UNIVERSIDAD CONTINENTAL

MODALIDAD VIRTUAL

MATEMÁTICA I

Datos de catalogación bibliográfica

Bastidas Valdivia, Joel
MATEMÁTICA I

Huancayo: Fondo Editorial de la Universidad Continental, 2015.

Materia: MATEMÁTICA I

Formato 21x29,7 cm. Páginas: 144

MATEMÁTICA I / AULA VIRTUAL

De esta edición:
© Universidad Continental
Jr. Junín 355, Miraflores, Lima-18
Teléfono: 213 2760 anexo 4051
http://serviciosweb.continental.edu.pe/

Primera edición: junio 2015

Director: Emma Barrios Ipenza
Editor: Eliana E. Gallardo Echenique
Diseñador didáctico: Luisa Aquije de Lozano
Diseño gráfico: Francisco Rosales Guerra

MATEMÁTICA I
Autor: Joel Bastidas Valdivia
Jefatura de Virtualización de Contenidos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La matemática como ciencia es una de las más importantes y poderosas herramientas creadas por el ser humano. Es así como la asignatura de Matemática I, trata de temas básicos que permite a los estudiantes desarrollar sus habilidades y destrezas y lo más importantes incursionar en el inicio del estudio de las matemáticas en toda su universalidad.

De esta manera se ha planteado 4 unidades, las cuales están debidamente organizadas y sistematizadas teniendo en cuenta los principios pedagógicos, motivo por el cual en primer lugar se presenta la teoría, luego ejercicios resueltos, actividades de autoaprendizaje y finalmente la autoevaluación.

Para el estudio del manual se sugiere la siguiente secuencia en cada unidad:

- Realizar el estudio de los contenidos. Es necesario la lectura analítica, la comprensión de los ejemplos y el repaso de los temas.
- Desarrollar las actividades, con referencia en los ejemplos resueltos por cada tema.
- Desarrollar la auto evaluación, que es una preparación para la prueba final de la asignatura
- Desarrollar las actividades programadas para cada semana en el aula virtual, con la asesoría del Tutor.

Por tanto Ud. requiere un conocimiento directo y practico de la matemática que le permita aplicar en temas de su carrera profesional, tomando casos de su entorno, logrando de esta manera la adquisición de conocimientos de la matemática a través de la aplicación directa de la teoría sin dejar de lado la motivación y la aplicación de nuevas metodologías para desarrollar un buen aprendizaje.

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

RESULTADO DE APRENDIZAJE:

Al finalizar la asignatura, el estudiante, utiliza y relaciona las funciones, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

UNIDADES DIDACTICAS

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
"ECUACIONES Y DESIGUALDADES"	"FUNCIONES Y GRÁFICAS"	"RECTAS, PARÁBOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES"	"FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS"

TIEMPO MÍNIMO DE ESTUDIO

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III	UNIDAD IV
1ra. Semana y 2da. Semana 16 Horas	3ra. Semana y 4ta. Semana 16 Horas	5ta. Semana y 6ta. Semana 16 Horas	7ma. Semana y 8va. Semana 16 Horas

UNIDAD I

ECUACIONES Y DESIGUALDADES.

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD I

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de aplicar propiedades y definiciones en el proceso de resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones e inecuaciones, interpretando los resultados obtenidos dentro de un contexto cotidiano.

CONTENIDOS	ACTIVIDADES FORMATIVAS (HABILIDADES Y ACTITUDES)	SISTEMA DE EVALUACIÓN (TÉCNICAS Y CRITERIOS)
Tema N° 1 : Ecuaciones Lineales. 1 Ecuaciones lineales. 2 Ecuaciones literales. 3 Ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales: Ecuaciones fraccionarias, ecuaciones con radicales. 4 Aplicaciones con ecuaciones lineales. **Tema N° 2: Ecuaciones Cuadráticas.** 1 Ecuaciones cuadráticas. 2 Ecuaciones que conducen a ecuaciones cuadráticas: Ecuaciones fraccionarias, ecuaciones con radicales. 3 Aplicaciones con ecuaciones cuadráticas. 4 Ecuaciones con valor absoluto. **Tema N° 3: Desigualdades.** 1 La recta numérica e intervalos. 2 Desigualdades lineales. 3 Aplicaciones con desigualdades. 4 Inecuaciones con valor absoluto 5 Desigualdades con valor absoluto. **Tema N° 4: Modelado de ecuaciones y desigualdades.** 1 Modelación de situaciones que se describen por medio de ecuaciones y desigualdades.	• Resuelve ecuaciones de primer grado usando las propiedades de la igualdad o transponiendo términos. • Aplica la factorización o la fórmula general en la resolución de una ecuación cuadrática. • Utiliza los teoremas de valor absoluto relacionados a ecuaciones e inecuaciones. • Analiza y justifica los procesos utilizados en la resolución de una ecuación e inecuación. • Aplica estrategias de solución de problemas de contexto cotidiano con ecuaciones e inecuaciones.	• Valora y utiliza sistemáticamente conductas asociadas a la actividad matemática, tales como el orden, puntualidad, contraste, precisión, revisión sistemática y crítica de los resultados.

RECURSOS:

VIDEOS:

Tema N° 1: Ecuaciones de primer grado

Video 1: Introducción a las ecuaciones lineales

Tema N° 2: Ecuaciones Cuadráticas (ecuaciones de segundo grado)

Video 2: Introducción a las ecuaciones cuadráticas
Video 3: Aplicación de una ecuación cuadrática
Video 4: Ejemplo de resolución de una desigualdad lineal
Video 5: Más ejemplos de modelado de desigualdades (A)
Video 6: Más ejemplos de modelado de desigualdades (B)

Tema N° 3: Ecuaciones Lineales
Inecuaciones de segundo grado - inecuaciones cuadraticas - metodo grafico

Tema N° 4: Inecuaciones Cuadráticas

DIAPOSITIVAS ELABORADAS POR EL DOCENTE:

Lectura complementaria:
Lectura Seleccionada N° 1
"17 Ecuaciones que cambiaron el mundo"

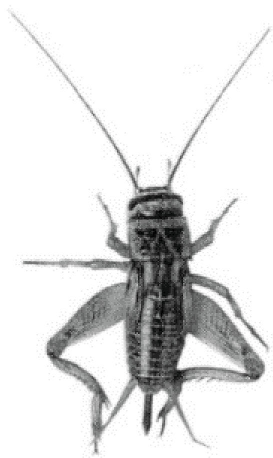
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Prueba de desarrollo

BIBLIOGRAFÍA (BÁSICA Y COMPLEMENTARIA)	**BASICA** HAEUSSLER Ernest y PAUL Richard. Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida . 8a.ed. México: Pearson. 2007. Código biblioteca UC: 519/ H14 **COMPLEMENTARIA** STEWART James, REDLIN Lothar y WATSON Saleem. Précalculo: Matemáticas para el cálculo. (5a. ed.). México: Cengage Learning. 2007 **Código biblioteca UC:** 515 / S79 DEMANA F., WAITS B., FOLEY G. y KENNEDY D.. Precálculo: gráficas, numérico, algebraico (7a ed.).México: Pearson Educación. 2007 **Código biblioteca UC:** 512.1/ D56 LARSON Ron y HOSTETLER Robert. Precálculo. 7a ed. China: Reverté. 2008. **Código biblioteca UC:** 512.13/ L25 2008 SOOO Tang Tan. Matemáticas para administración y Economía. México: Thomson. Editores. 2000. Código biblioteca UC: 519 / T19 2009 PETERSON J.. Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica. 3a. ed. México: CECSA. 2001 ZILL Denis G. y DEWAR Jacqueline. Precálculo con avances de cálculo. 4a. ed. Colombia: McGraw Hill. 2008.
RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES	KHANACADEMY (2006) [Base de datos]. Estados Unidos. Recuperado el 28 de enero de 2015, de: https://es.khanacademy.org/ DITUTOR (5 de febrero 20115). Diccionario de Matemática (html). Recuperado de: http://www.ditutor.com/numeros_reales/numeros_reales.html PROFESOR EN LÍNEA (6 de febrero 2015). Números Reales (html). Recuperado de: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Numeros_reales.html CURSO DE ALGEBRA (5 de febrero 2015). Números Reales (video). Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=tMHJbmUGcQk

TEMA N° 1: "ECUACIONES LINEALES"

Cuando se trabaja con un problema de aplicación de la vida real, con frecuencia nos encontramos con una o más ecuaciones que modelan dicha situación. Muchos fenómenos pueden describirse uitlizando ecuaciones lineales, que son el tipo más simple de trabajar.

Un ejemplo es el chirrido del grillo del árbol de nieve (Oecanthulus niveus), que se encuentra en el medio oeste de Estados Unidos.



A finales de 1890, los naturalistas establecieron que cuando este grillo chirría (Lo cual hace sólo al final del verano), la velocidad del chirrido de chirridos por minuto está relacionado con la temperatura del aire en grados Fahrenheit por medio de la ecuación:

$$N = 4{,}7T - 190$$

Cuando *T* aumenta también lo hace *N*, lo cual significa que el grillo chirria más rápido en clima cálido. Para predecir la velocidad del chirrido a partir de la temperatura, simplemente multiplicamos la temperatura por 4,7 y restamos 190. Por ejemplo, cuando la temperatura es de 60 grados, el grillo chirría a una velocidad de 4,7(60)-190=92 chirridos por minuto.

¿Podemos utilizar los chirridos del grillo como un termómetro para indicar la temperatura? Sí, primero debemos despejar a *T* de la ecuación, utilizando las técnicas que se explicarán en este capítulo. El resultado es:

$$T = \frac{N + 190}{4{,}7}$$

Esto significa que si en una tarde de agosto en Nebraska, sentados en el exterior oímos un grillo que emite 139 chirridos por minuto, entonces sabemos que la temperaturta es alrededor de:

$$\left(\frac{139 + 190}{4{,}7}\right) = 70\ grados$$

En este capítulo, desarrollaremos técnicas para resolver no sólo ecuaciones las ecuaciones lineales sino también las cuadráticas.

Fuente:

Haeussler, E. y Paul, R. (2007). Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida (8a.ed.). México: Pearson.

1. ECUACIONES LINEALES.

Las ecuaciones lineales tienen la forma o son transformables a la forma general:

$$\boxed{ax + b = 0}$$

Donde a y b son constantes, a ≠ 0, y siendo x la incógnita, por lo cual son también llamadas ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA y se resuelve de siguiente manera.

