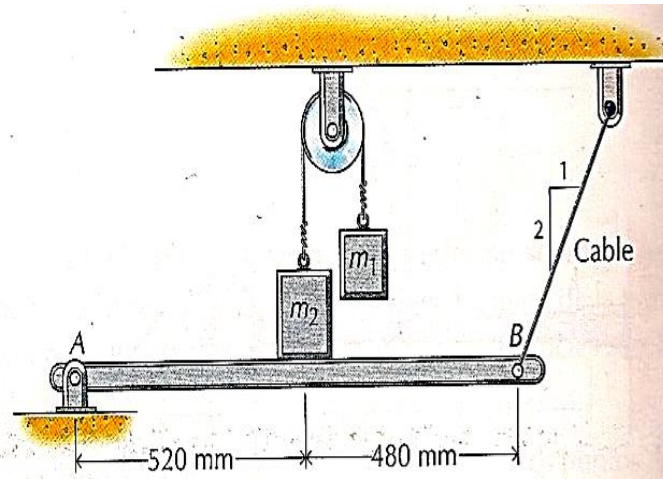
2. Determine Las reacciones externas en los apoyos A y F para la estructura mostrada.



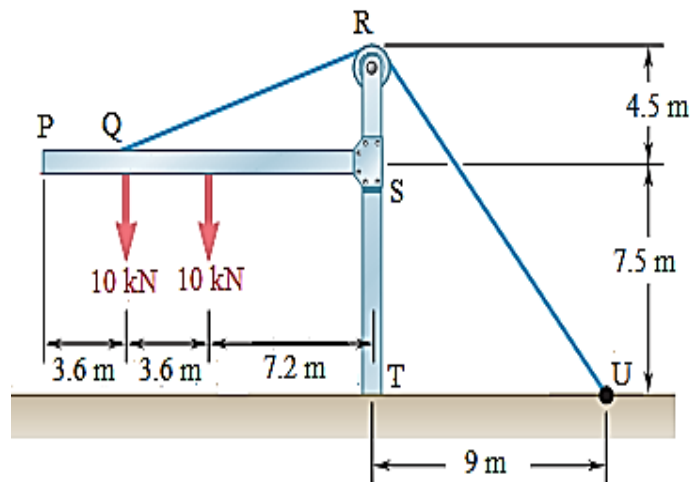
3. Una palanca AB está articulada en C y unida a un cable de control en A. Si la palanca se somete a una fuerza vertical de 60 lb en el punto B, determinar la tensión en el cable y la reacción en C.



4. Una viga está cargada y apoyada según se indica en la figura. Determinar las reacciones en los apoyos A y B cuando  $m_1 = 50 \text{ kg}$  y  $m_2 = 200 \text{ kg}$ . Desprecie el peso de la barra. AB.

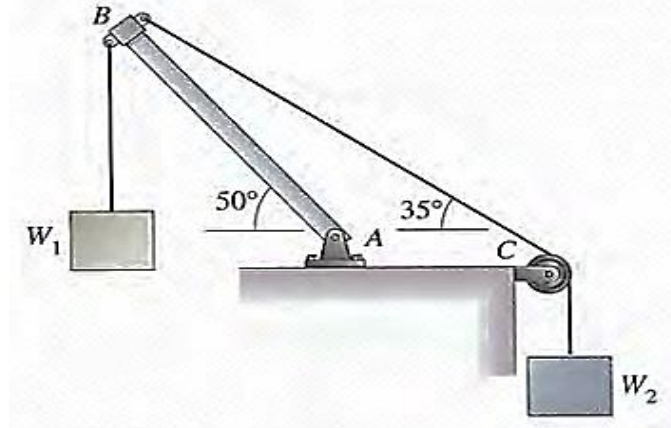


5. El bastidor mostrado en la figura sostiene una parte del techo de un pequeño edificio. Sabiendo que la magnitud de la tensión en el cable es de 100 kN, determine la reacción en el extremo fijo E.

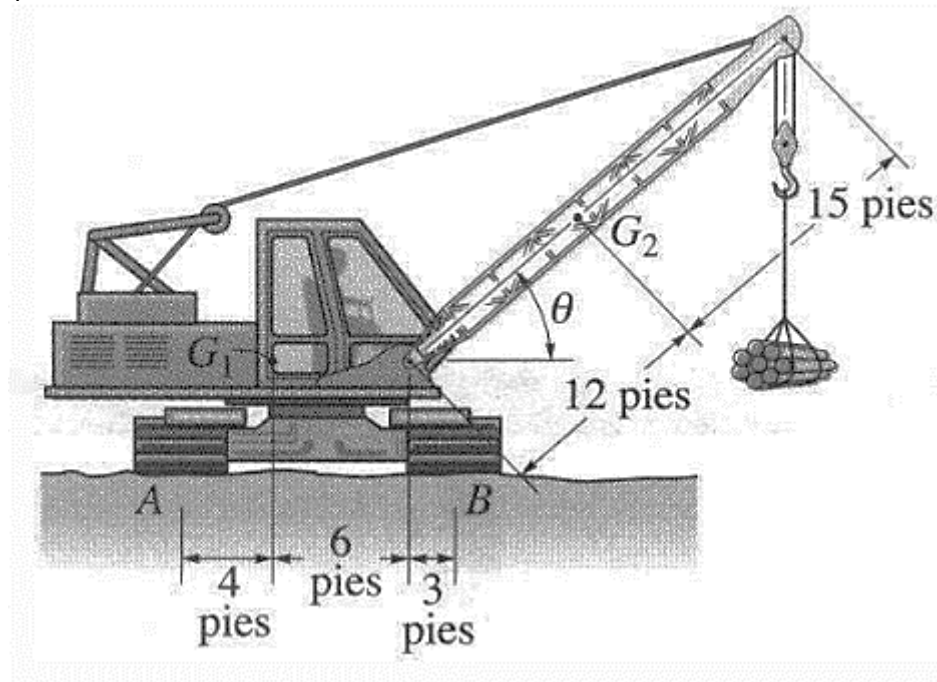


6. En la figura, el peso  $W_1 = 1000\text{lb}$ . Despreciando el peso de la barra sobre una polea en C. Determine:

- La magnitud del peso  $W_2$ .
- La reacción en el soporte de pasador en A.
- Si la tensión en la cuerda BC no puede exceder un valor de  $3000\text{lb}$  determine la magnitud del peso máximo del bloque 1 y la reacción en el soporte de pasador en A para tal condición.



7. La grúa móvil tiene un peso de  $120\,000\text{ lb}$  y centro de gravedad en  $G_1$ ; el aguilón tiene un peso de  $30\,000\text{ lb}$  y centro de gravedad en  $G_2$ . Si la carga suspendida tiene un peso de  $W = 16\,000\text{ lb}$ , determine las reacciones normales en las ruedas A y B. Para el cálculo, ignore el espesor de las ruedas y considere  $\theta = 30^\circ$ .



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.  
**Hibbeler, R.C.** (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.  
**Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

## TEMA N° 6: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES (1)



Hemos visto que cuando un cuerpo en equilibrio está sometido a un sistema bidimensional de fuerzas y momentos, no se pueden obtener más de tres ecuaciones independientes de equilibrio. En el caso de un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se pueden obtener hasta seis ecuaciones independientes de equilibrio: las tres componentes de la suma de las fuerzas deben ser nulas y las tres componentes de la suma de los momentos respecto a cualquier punto deben también ser iguales a cero.

El procedimiento para determinar las reacciones sobre cuerpos sometidos a sistemas tridimensionales de fuerzas y momentos -dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicar las ecuaciones de equilibrio- es el mismo que para el de dos dimensiones. Sólo se requiere familiarizarse con las convenciones de soporte usadas en las aplicaciones tridimensionales.



### 6.1 Equilibrio en tres dimensiones:

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos en sistemas espaciales, por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre estructuras espaciales, grúas y máquinas, así como techos, puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

#### **Ecuaciones vectoriales de equilibrio en tres dimensiones:**

Las dos condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido pueden ser expresadas matemáticamente en forma vectorial como

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\Sigma \vec{M}_o = 0$$

donde  $\Sigma \vec{F}$  es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y  $\Sigma \vec{M}_o$  es la suma de los momentos de par y los momentos de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto O localizado en o fuera del cuerpo.

#### **Ecuaciones escalares de equilibrio en tres dimensiones.**

Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se encuentran relacionadas por seis ecuaciones escalares de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

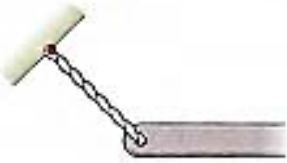

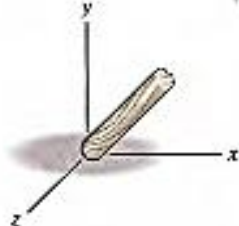
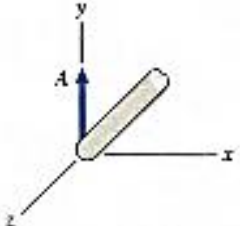

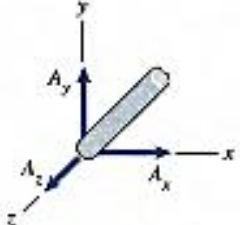
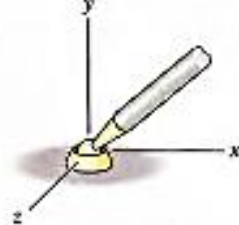
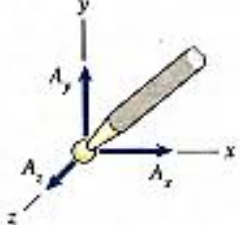
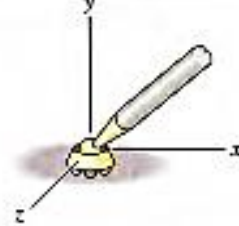
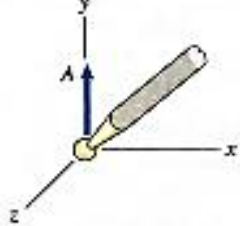
Al usar estas seis ecuaciones escalares de equilibrio se puede resolver cuando mucho seis incógnitas mostradas en el diagrama de cuerpo libre.

#### **Soportes:**

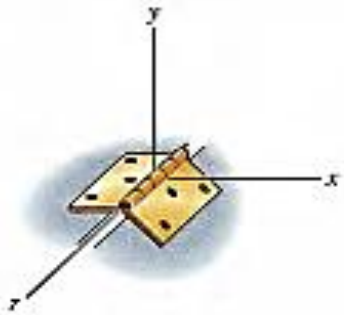
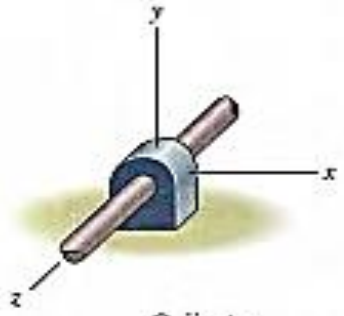
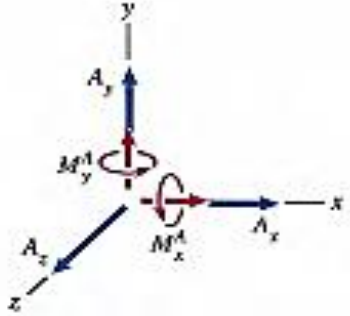
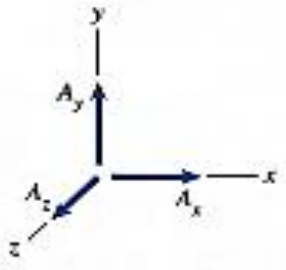
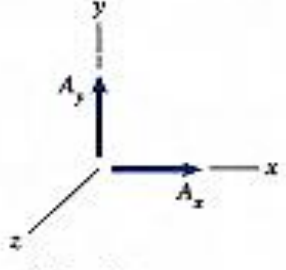

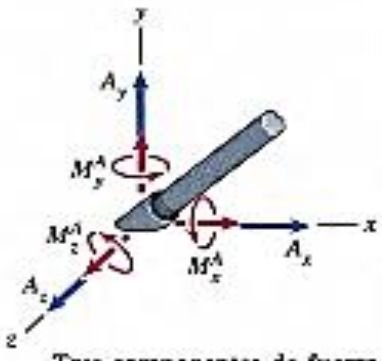
Aún cuando los soportes reales no se parezcan físicamente a los modelos representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.



MODELADO DE SOPORTES USADOS EN APLICACIONES BIDIMENSIONALES

Soportes	Reacciones
 <p>Cuerda o cable</p>	 <p>Una fuerza colineal</p>
 <p>Contacto con una superficie lisa</p>	 <p>Una fuerza normal</p>
 <p>Contacto con una superficie rugosa</p>	 <p>Tres componentes de fuerza</p>
 <p>SopORTE de bola y cuenca</p>	 <p>Tres componentes de fuerza</p>
 <p>SopORTE de rodillos</p>	 <p>Una fuerza normal</p>



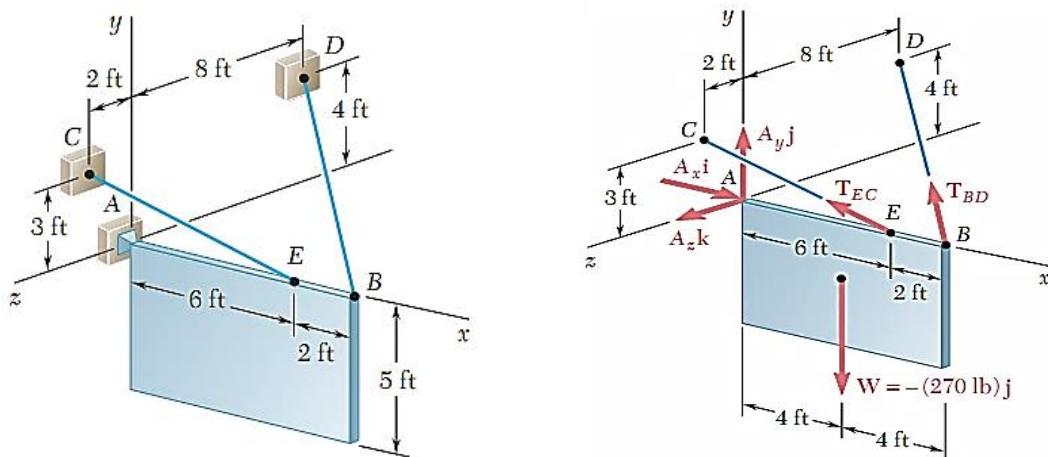
Soportes	Reacciones
 <p>Articulación (el eje z es paralelo al eje de la articulación)</p>  <p>Cojinete (El eje z es paralelo al eje del árbol soportado)</p>	 <p>Tres componentes de fuerza, dos componentes de par</p>  <p>(Cuando no se generan pares)</p>  <p>(Cuando no se generan pares ni fuerza axial)</p>
 <p>Soporte empotrado</p>	 <p>Tres componentes de fuerza, Tres componentes de par</p>



**Diagrama de cuerpo libre:**

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido en tres dimensiones procedemos en forma análoga al análisis en dos dimensiones con las consideraciones de los soportes tridimensionales.

Ejemplo: Para el letrero de densidad uniforme, apoyado en una rótula esférica en A y sujetado por cables en B y E.



**6.2 Procedimiento para el análisis del equilibrio de una partícula en el espacio:**

1º *Diagrama de cuerpo libre.*

- ✓ Establezca los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  en una orientación adecuada.
- ✓ Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de par conocidas y desconocidas.
- ✓ Muestre las componentes desconocidas con un sentido positivo a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .
- ✓ Indique las dimensiones necesarias.

2º *Aplique las ecuaciones de equilibrio.*

- ✓ Según la conveniencia se deben aplicar las ecuaciones escalares o las ecuaciones vectoriales.
- ✓ En ocasiones serán necesarios usar ejes de dirección arbitraria para realizar la suma de fuerzas y momentos.
- ✓ Si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza o momento de par es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.



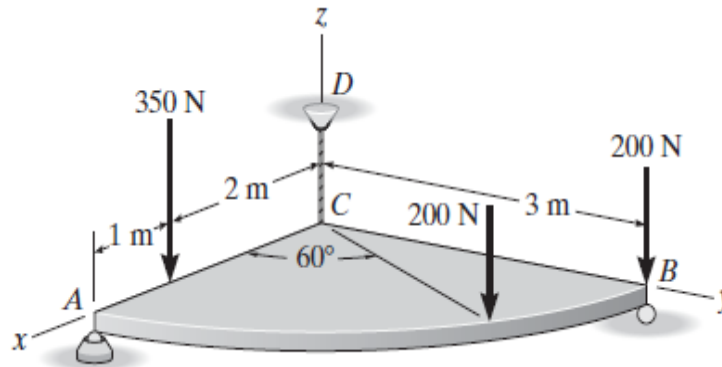
## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 6 Tema: Equilibrio de Cuerpos Rígidos en 3D

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar  
Semana

Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

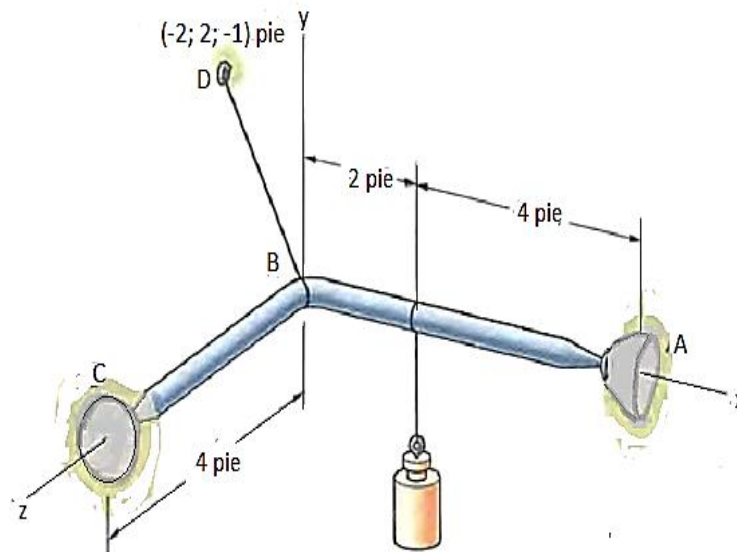
1. Determine las componentes de fuerza que actúan sobre la rótula esférica en  $A$ , la reacción en el rodillo  $B$  y la tensión en la cuerda  $CD$  necesarias para el equilibrio de la placa con forma de cuadrante circular.



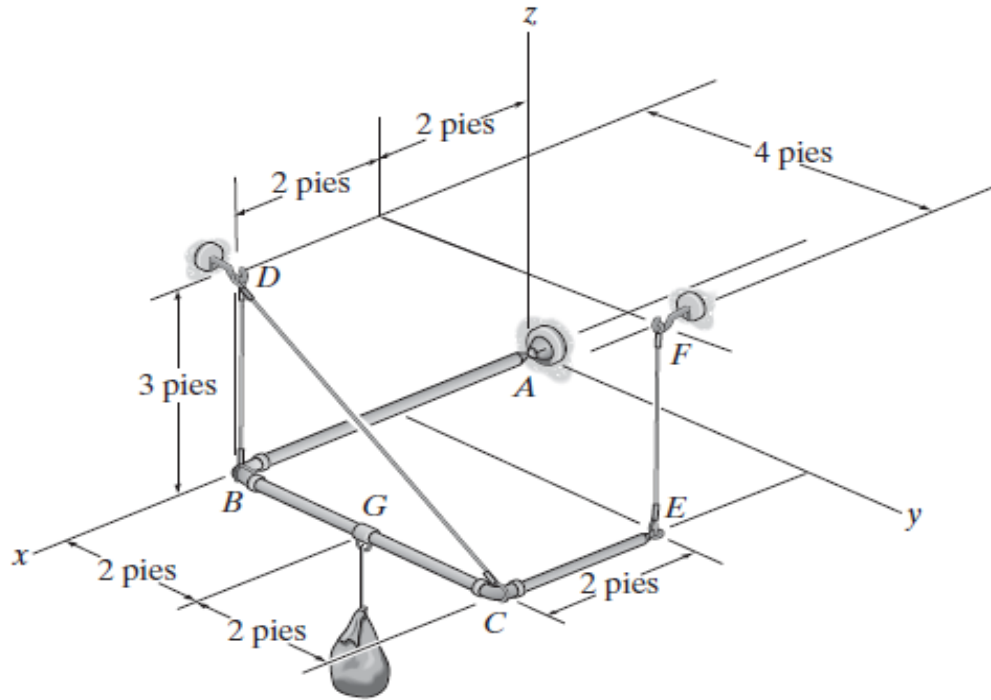
2. La barra  $ABC$  de la figura está sustentada por rótulas en  $A$  y en  $C$ , y por el cable  $BD$ ; está cargada por el peso suspendido de 200lb.

Determine:

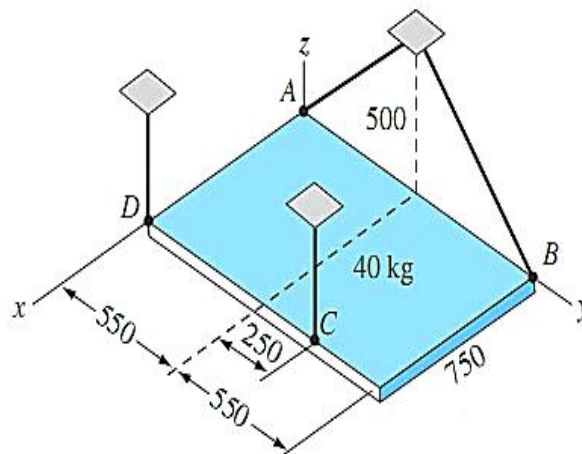
- a) La magnitud de la máxima tensión en el cable, si se conoce que el momento de la tensión respecto al eje vertical que pasa por  $A$  ( $+A_y$ ) no puede exceder de 600 lb-pie (en valor absoluto).
- b) El peso máximo que puede soportar el sistema.



3. Si la carga tiene un peso de 200 lb, determine las componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de la reacción en la junta de rótula esférica  $A$  y la tensión en cada uno de los cables.



4. La placa homogénea de 40 kg está suspendida por cuatro cables, determine la tensión en cada uno de ellos.



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.**, (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler**, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler**. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

**Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

## TEMA N° 7: EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES (II)

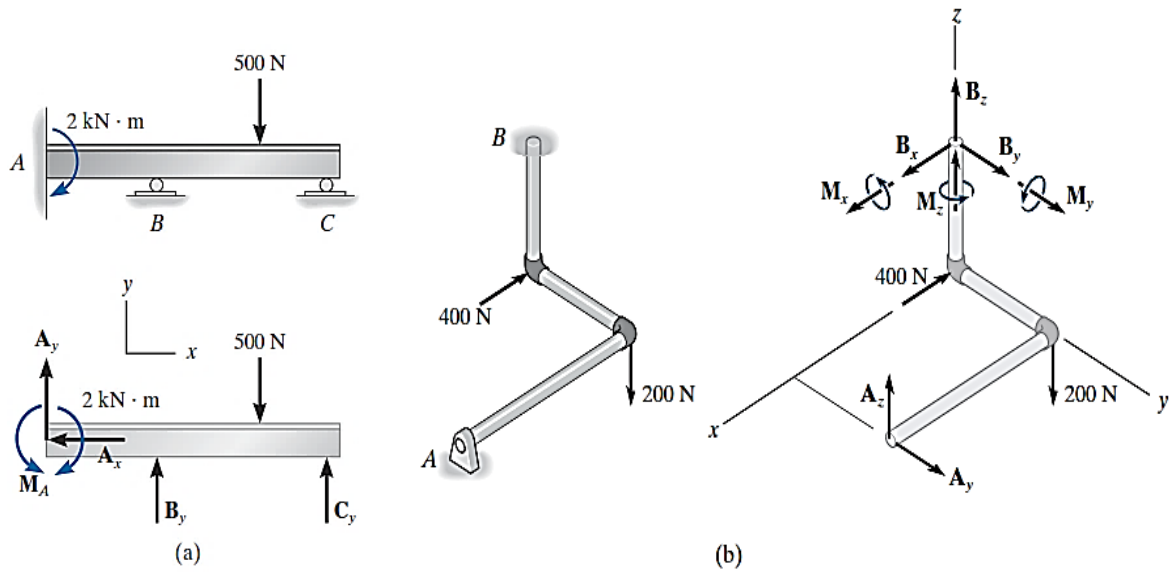


Para garantizar el equilibrio de un cuerpo rígido, no sólo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio, sino que el cuerpo también debe estar sostenido o restringido propiamente por sus soportes. Algunos cuerpos pueden tener más soportes que los necesarios para el equilibrio, mientras que otros pueden no tener suficientes o estar colocados de tal manera que ocasionen el movimiento del cuerpo. A continuación, se analiza cada uno de esos casos.