Ejemplo 1:

Resolveremos a continuación la siguiente ecuación $\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4} = 6$

Técnica de resolución:

1° Eliminamos las fracciones multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores MCM(2;4)=4.

$$4\left(\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4}\right) = 4\,(6)$$

$$4.\left(\frac{7x+3}{2} - 4.\frac{9x-8}{4}\right) = 24$$

2° Simplificando:

$$2\,(7x + 3) - (9x - 8) = 24$$

3° Destruyendo paréntesis:

$$14x + 6 - 9x = 24$$

4° Reduciendo y transponiendo:

$$5x = 10$$

5° Valor que asume la incógnita: $X = 2$

Es importante VERIFICAR LAS RESPUESTAS. En estas comprobaciones, PM quiere decir "primer miembro " y SM quiere decir segundo miembro" de la ecuación.

Si x = 2, reemplazamos en el:

PM: $\frac{7(2)+3}{2} - \frac{9(2)-8}{4} = \frac{17}{2} - \frac{10}{4} = 6$

SM: 6

Entonces PM = SM, es correcta la respuesta.

2. ECUACIONES LITERALES.

Una ecuación literal es aquella en la que una o más de las cantidades conocidas se representan mediante el uso de letras. Por lo general, dichas cantidades conocidas se representan con las primeras letras del alfabeto **a, b, c...** y las incógnitas con las letras finales **x, y, z**.

Ejemplo:

La ecuación $I = C\ r\ t$ es la fórmula para el interés simple *I* sobre un capital *C* soles a una tasa de interés anual r en un periódo de *t* años. Exprese *r* en términos de I, C y t.

Técnica de resolución: Aquí consideramos que r es la incógnita.

Aislamos r.

$$\boldsymbol{I = C\ r\ t}$$

$$\boldsymbol{\frac{I}{C\ t} = r}$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{r = \frac{I}{C\ r}}$

3. ECUACIONES QUE CONDUCEN A ECUACIONES LINEALES:

3.1. ECUACIONES FRACCIONARIAS.

En esta sección, ilustramos que al resolver una ecuación no lineal puede suceder que ésta se reduzca a una ecuación líneal. Empezamos con una ecuación fraccionaria, que es una ecuación donde la incógnita se encuentra en el denominador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x+4}=\frac{1}{12x-12}$$

Técnica de resolución:

1° Los denominadores se factorizan: $3(x\text{-}1);4(x+1)$ y $12(x\text{-}1)$

2° Se extrae el MCM (Mínimo Común Múltiplo de los denominadores): $\text{MCM} = 12(x+1)(x - 1)$

3° Multiplicamos cada término de la ecuación por este **MCM.**

$$12(x - 1)(x+1)\left(\frac{1}{(x \quad 1)}\right)+12(x - 1)(x+1)\left(\frac{1}{(x \quad 1}\right)=1 \ (x - 1)(x+1)(\frac{1}{(x \quad 1})$$

Simplificando: $4(x+1)+3(x - 1)=x+1$

Destruyendo paréntesis: $4x+4+3x - 3=x+1$

Reduciendo y transponiendo: $7x - x=1 - 1$

Reduciendo: $6x=0$

Valor que asume: $x=0$

3.2. ECUACIONES CON RADICALES.

Resolver: $\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=-3$

Técnica de Resolución: Cuando una ecuación tiene dos términos que implican radicales primero escribimos de modo que esté un radical en cada miembro de la ecuación, si es posible. Después elevamos al cuadrado y resolvemos.

Esta operación no garantiza la equivalencia, de modo que debemos verificar las soluciones.

$$\sqrt{x-3}=\sqrt{x}-3$$
$$x-3=x-6\sqrt{x}+9$$
$$6\sqrt{x}=12$$
$$\sqrt{x}=2$$
$$x=4$$

Es necesario VERIFICAR LAS RESPUESTAS. En estas comprobaciones, PM quiere decir "primer miembro " y SM quiere decir segundo miembro" de la ecuación.

Si x = 4, reemplazamos en el:

PM: $\sqrt{4-3}-\sqrt{4}=-1$

SM: -3

Entonces PM ≠ SM, eso indica que la ecuación no tiene solución: $S=\emptyset$

4. APLICACIONES CON ECUACIONES LINEALES.

Las ecuaciones permiten resolver diversos problemas. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Se tienen dos sacos de arroz con 174 kg. Del más pesado se extrae el 25 % de su contenido y se echa en el otro, quedando los dos con la misma cantidad. ¿Cuánto pesaba cada saco?

Solución: Asignamos la variable "x" a uno de los sacos:

$S_1 = x$

Expresamos el otro saco en función de esta variable:

$$S_2 = 174 - x$$

Expresamos mediante una ecuación las condiciones del problema, el 25 % del saco mayor es la cuarta parte de su contenido y esto adicionamos al saco menor:

$$x - \frac{x}{4} = (174 - x) + \frac{x}{4}$$

Resolviendo la ecuación se tiene: $x = 116$

Constatamos que los resultados son correctos y respondemos a la pregunta del problema:

El saco S_1 pesa 116 kg y el saco S_2 pesa (174 – 116) que es igual a 58 kg

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 1

Resuelva las ecuaciones

1. $x-7-9x=3x-3-7x$

2. $8x-(2x+1)=3x-10$

3. $1-4(3-x)=1-(x-2)+5x$

4. $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=x+3$

5. $\frac{x-3}{2}+\frac{2-x}{3}=\frac{4x}{5}-4$

VIDEOS

Video 1: Introducción a las ecuaciones lineales

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos correspon-den a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Ecuaciones lineales
URL: http://audiovisuales.uned.ac.cr/mediateca/videos/234/ecuaciones-de-primer-grado
Duración: 9:28 m
Autor(a): UNED
Año: 2010
Licencia: YouTube estándar.

TEMA N° 2: "ECUACIONES CUADRÁTICAS"

RECONSTRUYENDO LA ECUACIÓN:

En una prueba de alternativas múltiples, por un error en la impresión, apareció el siguiente texto:

La solución de la ecuación: $\frac{■}{2x+1} - \frac{■}{2x-1} = \frac{35}{8}$ en el conjunto de los números reales positivos es:

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\frac{3}{10}$ **E)** $\frac{5}{2}$

Las manchas en la impresión no permiten ver los numeradores de las fracciones; pero se sabe que son enteros positivos. Si sólo una de las alternativas es correcta.

a) ¿Qué alternativa marcarías?

b) ¿Cuáles son los números que no fueron impresos?

1. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Ejemplos:

$$x^2 - 9 = 0 \quad x^2 - x - 12 = 0 \qquad 2x^2 - 3x - 4 = 0$$

La condición de que $a \neq 0$ en la definición asegura que exista el término x^2 en la ecuación.

Entre los métodos para resolver las ecuaciones cuadráticas, presentamos los siguientes:

- **Factorización**
- **Fórmula cuadrática**

FACTORIZACIÓN: para utilizar este método la ecuación cuadrática debe estar igualada a cero. Factorizamos el miembro de la ecuación que no es cero. Se iguala a cero cada factor y se obtienen los valores de la variable.

Ejemplo: Para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 24$, por el método de factorización, realizaremos lo siguiente:

Solución: primero debemos volver a escribir la ecuación de modo que el segundo miembro sea igual a cero.

$x^2 + 10x = 24$

$x^2 + 10x - 24 = 0$ Resta de 24

$(x + 12)(x - 2) = 0$ Factorización

$x + 12 = 0$ ó $x - 2 = 0$ Propiedad del producto nulo

$x = -12$ ó $x = 2$ Solución

Las soluciones son $x = -12$ y $x = 2$

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 2

Resuelva las ecuaciones siguientes por factorización.

1) $x^2 - 4x = 0$

2) $x^2 - 4x = 12$

3) $12x^2 - 17x + 6 = 0$

4) $x^2 - x - 20 = 0$

5) $x^2 - 4x + 5 = 0$

FÓRMULA CUADRÁTICA: La solución de una ecuación $ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$ está dada por la **fórmula cuadrática:**

$$\boxed{x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.}$$

La expresión: b^2-4ac conocida como ***discriminante*** determina el tipo de soluciones.

La siguiente tabla nos indica el tipo de raíz de acuerdo al valor del discriminante.

VALOR DE: b^2-4ac	TIPO DE SOLUCIÓN
positivo	dos soluciones reales
cero	una solución real
negativo	dos soluciones complejas

Ejemplo: Resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 1 = 0$ del siguiente modo:

Solución: primero debemos identificar los coeficientes (con el signo que le antecede) para aplicar la fórmula.

a = 1,   b = 3, c = -1

La fórmula es:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Reemplazamos en la fórmula y obtenemos:

$$x=\frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2}$$

$$x=\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Las soluciones son: $x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ó $x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

2. ECUACIONES QUE CONDUCEN A ECUACIONES CUADRÁTICAS: ECUACIONES FRACCIONARIAS, ECUACIONES CON RADICALES.

En esta sección se estudian ecuaciones que no son cuadráticas; pero que pueden transfromarse en ecuaciones cuadráticas. Después, se puede resolver la ecuación cuadrática y con algo de interpretación, usar las soluciones para resolver la ecuación original.

Ejemplo: Una ecuación fraccionaria que se reduce a una ecuación cuadrática.

Resolver: $\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+5}{x-2}=\frac{7(2x+1)}{x^2+x-6}$

Técnica de Resolución:

1° Los denominadores se factorizan: $(x+3);(x-2)\ y\ (x-2)(x+3)$

2° Se extrae el MCM (Mínimo Común Múltiplo de los denominadores): $\mathrm{MCM}=(x-2)(x+3)$

3° Multiplicamos cada término de la ecuación por este MCM.

$$\mathbf{(x-2)(x+3)}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)+\mathbf{(x-2)(x+3)}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)=\mathbf{(x-2)(x+3)}\left(\frac{7(2x-1)}{x^2+x-6}\right)$$

4°Simplificando: $(x-2)(x+1)+(x+3)(x+5)=7(2x+1)$

5°Destruyendo paréntesis y simplificando: $2x^2-7x+6=0$

6°Factorizando: $(2x-3)(x-2)=0$

7°Las posibles raíces son: $x_1=\frac{3}{2}$ **y** $x_2=2$

Por tanto $\frac{3}{2}$ y 2 son posibles raíces de la ecuación dada. Pero 2 no puede ser raíz de la ecuación ya que la sustitución conduce a un denominador de 0. Sin embargo, debemos verificar que $\frac{3}{2}$ en verdad satisface la ecuación original para concluir así que es la raíz.

$$\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}+3}+\frac{\frac{3}{2}+5}{\frac{3}{2}-2}=\frac{7(2(\frac{3}{2})+1)}{(\frac{3}{2})^2+\frac{3}{2}-6}$$

Por lo tanto S= $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Ejemplo de una ecuación con radical que conduce a una ecuación cuadrática

Resuelva la ecuación $2x=1-\sqrt{2-x}$

Técnica de Resolución:

1° Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un miembro, y luego elevamos al cuadrado.