### 7.1 Restricciones redundantes:

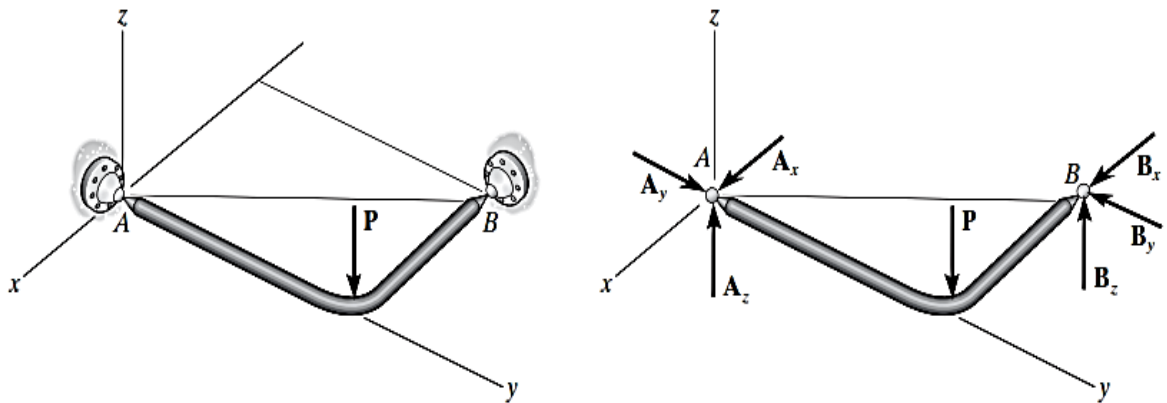
Cuando un cuerpo tiene soportes redundantes, es decir, más de los necesarios para mantenerlo en equilibrio, se vuelve estáticamente indeterminado. *Estáticamente indeterminado* significa que habrá más cargas desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para su solución. Por ejemplo, la viga de la figura *a*, y el ensamble de tubos de la figura *b*, que se muestran junto con sus diagramas de cuerpo libre, son estáticamente indeterminados debido a las reacciones adicionales (o redundantes) en los soportes. Para la viga hay cinco incógnitas,  $M_A$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_y$  y  $C_y$ , para las cuales sólo se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  y  $\sum M_o = 0$ . El ensamble de tubos tiene ocho incógnitas, para las cuales sólo se pueden escribir seis ecuaciones de equilibrio.

Las ecuaciones adicionales necesarias para resolver problemas estáticamente indeterminados del tipo que se muestra en las figuras *a* y *b* se obtienen generalmente a partir de las condiciones de deformación presentes en los puntos de soporte. Estas ecuaciones implican las propiedades físicas del cuerpo que se estudian en temas relacionados con la mecánica elástica, como la "mecánica de materiales".



## 7.2 Restricciones redundantes:

En el espacio, un cuerpo estará *impropiamente restringido* si las líneas de acción de todas las fuerzas reactivas intersecan un eje común. Por ejemplo, las fuerzas reactivas en los soportes de rótula esférica, ubicados en los puntos  $A$  y  $B$  de la figura, intersecan el eje que pasa por  $A$  y  $B$ . Como los momentos de estas fuerzas con respecto a  $A$  y  $B$  son todos iguales a cero, entonces la carga  $\mathbf{P}$  hará que el elemento gire con respecto al eje  $AB$ , puesto que la sumatoria de momentos respecto al eje  $AB$  es diferente de cero.



## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 7

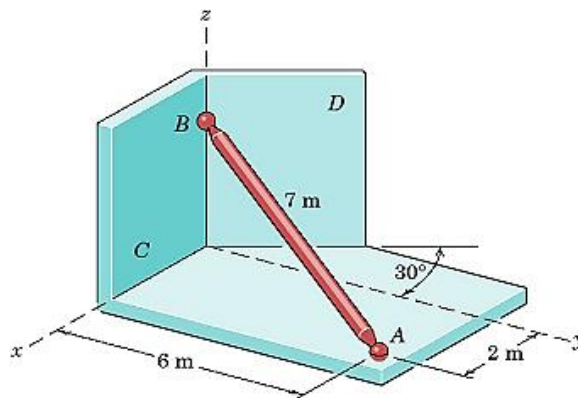
### Tema: Equilibrio de Cuerpos Rígidos en 3D (II)

Sección : .....  
 Docente : Escribir el nombre del docente  
 Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

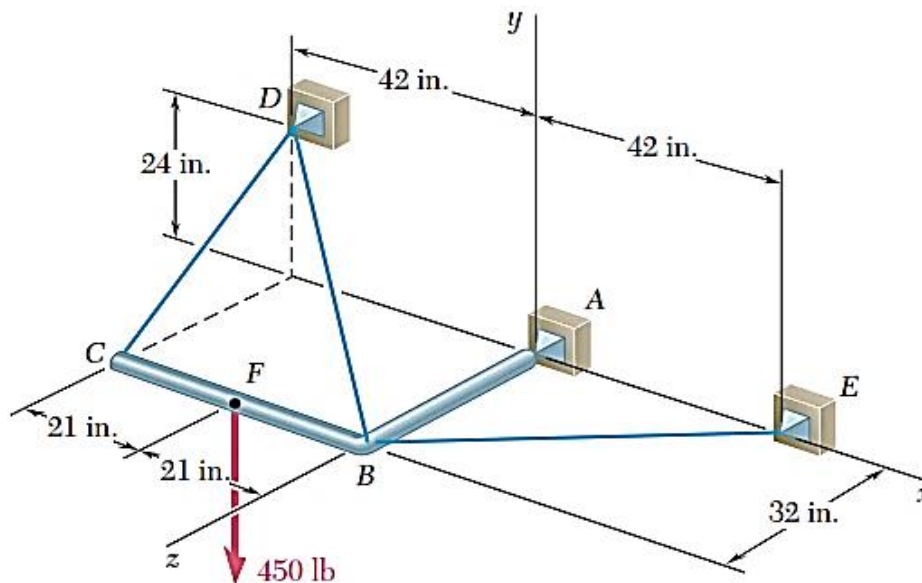
Apellidos : .....  
 Nombres : .....  
 Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
 Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

**INSTRUCCIONES:** Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

- Una de las paredes verticales(C) soporta en B al eje uniforme, la pared derecha (D) forma  $30^\circ$  con el plano y-z adyacente como se muestra. En A es soportado el eje por la rótula sobre el plano x-y. La masa del eje es 200kg.  
 Determinar:  
**a)** Las magnitudes de las fuerzas P y R ejercidas por las paredes C y D sobre la bola del eje en B, respectivamente.  
**b)** La reacción en A.



- El elemento rígido ABC en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Si se aplica una carga de 450 lb en F, determine la tensión en cada cable.

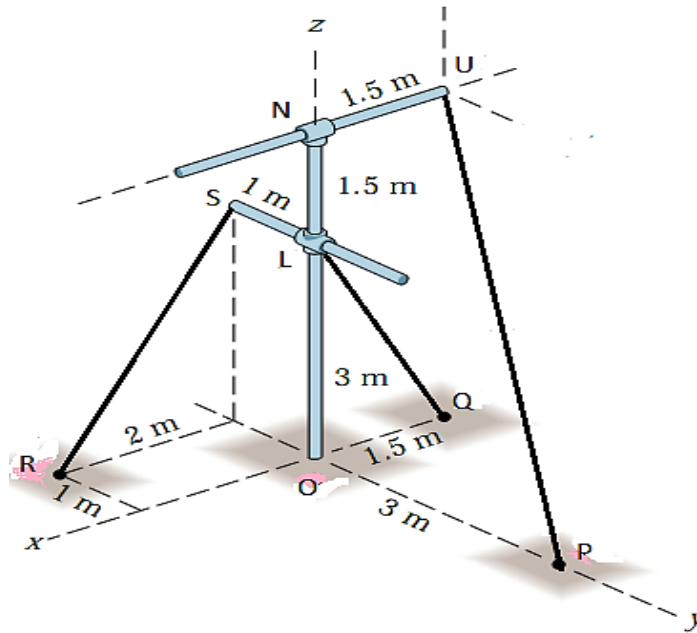


- El poste rígido y las crucetas están en equilibrio. Se sabe que la tensión  $T_{UP}$  tiene una magnitud de 1200N y que únicamente existe momento par sobre el poste en la dirección z.

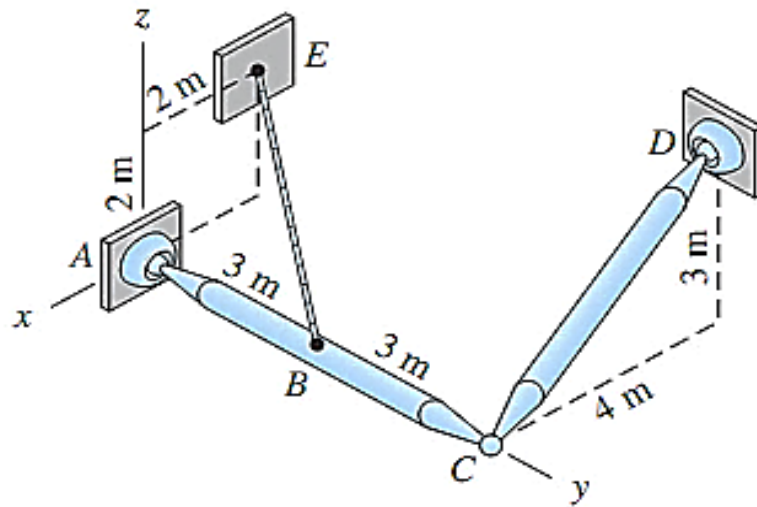


Determine:

- Las magnitudes de las tensiones en los cables  $T_{LQ}$  Y  $T_{SR}$ .
- La magnitud y dirección del momento par sobre la base del poste.



4. Las dos barras AC y CD son homogéneas y pesan 200 N/m cada una. Las juntas A, C y D son rótulas y el cable BE está conectado entre B y E. Determine todas las fuerzas sobre la barra AC.



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler,** R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler.** (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

**Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.



## TEMA N° 8: CENTROIDES Y CENTRO DE GRAVEDAD

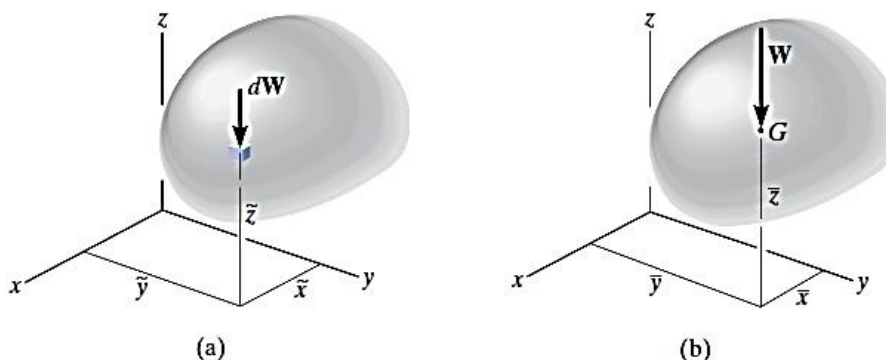


### 8.1 Centro de gravedad, centro de masa y centroide de un cuerpo.

A continuación, mostraremos en primer lugar cómo localizar el centro de gravedad para un cuerpo y después deduciremos que el centro de masa y el centroide de un cuerpo pueden desarrollarse con este mismo método.

#### Centro de gravedad.

Un cuerpo está compuesto de un número infinito de partículas de tamaño diferencial, y por tal razón si el cuerpo se ubica dentro de un campo gravitatorio, entonces cada una de estas partículas tendrá un peso  $dW$ , figura *a*. Estos pesos formarán un sistema de fuerzas aproximadamente paralelas, y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo, la cual pasa a través de un solo punto llamado el *centro de gravedad*,  $G$ , figura *b*. Esto es cierto mientras se suponga que el campo de gravedad tiene la misma magnitud y dirección en todas partes. Ese supuesto es apropiado para la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, ya que la gravedad no varía apreciablemente entre, por ejemplo, la parte inferior y la superior de un edificio.



Se sabe que el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas sus partículas, es decir:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z; \quad W = \int dW$$

La ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje  $y$ , se determina al igualar el momento de  $W$  con respecto al eje  $y$ , figura *b*, con la suma de los momentos de los





pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje. Si  $dW$  se ubica en el punto  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  figura a, entonces:

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad \bar{x}W = \int \tilde{x} dW$$

De la misma manera, si se suman los momentos con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ :

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad \bar{y}W = \int \tilde{y} dW$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad \bar{z}W = \int \tilde{z} dW$$

Luego, la ubicación del centro de gravedad  $G$  con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  es:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dW}{\int dW} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dW}{\int dW}$$

$$\mathbf{G} = (x; y; z)$$

Donde:

$G$  = Centro de gravedad

$x; y; z$  = Coordenadas del centro de gravedad

- ✓ El centro de gravedad toma en cuenta los materiales que componen el cuerpo y es el punto donde está aplicada la fuerza resultante equivalente llamada peso  $W$ .

### Centro de masa:

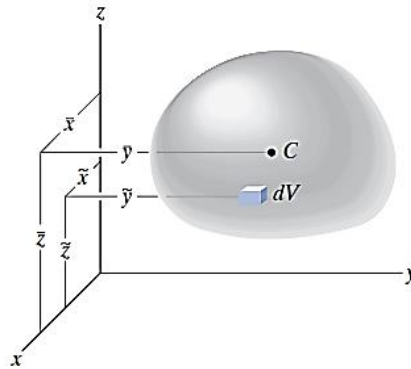
Al sustituir  $dW = g dm$  en la ecuación del centro de gravedad obtenemos el centro de masa de un cuerpo. A fin de estudiar la *respuesta dinámica* o el movimiento acelerado de un cuerpo, resulta importante localizar este punto.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm}$$

### Centroide de un volumen

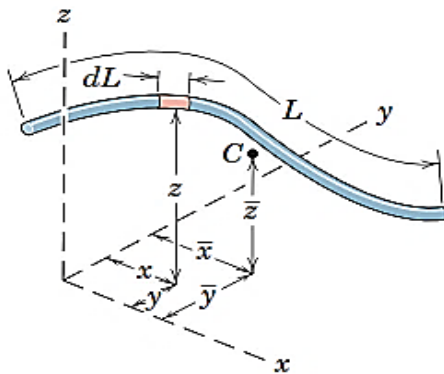
Si el cuerpo de la figura a está hecho de un material homogéneo, entonces su densidad ( $\rho_0$ ) será constante. Por lo tanto, un elemento diferencial de volumen  $dV$  tiene una masa  $dm = \rho_0 dV$ . Al sustituir esto en las ecuaciones de centro de masa y al cancelar, obtenemos fórmulas que localizan el *centroide*  $C$  o centro geométrico del cuerpo; así:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$



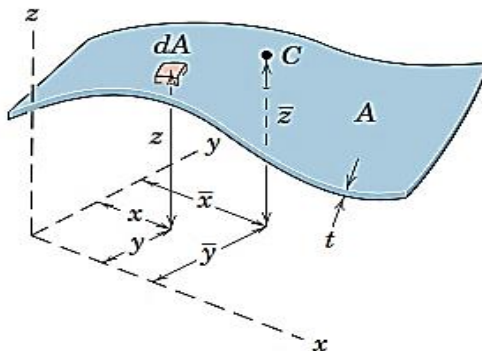
**Centroides de Líneas:**

Para alambres de sección constante.



$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} \quad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL}$$

**Centro de Gravedad de Áreas:**



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$

**Consideraciones importantes.**

- ✓ El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo, es una propiedad geométrica y no considera los materiales del cuerpo. El centro de gravedad es una propiedad física y si considera los materiales que componen el cuerpo.
- ✓ Este punto coincide con el centro de masa o con el centro de gravedad sólo si el material que compone el cuerpo es uniforme u homogéneo.
- ✓ Las fórmulas usadas para localizar el centro de gravedad o el centroide simplemente representan un balance entre la suma de momentos de todas las partes del sistema y el momento de la "resultante" para el sistema.
- ✓ En algunos casos, el centroide se ubica en un punto fuera del objeto, como en el caso de un anillo, donde el centroide está en el centro del anillo. Además, este punto se encontrará sobre cualquier eje de simetría del cuerpo.



Centroides de formas comunes de áreas y de líneas.

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \text{ sen}\alpha}{3\alpha}$	0	$\alpha r^2$
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	$\pi r$
Arco de círculo		$\frac{r \text{ sen}\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

### Determinación de Centroides por Integración

El centro de gravedad o centroide de un objeto o forma, se puede determinar mediante integraciones simples por el siguiente procedimiento.

**1º Seleccionar un elemento diferencial.**

Seleccione un sistema coordenado apropiado, especifique los ejes coordenados, y luego elija un elemento diferencial para la integración: Para líneas  $dL$ , para áreas:  $dA$ , con una longitud finita y ancho diferencial, para volúmenes, el elemento puede ser un disco circular de volumen  $dV$ , con un radio finito y espesor diferencial.

**2º Tamaño y brazos de momento.**

Expresa la longitud  $dL$ , el área  $dA$ , o el volumen  $dV$  del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva. Expresa los brazos de momento para el centroide o centro de gravedad del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva.

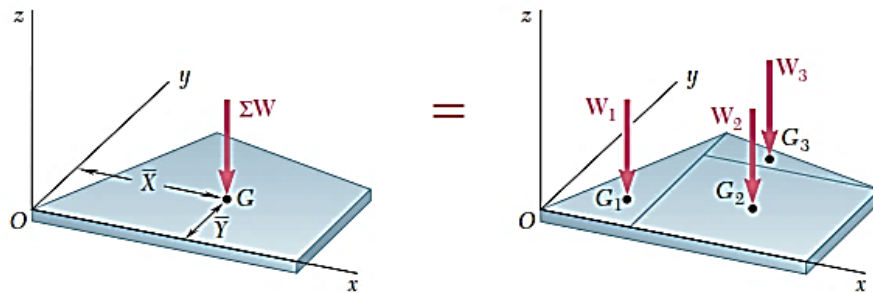
**3º Integraciones.**

Sustituya las formulaciones para  $dL$ ,  $dA$  o  $dV$  en las ecuaciones apropiadas y exprese la función en el integrando en términos de la *misma variable aplicada al espesor del elemento*. Los límites de la integral se definen a partir de las dos ubicaciones extremas del espesor diferencial del elemento, de manera que cuando los elementos se "suman" o la integración se realiza, toda la región queda cubierta.

### 8.2 Cuerpos compuestos:

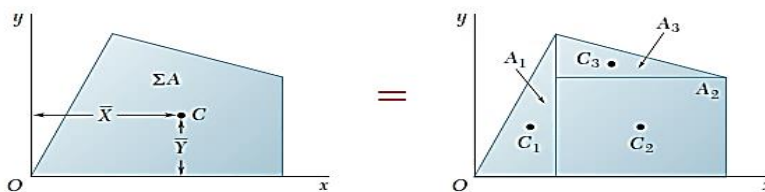
Un *cuerpo compuesto* consiste en una serie de cuerpos "más simples" conectados, los cuales pueden ser rectangulares, triangulares, semicirculares, etcétera. Un cuerpo de este tipo a menudo puede ser seccionado o dividido en sus partes componentes y, si se conocen el peso y la ubicación de cada una de esas partes, es posible eliminar la necesidad de la integración para determinar el centro de gravedad de todo el cuerpo.

Veamos el caso de una placa mostrada en la figura siguiente:



Procedimiento para determinar el centroide de un cuerpo compuesto:

- 1º Separar el cuerpo en partes de formas conocidas.
- 2º Determinar el centroide de cada parte por separado. Además determinar el área de cada parte y el área total.





3º Las coordenadas del centroide **C** del cuerpo compuesto se determina promediando los centroides de las partes.

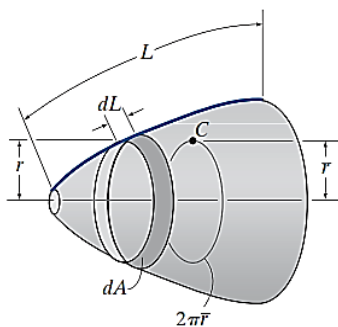
$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

## 8.2 Teoremas de Pappus-Guldinus

Se utilizan para calcular la superficie y volumen de cualquier objeto de revolución. Una superficie de revolución se crea girando una curva plana con respecto de un eje fijo que no intercepta el plano de la curva; mientras que un volumen de revolución se forma girando el área de un plano con respecto de un eje fijo que no intercepta el plano del área.

PRIMER TEOREMA: El área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de la curva generatriz y la distancia viajada por el centroide de la curva al generar el área superficial.

$$A = \theta \bar{r} L$$



$A$  = área superficial de revolución

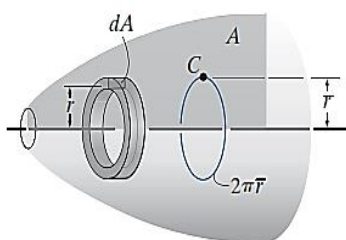
$\theta$  = ángulo de revolución medido en radianes,  $\theta \leq 2\pi$

$\bar{r}$  = distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de la curva generatriz

$L$  = longitud de la curva generatriz

SEGUNDA TEOREMA: El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.

$$V = \theta \bar{r} A$$



$V$  = volumen de revolución o giro

$\theta$  = ángulo de revolución medido en radianes,  $\theta \leq 2\pi$

$\bar{r}$  = distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de la curva generatriz

$A$  = área generatriz

También podemos aplicar los dos teoremas anteriores a líneas o áreas que están integradas por una serie de partes componentes. En este caso, el área superficial total o el volumen generado es la suma de las áreas superficiales o volúmenes generados por cada una de las partes componentes.



## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 8 Tema: Centroides y Centro de gravedad

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

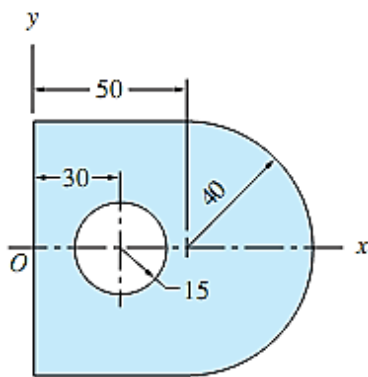
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

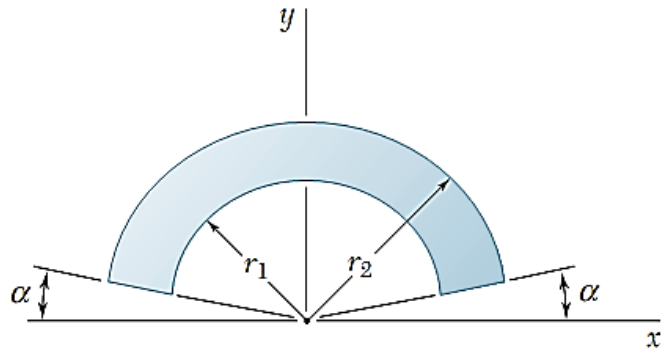
1. Usando el método de áreas compuestas determinar el centroide de la región coloreada en cada caso:

a)

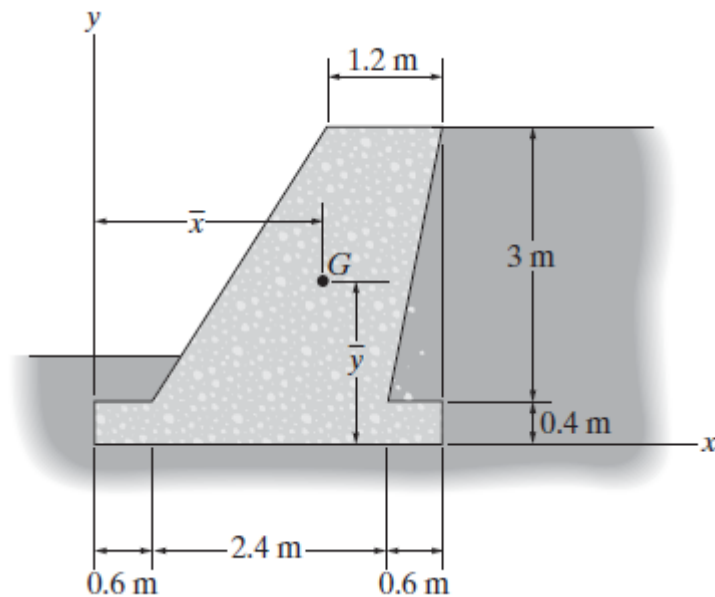
b)  $r_1 = 90$  cm,  $r_2 = 1.2$  m y  $\alpha = 25^\circ$



Dimensions in mm

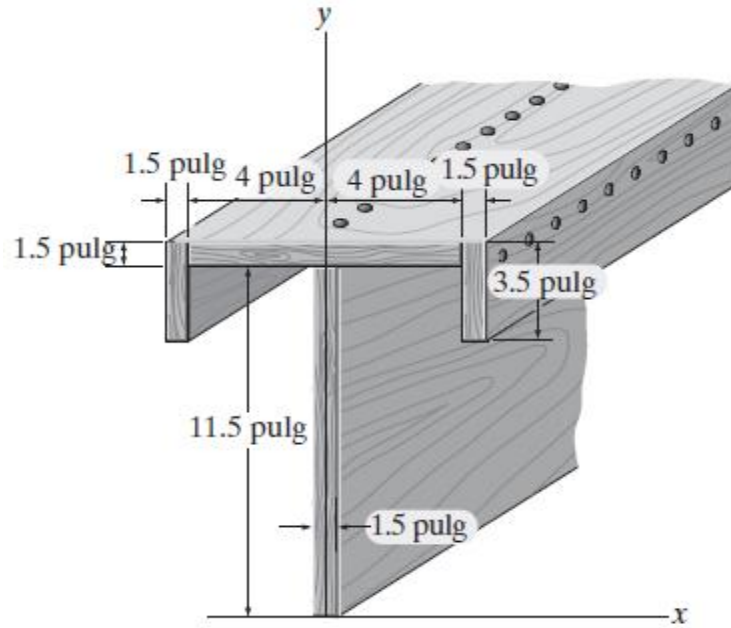


2. El muro de contención a gravedad está hecho de concreto. Determine la ubicación del centro de masa  $G$  para el muro.



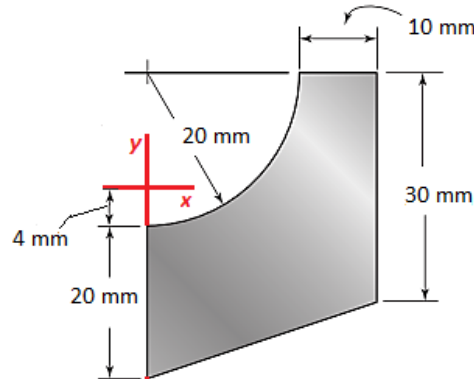


3. Localice el centroide del área de sección transversal de la viga compuesta

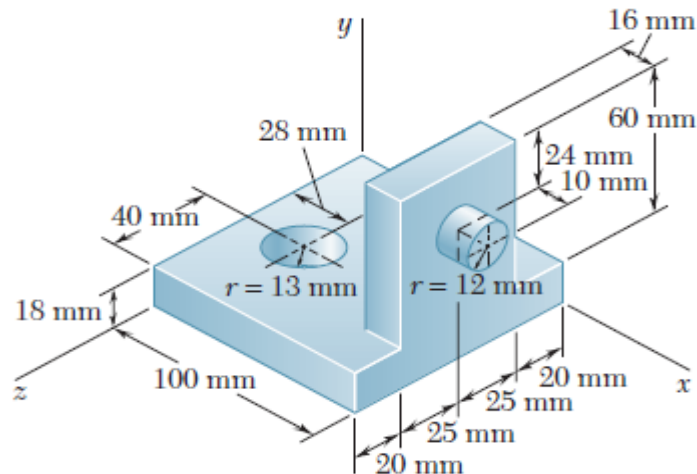


4. Determine el centroide de la figura mostrada para los ejes cartesianos consignados.

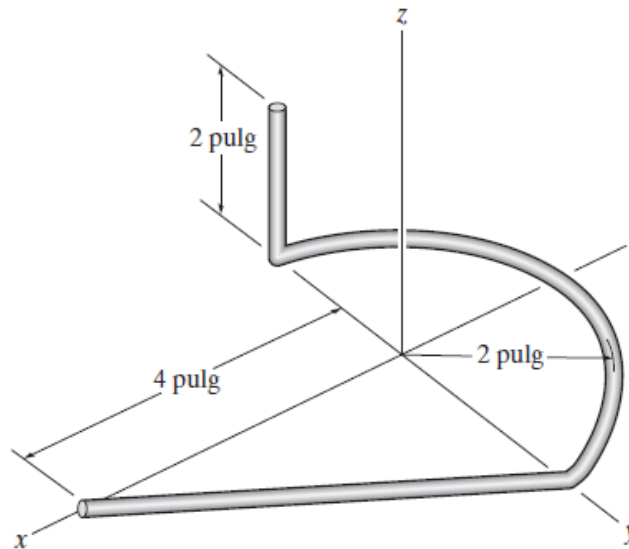
- a) Elabore una tabla indicando el área de cada figura y las coordenadas de cada centroide.
- b) Consigne las fórmulas finales de cálculos de las coordenadas en cada eje.



5. Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice las coordenadas del centro de gravedad.

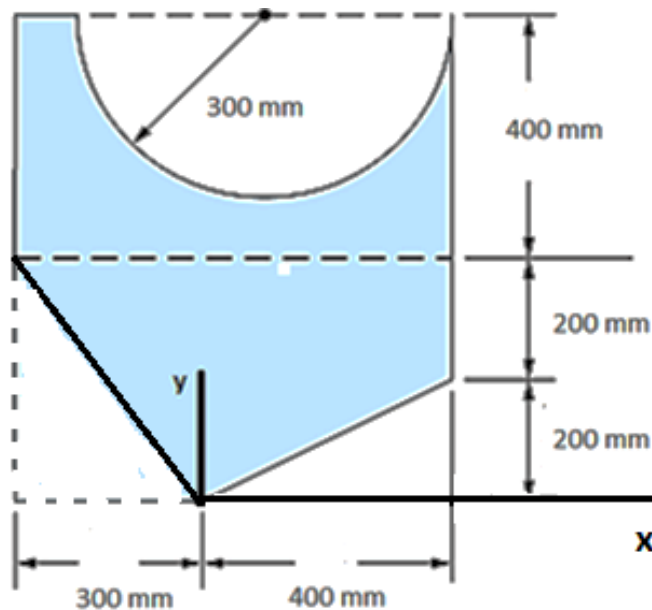


6. Localice el centroide del alambre que se dobla en la forma que se muestra.



7. Determine, para el sistema cartesiano indicado:

- A) El centroide del cuerpo compuesto.
- B) El centroide del cuerpo si la circunferencia aumenta su radio a 400 mm sin variar la ubicación de su centro, tampoco varían las demás dimensiones ni la ubicación del sistema de coordenadas x-y.



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Hibbeler**, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

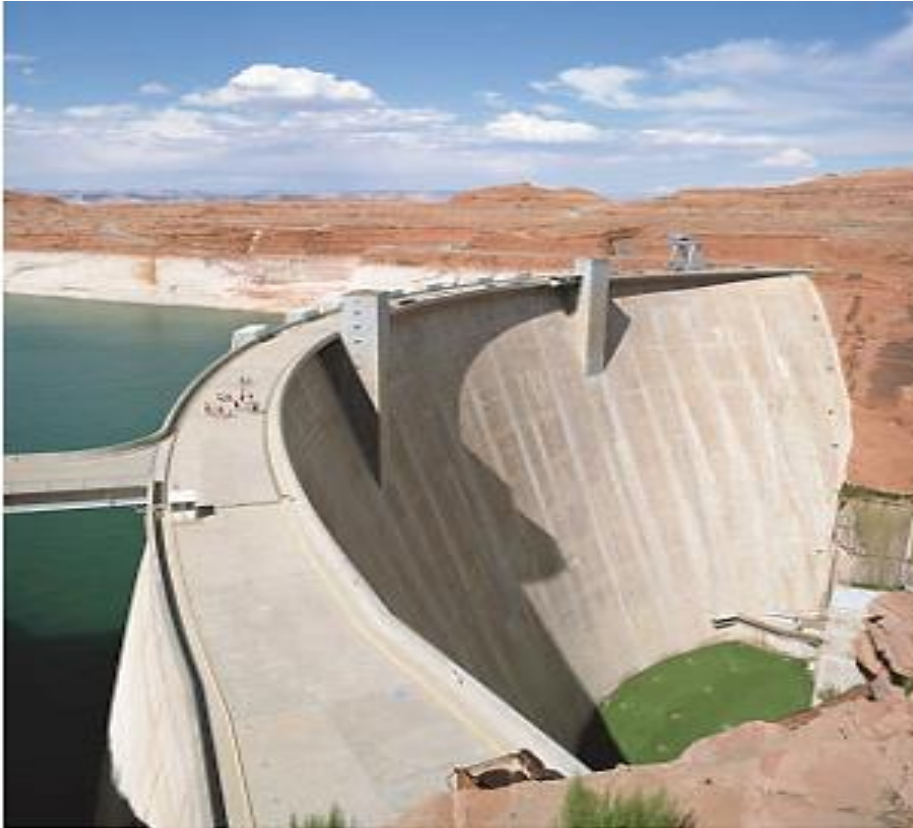
**Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

**Hibbeler**, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

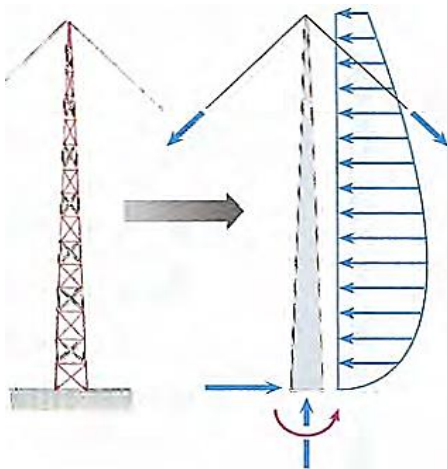


## TERCERA UNIDAD

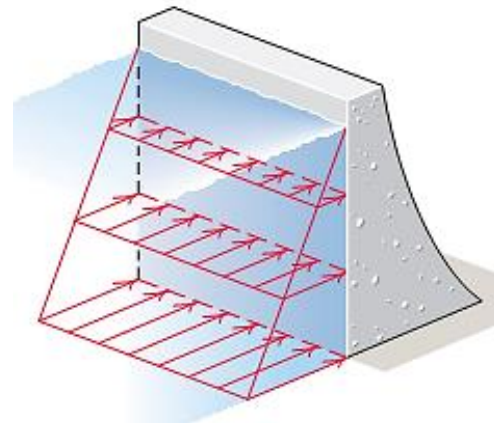
### TEMA N° 9: FUERZAS DISTRIBUIDAS



Existen situaciones en las que un cuerpo puede estar sometido a una carga que se encuentra distribuida por toda su superficie. Por ejemplo, la presión del viento sobre la superficie de un señalamiento, la presión del agua dentro de un tanque o en una presa como en la fotografía previa, o el peso de la arena sobre el piso de un contenedor de almacenaje, son todas *cargas distribuidas*. La presión ejercida sobre cada punto de la superficie indica la intensidad de la carga. Ésta se mide por pascales Pa (o  $N/m^2$ ) en unidades SI o  $lb/ft^2$  en el sistema de uso común en Estados Unidos.



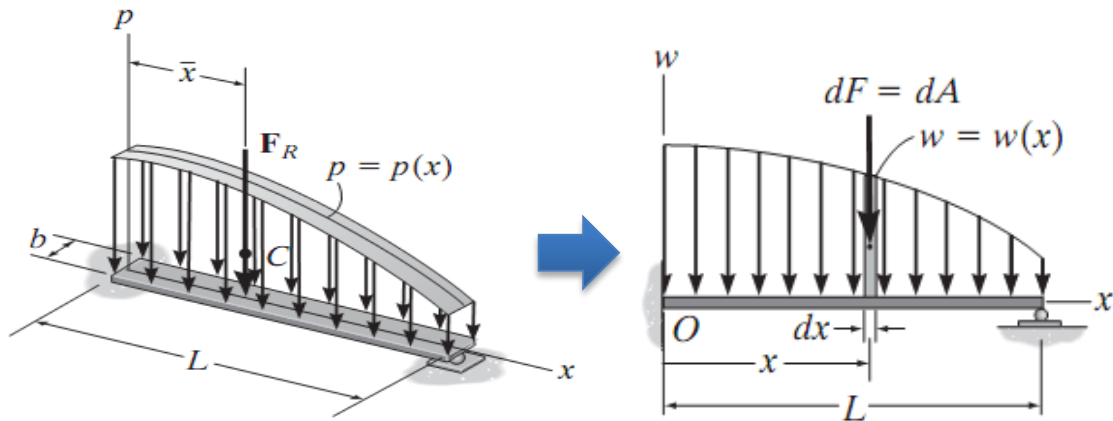
Carga distribuida de viento sobre la torre



Carga distribuida del agua sobre la pared de la presa

### 9.1 CARGA UNIFORME A LO LARGO DE UN SOLO EJE

Si la viga de la figura es de ancho constante y está sometida a una carga de presión que actúa sólo a lo largo del eje  $x$ , esta carga se puede describir como una función  $p = p(x)$  en  $N/m^2$  y se puede representar como una **carga distribuida coplanar** y se cumple que:  $w(x) = p(x) b$ . Este sistema de fuerzas paralelas se puede representar por una fuerza equivalente  $F_R$  que actúa en una ubicación específica sobre la viga.



#### Magnitud de la carga distribuida

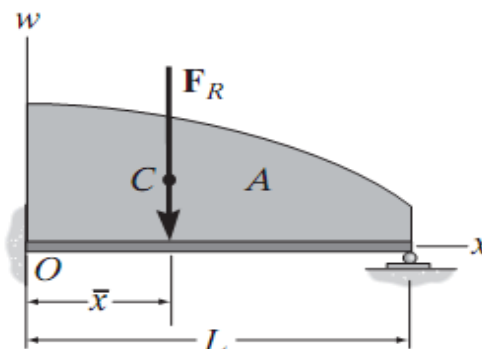
La fuerza resultante que representa la carga distribuida es equivalente al área bajo el diagrama de carga.

$$F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A$$

#### Ubicación de la carga distribuida

Esta coordenada en el eje  $x$  ubica el centroide  $C$  del área bajo la curva:

$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

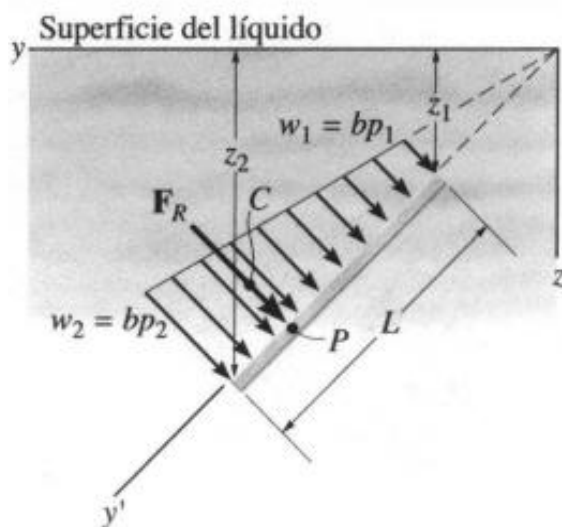
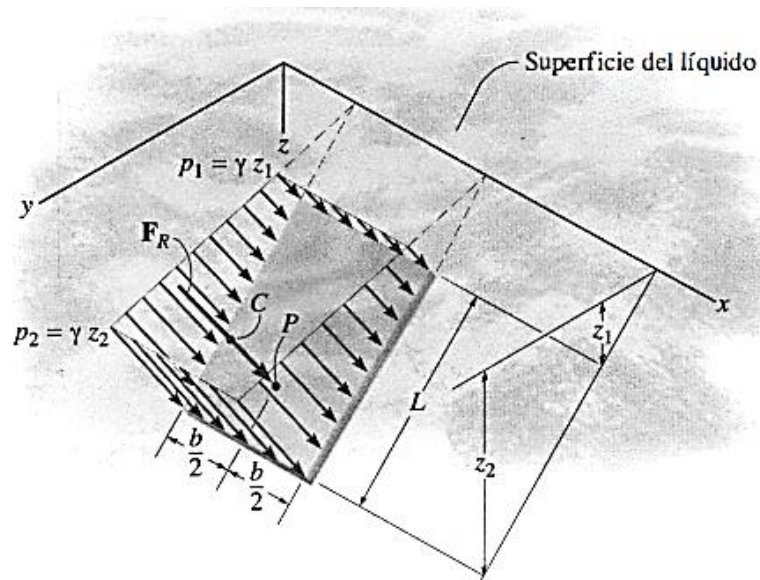


## 9.2 Fuerzas Sobre Superficies Sumergidas

La presión medida como fuerza por unidad de área depende del peso específico y la profundidad desde la superficie del líquido. La presión actúa en forma perpendicular al área superficial que se localiza en un punto especificado. La fuerza resultante ejercida por efectos de la presión sobre cuerpos sumergidos se puede determinar con un procedimiento similar al de la sección anterior.

### Fuerza sobre una placa plana de ancho constante

- ✓ *Magnitud de la fuerza resultante:*  
Vista en dos dimensiones es igual al área trapezoidal.
- ✓ *Ubicación de la fuerza resultante*  
En la línea de acción que pasa por el centroide C del área, y actúa en un punto P llamado centro de presión.



$$F_R = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)L$$

Donde la carga de presión es:

$$w = b p$$

w = Carga de presión (N/m)  
b = Ancho de la placa (m)  
P = Presión hidrostática (Pa)



## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 9

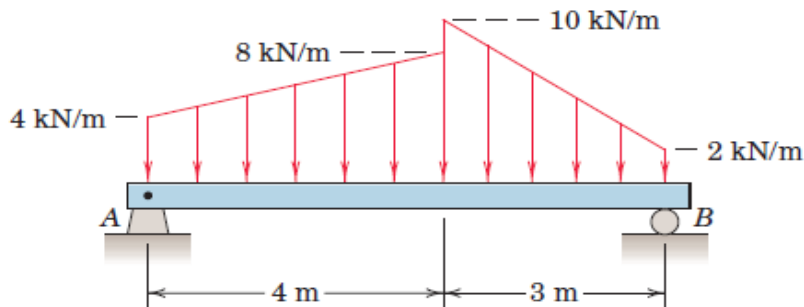
### Tema: Fuerzas Distribuidas

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

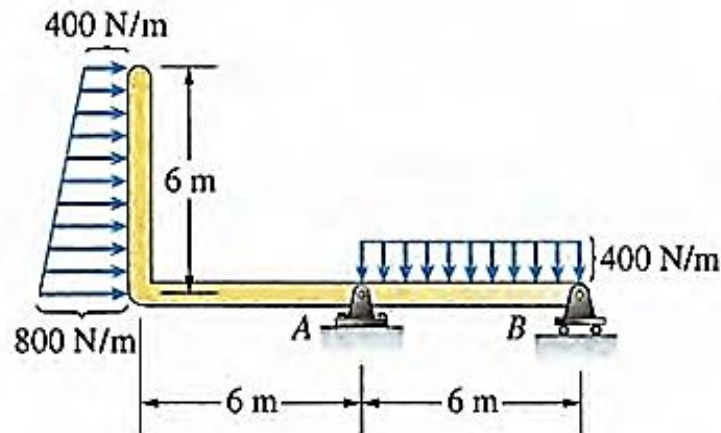
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

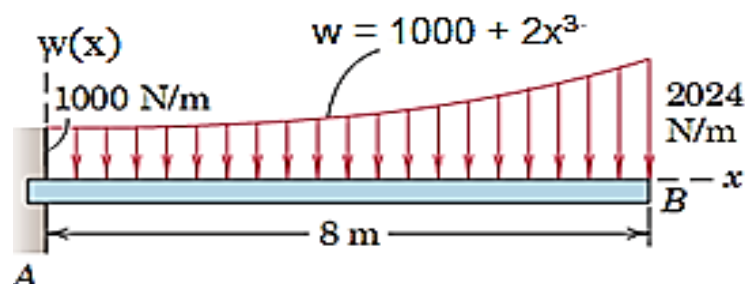
1. Calcular las reacciones de apoyo en A y B para la viga sometida a las dos cargas distribuidas linealmente.



2. La viga mostrada está sometida a dos cargas distribuidas, determine las magnitudes de las reacciones en A y en B.



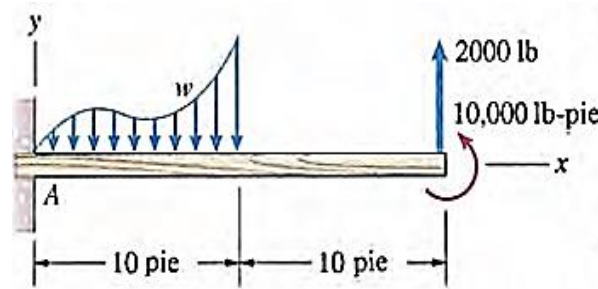
3. Determine la magnitud y ubicación de la resultante de fuerzas distribuidas:



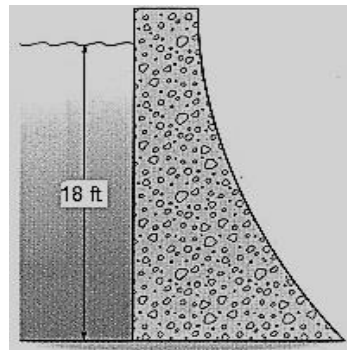
4. La viga mostrada está sometida a una carga distribuida, a una fuerza y a un par. La carga distribuida está dada por  $w = 300x - 50x^2 + 0.3x^4$  lb/pie. Determine:  
a) La fuerza total F ejercida por la carga distribuida.



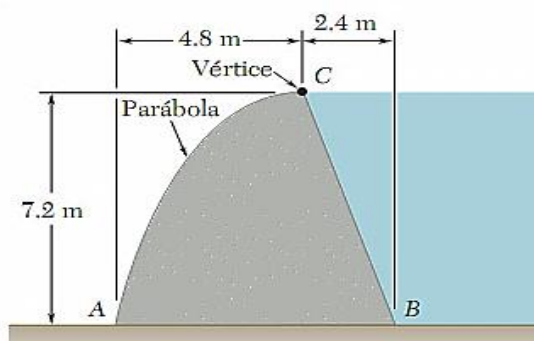
- b) El momento total ejercido por la carga distribuida respecto al punto A.
- c) Las magnitudes de las reacciones en A.



5. Dada la figura mostrada que indica la sección de una presa de 24 ft de ancho, determine:
- a) La magnitud de la fuerza resultante que el agua ejerce sobre la presa.
  - b) La ubicación de la fuerza resultante respecto al nivel superior del agua.
- El peso específico del agua es  $62,4 \text{ lb/ft}^3$ .



6. En la figura mostrada que indica la sección de un dique de concreto de 1 m de ancho, determine:
- a) La magnitud de la reacción del suelo sobre la base AB del dique.
  - b) El punto de aplicación de la reacción del suelo sobre la base AB del dique.
  - c) La magnitud de la fuerza de presión sobre la cara BC del dique.
- Las densidades del agua y del concreto son  $1000 \text{ kg/m}^3$  y  $2500 \text{ kg/m}^3$ , respectivamente.



### Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler,** R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler.** (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

**Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

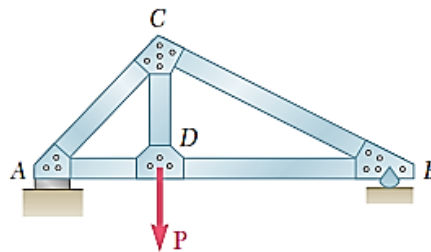


## TEMA N° 10: ARMADURAS

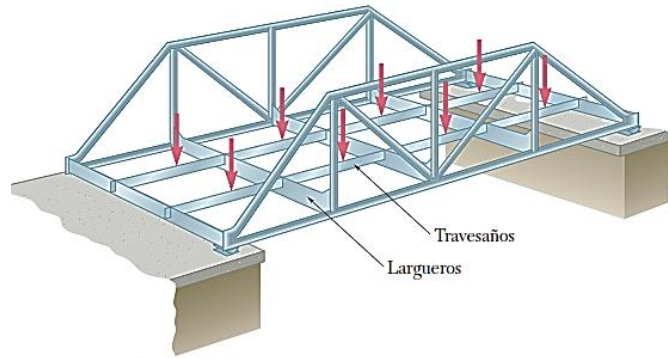


### DEFINICIÓN DE ARMADURA

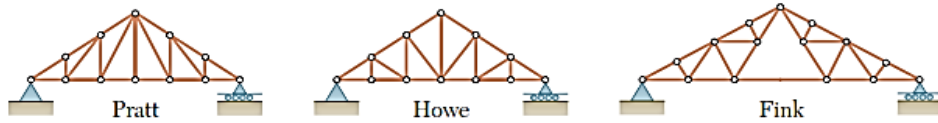
Uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería es la armadura. Ésta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios. Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos. Los elementos de la armadura sólo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura no existe un elemento  $AB$ , en su lugar existen dos elementos distintos  $AD$  y  $DB$ . La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.



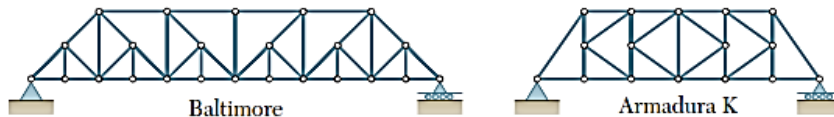
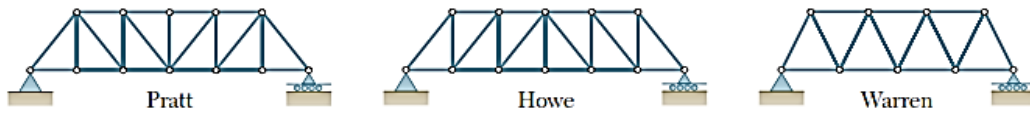
Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y sólo pueden soportar cargas laterales pequeñas; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de piso, el cual, mediante el uso de travesaños y largueros, transmite la carga a los nodos. Los pesos de los elementos de la armadura los cargan los nodos. Cada elemento de una armadura puede considerarse como un elemento a dos fuerzas.



### Armaduras típicas



Armaduras típicas para techo



Armaduras típicas para puentes

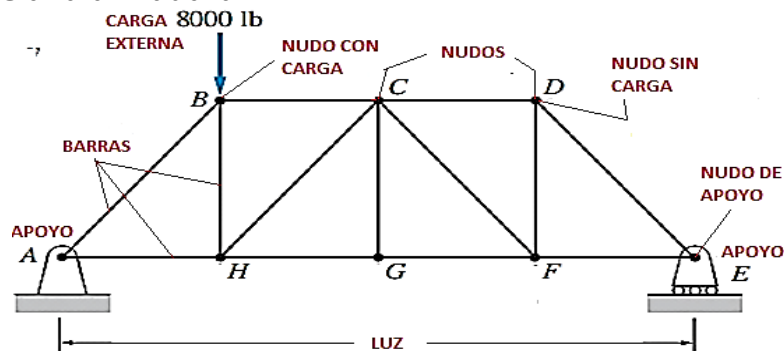
### Armaduras simples

Estas armaduras consisten de sistemas formados básicamente de tres barras unidas por pasadores en sus extremos, formando un triángulo, y luego agregando dos nuevas barras por cada nuevo nudo formamos armaduras cada vez más grandes. La experiencia verifica que una configuración triangular es la mejor forma de disponer las barras para soportar cargas sin desplomarse, es decir, se obtiene un sólido rígido estable.

*Armadura plana:*

Es aquella en la cual las barras y demás elementos de la armadura están contenidos en un mismo plano.

### Elementos de una armadura

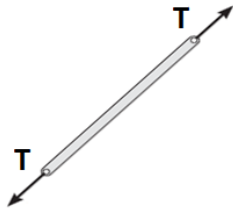


- ✓ Barras o elementos: AB, BC, AH, BH, .....
- ✓ Nudos o nodos: A, B, C, H, .....

### Fuerzas en una armadura

Los elementos de estas estructuras están sometidos a dos fuerzas iguales y opuestas dirigidas a lo largo del elemento, **fuerzas axiales**: Estas pueden ser tracción o compresión.

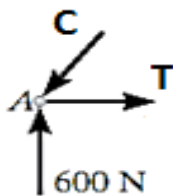
#### ELEMENTO A TENSIÓN O TRACCIÓN



#### ELEMENTO A COMPRESIÓN



Si graficamos las fuerzas en un nudo:

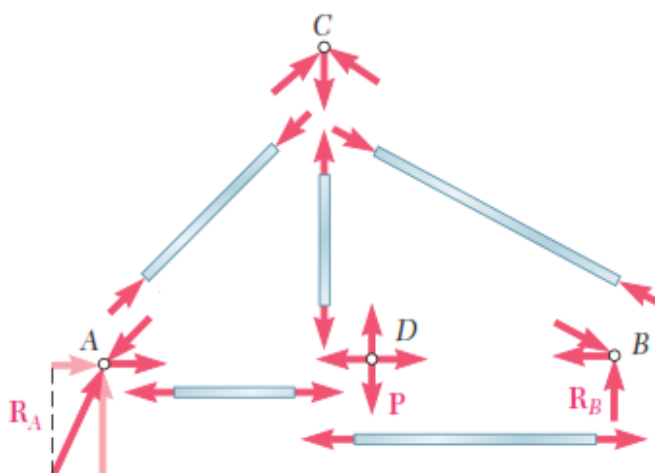


**C = Compresión** (Entrante)

**T = Tensión** (Saliente)

### ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL METODO DE NUDOS:

- Si es necesario se determinan las reacciones en los apoyos considerando como sólido rígido a la armadura completa,
- Se escoge un nudo donde no existan más de dos fuerzas desconocidas, se grafica el DCL y se aplican las condiciones de equilibrio de fuerzas:  $\Sigma F_x = 0$ ;  $\Sigma F_y = 0$ .
- Se escoge otro nudo verificando las condiciones del paso anterior y aplicando las condiciones de equilibrio; así se continúa sucesivamente hasta determinar las fuerzas en todas las barras.



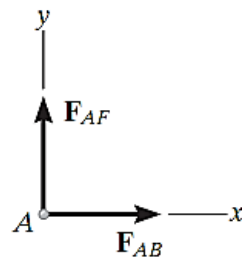
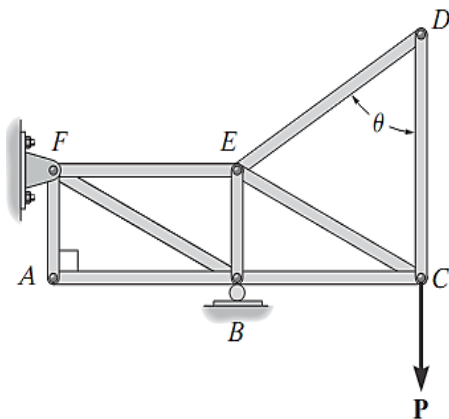


**Miembros de fuerza cero**

El análisis de armaduras podría simplificarse en algunos casos si se identifica qué miembros no soportan carga. Esos miembros de fuerza cero se usan para incrementar la estabilidad de la armadura durante la construcción y para proporcionar soporte si la carga aplicada se modifica.

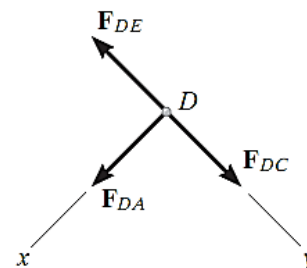
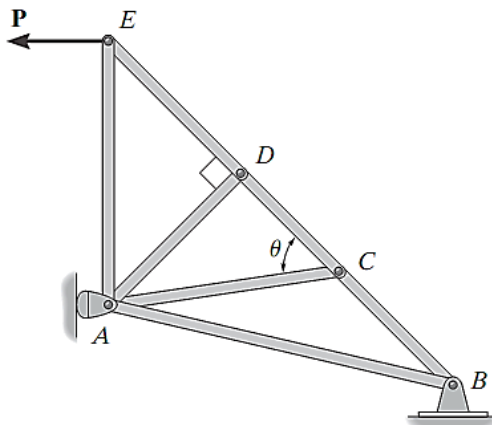
Normalmente se pueden identificar estos elementos por simple inspección.

1. Nudo sin carga formado por dos elementos no colineales.



$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; F_{AB} = 0 \\ \uparrow \Sigma F_y &= 0; F_{AF} = 0 \end{aligned}$$

2. Nudo sin carga formado por tres elementos, dos de ellos colineales.



$$\begin{aligned} +\swarrow \Sigma F_x &= 0; F_{DA} = 0 \\ +\searrow \Sigma F_y &= 0; F_{DC} = F_{DE} \end{aligned}$$

**ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL MÉTODO DE SECCIONES:**

Cuando se quiere determinar las fuerzas en sólo algunos elementos de la armadura se procede más rápido con el método de las secciones.

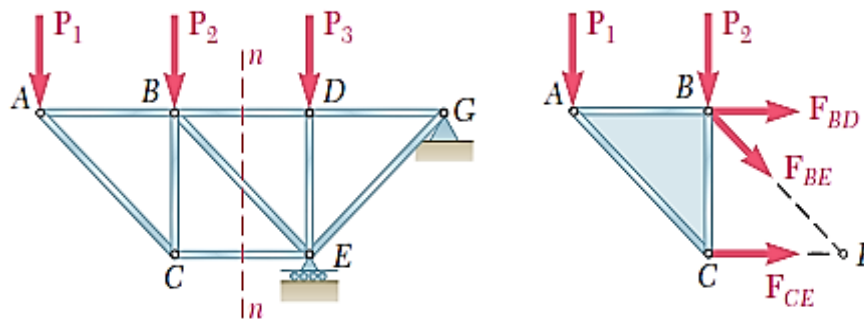
- a) Si es necesario se determinan las reacciones en los apoyos considerando como sólido rígido a la armadura completa.
- b) Se dibuja una línea que divida a la armadura en dos partes completamente separadas pero que no interseque a más de tres elementos. Cualesquiera de las



dos secciones de la armadura que obtenga después de que los elementos intersecados han sido "removidos" puede usarse como cuerpo libre.

- c) En la sección elegida se deben graficar las fuerzas externas, reacciones en apoyos si los hubiera y las fuerzas internas en las barras cortadas.
- d) Se aplican las condiciones del equilibrio a la sección elegida: ( $\Sigma F=0$ ,  $\Sigma M=0$ ) determinando así las fuerzas en las barras que se desean analizar.

En ocasiones se requieren hacer varios cortes para obtener resultados esperados.





## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 10

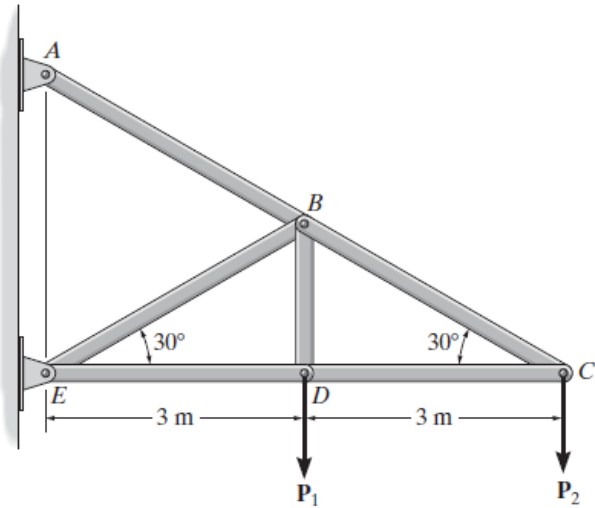
### Tema: Análisis Estructural - Armaduras

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

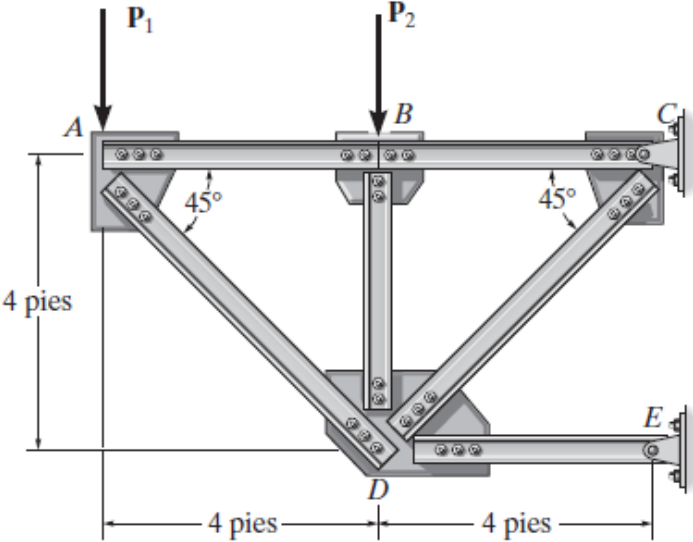
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic.  
Tiempo

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere  $P_1 = P_2 = 4$  kN.

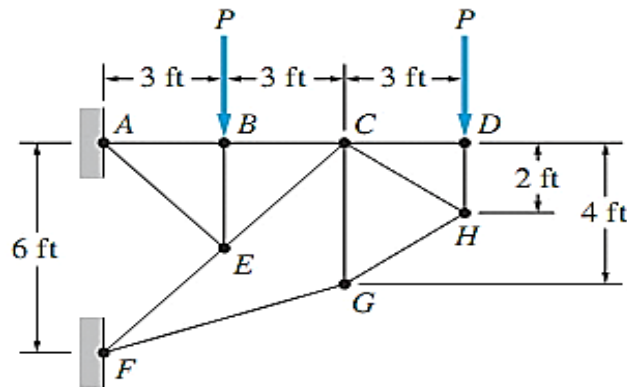


2. La armadura, que se ha utilizado para soportar un balcón, está sometida a la carga mostrada. Aproxime cada nodo como un pasador y determine la fuerza en cada elemento. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere  $P_1 = 600$  lb,  $P_2 = 400$  lb.

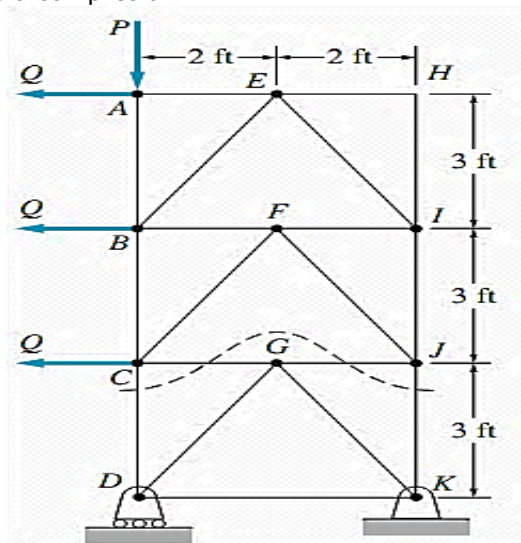




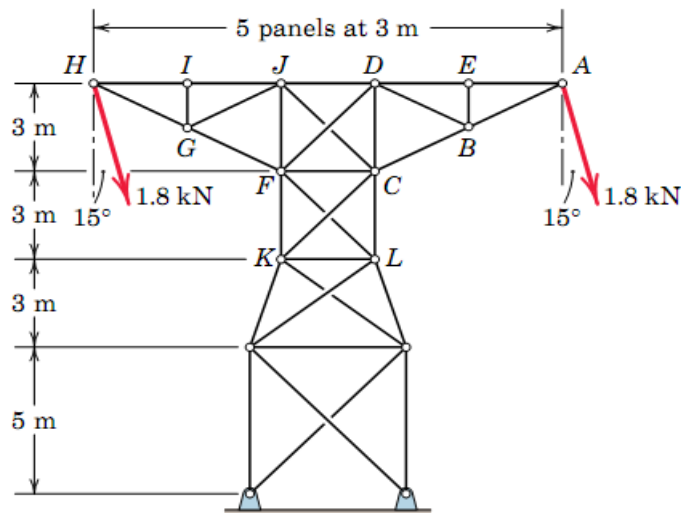
3. Determine las magnitudes de las fuerzas en los elementos HC y HG en función de P.



4. Determinar las fuerzas en los elementos CD y JK siendo  $P = 3000 \text{ lb}$  y  $Q = 1000 \text{ lb}$ . Use la sección indicada por la línea discontinua). Determine además las magnitudes de P y Q si  $P_{CD} = 6000 \text{ lb}$  y  $P_{GD} = 1000 \text{ lb}$ , ambas fuerzas a compresión.

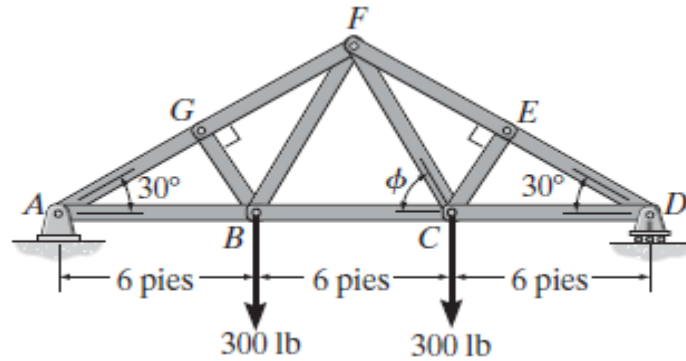


5. Se muestra la sección transversal de una línea de transmisión. Se asume que los elementos diagonales de los tramos centrales solo pueden trabajar a tracción. Para las cargas de  $1.8 \text{ kN}$  aplicadas como se indica determinar las magnitudes de las fuerzas en los elementos AD, DB y CD.

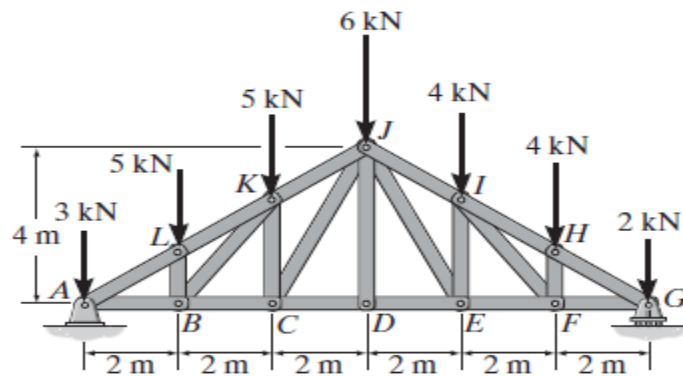




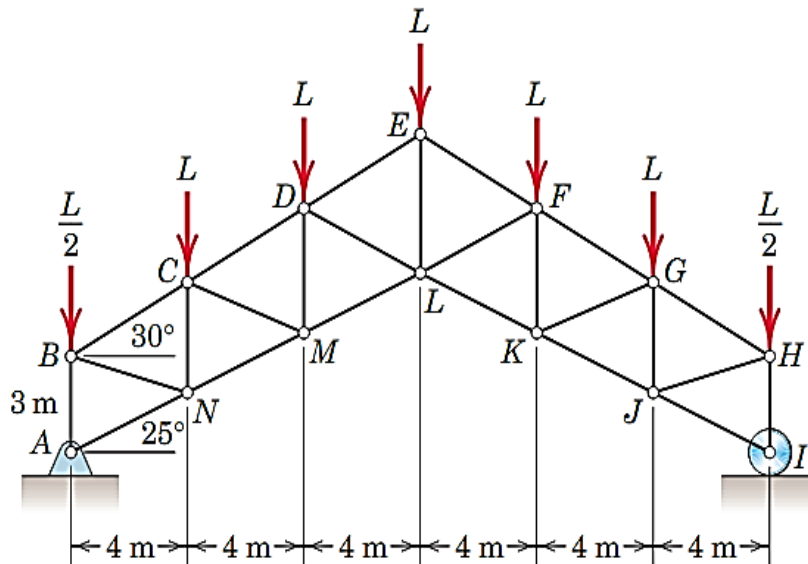
6. Determine la fuerza en los elementos  $EF$ ,  $CF$  y  $BC$  de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



7. Determine la fuerza en los elementos  $KJ$ ,  $KC$  y  $BC$  de la armadura Howe, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



8. Para la armadura mostrada, determine en función de  $L$ , dimensiones en m:  
a) Las fuerzas en los elementos  $DL$  y  $DE$ .  
b) Las fuerzas en los elementos  $LM$  y  $EL$ .



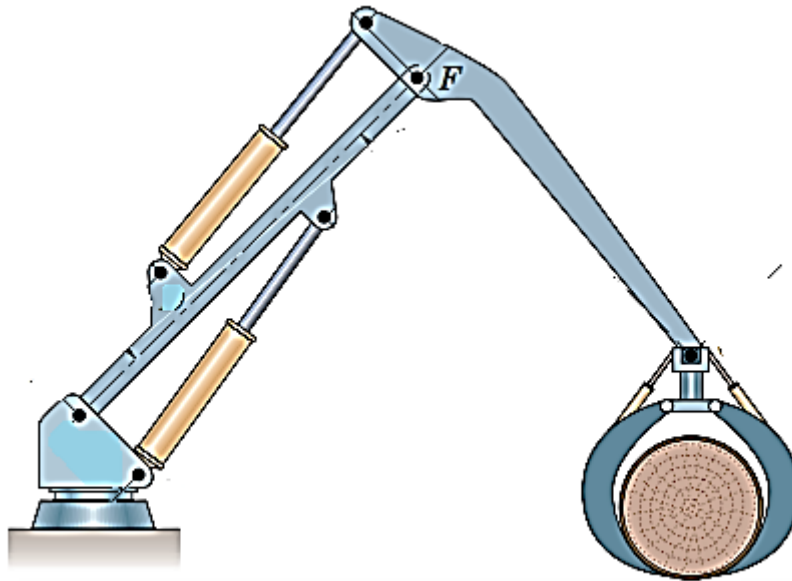
**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.**, (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler**, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

## TEMA N° 11: ARMAZONES



Muchas estructuras, como el bastidor de un automóvil y la estructura humana de huesos, tendones y músculos, no están compuestas enteramente de miembros de dos fuerzas y no se pueden representar como armaduras. En esta sección consideraremos estructuras de miembros interconectados que no satisfacen la definición de una armadura. Estas estructuras se denominan *armazones* si están diseñadas para permanecer en reposo al soportar cargas, es decir son totalmente restringidas, y *máquinas* si están diseñadas para moverse y aplicar cargas, las máquinas pueden ser estacionarias o no.

Los elementos que conforman un armazón o una máquina están unidos generalmente por pasadores, estas conexiones generan una reacción cuya dirección es desconocida y por ello se descompone en una fuerza horizontal y una fuerza vertical en cada conexión. A diferencia de las armaduras las fuerzas se presentan no sólo en sus pasadores sino también en cualquier punto de los elementos.