$2x-1=-\sqrt{2-x}$	Resta 1
$(2x-1)^2=(-\sqrt{2-x})^2$	Elevamos al cuadrado ambos miembros
$4x^2-4x+1=2-x$	Desarrollo del primer miembro.
$4x^2-3x-1=0$	Llevando al primer miembro.
$(4x+1)(x-1)=0$	Factorizando
$4x+1=0$ *o* $x-1=0$	Propiedad del producto nulo
$x=-\frac{1}{4}$ $\quad x=1$	Solucion

Los valores $x=-\frac{1}{4}$ y $x=1$ son solo soluciones potenciales. Es necesario comprobarlas para ver si cumplen con la ecuación original.

COMPROBACION:

1° Cuando: $x=-\frac{1}{4}$

$$PM=2(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{2}$$

$$SM=1-\sqrt{2-(-\frac{1}{4})}$$

$$=1-\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

PM = SM

2° Cuando $x=1$

$$PM=2(1)=2$$

$$SM=1-\sqrt{2-1}$$

$$=1-1=0$$

PM $\neq$ SM

Finalmente la unica solucion es: $x=-\frac{1}{4}$

3. APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

EL MÉTODO ALGEBRAICO PARA RESOLVER PROBLEMAS

Ejemplo: Dieta para ratas: Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteínas. La proteína estaba compuesta de levadura y harina de maíz. Al cambiar el porcentaje P (expresado como un decimal) de levadura en la mezcla de la proteína, el grupo estimó que el promedio de aumento de peso g (en gramos) en una rata durante cierto periodo estaba dado por:

$$g = -200^2 + 200P + 20$$

¿Cuál es el porcentaje de levadura que da un aumento promedio de peso de 70 gramos?

Técnica de resolución:

$$70 = -200P^2 + 200P + 20$$
$$200^2 - 200P + 50 = 0$$
$$\textit{Cada término entre } 50\%$$
$$4P^2 - 4P + 1 = 0$$
$$P = 0,5 <> P = 50$$

INTERPRETACIÓN:

50% de levadura da un aumento promedio de peso de 70 gramos.

(Video de una aplicación de las ecuaciones cuadráticas)

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 3

Resuelva las ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.

1) $x^2 + 8x + 6 = 0$

2) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

3) $5x^2 - 4x + 1 = 0$

4) $x^2 - 4x + 5 = 0$

5) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

> **Recuerda:** Cualquier ecuación cuadrática puede resolverse utilizando la fórmula cuadrática.

4. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto o módulo de un número real "x" se define por:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Propiedades de valor absoluto

1. $|x| \geq 0; \quad \forall x \in R$
2. $|x| \geq x; \quad \forall x \in R$
3. $|x|^2 = |x|^2 = x$
4. $|x| = |-x|$
5. $|x.y| = |x||y|$
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0$
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular).

Los teoremas que permiten la solución de ecuaciones con valor absoluto son los siguientes:

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|x| = y \Leftrightarrow [\, y \geq 0 \wedge (x = y \ \vee x = -y)]$
3. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \ \vee x = -y$

Dónde: y es el universo dentro del cual se resuelve la ecuación.

Ejemplo 01:

Para resolver la siguiente ecuación con valor absoluto $|1 - 2x| = 0$ realizamos lo siguiente:

Solución:

Aplicando directamente el Teorema: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, entonces del ejercicio planteado hacemos:

$$|1 - 2x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x = 0$$
$$-2x = -1$$

$$Luego:\ x = \frac{1}{2}$$

La respuesta es: $C.S. = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Ejemplo 02:

Resolvamos: $|3x - 2| = 4$

Solución:

Aplicando directamente el Teorema: $|x| = y \Leftrightarrow [\, y \geq 0 \wedge (\, x = y \ \vee\ x = -y\,)]$, entonces del ejercicio planteado hacemos:

$$|3x|-2| = 4 \Leftrightarrow [\, 4 \geq 0 \wedge (3x - 2 = 4 \ \vee\ 3x - 2 = -4)]$$
$$luego:\ [(\, 3x - 2 = 4 \ \vee\ 3x - 2 = -4)]$$
$$\Rightarrow (3x = 6 \quad \vee \quad 3x = -2)$$
$$\Rightarrow \left(x = 2 \quad \vee \quad x = -\frac{2}{3}\right)$$

La respuesta es: $C.S. = \left\{-\frac{2}{3}; 2\right\}$

Ejemplo 03:

Resolvamos la siguiente ecuación con valor absoluto $|1 - 3x| = |x - 2|$

Solución:

Aplicando directamente el Teorema: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$, entonces del ejercicio planteado hacemos:

$$|1 - 3x| = |x - 2| \Leftrightarrow 1 - 3x \quad x - 2 \ \vee\ 1 - 3x = -(x - 2)$$
$$\Leftrightarrow \quad -4x = -3 \quad \vee \quad -2x = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$$

Respuesta: $C.S. = \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right\}$

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 4

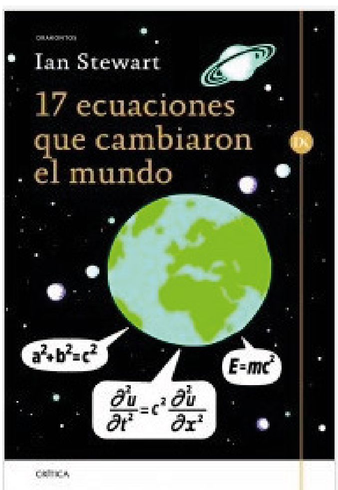
Resuelva las ecuaciones usando las propiedades:

1. $|x - x^2| = 0$.
2. $|3x - 5| = 0$.
3. $|x^2 - 3| = 1$.
4. $|x^2 - 4| = x - 2$.
5. $|x^2 - 3| = |2x - 4|$.

LECTURA SELECCIONADA Nº 1:

"17 ECUACIONES QUE CAMBIARON EL MUNDO"

El progreso humano contado a través de 17 ecuaciones explicadas en un libro de lectura apasionante.



La alarma suena, miras el reloj, son las 6:30 am, ni siquiera te has levantado de la cama, y ya hay por lo menos seis ecuaciones matemáticas que están influenciando tu vida. El chip de memoria que almacena la hora de tu reloj no podría haber sido elaborado sin una ecuación clave de la mecánica cuántica. Su tiempo ha sido establecido por una señal de radio que nunca habrías soñado inventar si no fuera por las cuatro ecuaciones del electromagnetismo de James Clerk Maxwell. Y la misma señal viaja según lo que se conoce como la ecuación de onda.

"Las ecuaciones, esos conjuntos de números y símbolos separados por el signo igual, son el alma de las matemáticas, la ciencia y la tecnología. Sin ellas, nuestro mundo no existiría en su forma actual: escondidas para muchos, han constituido una fuerza motriz en la civilización humana durante miles de años, abriendo nuevas perspectivas en campos tan variados como las comunicaciones, la tecnología espacial o la física nuclear. Que así es, es algo que se encarga de demostrar, con su maestría habitual, el distinguido matemático y reputado divulgador Ian Stewart. Para ello ha seleccionado 17 ecuaciones, pertenecientes a dos grupos diferentes. Uno es el de las ecuaciones que revelan regularidades matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que nos dice cómo están relacionados los tres lados de un triángulo rectángulo, mientras que el otro es el de las ecuaciones que expresan leyes de la naturaleza, como la ley de gravitación universal de Newton, las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica, o la ecuación desarrollada por Claude Shannon que define cuánta información contiene un mensaje."

El libro es, para una persona medianamente preparada, fácilmente digerible. Al principio de cada uno de los capítulos el autor se hace tres preguntas en relación a las ecuaciones que luego responderá: Primera, **¿Que nos dice?; segunda, ¿Por qué es importante?;** y tercera, ¿Que provocó?

Luego analiza cada una de las 17 ecuaciones:

El teorema de Pitágoras, porque conectó el álgebra y la geometría.

La suma de logaritmos, porque permitió simplificar operaciones muy complejas

El teorema fundamental del cálculo, porque todas las matemáticas de la física reposan sobre él.

La teoría de la gravitación de Newton, porque unificó en una sola ecuación fenómenos en apariencia tan diferentes como la caída de una manzana y las órbitas de los planetas.

El cuadrado de la unidad imagina, porque el análisis complejo es esencial para resolver muchos problemas.

La fórmula de Euler para los poliedros, porque representa el nacimiento de la topología.

La distribución Gaussiana, uno de los pilares de la estadística.

La ecuación de onda, porque unifica fenómenos tan dispares como la luz, el sonido o los terremotos.

La transformada de Fourier, esencial en el tratamiento de señales.

La ecuación de Navier-Stokes, la base de la aerodinámica y la hidrodinámica.

Las ecuaciones de Maxwell, que describen el electromagnetismo.

La segunda ley de la termodinámica y el incremento de la entropía.

La identidad masa-energía de Einstein, que unifica masa y energía.

La ecuación de Schrödinger, que describe la evolución de un sistema cuántico.

La entropia de la información de Shannon, que describe el límite hasta el que se puede comprimir la información.

El modelo logístico, quizás el sistema más simple donde aparece el caos.

El modelo de Black-Scholes, que se utiliza en banca para calcular el precio de productos financieros derivados.

Y un capítulo al final muy interesante titulado ¿qué es lo próximo? A los curiosos de la ciencia les recomiendo este libro, pues estoy seguro que no le defraudará.

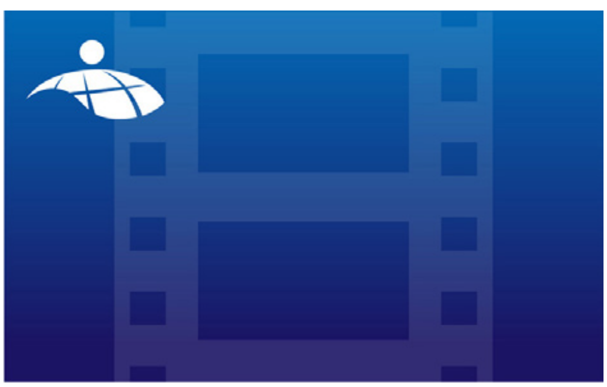
VIDEOS

Video 2: Introducción a las ecuaciones cuadráticas

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Ecuaciones cuadráticas
URL: http://audiovisuales.uned.ac.cr/mediateca/videos/146/ecuaci%C3%B3n-cuadr%C3%A1tica-(ecuaciones-de-segundo-grado)
Duración: 7:29 m
Autor(a): UNED
Año: 2010
Licencia: YouTube estándar.