Siempre que un bastidor o una máquina no contengan más soportes o elementos que los necesarios para evitar el colapso, las fuerzas que actúan en las uniones y soportes pueden determinarse si se aplican las ecuaciones de equilibrio a cada uno de sus elementos. Una vez obtenidas las fuerzas en las uniones, es posible *diseñar* el tamaño de los elementos, conexiones y soportes al aplicar la teoría de la mecánica de materiales y un código de diseño de ingeniería adecuado.

### Procedimiento para determinar las fuerzas en los elementos de un bastidor.

1º ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA COMPLETA: Para determinar las reacciones en los soportes.

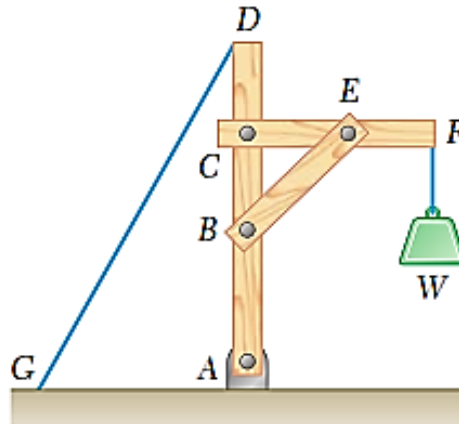
- Dibujamos el DCL de la estructura completa.
- Aplicamos las condiciones de equilibrio:  $\Sigma F=0$ ,  $\Sigma M=0$

2º ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS POR SEPARADO: Para determinar las fuerzas que actúan sobre ellos.

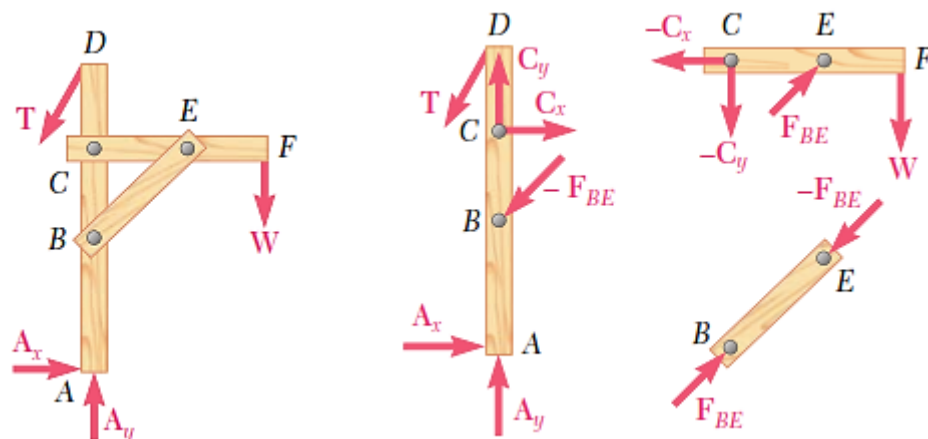


- Identificar los elementos a dos fuerzas.
- Dibujamos el DCL de cada parte.
- Aplicamos las condiciones de equilibrio:  $\Sigma F=0$ ,  $\Sigma M=0$  a los elementos que sean necesarios para el análisis.

Ejemplo de análisis del equilibrio mediante fuerzas en un bastidor.



En primer lugar, se tiene el DCL del bastidor completo y a continuación el DCL de cada elemento por separado. Note el caso particular de elemento a dos fuerzas (miembro BE).







## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 11

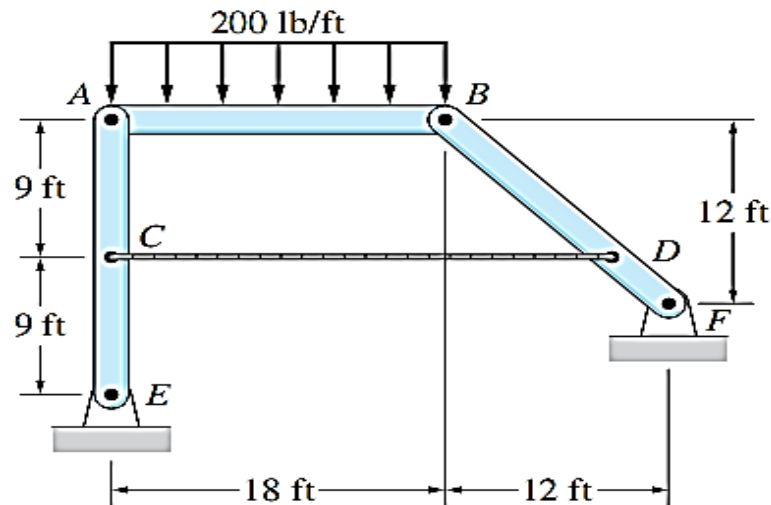
### Tema: Análisis Estructural – Armazones y Máquinas

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

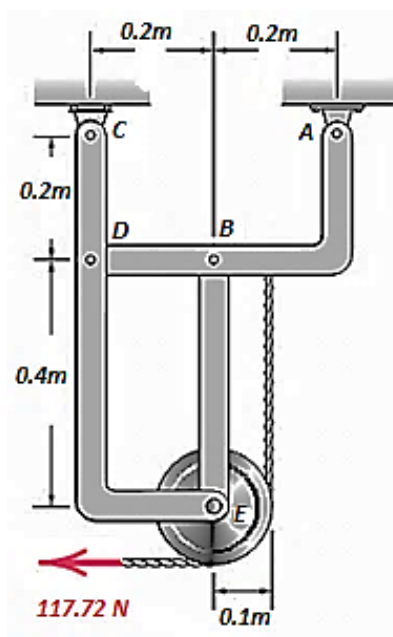
INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. Determine la magnitud de la tensión en el cable CD. Desprecie el peso de las barras.

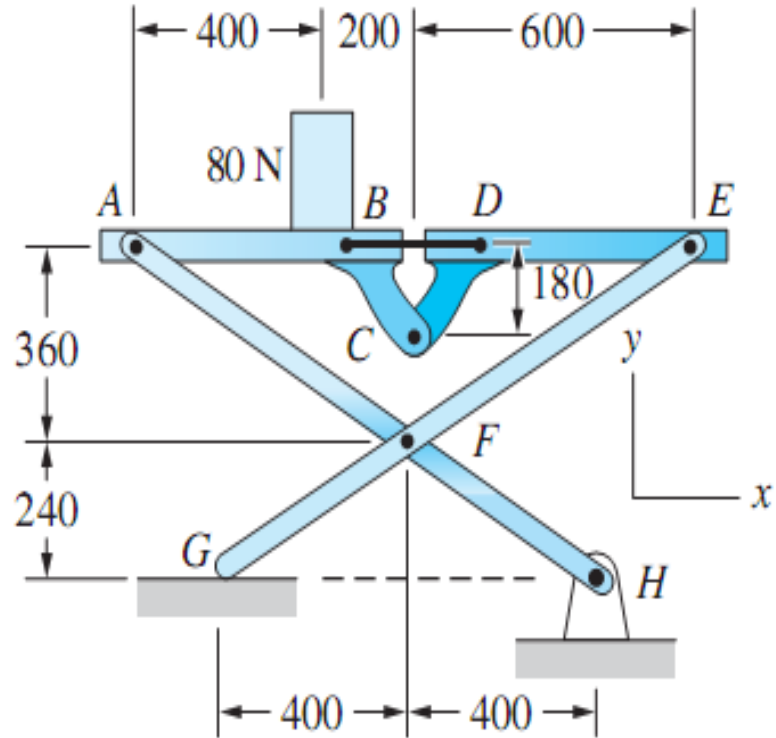


2. Despreciando los pesos de los elementos del bastidor apoyado en un pasador en A y un rodillo en C, con una fuerza externa de 117.72 N en la cuerda, determine:

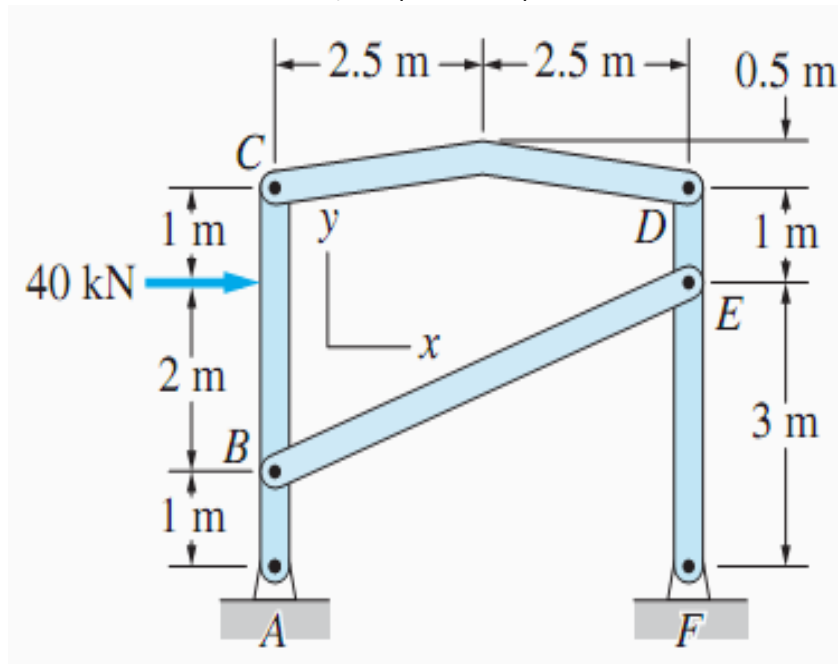
- Las magnitudes de las reacciones en los apoyos.
- La magnitud de la reacción en el pasador B. y la magnitud de la reacción en el pasador E.



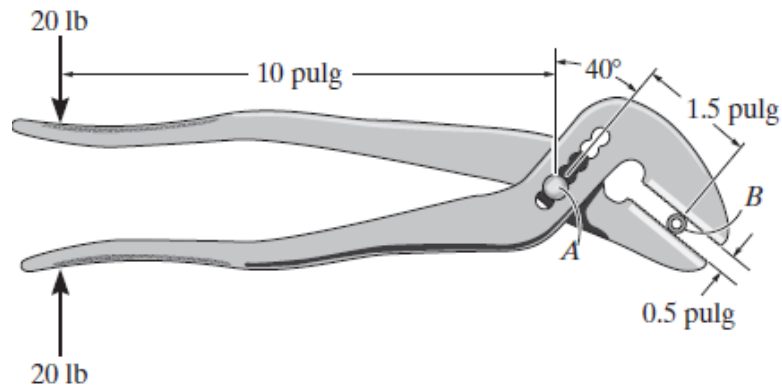
3. Una caja de 80 N es colocada sobre el elemento AB como se muestra en la figura. Despreciando los pesos de los elementos determine las fuerzas que actúan sobre el elemento EFG y la tensión en el cable BD. Las dimensiones están en mm.



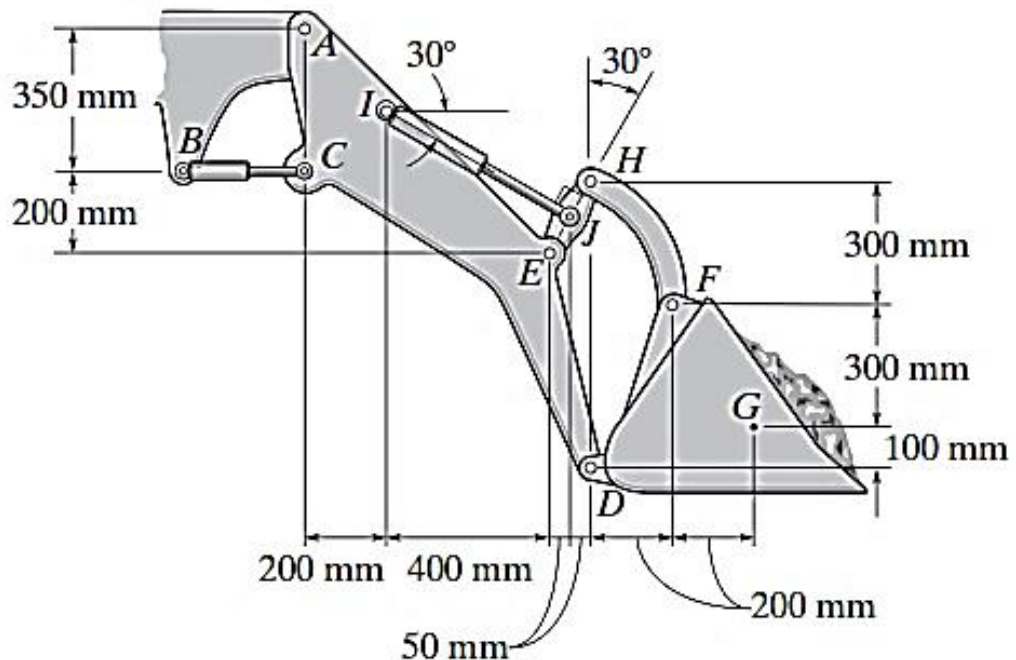
4. Determine las reacciones en A y las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre el miembro DEF del bastidor mostrado, Desprecie los pesos de los miembros.



5. Determine la fuerza de apriete ejercida sobre el tubo liso en B si se aplica una fuerza de 20 lb a los mangos de las pinzas. Las pinzas están articuladas en A.



6. El cucharón de la excavadora contiene una carga de masa 500 kg con centro de gravedad en G. Despreciando el peso de los elementos determine las fuerzas desarrollada por los cilindros hidráulicos BC e IJ.



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler, R.C.** (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

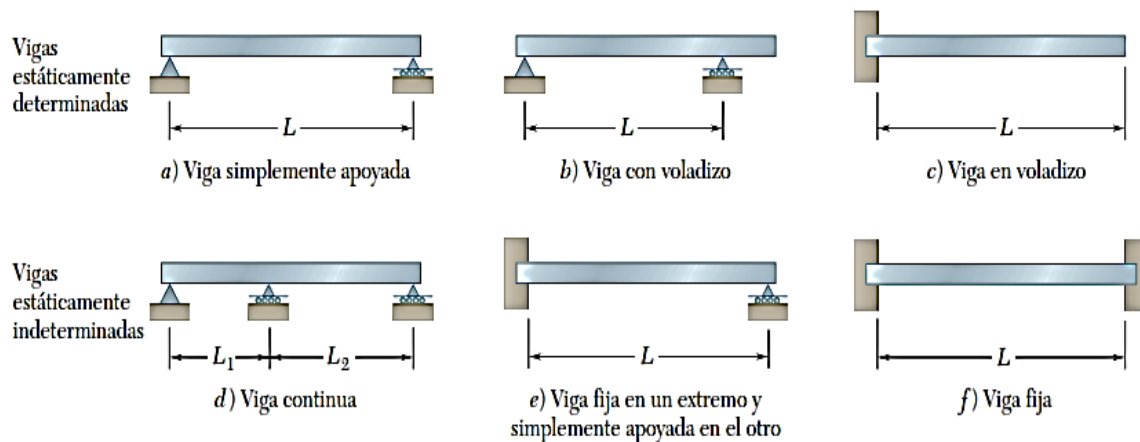
## TEMA Nº 12: FUERZAS EN VIGAS



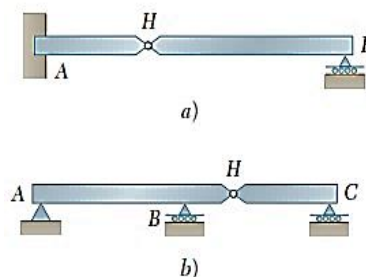
Con la finalidad de que un elemento estructural no falle (se rompa o desplome) debido a las fuerzas y los momentos que actúan sobre él, el ingeniero proyectista debe conocer no sólo las cargas y reacciones externas, sino también las fuerzas y los momentos que actúan *dentro* del elemento.

**Viga:** Es una barra de un material que soporta cargas laterales, es decir, cargas perpendiculares al eje de la barra.

A continuación, se muestran algunos tipos comunes de vigas.



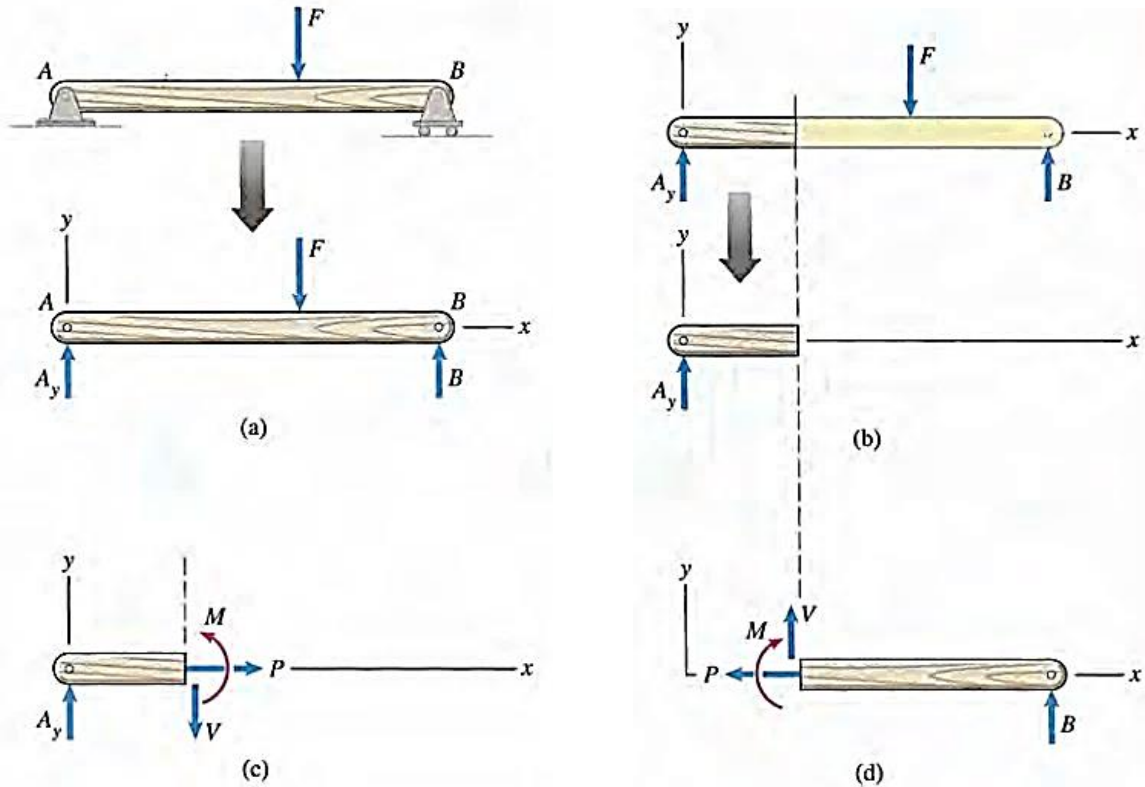
Vigas con rótula:



### 12.1. Fuerzas y momentos internos en una viga

Consideremos una viga sometida a una carga externa y a reacciones (Figura a). ¿Cómo podemos determinar las fuerzas y los momentos dentro de la viga? En la figura b,

"cortamos" la viga con un plano en una sección transversal arbitraria y aislamos parte de ella. La parte aislada no puede estar en equilibrio a menos que esté sometida a cierto sistema de fuerzas y momentos en el plano en que se une a la otra parte de la viga. Éstas son las fuerzas y momentos internos que buscamos. Se sabe que *cualquier* sistema de fuerzas y momentos se puede representar por un sistema equivalente que consiste en una fuerza y un par. Si el sistema de cargas externas y reacciones sobre una viga es bidimensional, podemos representar las fuerzas y el momento internos con un sistema equivalente que consiste en dos componentes de fuerza y un par (Figura c).



- ✓ La componente  $P$  paralela al eje de la viga se llama **fuerza axial**.
- ✓ La componente  $V$  normal al eje de la viga se llama **fuerza cortante**.
- ✓ El par  $M$  se llama **momento flector**.

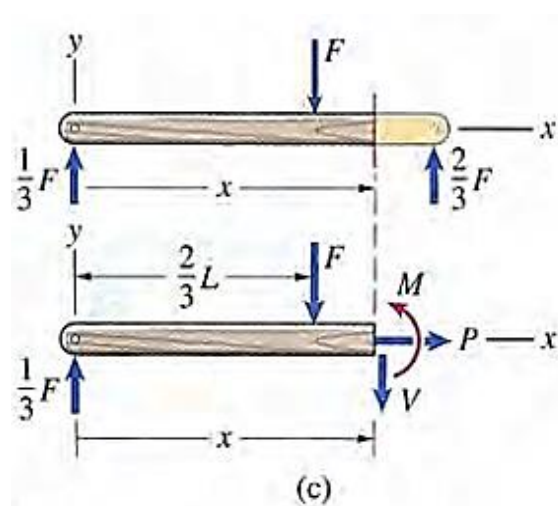
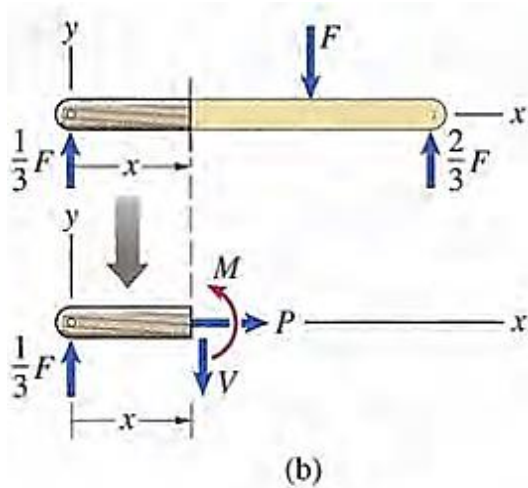
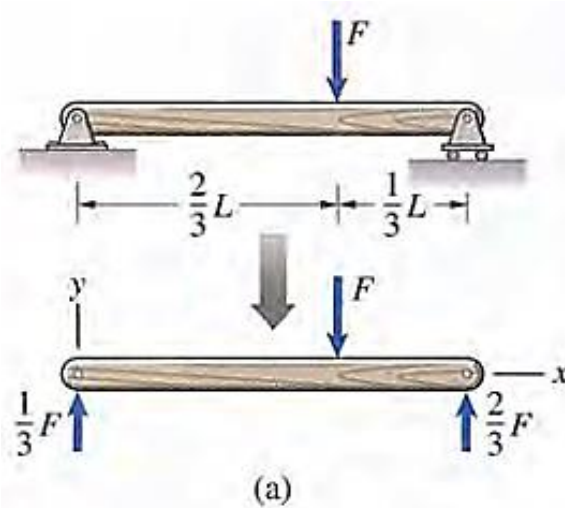
En la figura (d) se muestran la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flector en el diagrama de cuerpo libre de la otra parte de la viga.

Procedimiento para determinar las fuerzas y momentos internos en una sección transversal particular de una viga:

1. *Determinar las fuerzas y los momentos externos.*  
Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga y determine las reacciones en los soportes. Si la viga forma parte de una estructura, debe analizar la estructura.
2. *Dibujar el diagrama de cuerpo libre de una parte de la viga.*  
Corte la viga en el punto en que desee determinar las fuerzas internas y el momento, y dibuje el diagrama de cuerpo libre de una de las partes resultantes. Se puede escoger la parte con el diagrama de cuerpo libre más sencillo. Si el corte divide una carga distribuida, no represente la carga distribuida por medio de una fuerza equivalente hasta haber obtenido el diagrama de cuerpo libre.
3. *Aplicar las ecuaciones de equilibrio.* Use las ecuaciones de equilibrio para determinar  $P$ ,  $V$  y  $M$ .

## 12.2. Diagramas de Fuerza cortante y momento flector

El diseño de una viga requiere conocer las fuerzas y los momentos internos en ella. Son muy importantes los valores máximo y mínimo de la fuerza cortante y del momento flector, y las posiciones en que se presentan, por ello veremos cómo determinar los valores de  $P$ ,  $V$  y  $M$  en función de  $x$  y presentaremos los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Sea una viga simplemente soportada y cargada con una fuerza (Figura a). En vez de cortarla en una sección específica para hallar las fuerzas y el momento internos, la cortamos en una posición arbitraria  $x$  entre el extremo izquierdo y la carga  $F$  (Figura b).