Video 3: Aplicación de una ecuación cuadrática

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita
URL: https://www.youtube.com/watch?v=KfQlmJHe90M
Duración: 7:39 m
Autor(a): Profe en C@sa, Fundación para la Cooperación, Ministerio de Educación Pública (Costa Rica)
Expositor(a): Alejandro Monge
Año: 2014
Licencia: YouTube estándar.

Video 4: Ejemplo de resolución de una desigualdad lineal

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

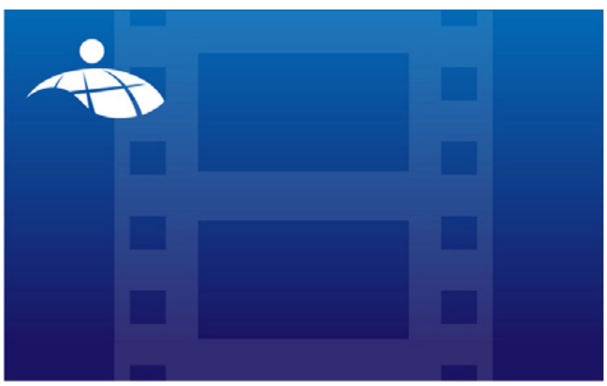
Título o Tema: Desigualdades lineales
URL: http://tu.tv/videos/inecuaciones-lineales
Duración: 3:17 m
Autor(a): Esther Morales
Año: 2010
Licencia: YouTube estándar.

Video 5: Más ejemplos de modelado de desigualdades (A)

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Problemas de desigualdades. Metodología y ejemplo
URL: https://www.youtube.com/watch?v=ZBSMUEek-2g
Duración: 4:23 m
Autor(a): Matematicatuya
Año: 2011
Licencia: YouTube estándar.



Video 6: Más ejemplos de modelado de desigualdades (B)

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: COSTOS, INGRESOS, UTILIDAD - Problemas con DESIGUALDADES LINEALES
URL: https://www.youtube.com/watch?v=Slp2GRhiP3o
Duración: 3:55 m
Autor(a): Jorge Cogollo Martínez
Año: 2013
Licencia: YouTube estándar.

TEMA N° 3: "DESIGUALDADES"

IMPORTANTE

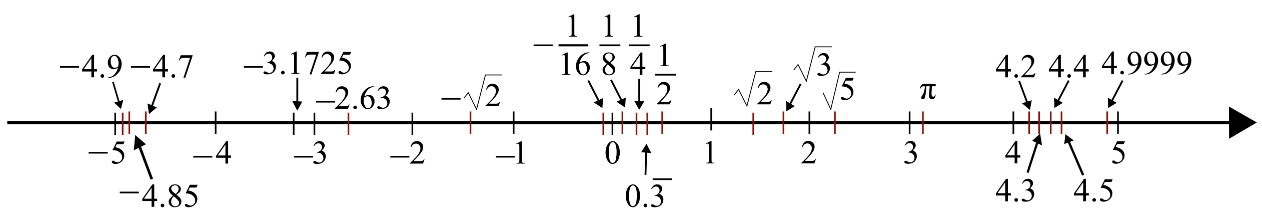
Cuando estás resolviendo o construyendo desigualdades, es importante saber qué símbolo de desigualdad vas a usar. Mira las siguientes frases que te darán una pista:

FRASE	DESIGUALDAD
"a es más que b"	a > b
"a es por lo menos b" o "b no es más que a"	a ≥ b
"a es menos que b"	a < b
"b es por lo menos a" o "a no es más que b"	a ≤ b

1. LA RECTA NUMÉRICA E INTERVALOS

Recta numérica.

Recta donde se establece una biyección, a cada número real le corresponde un único punto de la recta y a cada punto le corresponde un único número real.

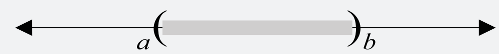
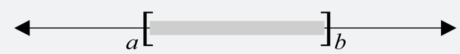
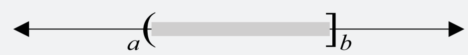
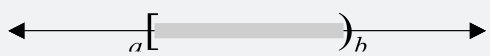
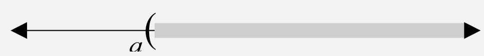
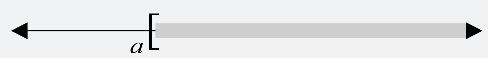
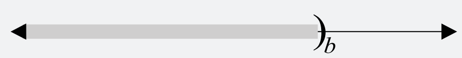
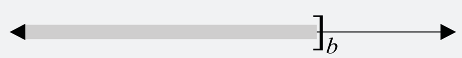


Intervalos

Intervalos son conjuntos de números reales y se representan mediante un segmento con o sin extremos.

Clases de intervalos

Dados a y b son números reales con $a < b$. A continuación presentamos los siguientes tipos de intervalos.

NOMBRE	NOTACIÓN		REPRESENTACIÓN GRÁFICA
	INTERVALO	CONJUNTO	
Abierto	(a,b)	$\{x / a < x < b\}$	
Cerrado	$[a,b]$	$\{x / a \leq x \leq b\}$	
Abierto – Cerrado	$(a,b]$	$\{x / a < x \leq b\}$	
Cerrado – Abierto	$[a,b)$	$\{x / a \leq x < b\}$	
Abierto a la izquierda	(a,∞)	$\{x / x > a\}$	
Cerrado a la izquierda	$[a,\infty)$	$\{x / x \geq a\}$	
Abierto a la derecha	$(-\infty,b)$	$\{x / x < b\}$	
Cerrado a la derecha	$(-\infty,b]$	$\{x / x \leq b\}$	

Los signos] y [, indican que el extremo del intervalo **si** está incluido.

Los signos ⟩ y ⟨, indican que el extremo del intervalo **no** está incluido.

Operaciones. Los intervalos son conjuntos (subconjuntos de) con ellos es posible realizar las operaciones conjuntistas: unión, intersección, complementación, diferencia, diferencia simétrica, etc.

2. DESIGUALDADES LINEALES

Si el grado de la desigualdad es uno, se dice que la desigualdad es lineal.

Es de la forma:

$$ax + b < , \leq , > , \geq 0$$

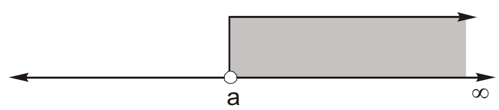
Ejemplo: Resolveremos la desigualdad 3x < 9x + 4 y luego graficaremos el conjunto solución.

Solución:

$3x < 9x + 4$

La multiplicación por el número invierte la dirección de la desigualdad

$3x - 9x < 9x + 4 - 9x$	Sustraemos 9x en ambos lados
$-6x < 4$	Simplificamos
$(-1/6)(-6x) > (-1/6)(4)$	Y multiplicación por —1/6
$x > -\frac{2}{3}$	



DESIGUALDADES LINEALES Y ECUACIONES LINEALES

Una desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo de igual hay uno de los símbolos $<, >, \leq$ o $\geq$.

Ejemplo:

$$2x - 8 < 10$$

Resolver una desigualdad que contiene una variable quiere decir determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Al contrario que en una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta de los números reales.

Ejemplo: Resolvamos a continuación una ecuación lineal e inecuación lineal, en ambos casos despejamos la variable "x".

Ecuación: $4x + 7 = 19$ $\quad x = 3$

Desigualdad: $4x + 7 < 19$ $\quad x < 3$

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 5

Resuelva las siguientes desigualdades:

1. $3x-5<5x+13x+1<1$

2. $3x-5<7x+15$

3. $\frac{x}{3}-2\geq\frac{5x+9}{2}$

4. $2x+\frac{6-3x}{4}<4$

3. APLICACIÓN DE LAS DESIGUALDADES LINEALES

Las desigualdades permiten resolver diversos problemas de situaciones reales. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

La comisión mensual de un agente de ventas es de 15% de las ventas por arriba de $ 12000. Si su objetivo es lograr una comisión de al menos $1000 por mes, ¿cuál es el volumen mínimo de ventas que debe alcanzar?.

Solución:

Sea x la comisión mensual del agente de ventas.

Como la comisión mensual del agente es de 15% de las ventas por arriba de $12000, planteamos la siguiente expresión matemática.

$$15\%\ (x-12000)$$

$$0.15(x-12000)$$

Además el objetivo es lograr una comisión de al menos(≥) $1000, quiere decir:

$$0.15(x-12000) \geq 1000$$

Resolveremos esta desigualdad:

$$0.15x - 1800 \geq 1000$$

$$0.15\ x \geq 1000 + 1800$$

$$0.15x \geq 2800$$

$$x \geq 18666.67$$

por lo tanto el volumen mínimo de ventas que debe alcanzar el agente de ventas es de $18666.67.

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 6

Resuelva los siguientes problemas.

1. **Costo de la renta de un automóvil**. Una compañía que renta vehículos ofrece dos planes para rentar un automóvil.

   Plan A : 30 dólares por día y 10 centavos por milla

   Plan B : 50 dólares por día y gratis millas recorridas ilimitadas

   ¿Para qué valor de millas el plan B le hará ahorrar dinero?

2. **Costos de manejo de un automóvil**. Se estima que el costo anual de manejar un cierto automóvil nuevo se obtiene mediante la fórmula.

$$C = 0.35\ m + 2200$$

Donde m representa la cantidad de millas recorridas al año y C es el costo en dólares. Francisco compró uno de esos vehículos y decide apartar para el año próximo entre 6400 y 7100 dólares para los costos de manejo. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que puede recorrer con su nuevo automóvil?.

4. INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO.

En las inecuaciones con valor absoluto es conveniente recordar las siguientes propiedades que son una consecuencia inmediata de las propiedades de valor absoluto estudiadas anteriormente:

1. $|x| < y \iff [y > 0 \wedge (-y < x < y)]$.

2. $|x| > y \iff [y \geq 0 \wedge (x > y \vee x < -y)]$.

3. $|x| < |y| \iff |x|^2 < |y|^2 \iff x^2 < y$.

Ejemplo 01:

Resolvamos: $|x - 4| < 7$

Solución:

Aplicando el Teorema: $|x| < y \iff [y > 0 \wedge (-y < x < y)]$ Entonces del ejercicio planteado hacemos:

$$|x - 4| < 7 \iff [7 > 0 \wedge (-7 < x - 4 < 7)]$$

Directamente: $(-7 + 4 < x - 4 + 4 < 7 + 4)$

$$-3 < x < 11$$

Respuesta: $x \in \langle -3 ; 11 \rangle$

Ejemplo 02:

Resolvamos: $|2x - 1| < |x + 1|$

Solución:

Aplicando el Teorema: $|x| > y \iff [y \geq 0 \wedge (x - y \vee x < -y)]$ Entonces del ejercicio planteado hacemos:

$$|x - 1| > 3 \iff [3 \geq 0 \wedge (x - 1 > 3 \vee x - 1 < -3)]$$

$$\iff [(x - 1 > 3 \vee x - 1 < -3)]$$

$$(x > 4 \vee x < -2)$$

Respuesta: $x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$

Ejemplo 03:

Resolvamos: $|2x - 1| < |x + 1|$

Solución:

Aplicando el Teorema: $< y \iff x2 < y2 \iff x2 < y2$ entonces del ejercicio planteado hacemos:

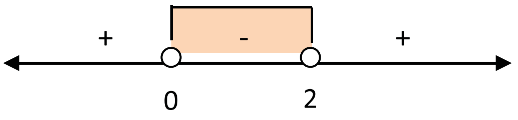
$$|2x-1| < |x+1| \iff (2x-1)^2 < (x+1)^2$$

$$\iff (2x-1)^2 - (x+1)^2 < 0$$

por diferencia de cuadrados: $\iff (2x-1-x-1)(2x-1+x+1) < 0$

$$(x-2)(3x) < 0$$

por puntos críticos:



Respuesta: $x \in \langle 0 ; 2 \rangle$

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 7

Resuelva las desigualdades con valor absoluto usando las propiedades:

1. $| x - 5 | \leq 3.$

2. $3 - | 2x + 4 | \leq 1.$

3. $\frac{1}{2}|x| \geq 1.$

4. $| x + 1 | \geq 1.$

5. $| 3x - 2 | < | 6 - x |.$

TEMA N° 4: "MODELADO DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

El método algebraico para modelar problemas consiste en identificar con un símbolo aquello cuyo valor se quiere conocer y emplear este símbolo como si ya se conociera, tratando de esta manera expresar mediante operaciones, igualdades o desigualdades todo lo que se sabe acerca de la incógnita. Por lo tanto se obtiene lo que llamamos una ecuación o desigualdad y después, por un proceso algebraico, se trata de determinas el valor o valores de la incógnita.

1. MODELACIÓN DE SITUACIONES QUE SE DESCRIBEN POR MEDIO DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES.

Los siguientes ejemplos te ilustran la aplicación de las ecuaciones y desigualdades con una variable.

Ejemplo1: Determinación de una variable de una variable en términos de las otras.

El área superficial A de la caja rectangular cerrada de la figura se puede calcular a partir del largo l, el ancho w y la altura h de acuerdo con la fórmula: $A = 2lw + 2wh + 2lh$

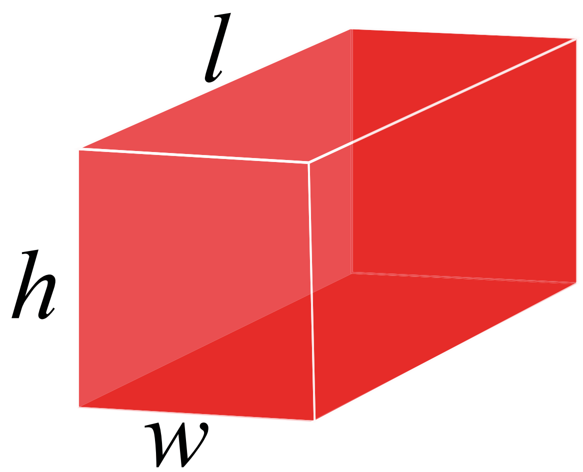


Figura 1

Determine w en términos de las otras variables de esta ecuación.

Técnica de Solución: Aunque esta ecuación contiene más de una variable, la resolveremos de la manera usual, aislando a $w$en un lado y tratando a las otras variables como si fueran números.

$A = (2lw + 2wh) + 2lh$ Agrupación de términos que contienen w

$A - 2lh = 2lw + 2wh$ Recta de$2lh$

$A - 2lh = (2l + 2h)w$ Se factoriza w

$\dfrac{A-2lh}{2l+2h}=w$ Division entre $2l+2h$

La solución es $w=\dfrac{A-2lh}{2l+2h}$

Ejemplo 2: Las ecuaciones cuadráticas presentan un sin número de modelados entre ellos tenemos algunos problemas de economía que dan lugar a una ecuación de segundo grado. Veamos un ejemplo más:

Mensualmente una compañía puede vender "x" unidades de cierto artículo a "p" nuevos soles cada uno, en donde la relación entre p y x (precio y número de artículos vendidos) está dada por la siguiente ecuación de demanda: $p = 1400 - 40x$.

¿Cuántos artículos debe vender para obtener un ingreso de 12000 nuevos soles?

Técnica de resolución:

Partimos de la siguiente ecuación de economía.

Ingreso = Precio de venta x N° de artículos vendidos

Datos:

Ingreso: 12000 nuevos soles

Precio de venta: $p = 1400 - 40x$

N° de artículos vendidos: x

Sustituímos estos datos en la ecuación de economía: $12000 = (1400 - 40x)(x)$

Destruyendo paréntesis nos queda: $12000 = 1400x - 40x^2$

Damos forma a nuestra ecuación cuadrática: $40x^2 - 1400x + 12000 = 0$

Esta ecuación simplificamos diviendo cada término entre 40 quedando:

$40x^2 - 1400x + 12000 = 0$

Resolviendo: $x_1 = 20$ y $x_2 = 15$

Interpretación: Por lo tanto se deben vender 15 ó 20 artícilos para obtener un ingreso de S/. 12000

Escuchando el lenguaje

Te encuentras con desigualdades matemáticas casi todos los días, pero tal vez no las notas porque te son familiares. Piensa en las siguientes situaciones: Límites de velocidad en la autopista, pagos mínimos en las tarjetas de crédito, el número de mensajes de texto que puedes enviar desde tu celular cada mes, el tiempo que te toma llegar a la Universidad. Todas estas pueden ser representadas como desigualdades matemáticas. Y, de hecho, usas pensamiento matemático cuando consideras éstas situaciones cada día.

SITUACIÓN	DESIGUALDAD MATEMÁTICA
Límite de velocidad	Velocidad legal en la autopista ≤ 65 millas por hora
Targeta de crédito	Pago mensual ≥ 10% de tu balance en el ciclo de tu factura
Mensajes de texto	Número de mensaje permitido al mes ≤ 250
tiempo de viaje	Tiempo necesario par acaminar hasta la escuela l ≥ 18 minutos

Cuando hablamos de estas situaciones, normalmente nos referimos a límites, como "la velocidad límite es de 65 millas por hora" o "Tengo un límite de 250 mensajes de texto al mes". Sin embargo, no tenemos que viajar exactamente a 65 millas por hora en la autopista, ni mandar y recibir precisamente 250 mensajes de texto al mes — el límite sólo establece una frontera para lo que es *permitido*. Pensar en estas situaciones como desigualdades proporciona una visión más amplia de lo que es *posible.*

Considera el siguiente problema:

Un camión de 18 ruedas se detiene sobre una balanza antes de pasar un puente. El peso límite del puente es de 65,000 libras. La cabina del camión pesa 20,000 libras, y la caja del camión pesa 12,000 libras cuando está vacía. En libras, ¿cuál es la carga que puede llevar el camión para que se le permita pasar el puente?.

Este problema ofrece un límite superior — 65,000 libras — pero nos interesa encontrar todo el rango de posibilidades para el peso de la carga. Podemos representar la situación usando la siguiente desigualdad, donde *c* es el peso (en libras) de la carga del camión:

peso de la cabina	**+**	**peso de la caja**	**+**	**peso de la carga**	**≤**	**peso permitido**
20,000	+	12,000	+	c	≤	65,000

Resolviendo *c* en la igualdad, encontramos que *c* ≤ 33,000. Esto significa que el peso de la carga en el camión puede variar entre 0 y 33,000 libras y se le permitirá al camión cruzar el puente.

$$20000 + 12000 + c \leq 65000$$

$$c \leq 65000 - 32000$$

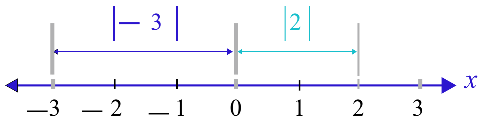
$$c \leq 33000$$

GLOSARIO DE LA UNIDAD I

A

ABSOLUTO, VALOR

El valor absoluto de un numero x, denotado por |x| se define como su valor numerico sin considerar su signo. Por ejemplo, el valor absoluto de −18 es: | − 18| = 18, y el valor absoluto de 3 es: |3| = 3. Geometricamente, el valor absoluto ´ representa la distancia del origen de la recta numerica al punto que le corresponde el número:



D

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

(álgebra): Cuando una expresión algebraica se expresa en forma de la multiplicacion de otras, se dice que se ha descompuesto en factores.

Por ejemplo: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

DISCRIMINANTE: En la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$ y las raíces son $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\textit{DISCRIMINANTE}}}{2a}$

El discriminante D se define como el argumento del radical: $\Delta = b^2 - 4ac$

E

ECUACIÓN

Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Por ejemplo, $x^n + y^n = z^n$

ECUACIÓN ALGEBRAICA

Es una ecuación que se expresa en base a operaciones algebraicas (suma, resta, división, multiplicación) de polinomios. Por ejemplo la siguiente es algebraica.

$$\frac{1}{x+2} - \frac{(x-1)(x+3)}{x+5} = 1$$

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación es cuadrática si tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a \neq 0$

ECUACIÓN LINEAL

Es una ecuacion en la cual las incógnitas tienen exponente uno. Por ejemplo, la ecuación: $7x + 1 = 50$ es lineal, pues la unica incógnita que aparece (x) tiene exponente igual a 1.

ECUACIÓN LITERAL

Ecuación en la cual los coeficientes constantes son escritos como literales porque se desconoce su valor. Por ejemplo, en la ecuación $ax^2 + b\,x + c = 0$, los coeficientes a, b, c son literales, porque no se conoce su valor.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD I

BÁSICA

- **Haeussler, E. y Paul, R.**,(2007). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* (8a.ed.). México: Pearson.