Los diagramas de fuerza cortante y de momento flector son simplemente las gráficas de  $V$  y  $M$ , respectivamente, en función de  $x$ , y nos permiten ver los cambios en la fuerza cortante y en el momento flector a lo largo de la viga, así como sus valores, máximo (menor cota de la fuerza o el momento) y mínimo (mayor cota inferior).

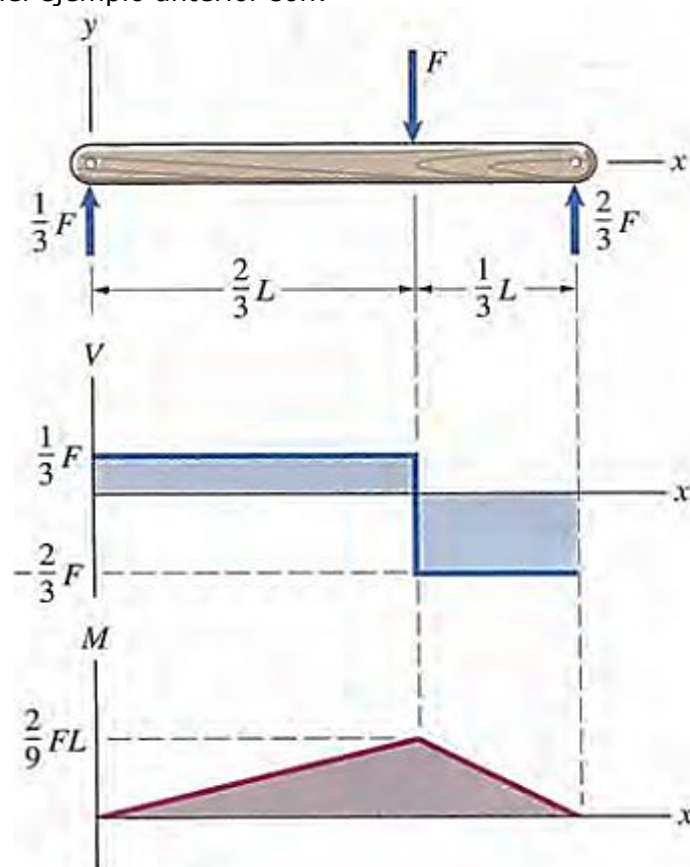
Se puede determinar las distribuciones de las fuerzas y del momento internos en una viga considerando un plano a una distancia arbitraria  $x$  del extremo y estableciendo  $P$ ,  $V$  y  $M$  como funciones de  $x$ . Según la complejidad de la carga, deberán dibujarse varios diagramas de cuerpo libre para determinar las distribuciones sobre la longitud total.



Procedimiento para analizar las distribuciones de las fuerzas y del momento internos en una viga y graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector:

- 1º Dibujar el **DCL de la viga completa**. Determinar reacciones en los apoyos.
- 2º Cortar la viga en una posición arbitraria  $x$ , y dibujar el **DCL de la sección** elegida mostrando las cargas externas, las fuerzas internas y el momento flector (*escoja la parte más sencilla*).
- 3º Escribir **ecuaciones en función de  $x$**  para la porción elegida de la viga, registrando los valores de  **$V$**  y  **$M$** .
- 4º Se dibuja los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.

Luego los diagramas del ejemplo anterior son:



**Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento flector:**

La fuerza cortante y el momento flector en una viga sometida a una carga distribuida se rigen por ecuaciones diferenciales simples. Se deducen esas ecuaciones y mostraremos que son una manera interesante e instructiva de obtener los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, y que también son útiles para determinar deflexiones en vigas.

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad \frac{dM}{dx} = V$$





## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 12

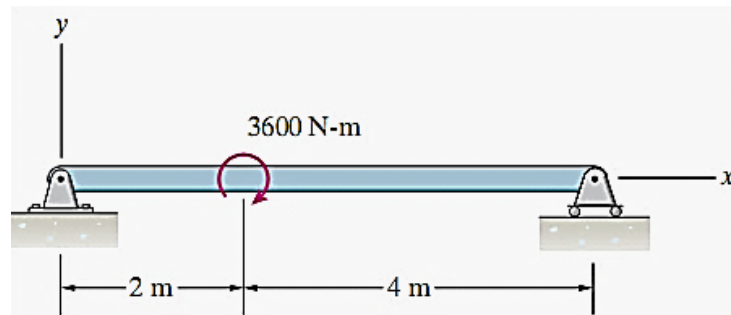
### Tema: Fuerzas en Vigas

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

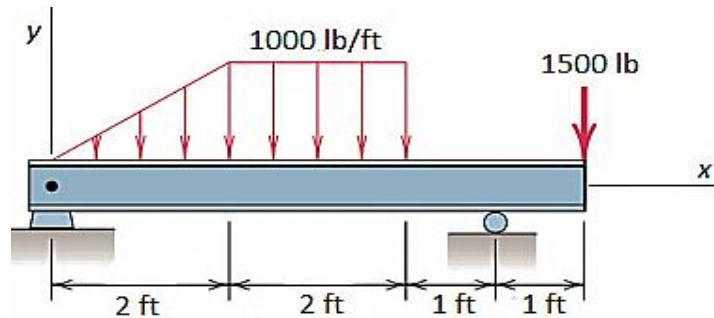
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../.....  
Duración : Indicar el tiempo

**INSTRUCCIONES:** Resuelva cada ejercicio en grupo de 5 integrantes considerando su diagrama y proceso. Evite borrones. El orden influirá en su calificación.

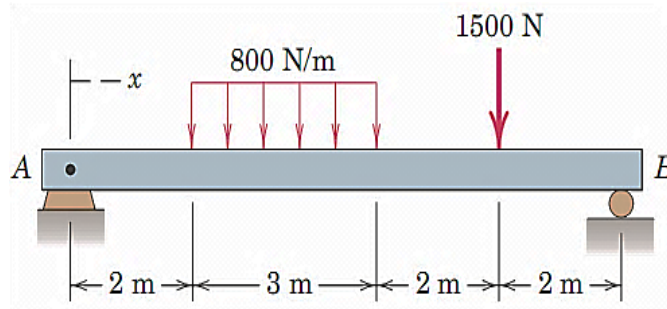
1. Para la viga mostrada:
  - a) Determine las ecuaciones de momentos y fuerzas cortantes para los intervalos:  $< 0; 2 >$  y  $< 2; 6 >$  (m).
  - b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza cortante y momento flector en  $x = 3$  m?
  - c) Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flector.
  - d) ¿Cuál es el valor del momento flector máximo?



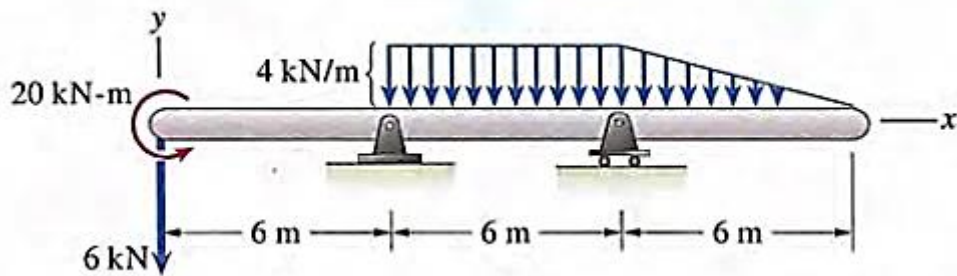
2. Para la carga mostrada realice el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.



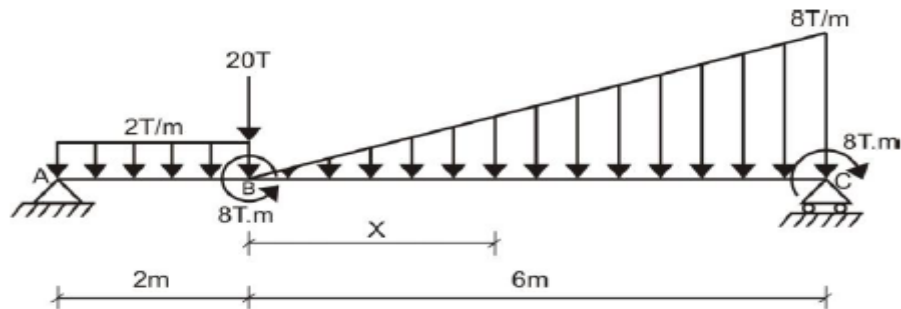
3. Para la viga mostrada:
  - a) Determine las ecuaciones de momentos y fuerzas cortantes para los intervalos:  $< 0; 2 >$ ,  $< 2; 5 >$ ,  $< 5; 7 >$  y  $< 7; 9 >$  (m).
  - b) ¿Cuál es el valor de la fuerza cortante y momento flector en  $x = 6$  m?
  - c) Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flector.
  - d) ¿Cuál es el valor del momento flector máximo?
  - e) Si se reemplaza la fuerza puntual por un par de 4200 Nm en sentido horario en su misma ubicación, repita los ítems a), b), c) y d)



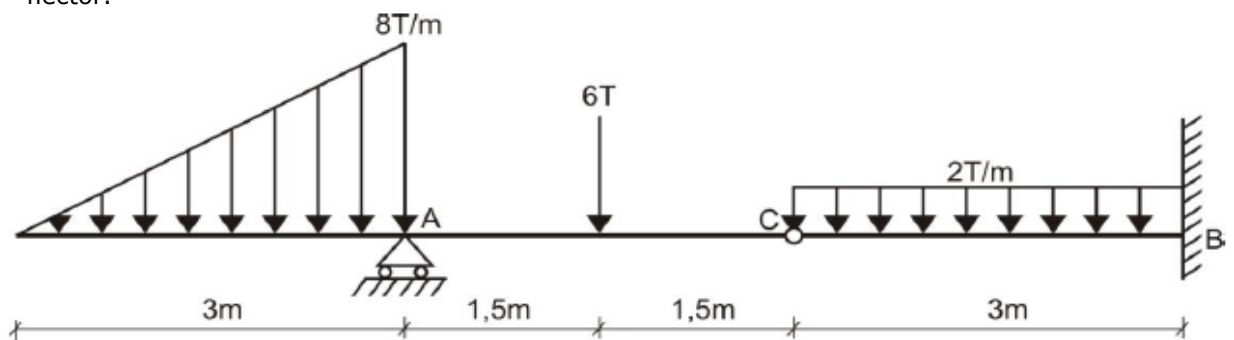
4. Para la carga mostrada realice el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.



5. Para la carga mostrada realice el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.



6. Para la carga mostrada realice el diagrama de la fuerza cortante y diagrama del momento flector.



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.  
**Bedford Fowler.** (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.  
**Meriam J.L. y Kraige L.G.** (2007). "Mecánica para Ingenieros". Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté S.A. España.

## CUARTA UNIDAD

### TEMA Nº 13: MOMENTO DE INERCIA



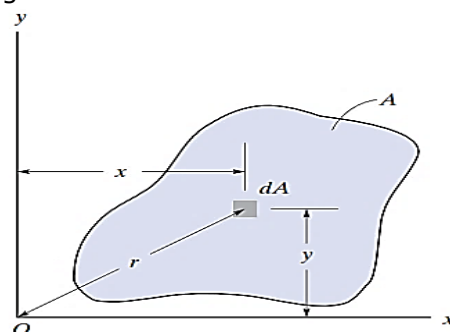
La cantidad denominada momento de inercia aparece con frecuencia en los análisis de problemas de ingeniería. Por ejemplo, los momentos de inercia de áreas se utilizan en el estudio de fuerzas distribuidas y en el cálculo de deflexiones de vigas. El momento ejercido por la presión sobre una placa plana sumergida se puede expresar en términos del momento de inercia del área de la placa. En dinámica, los momentos de inercia de masa se usan para calcular los movimientos rotatorios de objetos. Para estudiar estas aplicaciones, los momentos de inercia deben ser parte de nuestro "vocabulario" técnico. En este tema mostraremos cómo calcular los momentos de inercia de áreas simples o de cuerpos y luego usaremos resultados llamados teoremas de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia de áreas o cuerpos más complejos.

Para el caso de vigas con cargas laterales éstas hacen que la viga se flexione; por tanto, la viga debe ser resistente a la flexión para soportar cargas. La resistencia a la flexión depende directamente del momento de inercia del área de su sección transversal. A mayor momento de inercia la viga aumenta su resistencia. En condiciones reales, la forma de las secciones transversales de las vigas, como los pasos a desnivel carreteros, o de vías férreas, o de marcos de edificios están configurados para tener grandes momentos de inercia.

#### Momentos de Inercia de un área

La propiedad del área de una sección transversal que determina la resistencia a la flexión respecto a un eje particular de una viga se denomina *momento de inercia del área*.

Respecto a la figura se define:



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$I_x$  = Momento de inercia del área A respecto al eje x.



$I_y$  = Momento de inercia del área A respecto al eje y.

Tener presente que los momentos de inercia son cantidades siempre positivas, no nulas, y sus unidades son  $m^4$  (SI),  $pie^4$  (sistema inglés).

**Momento de inercia polar:**

Además de los momentos de inercia respecto a los ejes anteriores, muy importante para rotación de placas se define respecto al polo O o eje z, donde r es la distancia perpendicular desde el polo hasta el elemento dA:

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Se verifica, dado que:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

**Radio de giro de un área:**

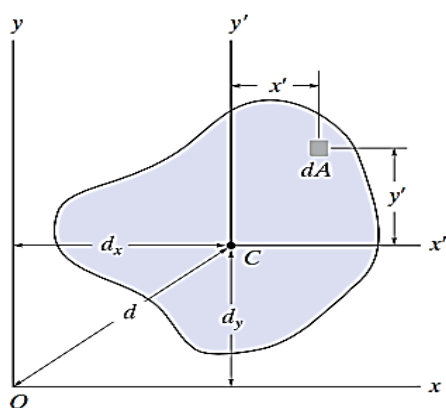
El radio de giro de un área respecto a un eje tiene unidades de longitud y es una cantidad que se usa a menudo en mecánica estructural para el diseño de columnas, se determinan así:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Los radios de giro son cantidades siempre positivas, no nulas, y sus unidades son m (SI), pie (sistema inglés).

**Teorema de los ejes paralelos para un área:**

También llamado Teorema de Steiner. El *teorema de los ejes paralelos* puede usarse para determinar el momento de inercia de un área con respecto a *cualquier eje* que sea paralelo a un eje que pasa a través de su centroide y del cual se conozca el momento de inercia.



$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

Donde:

$$\bar{I}_{x'}, \quad \bar{I}_{y'}$$

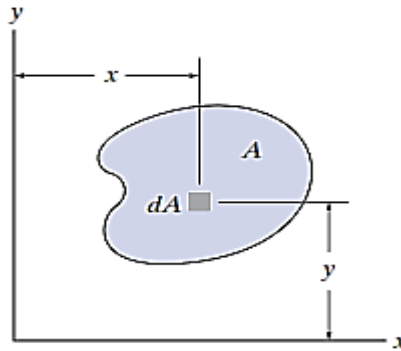
son los momentos de inercia del área A respecto a los ejes centroidales.

*“El momento de inercia de un área con respecto a un eje es igual al momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo que pase a través del centroide del área, más el producto del área y el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes”.*

**Producto de inercia:**

La propiedad de un área, llamada el producto de inercia, es necesaria a fin de determinar los momentos de inercia *máximo* y *mínimo* para el área. Estos valores máximo y mínimo son propiedades importantes necesarias para diseñar elementos estructurales y mecánicos como vigas, columnas y flechas.

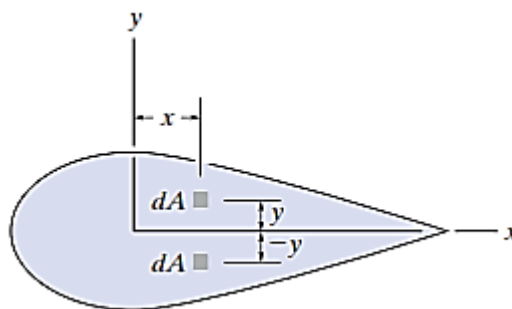
El *producto de inercia* del área de la figura siguiente con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  se define como:



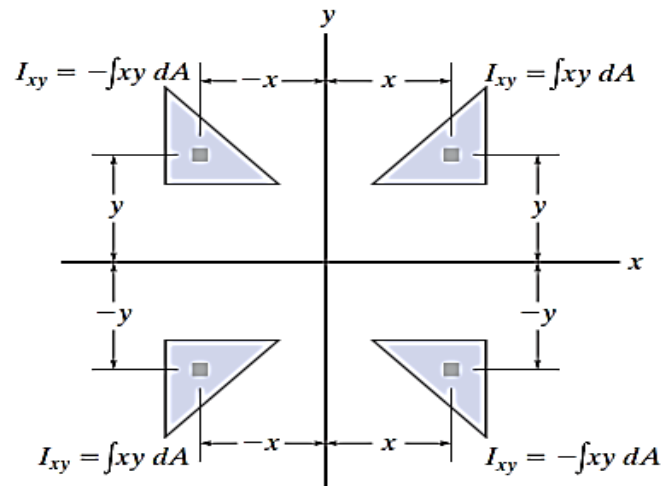
$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

- ✓ El producto de inercia tiene unidades de longitud a la cuarta potencia, por ejemplo,  $m^4$ ,  $mm^4$  o  $pies^4$ ,  $pulg^4$ . Sin embargo, como  $x$  o  $y$  pueden ser cantidades negativas.
- ✓ El producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de la ubicación y orientación de los ejes coordenados.

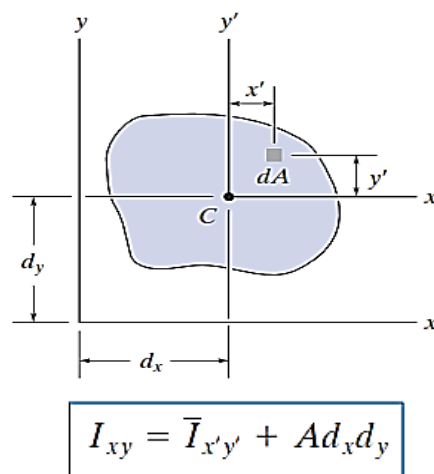
Por ejemplo, el producto de inercia  $I_{xy}$  para área será *cero* si el eje  $x$ , o el eje  $y$ , es un eje de *simetría* para el área, como en la figura mostrada a continuación. Aquí, cada elemento  $dA$  localizado en el punto  $(x, y)$  tiene un elemento  $dA$  correspondiente en  $(x, -y)$ . Como los productos de inercia para esos elementos son, respectivamente,  $xy \, dA$  y  $-xy \, dA$ , la suma algebraica o integración de todos los elementos que se elijan de esta manera se cancelarán uno a uno. En consecuencia, el producto de inercia para el área total se convierte en cero.



De la definición también se infiere que el "signo" de esta cantidad depende del cuadrante donde se ubique el área. Como en el gráfico siguiente se muestra el, si el área se gira de un cuadrante a otro, el signo de  $I_{xy}$  cambiará.



Finalmente, a continuación, se tiene una expresión del *Teorema de los ejes paralelos aplicado al producto de inercia de un área*:



Tener cuidado, puesto que los *signos algebraicos* para  $dx$  y  $dy$  se mantengan al aplicar esta ecuación.

### Momentos de Inercia de áreas compuestas:

Procedimiento:

1º *Partes simples componentes.*

- ✓ Con un croquis, divida el área en sus partes componentes, formas conocidas, e indique la distancia perpendicular desde el centroide de cada parte hasta el eje de referencia.

2º Teorema de los ejes paralelos.

- ✓ Si el eje centroidal para cada forma conocida no coincide con el eje de referencia, deberá usarse el teorema de los ejes paralelos, para determinar el momento de inercia de la parte con respecto al eje de referencia. Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje centroidal use tablas de fórmulas para regiones conocidas.

3º Suma.

- ✓ El momento de inercia de toda el área con respecto al eje solicitado se determina por la suma de los resultados de sus partes componentes con respecto a este eje.
- ✓ Si una parte componente tiene un "agujero", su momento de inercia se encuentra al "restar" el momento de inercia del agujero de la suma de momentos de inercia de las demás partes componentes que si conforman el área inicial.

Propiedades de las figuras planas

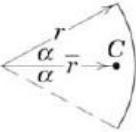

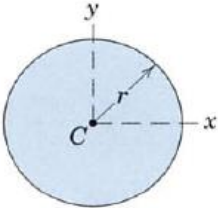
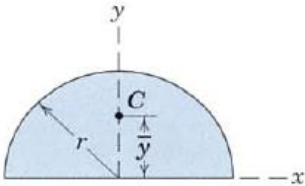
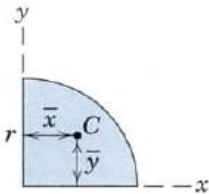
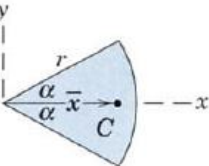
FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
<p>Arco de Circunferencia</p> 	$\bar{r} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	—
<p>Cuadrante y semicircunferencia</p> 	$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	—
<p>Circulo</p> 	—	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$
<p>Semicirculo</p> 	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{4}$
<p>Cuarto de circulo</p> 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$
<p>Sector Circular</p> 	$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	$I_x = \frac{r^4}{4} \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$ $I_y = \frac{r^4}{4} \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$ $I_z = \frac{1}{2} r^4 \alpha$





FIGURA	CENTROIDE	MOMENTOS DE INERCIA
<p style="text-align: center;">Area Rectangular</p>	—	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
<p style="text-align: center;">Area Triangular</p>	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$
<p style="text-align: center;">Area de Cuadrante Elíptica</p>	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{16}, \quad \bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) a b^3$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}, \quad \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) a^3 b$ $I_z = \frac{\pi ab}{16}(a^2 + b^2)$
<p style="text-align: center;">Area Subparabólica</p>	$\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3b}{10}$	$I_x = \frac{ab^3}{21}$ $I_y = \frac{a^3 b}{5}$ $I_z = ab \left( \frac{a^3}{5} + \frac{b^2}{21} \right)$
<p style="text-align: center;">Area Parabólica</p>	$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3b}{5}$	$I_x = \frac{2ab^3}{7}$ $I_y = \frac{2a^3 b}{15}$ $I_z = 2ab \left( \frac{a^2}{15} + \frac{b^2}{7} \right)$



## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 13

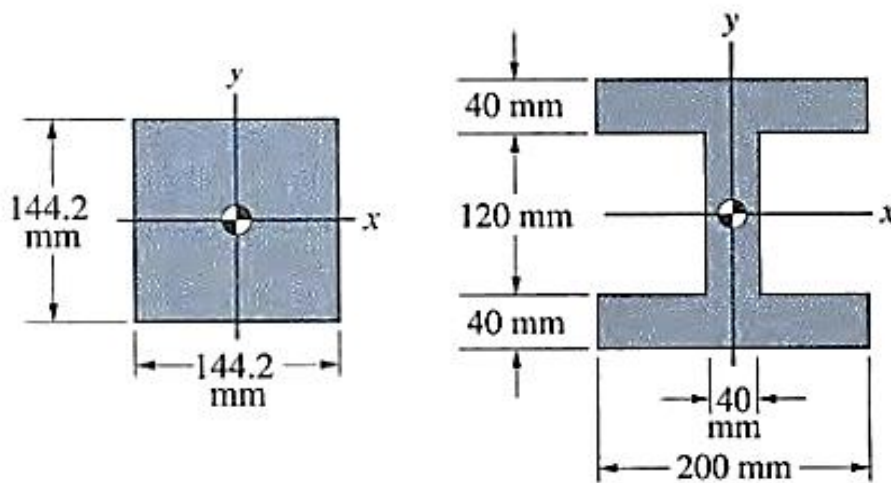
### Tema: Momento de Inercia

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

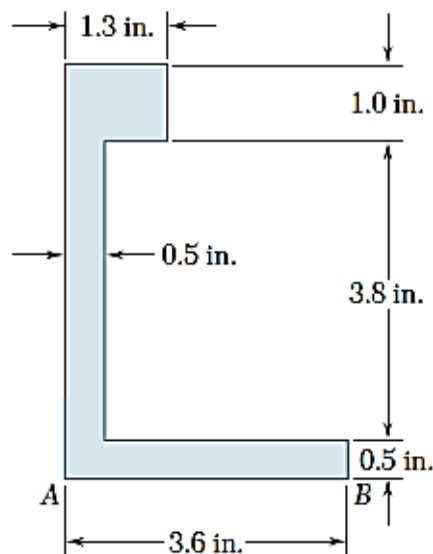
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. Para las secciones transversales de las vigas mostradas. ¿Cuál tiene mayor momento de inercia respecto al eje x?

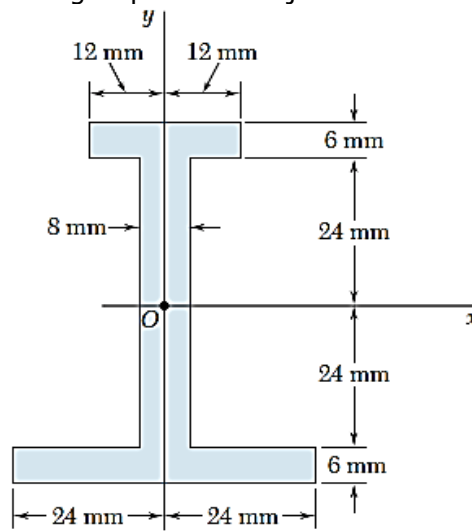


2. Para el área mostrada en la figura, determine los momentos de inercia  $\bar{I}_x$  e  $\bar{I}_y$  con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al lado AB, respectivamente.

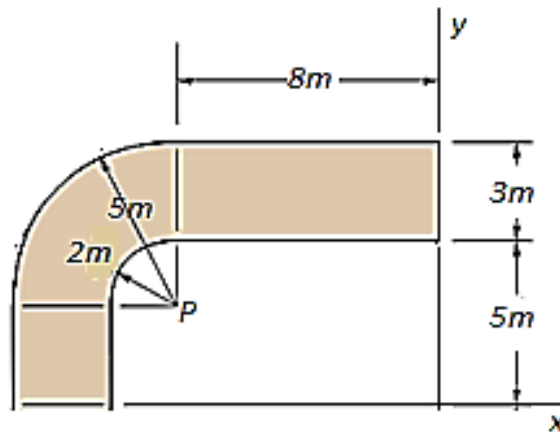




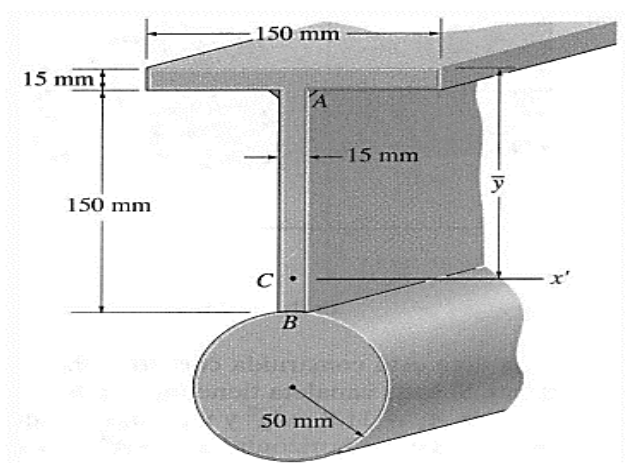
3. Para el área sombreada determine el momento de inercia con respecto al eje  $x$  y al eje  $y$ , además el radio de giro para cada eje.



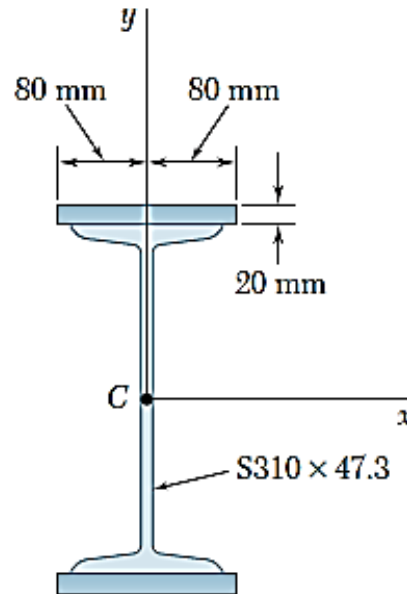
4. Determine el momento de inercia de la viga, cuya sección transversal es mostrada, respecto al eje  $y$ . Consigne sus datos en una tabla. 3p



5. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje  $x'$ . En los cálculos ignore el tamaño de las soldaduras de esquina situadas en A y B.  $\bar{y} = 154.4$  mm.

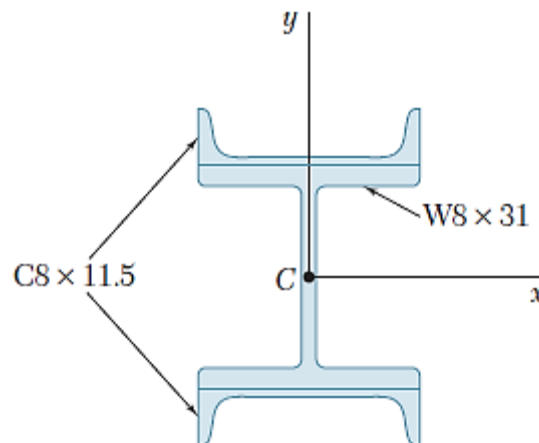


6. Como se muestra en la figura, dos placas de acero de 20 mm se sueldan a una sección S laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales  $x$  y  $y$ .



7. .

7. Como se muestra en la figura, dos canales se sueldan a una sección W laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales  $x$  y  $y$ .



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.**, (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Estática". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.  
**Hibbeler**, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Estática". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.  
**Bedford Fowler**. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

## TEMA N° 14: DINAMICA



El transbordador espacial se concibió como un método económico para poner en órbita personal y equipo. Durante su desarrollo, los ingenieros usaron principios de dinámica para predecir su movimiento durante el despegue, en órbita y al aterrizar. Estas predicciones fueron esenciales para el diseño de su configuración aerodinámica y estructura, así como de los motores y del sistema de control. La dinámica es una de las ciencias en que se basa el diseño de todos los vehículos y máquinas.

En el diseño de un vehículo, sea éste una motocicleta o una nave espacial, los ingenieros deben ser capaces de diseñar un vehículo, sea éste una bicicleta o una nave espacial, los ingenieros deben ser capaces de analizar y predecir su movimiento. Para diseñar un motor, deben analizar los movimientos predecir su movimiento. Para diseñar un motor, deben analizar los movimientos de cada una de sus partes/móviles.

Aun al diseñar estructuras "estáticas" como edificios, puentes y presas, a menudo deben analizar los movimientos que provocan las eventuales cargas de viento y los sismos. partes/móviles. Aun al diseñar estructuras "estáticas" como edificios, puentes y presas, a menudo deben analizar los movimientos que provocan las eventuales cargas de viento y los sismos.

Comenzamos con el estudio del movimiento sin interesarnos aquí las propiedades de los cuerpos ni las causas de sus movimientos; sólo queremos describir y analizar el movimiento de un punto en el espacio. Sin embargo, tenga presente que una partícula puede representar algún punto (como el centro de masa) de un cuerpo en movimiento. Después de definir la posición, velocidad, y aceleración de un punto, consideramos el ejemplo más sencillo: el movimiento a lo largo de una línea recta. Luego mostramos cómo el movimiento de un punto a lo largo de una **trayectoria** cualquiera se expresa y analiza en varios sistemas coordenados.

Esta parte inicial de la dinámica se denomina cinemática y posteriormente estudiaremos las relaciones entre las fuerzas y la aceleración que producen; es decir, la cinética.

### 1. Cinemática de una partícula:

Es el estudio de la geometría del movimiento. Sirve para relacionar el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo, sin hacer referencia a la causa del movimiento.

### 2. Posición, velocidad y aceleración:

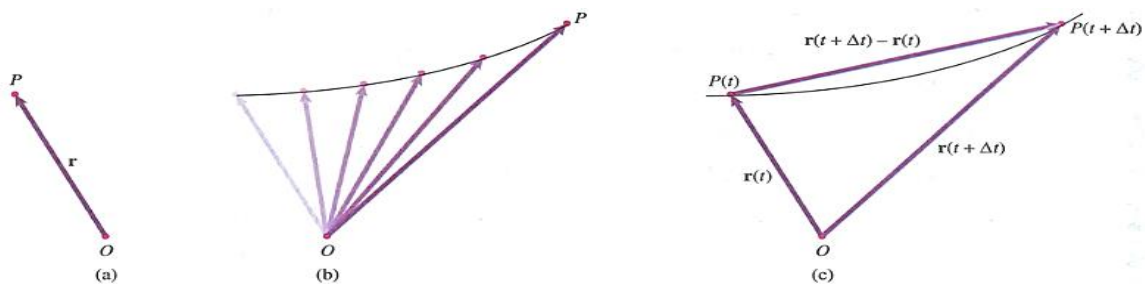
Podemos describir la posición de un punto  $P$  escogiendo un de referencia  $O$  presentando el vector de posición  $r$  de  $O$  a  $P$  (Fig. a). Supongamos que  $P$  está en movimiento respecto a  $O$ , de manera que es una función del tiempo  $t$  (Fig. b). Expresamos esto con la notación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

La velocidad de  $P$  respecto a  $O$  en el tiempo  $t$  se define como:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

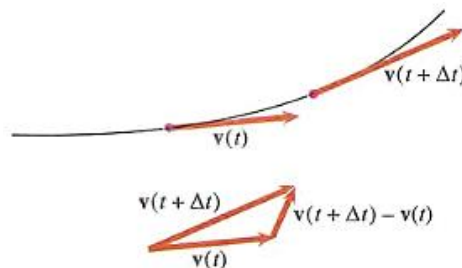
donde el numerador del límite es el cambio de posición, o desplazamiento de  $P$ , durante el intervalo de tiempo (Fig. c). Así, la Velocidad es la razón de cambio de la posición de  $P$  respecto a  $O$ .



La aceleración de  $P$  respecto a  $O$  en un tiempo  $I$  se define como:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

donde el numerador del límite es el cambio en la velocidad de  $P$  durante el intervalo de tiempo (Fig. 2). La aceleración es la razón de cambio de la velocidad de  $P$  en el tiempo  $I$  (la segunda derivada respecto al tiempo del desplazamiento), y sus dimensiones son (distancia)/(tiempo).





### 3. Movimiento uniforme en línea recta:

El movimiento uniforme en línea recta es un tipo de movimiento en línea recta que a menudo se encuentra en las aplicaciones prácticas. En este movimiento, la aceleración  $a$  de una partícula es cero para todo valor de  $t$ . En consecuencia, la velocidad  $v$  es constante.

$$\int_{s_0}^s ds = v \int_0^t dt \rightarrow s - s_0 = vt \rightarrow s = s_0 + vt$$

### 4. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

Es otro tipo muy común de movimiento. En éste, la aceleración  $a$  de la partícula permanece constante.

✓ Velocidad en función del tiempo.

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_c dt \quad v = v_0 + a_c t$$

✓ Posición en función del tiempo.

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

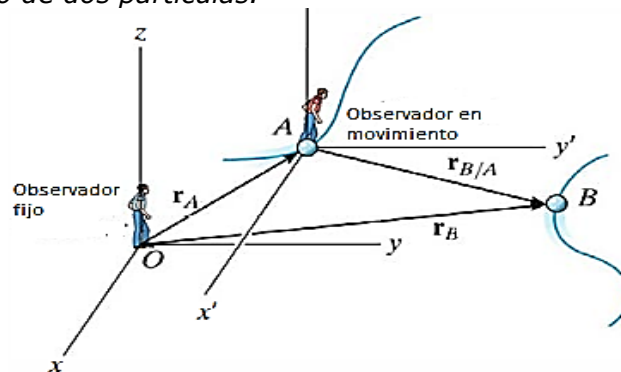
✓ Velocidad en función de la posición.

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a_c ds \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

### 5. Movimiento relativo:

Para el movimiento de varias partículas que se mueven de manera independiente a lo largo de una misma línea, es posible escribir ecuaciones de movimiento independientes para cada partícula.

*Movimiento relativo de dos partículas.*



Si las coordenadas de posición  $r_A$  y  $r_B$  se miden desde el mismo origen, la diferencia  $r_B - r_A$  define la **coordenada de posición relativa de B con respecto a A** y se denota por medio de  $r_{B/A}$ . Se tiene:

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

Derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$





## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 14

### Tema: Cinemática de una Partícula

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

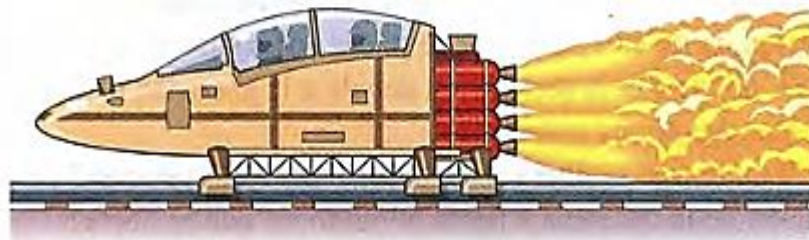
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

**INSTRUCCIONES:** Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. La lancha de la figura se va moviendo a 20 pie/s cuando su motor se apaga. Debido a la resistencia aerodinámica, su aceleración es  $a = -0.1v^2$  pie/s<sup>2</sup>". ¿Cuál es la velocidad de la lancha 2 s después?



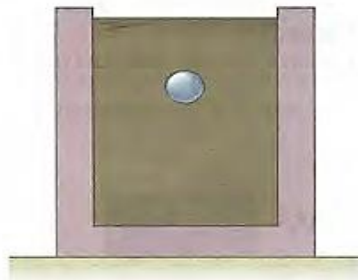
2. Un trineo de retro impulso parte del reposo y acelera con 312 m/s<sup>2</sup> hasta que su velocidad es de 1000 mis. En ese momento encuentra un freno de agua y su aceleración es  $a = -0.001 v^2$  hasta que su velocidad disminuye a 500 mis. ¿Qué distancia total recorre el trineo?



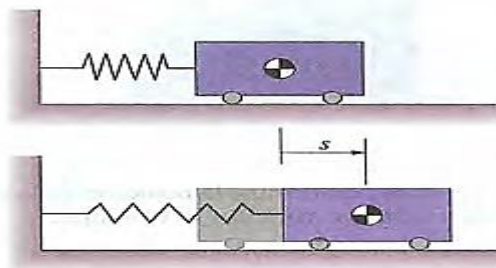
3. Un paracaidista salta de un helicóptero y va cayendo en línea recta a 30 m/s cuando se abre su paracaídas. A partir de ese momento su aceleración es aproximadamente igual a  $a = g - cv^2$ , donde  $9.81 \text{ m/s}^2$  y  $c$  es una constante. Después de un periodo inicial de "transición", desciende a una velocidad de 5 m/s casi constante.
  - (a) ¿Cuál es el valor de  $e$  y cuáles son sus unidades SI?
  - (b) ¿A qué desaceleración máxima está sometido?
  - (c) ¿Cuál es su velocidad cuando ha caído 2 m desde el punto en que se abre su paracaídas?



4. Una bola de acero se libera del reposo en un recipiente de acero. Su aceleración hacia abajo es  $a = 0.9g - cv$ , donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar y  $c$  es una constante. ¿Cuál es la velocidad de la bola en función del tiempo?



5. Un oscilador consiste en una masa y un resorte conectados como se muestra. La coordenada  $s$  mide el desplazamiento de la masa respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. Si el resorte es lineal, la masa está sometida a una desaceleración proporcional a  $s$ . Suponga que  $a = -4s \text{ m/s}^2$  y que la masa tiene una velocidad  $v = 1 \text{ m/s}$  en la posición  $s = 0$ .
- (a) ¿Qué distancia se moverá la masa hacia la derecha antes de que el resorte la detenga?
- (b) ¿Qué velocidad tendrá la masa cuando regrese a la posición  $s = 0$ ?



### Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados

**Beer F., Jhonston R.**, (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler**, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler**. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.

## TEMA Nº 15: MOVIMIENTO CURVILINEO DE PARTICULAS

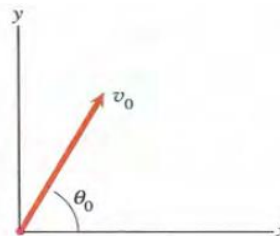


Si el movimiento de un punto se limita a una línea recta, su vector de posición  $r$ , su vector de velocidad  $v$  y su vector de aceleración  $a$  están completamente descritos por los escalares  $v$  y  $a$  respectivamente. Conocemos las direcciones de esos vectores porque son paralelos a la línea recta, pero si un punto describe una trayectoria curvilínea, debemos especificar tanto las magnitudes como las direcciones de esos vectores, y requerimos un sistema coordenado para expresados en términos de componentes escalares. Aunque las direcciones y magnitudes de los vectores de posición, de velocidad y de aceleración no dependen del sistema coordenado que se emplea para expresados, mostraremos que las *representaciones* de esos vectores son diferentes en distintos sistemas coordenados. Muchos problemas se pueden expresar en coordenadas cartesianas, pero algunas situaciones, incluyendo los movimientos de satélites y máquinas alternativas, se pueden expresar más fácilmente usando otros sistemas coordenados que ilustran los movimientos curvilíneos de puntos.

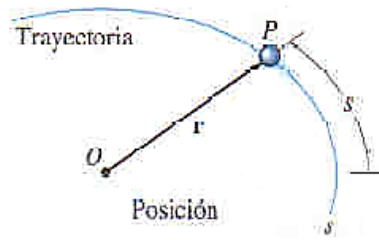
### 1. Movimiento Curvilíneo de partículas

Se da cuando la partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva. Generalmente se describe con análisis vectorial utilizado para formular la posición de la partícula, la velocidad y la aceleración.

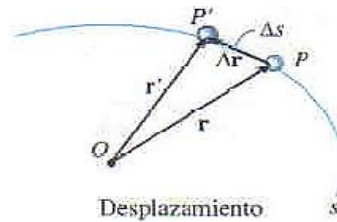
Condiciones iniciales en  $t = 0s$ .



Posición.- La posición de una partícula, medida desde un punto fijo  $O$ , será designada mediante el vector de posición  $\mathbf{r} = r(t)$



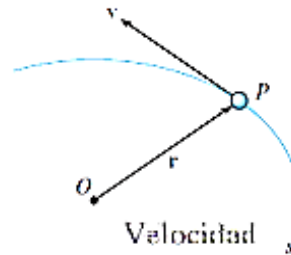
Desplazamiento.- El desplazamiento  $\Delta r$  representa el cambio en la posición de la partícula y es determinado por resta vectorial, es decir,  $\Delta r = r' - r$ .



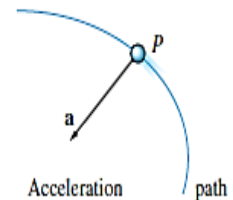
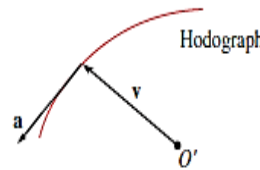
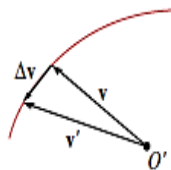
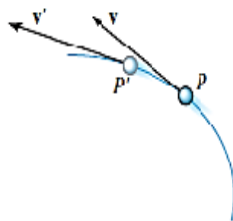
Velocidad.- La velocidad instantánea es la derivada de la posición respecto al tiempo, mientras que la rapidez se puede obtener diferenciando la función trayectoria  $s$  con respecto al tiempo.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$



Aceleración.- la aceleración promedio es la razón entre el cambio de velocidad respecto al tiempo, mientras que la aceleración instantánea es la derivada del vector de posición respecto al tiempo.

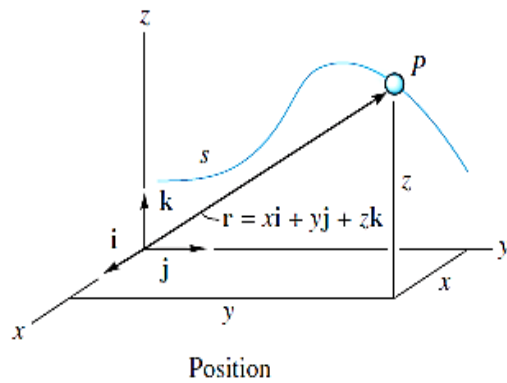


$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

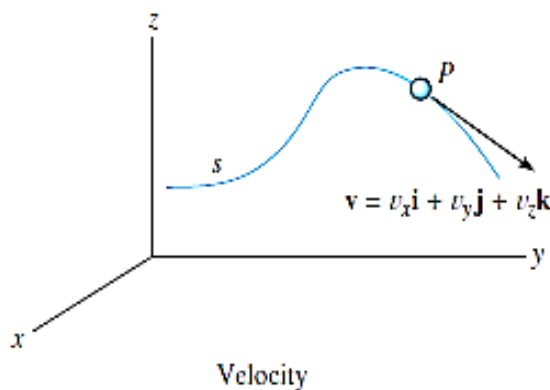
## 2. Componentes rectangulares:

Hay ocasiones en que el movimiento de una partícula se describe mejor a lo largo de una trayectoria que esté representada usando un marco de referencia fijo  $x, y, z$ .



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

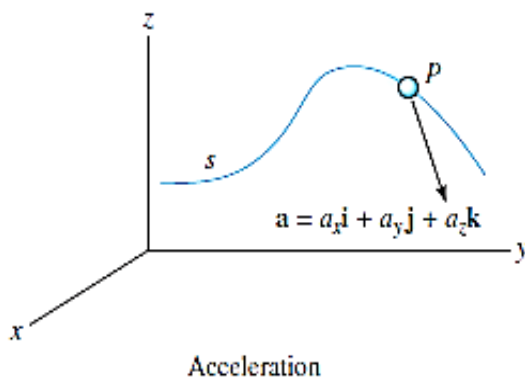
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

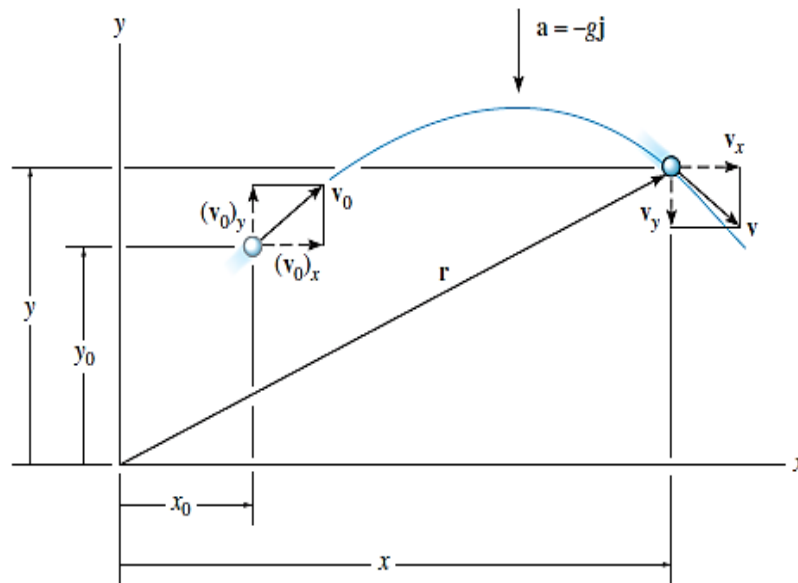
$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

### 3. Movimiento de un proyectil

El movimiento en vuelo libre de un proyectil a menudo es estudiado en términos de sus componentes rectangulares, ya que la aceleración del proyectil siempre actúa en la dirección vertical. Para ilustrar el análisis cinemático, consideramos un proyectil lanzado en el punto  $(x_0, y_0)$ , como se muestra en la figura. La trayectoria está definida en el plano x-y de manera tal que la velocidad inicial es  $v_0$  con componentes  $(v_0)_x$  y  $(v_0)_y$ . Cuando la resistencia del aire es despreciada, la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso, el cual causa que el proyectil tenga una aceleración constante hacia debajo de aproximadamente  $a_c = g = 9,81 \text{ m/s}^2$  o  $g = 32,2 \text{ pies/s}^2$ .