  Código biblioteca UC: 519/ H14

RECOMENDADA

- **Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S.,** (2007).*Précalculo: Matemáticas para el cálculo*(5a. ed.). México: CengageLearning.

  Código biblioteca UC: 515 / S79

- **Demana, F., Waits, B., Foley, G. yKennedy,D.,**(2007). *Precálculo: gráficas, numérico, algebraico* (7a ed.).México:Pearson Educación.

  Código biblioteca UC: 512.1/ D56

- **Larson, R. y Hostetler, R.,** (2008).*Precálculo* (7a ed.). China:Reverté.

  Código biblioteca UC: 512.13/ L25 2008

- **Tan,S.,** (2000). *Matemáticas para administración y Economía.* México: Thomson Editores.Código biblioteca UC: 519 / T19 2009

- **Peterson, J.,** (2001).*Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica* (3a. ed.). México: CECSA.

- **Zill,D. y Dewar,J.,** (2008).*Precálculo con avances de cálculo*(4a. ed.). Colombia: McGraw Hill.

AUTOEVALUACION DE LA UNIDAD I

Resuelva los siguientes ejercicios y aplicaciones:

1. $x - (2x + 8) = 5(-x + 3)$
2. $\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = 5x - 8$
3. $3x^2 + 4x + 1 = 0$
4. $\frac{x}{3} - 2 \geq \frac{5x+9}{2}$
5. $2 \leq 3x + 5 < 5$
6. 9x > x2 + 14
7. $(x + 1)\ (x - 2)\ (x+5) > 0$
8. $|x^2 - 9| = x - 1$
9. $|x + 2| \geq 2$
10. Población de peces. La población de peces de un lago aumenta y disminuye según la fórmula $F = 1000(30 + 17t - t^2)$. En este caso, F es la cantidad de peces que hay en el tiempo t, donde t se mide en años desde el primero de enero de 2002, cuando la población de peces se estimó por vez primera.

    ¿En qué fecha la población de peces volverá a ser la misma que en el primero de enero de 2002?

UNIDAD II

FUNCIONES Y GRÁFICAS.

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD II

Al finalizar la unidad, el estudiante, utiliza las funciones, su regla de correspondencia y representación gráfica en situaciones de su entorno cotidiano.

UNIDAD I

TEMA 4

CONTENIDOS	ACTIVIDADES FORMATIVAS (HABILIDADES Y ACTITUDES)	SISTEMA DE EVALUACIÓN (TÉCNICAS Y CRITERIOS)
Tema N° 1: Dominio de una función. 1 Funciones: Definición y determinación de dominios. 2 Evaluación de funciones y sus aplicaciones. **Tema N° 2: Gráficas de funciones.** 1 Gráficas en coordenadas rectangulares. 2 Gráfica de funciones definidas por partes. **Tema N° 3: Transformaciones de funciones.** 1 Desplazamientos verticales de gráficas. 2 Desplazamientos horizontales de gráficas. 3 Reflexiones de gráficas. 4 Estiramiento y acortamiento vertical. 5 Acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas.	• Define y evalúa una función real, reconociendo: dominio, rango, variables independiente y dependiente y su gráfica. • Analiza y aplica propiedades al determinar el dominio de una función. • Utiliza la regla de correspondencia para calcular imágenes. • Estima valores numéricos a partir de la observación de la representación gráfica de una función. • Grafica las funciones construyendo tablas de valores y representando pares ordenados en el plano cartesiano. • Grafica una función definida por partes. • Grafica funciones mediante traslaciones y reflexiones. • Analiza la relación entre magnitudes a partir de la gráfica de funciones de entorno cotidiano. • Utiliza la regla de correspondencia de funciones aplicadas a la economía y entorno cotidiano, para calcular e interpretar resultados.	• Valora y utiliza sistemáticamente conductas asociadas a la actividad matemática, tales como el orden, puntualidad, contraste, precisión, revisión sistemática y crítica de los resultados.

RECURSOS:

VIDEOS:

Tema N° 1: Dominio de una función.

Video 7: Transformación de funciones

Tema N° 2: Gráficas de funciones.

Video 8: Formas de expresar la ecuación de una recta, Teoría

Tema N° 3: Transformaciones funciones.

http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--

DIAPOSITIVAS ELABORADAS POR EL DOCENTE:

Lectura complementaria:

Lectura Seleccionada N° 1

"Apuntes importantes de funciones"

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	Prueba de desarrollo
BIBLIOGRAFÍA (BÁSICA Y COMPLEMENTARIA)	**BASICA** HAEUSSLER Ernest y PAUL Richard. Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida . 8a.ed. México: Pearson. 2007 Código biblioteca UC: 519/ H14 **COMPLEMENTARIA** STEWART James, REDLIN Lothar y WATSON Saleem. Précalculo: Matemáticas para el cálculo. (5a. ed.). México: Cengage Learning. 2007 Código biblioteca UC: 515 / S79 DEMANA F., WAITS B., FOLEY G. y KENNEDY D.. Precálculo: gráficas, numérico, algebraico (7a ed.).México: Pearson Educación. 2007 Código biblioteca UC: 512.1/ D56 LARSON Ron y HOSTETLER Robert. Precálculo. 7a ed. China: Reverté. 2008. Código biblioteca UC: 512.13/ L25 2008 SOOO Tang Tan. Matemáticas para administración y Economía. México: Thomson. Editores. 2000. Código biblioteca UC: 519 / T19 2009 PETERSON J.. Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica. 3a. ed. México: CECSA. 2001 ZILL Denis G. y DEWAR Jacqueline. Precálculo con avances de cálculo. 4a. ed. Colombia: McGraw Hill. 2008.
RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES	KHANACADEMY (2006) Base de datos. Estados Unidos. Recuperado el 28 de enero de 2015, de https://es.khanacademy.org/ DITUTOR (5 de febrero 20115). Diccionario de Matemática (html). Recuperado de http://www.ditutor.com/numeros_reales/numeros_reales.html PROFESOR EN LÍNEA (6 de febrero 2015). Números Reales (html). Recuperado de http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Numeros_reales.html CURSO DE ALGEBRA (5 de febrero 2015). Números Reales (video). Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=tMHJbmUGcQk

TEMA N° 1:
DOMINIO DE UNA FUNCIÓN.

Supóngase que un hombre de 90 kg bebe cuatro cervezas en rápida sucesión. Sabemos que su concentración de alcohol en la sangre, CAS, primero se eleva y después disminuye en forma paulatina a cero. Pero, ¿Cuál es la mejor manera de describir que tan rápido se eleva la CAS, en dónde alcanza su punto máximo y qué tan rápido disminuye?.

Si obtenemos las medidas de los valores de CAS para este bebedor en particular, podemos mostrarlas en una tabla como sigue:

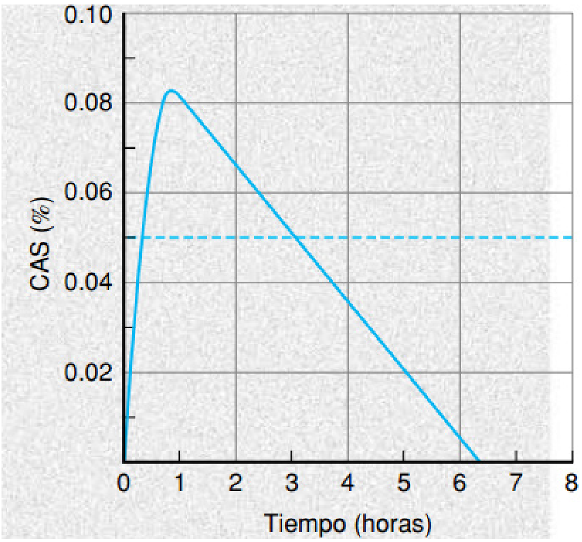
Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6
CAS (%)	0.0820	0.0668	0.0516	0.0364	0.0212	0.0060

Sin embargo, una tabla sólo puede mostrar un número limitado de valores en realidad no proporciona la imagen global.

En lugar de lo anterior, podríamos relacionar la CAS con el tiempo si utilizamos una combinación de ecuaciones lineales y cuadráticas (recuerde la unidad I).

$$\begin{aligned} \text{CAS} &= -0.1025t^2 + 0.1844t \qquad && \text{si } t \leq 0.97, \\ \text{CAS} &= -0.0152t + 0.0972 && \text{si } t > 0.97. \end{aligned}$$

Así mismo, como en la tabla, es difícil ver las ecuaciones y entender rápidamente lo que sucede con el CAS en el transcurso del tiempo; quizá la mejor descripción de cambio en la CAS con el tiempo es una gráfica como el que se muestra debajo. Aquí, con facilidad vemos qué sucede.



La concentración, de alcohol en la sangre asciende rápidamente, tiene un máximo de 0,083% después de aproximadamente una hora, y luego disminuye de manera gradual durante las siguientes 5 horas y media. Observe que por más de tres horas la CAS de este bebedor está por arriba de 0,055, el punto en el que, por lo regular, las habilidades que uno tiene para conducir algún vehículo empiezan a declinar. La curva variará de un bebedor a otro, pero las mujeres por lo común se ven afectadas con mayor severidad que los hombres, no solo a causa de la diferencia de peso; sino también a consecuencia del diferente contenido de agua entre los cuerpos de ambos sexos.

La relación entre el tiempo y el contenido de alcohol en la sangre, es un ejemplo de FUNCIÓN. En esta unidad se trata a fondo las funciones y sus gráficas.

Fuente:

Haeussler, E. y Paul, R. (2007). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* (8a.ed.). México: Pearson.

1. FUNCIÓNES: DEFINICIÓN Y DETERMINACIÓN DE DOMINIOS.

Uno de los conceptos más importantes en matemática es el de función.

En muchas situaciones encontramos que dos o más objetos o cantidades están relacionados por una correspondencia de dependencia, como por ejemplo:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es una función del tiempo.
- El peso de un astronauta es una función de su elevación.
- El precio de un artículo es una función de la demanda de ese artículo.
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso.
- La temperatura de ebullición del agua depende de la altura del lugar

Esto nos conduce a la definición de **función.**

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una función f de un conjunto A en un conjunto B, es una regla que hace corresponder a cada elemento x perteneciente al conjunto A, uno y solo un elemento y del conjunto B, llamado imagen de x por f, que se denota:

$$y=f\ (x)$$

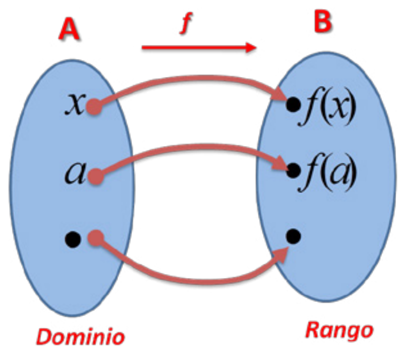
En símbolos, se expresa f : A → B, siendo el conjunto A el dominio de f, y el conjunto B el rango.