Movimiento horizontal.- El movimiento horizontal se considera constante

$$\left(\xrightarrow{+}\right) v = v_o + a_c t; \quad v_x = (v_o)_x$$

$$\left(\xrightarrow{+}\right) x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a_c t^2; \quad x = x_o + (v_o)_x t$$

$$\left(\xrightarrow{+}\right) v^2 = v_o^2 + 2a_c (s - s_o); \quad v_x = (v_o)_x$$

Movimiento vertical.- El movimiento vertical se considera variado

$$\left(+\uparrow\right) v = v_o + a_c t; \quad v_y = (v_o)_y - gt$$

$$\left(+\uparrow\right) y = y_o + v_o t + \frac{1}{2} a_c t^2; \quad y = y_o + (v_o)_y t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\left(+\uparrow\right) v^2 = v_o^2 + 2a_c (y - y_o); \quad v_x = (v_o)_x^2 - 2g(y - y_o)$$





## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 15

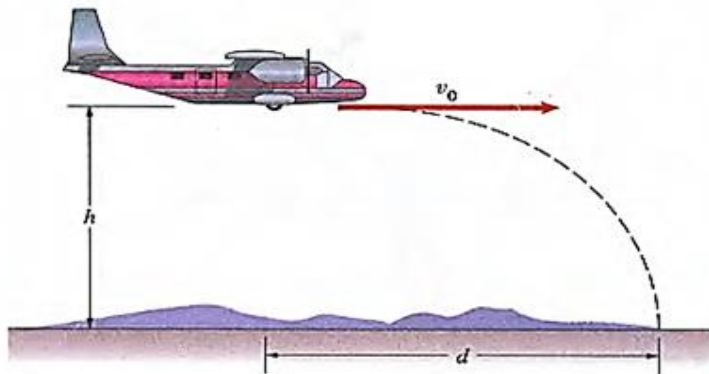
### Tema: Movimiento Curvilíneo de Partículas

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

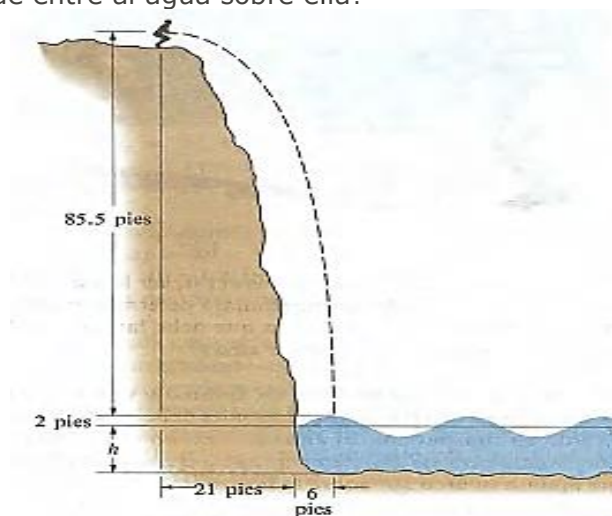
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

INSTRUCCIONES: Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

1. Un piloto quiere lanzar suministros en cierta región remota. Pretende volar horizontalmente y soltar los paquetes sin velocidad vertical. Deduzca una ecuación para la distancia horizontal a la que debe soltar el paquete en términos de la velocidad  $v_0$  y la altura  $h$  del avión.



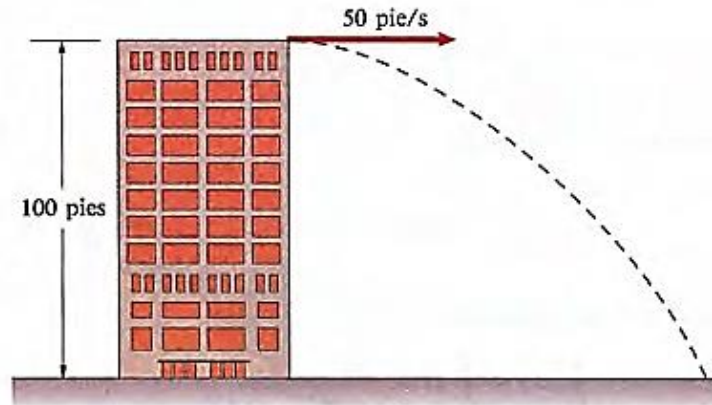
2. Los clavadistas de La Quebrada en Acapulco deben sincronizar sus clavados de modo que entren al agua en la cresta de una ola. Las crestas de las olas tienen 2 pies sobre la profundidad media  $h = 12$  pies del agua; la velocidad de las olas es  $(gh)^{1/2}$ . La meta de los clavadistas es un punto a 6 pies de la base del acantilado. Suponga que cuando se inicia el clavado la velocidad es horizontal.
  - (a) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad en mi/h cuando entran al agua?
  - (b) ¿A qué distancia de la meta debe estar la cresta de la ola cuando se lanza un clavadista para que entre al agua sobre ella?



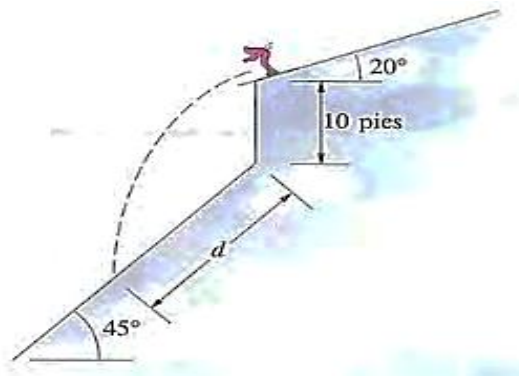




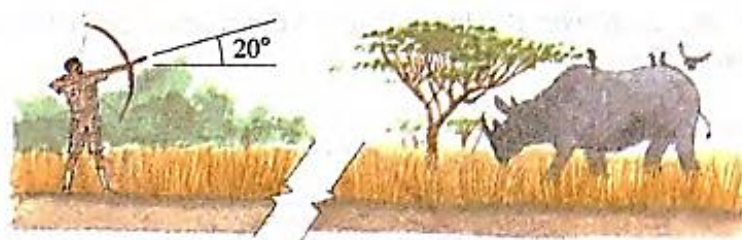
3. Si se lanza horizontalmente una piedra desde la azotea de un edificio de 100 pies de altura a 50 pie/ s, ¿a qué distancia Suponga suelo a nivel.) ¿Cuál es la magnitud de su velocidad justo antes de tocar el suelo?



4. Un esquiador salta de una pendiente de  $20^\circ$  a 50 pie/s.  
(a) Determine la distancia al punto en que cae.  
(b) Determine las componentes de su velocidad paralela y perpendicular a la pendiente de  $45^\circ$  cuando cae.



5. Un zoológico está provisto de un arco y una flecha que tiene una jeringa con tranquilizador, pues debe medir la temperatura de un rinoceronte. El alcance *máximo* es de 100 m. Si el rinoceronte embiste directamente hacia el zoológico a 30 km/h y éste apunta su arco  $20^\circ$  sobre la horizontal, ¿a qué distancia debe estar el rinoceronte cuando dispare la flecha?



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.,** (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler,** R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler.** (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.



## TEMA Nº 16: CINÉTICA DE PARTICULAS



La dinámica es la parte de la física que estudia las relaciones entre los movimientos de los cuerpos y las causas que los provocan, en concreto las fuerzas que actúan sobre ellos. Para entender estos fenómenos, el punto de partida es la observación del mundo cotidiano. Si se desea cambiar la posición de un cuerpo en reposo es necesario empujarlo o levantarlo, es decir, ejercer una acción sobre él. Aparte de estas intuiciones básicas, el problema del movimiento es muy complejo: todos aquellos que se observan en la naturaleza (caída de un objeto en el aire, movimiento de una bicicleta, un coche o un cohete espacial) son complicados.

De lo anterior, ahora requerimos analizar el problema del movimiento de un cuerpo desde un punto de vista de sus causas y efectos, por ello la segunda de las tres leyes de Newton para relacionar tal situación con las fuerzas que producen el movimiento y los sistemas acelerados.

### 1. Segunda ley de Newton.

La fuerza sobre una partícula es igual a la razón de cambio de su producto de su masa y de su velocidad, es decir de su **cantidad de movimiento**.

$$\sum F = \frac{d}{dt} (mv)$$

En función de la aceleración y fuerza la segunda ley de Newton se enuncia así: “El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime”.

Luego si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza.

$$\sum F = ma$$

- ✓ Recordemos que la cantidad de movimiento es una magnitud física vectorial que describe el movimiento de un cuerpo en cualquier teoría mecánica.



- ✓ Si se conocen la masa de una partícula y la fuerza que actúa sobre ella, con la segunda ley podemos determinar su aceleración. Ya aprendimos a determinar la velocidad, posición y trayectoria de un punto si se conoce su aceleración. Por tanto, *la segunda ley ayuda a determinar el movimiento de una partícula si se conoce la fuerza que actúa sobre ella.*
- ✓ **Sistemas de referencia inerciales:** La primera ley de Newton sirve para definir un tipo especial de sistemas de referencia conocidos como sistemas de referencia inerciales, que son aquellos desde los que se observa que un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza neta se mueve con velocidad constante.
- ✓ Un sistema de referencia con aceleración (y la aceleración normal de un sistema rotatorio se incluye en esta definición) no es un sistema inercial, y la observación de una partícula en reposo en el propio sistema no satisfará las leyes de Newton (puesto que se observará aceleración sin la presencia de fuerza neta alguna). Se denominan sistemas de referencia no inerciales.

**2. Ecuaciones de movimiento.**

Considérese una partícula de masa  $m$  sobre la que actúan varias fuerzas. Se tiene que la segunda ley de Newton puede expresarse mediante la ecuación:  $\Sigma F = ma$

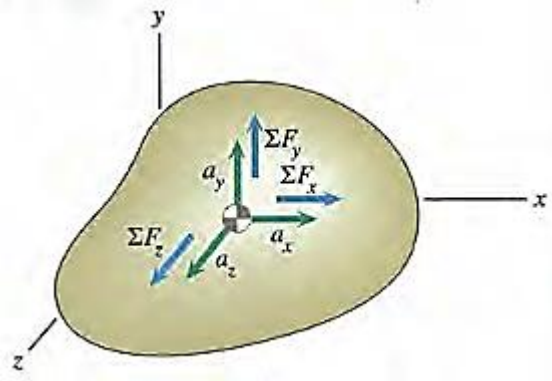
Que relaciona las fuerzas que actúan sobre la partícula y el vector  $ma$ .

*Componentes rectangulares.*- Al descomponer cada fuerza  $F$  y la aceleración  $a$  en componentes rectangulares, se escribe:

$$\Sigma(F_x i + F_y j + F_z k) = m(a_x i + a_y j + a_z k)$$

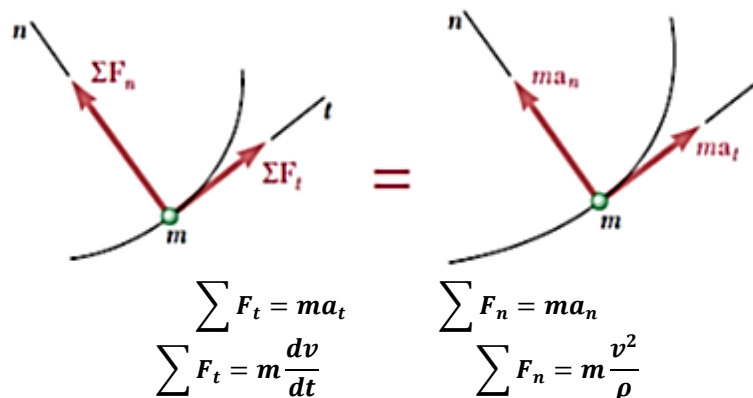
De lo que se deduce:

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z$$



**3. Componentes tangencial y normal**

Al descomponer las fuerzas y la aceleración de la partícula en componentes a lo largo de la tangente a la trayectoria (en la dirección de movimiento) y la normal (hacia el interior de la trayectoria)



## PRÁCTICA DE MECÁNICA VECTORIAL N° 16

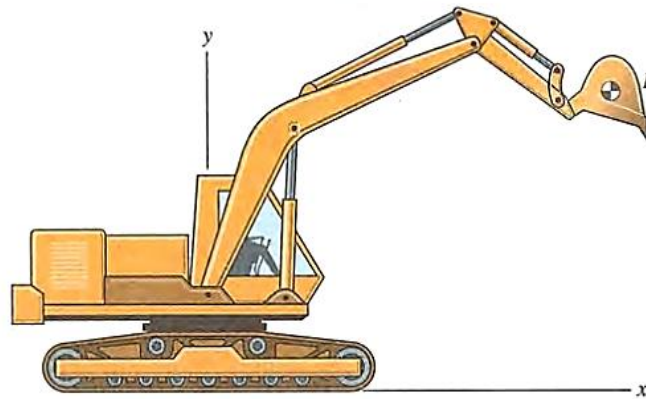
### Tema: Cinética de Partículas

Sección : .....  
Docente : Escribir el nombre del docente  
Unidad: Indicar Unidad Semana: Indicar Semana

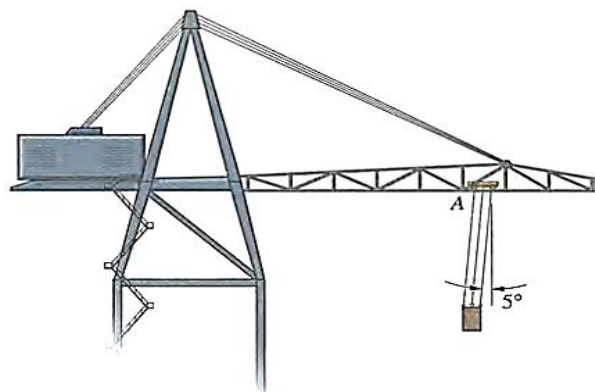
Apellidos : .....  
Nombres : .....  
Fecha : ...../...../2017 Duración: Indic. Tiempo  
Tipo de Práctica: Individual ( ) Grupal ( )

**INSTRUCCIONES:** Resuelva cada problema en forma ordenada con procedimientos completos, diagramas y cálculos pertinentes.

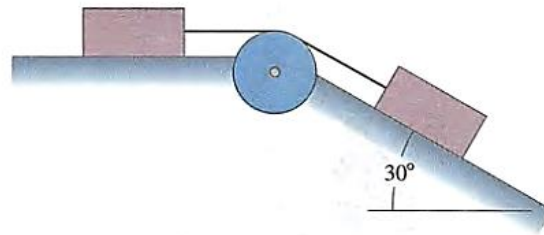
1. El cangilón  $B$  de la figura pesa 400 lb la aceleración de su centro de masa es  $a = -30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$  (pie/s<sup>2</sup>). Determine las componentes  $x$  y  $y$  de la fuerza total ejercida sobre el cangilón por sus soportes.



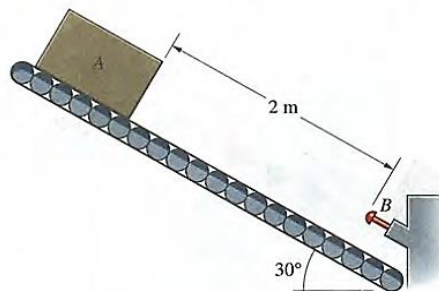
2. La carretilla  $A$  de la grúa mostrada se mueve hacia la derecha con aceleración constante, y la carga de 800 kg se mueve sin oscilar.  
(a) ¿Cuál es la aceleración de la carretilla y de la carga?  
(b) ¿Cuál es la suma de las tensiones en los cables paralelos que soportan la carga?



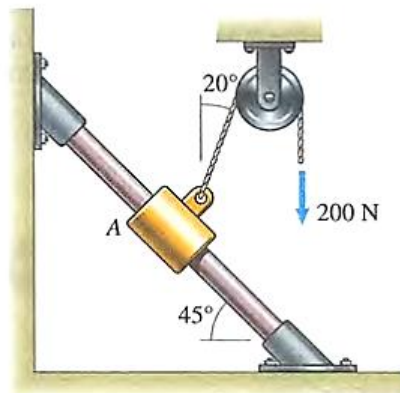
3. Cada caja de la figura pesa 50 lb Y se puede ignorar la fricción. Si las cajas empiezan a moverse del reposo en  $t = 0$ , determine la magnitud de sus velocidades y la distancia que se han movido desde su posición inicial en  $t = 1$  s.



4. En un proceso de ensamblado en línea, un paquete de 20 kg parte del reposo y se desliza hacia abajo por la rampa lisa. Suponga que se quiere diseñar el dispositivo hidráulico  $B$  mostrado para que ejerza una fuerza constante de magnitud  $F$  sobre el paquete y lo detenga en una distancia de 100mm. ¿Cuál es la fuerza  $F$  requerida?



5. ¿Cuál es la aceleración del collarín  $A$  de 8 kg respecto a la barra lisa?



**Referencias bibliográficas consultadas y/o enlaces recomendados**

**Beer F., Jhonston R.**, (2010). "Mecánica Vectorial para Ingenieros – Dinámica". Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

**Hibbeler**, R.C. (2012). "Ingeniería Mecánica – Dinámica". Décimo segunda edición. Pearson Educación. México.

**Bedford Fowler**. (2013) "Mecánica Vectorial para Ingenieros". Dinámica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.



## ANEXOS

### A. DERIVADAS E INTEGRALES.

Tabla A.1 Derivadas de algunas funciones.  
Nota: Las letras  $a$  y  $n$  son constantes.

$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$
$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \operatorname{sen} ax$	$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{a}{x}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} \frac{x}{a} = \frac{\mp 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{arctan} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc cot} \frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$
$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx}$

Tabla A.2 Algunas integrales indefinidas.

Nota: Las letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $n$  son constantes.

Una constante arbitraria se debe sumar a cada una de estas integrales.

$\int dx = x$	$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a}$
$\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \frac{x}{a}$
$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$	$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$





$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$	$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} ax)$
$\int \ln ax dx = x \ln ax - x$	$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax)$
$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$	$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a+be^{cx})$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, a^2-x^2 > 0$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$
$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$
$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$	$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x$
$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$	$\int \arcsin ax dx = x \arcsin ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$
$\int x\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2-x^2)^{3/2}$	$\int \arccos ax dx = x \arccos ax - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$





## B. CANTIDADES Y UNIDADES

### Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . .	$m/s^2$
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	$rad/s^2$
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	$rad/s$
Área	Metro cuadrado	. . .	$m^2$
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	$kg/m^3$
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	$s^{-1}$
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	$J/s$
Presión	Pascal	Pa	$N/m^2$
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	. . .	$m/s$
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	$m^3$
Líquidos	Litro	L	$10^{-3} m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

†Unidad suplementaria (1 revolución =  $2\pi$  rad =  $360^\circ$ ).

‡Unidad básica.

## C. MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

### Repaso de geometría y trigonometría

Los ángulos  $\theta$  en la figura A-1 son iguales entre la línea transversal y las dos líneas paralelas.

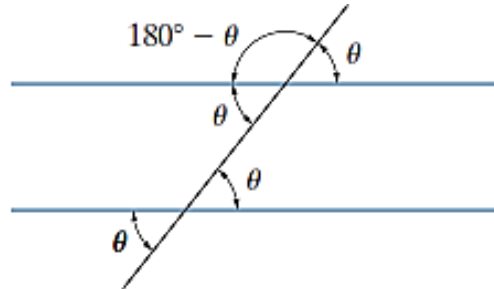
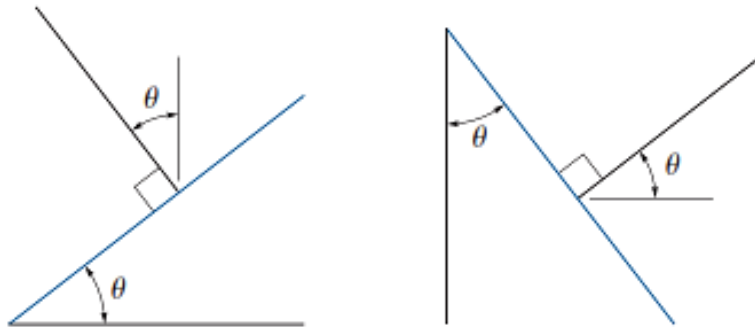


Fig. A-1

Para una línea y su normal, los ángulos  $\theta$  de la figura A-2 son iguales.



Para el círculo de la figura A-3,  $s = \theta r$ , de manera que cuando  $\theta = 360^\circ = 2\pi$  rad entonces la circunferencia es  $s = 2\pi r$ . Además, como  $180^\circ = \pi$  rad, entonces  $\theta$  (rad) =  $(\pi/180^\circ)\theta^\circ$ . El área del círculo es  $A = \pi r^2$ .

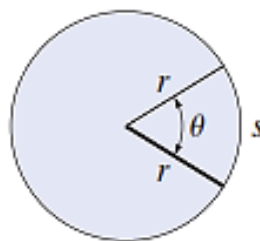
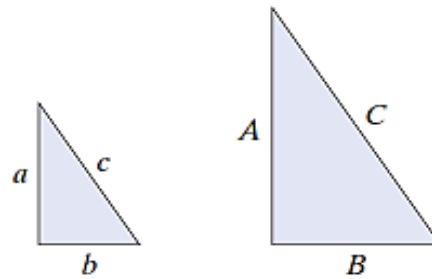


Fig. A-3

Los lados de un triángulo semejante se pueden obtener por proporción, como en la figura A-4, donde  $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ .

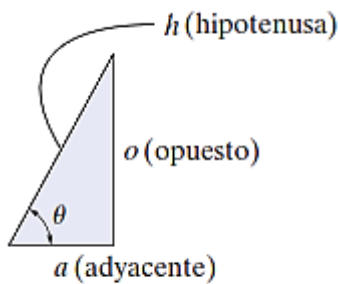


**Fig. A-4**

Para el triángulo rectángulo de la figura A-5, el teorema de Pitágoras es

$$h = \sqrt{(o)^2 + (a)^2}$$

Las funciones trigonométricas son



**Fig. A-5**

$$\text{sen } \theta = \frac{o}{h}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{a}{h}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{o}{a}$$

Lo anterior puede recordarse con facilidad como “soh, cah, toa”, es decir, el seno es el opuesto sobre la hipotenusa, etcétera. A partir de esto se obtienen las otras funciones trigonométricas.

$$\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{h}{o}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta} = \frac{h}{a}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{1}{\text{tan } \theta} = \frac{a}{o}$$



## Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi \pm \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{cos}(\theta \pm \phi) = \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi \mp \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{cos} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 2\theta}{2}}, \operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 2\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta$$

## Fórmula cuadrática

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### BÁSICA

- Beer F., Johnston R., Eisenbenberg E., (2013). Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática. Décima edición. Mc. Graw-Hill Interamericana. México.

### COMPLEMENTARIA

- Hibbeler R. C. (2010). Ingeniería Mecánica. Estática. Décimo segunda edición. Pearson Educación de México, S.A. De C.V. México.
- Meriam J.L. y Kraige L.G. (2007). Mecánica para Ingenieros. Estática. Séptima Edición. Editorial Reverté, S.A. España.
- Bedford A. y Fowler W. (1996). Mecánica para Ingenieros. Estática. Primera Edición. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Estados Unidos.
- Riley W.F. y Sturges L.D. (1995). Ingeniería Mecánica. Estática. Primera edición. Editorial Reverté, S.A. España.
- Castillo Basurto J. L. (2006). Estática para Ingenieros y Arquitectos. Segunda Edición. Editorial Trillas, S.A. De C.V. México.
- Sandor B.I. Y Richter K.J. (1989). Ingeniería Mecánica. Estática. Segunda Edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México.

### RECURSOS DIGITALES

#### BASES DE DATOS

- ProQuest - base de datos de información del mundo académico.  
<http://formulario.continental.edu.pe/proquest/LoginForUser.as>

#### ENLACES DE INTERÉS

- Sistema de información científica REDALYC Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal.  
<http://redalyc.uaemex.mx/>.