La notación $y=f\ (x)$ señala que y es una función de x. La variable x es la variable independiente, y el valor y se llama variable dependiente, y f es el nombre de la función.

Las condiciones que debe reunir una relación para ser función, pueden resumirse en estas dos:

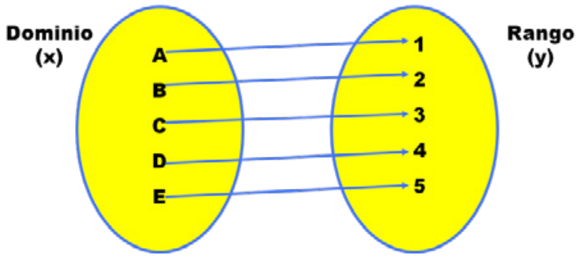
a) **Existencia:** Cada elemento del dominio debe tener imagen

b) **Unicidad:** La imagen de cada elemento del dominio debe ser única.

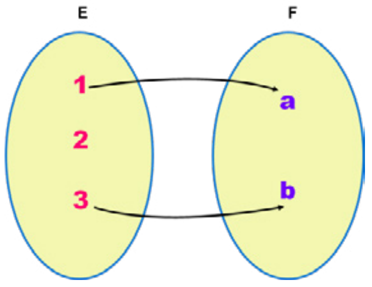


Ejemplos:

La siguiente relación **es función** porque cada elemento de A está relacionado con uno y sólo uno de B.



La relación del diagrama **no es función** porque un elemento de E no tiene correspondiente en F.



DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN.

El Dominio de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x).

El Rango de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (y).

Ejemplos.

Determinación dominios de funciones

Hallaremos el dominio de cada función

a) $f(x) = \dfrac{2\ x+1}{x^2\ -\ x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{25\ -\ x^2}$ **c)** $g(x) = \dfrac{t\ -\ 1}{\sqrt{t\ +3}}$

Solución:

a) La solución no está definida cuando el denominador es 0. Puesto que:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2 - x} = \frac{2x+1}{x(x-1)}$$

Se puede observar que $f(x)$ no está definida cuando $x=0$ o $x=1$. Así el dominio de f es:

$$\{x/x \neq 0, \qquad x \neq 1\}$$

El dominio se puede escribir en notación de intervalo como:

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{0,1\}$$

b) No se puede sacar la raíz cuadrada de una cantidad negativa, así que se debe tener $25 - x^2 \geq 0$ Con la propiedad adecuada se puede resolver esta desigualdad para hallar que: $-5 \leq x \leq 5$ Así, el dominio de la función es:

$$Dom\, f(x) = [-3,3]$$

c) No se puede sacar la raíz cuadrada de un número negativo, y tampoco se puede dividir entre cero, así que se debe tener $t + 3 > 0$, es decir, $t > -3$. Por lo tanto, el dominio de g es:

$$Dom\ g(x) = < -3, \infty >$$

2. EVALUACIÓN DE FUNCIONES Y SUS APLICACIONES.

En la definición de una función la variable independiente x desempeña el papel de "marcador de posición" Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 - x + 3$ se puede considerar como:

$$f(\_) = (\_)^2 - (\_) + 3$$

Para evaluar f es un número, se sustituye el número para el marcador de posición.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - x + 3$. Evalúe cada valor de la función.

A) $f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 3 = 9$

B) $f(0) = (0)^2 - (0) + 3 = 3$

C) $f\left(\frac{1}{2}\right) = (\frac{1}{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{5}{2}$

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 1

Determina del dominio de cada función:

1) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

2) $f(x)=\sqrt{2x+4}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

4) $g(x)=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

5) Sea $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Evalúe cada valor de la función $f(-3); f\left(\dfrac{-1}{3}\right) y\ f(1)$

VIDEOS

Video 7: Transformación de funciones

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Transformación de funciones
URL: https://www.youtube.com/watch?v=fBwLhZM-u-w
Duración: 4:59 m
Autor(a): Institución Universitaria Pascual Bravo
Año: 2013
Licencia: YouTube estándar.

TEMA N° 2:
GRÁFICA DE FUNCIONES.

Las gráficas permiten obtener una representación visual de una función. Éstas entregan información que puede no ser tan evidente a partir de descripciones verbales o algebraicas.

Para representar gráficamente una función $y=f(x)$, es común utilizar un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, en las cuales, la variable independiente x se representa en el eje horizontal, y la variable dependiente y en el eje vertical.

1. GRÁFICAS DE COORDENADAS CARTESIANAS O RECTÁNGULARES.

Ejemplo:

Trazaremos las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$ **b)** $g(x) = x^3$ **c)** $h(x) = \sqrt{x}$

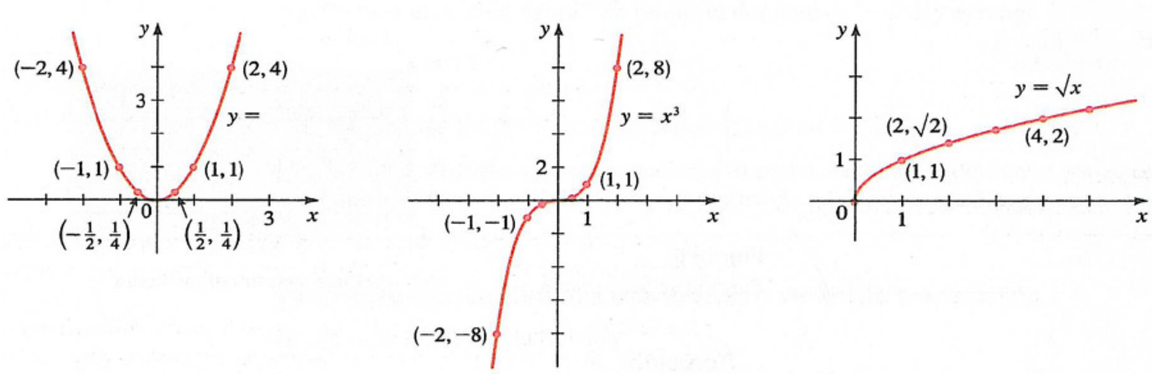
Solución: Primero se construye una tabla de valores. Luego se grafican los puntos expresados en la tabla y se unen mediante una curva lisa para obtener la gráfica.

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

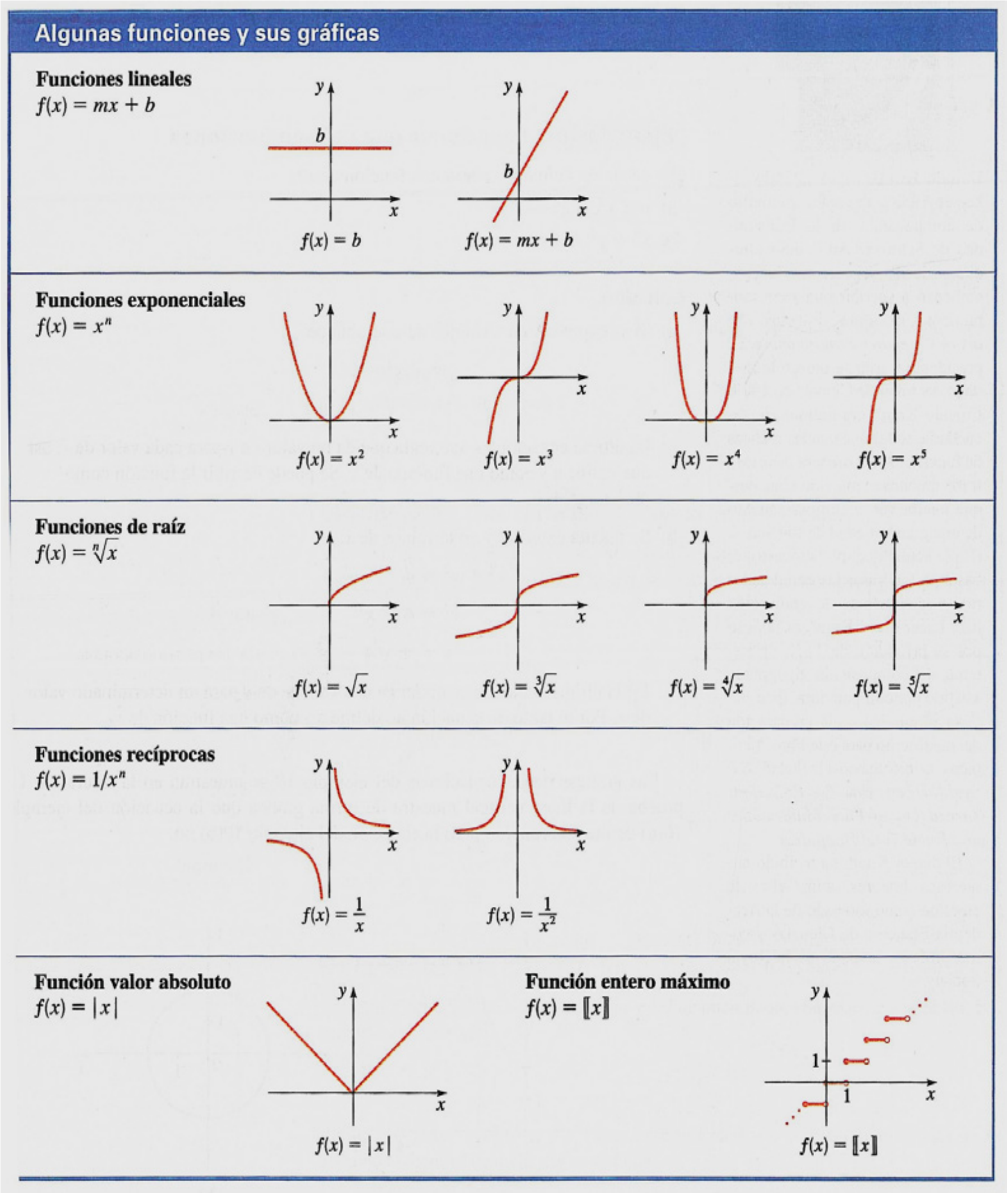
x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

Luego los bosquejos de las gráficas son:



a) $f(x) =$ b) $g(x) = x^3$ c) $h(x) = \sqrt{x}$

En la tabla siguiente se muestran gráficas de algunas funciones básicas:

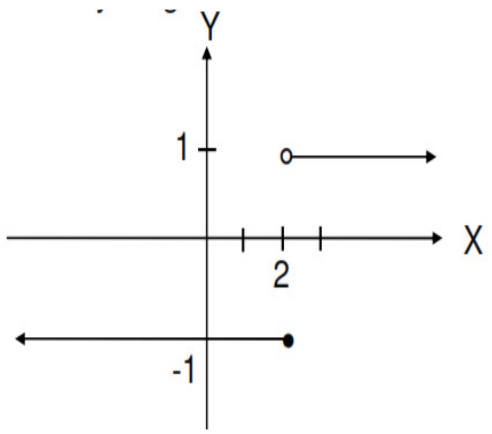


2. GRÁFICA DE FUNCIONES DEFINIDAS POR PARTES.

Graficaremos la siguiente función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

La grafica es la siguiente:



http://functions.wolfram.com/

Archivo de gráficas de funciones matemáticas

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 2

Trace la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x - 2$
2. $g(x) = 4x - 1$; para $x \in [0, 5]$
3. $h(x) = x^2$; para $x \in \langle -4, 6 \rangle$
4. $f(x) = 6 - 2x$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
6. $f(x) = \sqrt{3 - x}$

LECTURA SELECCIONADA Nº 1:

APUNTES IMPORTANTES DE FUNCIONES

1. Definición y propiedades de funciones crecientes y decrecientes.

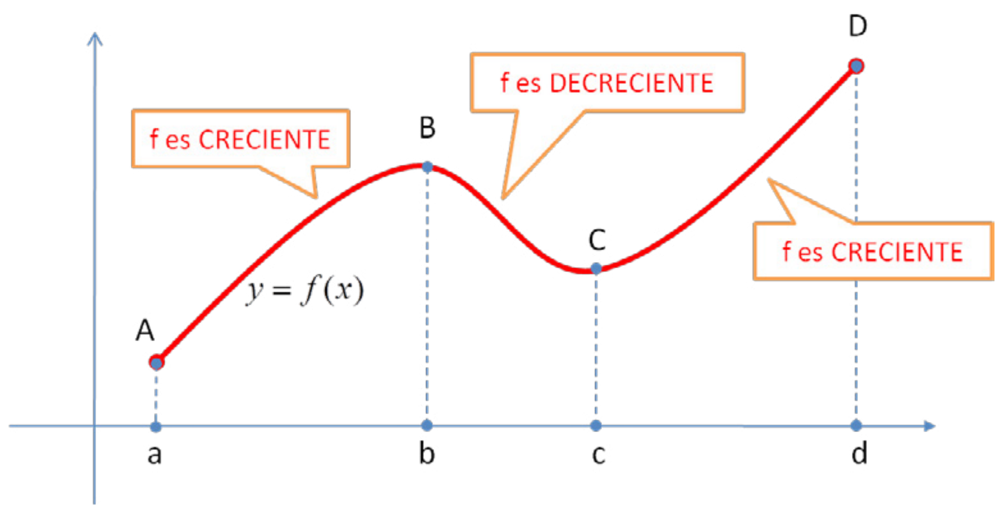
Sea f una función con dominio D.

Definiciones

- Se dice que f es **creciente** en el intervalo $I \subset D$ si, cualesquiera que sean $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ verificando $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$; es decir, si a medida que crece x en el intervalo I, crece $f(x)$.
- Se dice que f es **decreciente** en el intervalo $I \subset D$ si, cualesquiera que sean $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ verificando $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$; es decir, si a medida que crece x en el intervalo I decrece $f(x)$.

2. GRAFICAS.

De la siguiente gráfica:



f es **creciente** en: $[a,b]$ y $[c,d]$

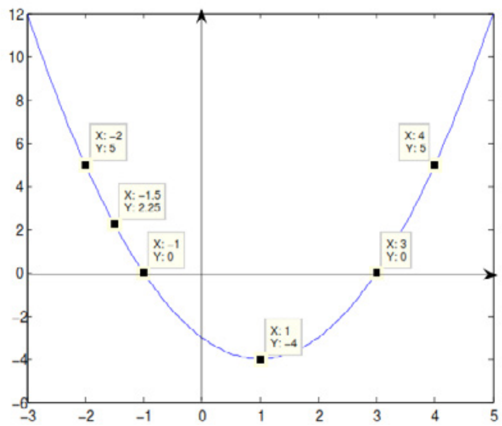
f es **decreciente** en: $[b,c]$

Ejemplo:

De la función: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ su gráfica es la siguiente:

Se observa lo siguiente:

- Es decreciente en $<-\infty,1>$: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Es creciente en $<-\infty,1>$: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

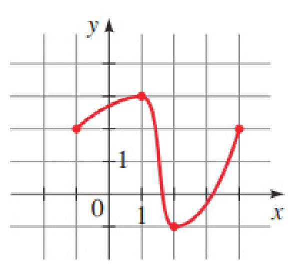


ACTIVIDADES:

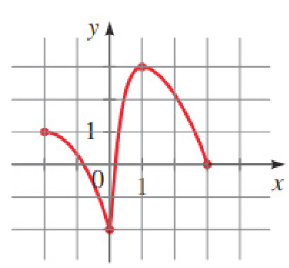
Se da la gráfica de una función.

Determine los intervalos en los que la función es a) creciente y b) decreciente.

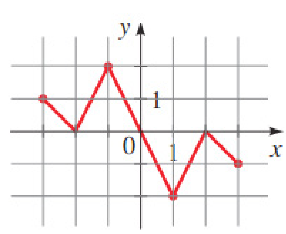
1.



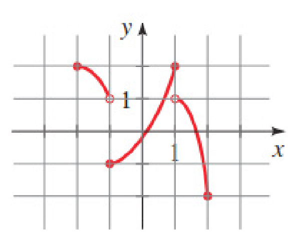
2.



3.



4.

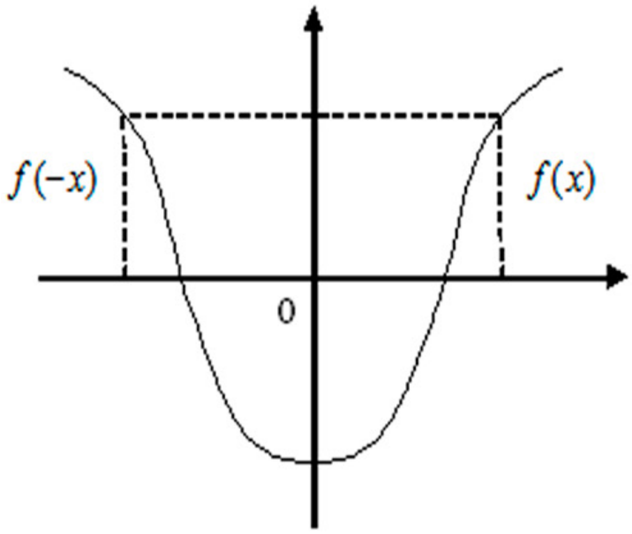


3. FUNCIONES PAR E IMPAR.

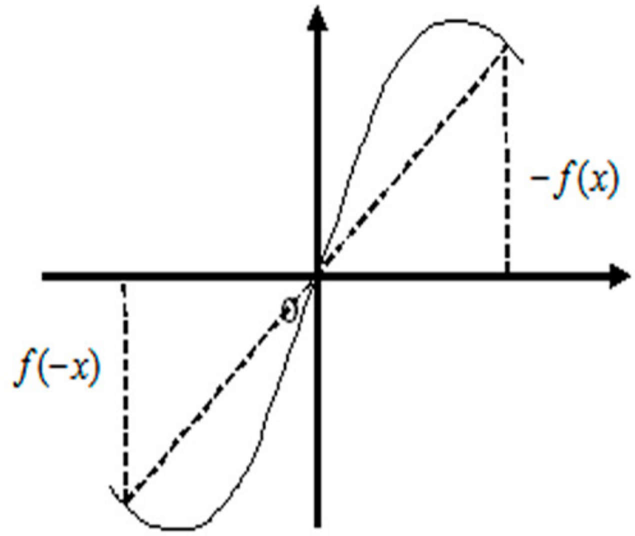
Definición y gráficas

Sea f una función.

> f es par si f(-x) = f(x) para toda x en el dominio de f.
>
> f es impar si f(-x) = - f(x) para toda x en el dominio de f.



FUNCIÓN PAR



FUNCIÓN IMPAR

Ejemplo:

De las siguientes funciones determinaremos si son funciones par; impar o ni par ni impar.

1. **$f(x) = x^5 + x$**

Solución:

Reemplazamos x por –x en la función

$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$

La función cambió de signo, por lo tanto, f es una función impar.

2. **$g(x) = 1 - x^4$**

Solución:

$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

por lo tanto g es par.

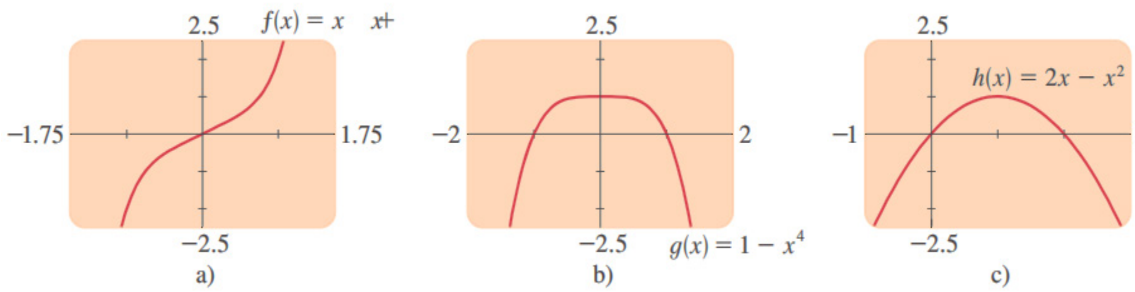
3. **$h(x) = 2x - x^2$**

Solución:

$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

Puesto que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar.

Las gráficas de los ejemplos anteriores se muestran a continuación. La gráfica La gráfica de la función f es simétrica respecto al origen, y la gráfica de g es simétrica con respecto al eje y. La gráfica de h no es simétrica respecto al eje y o al origen.



ACTIVIDAD:

Determine si la función f es par, impar o ninguna. Si f es par o impar, use la simetría para bosquejar su gráfica.

1. $f(x) = x^{-2}$

2. $f(x) = x^4 - 4x^2$

3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

VIDEOS

Video 8: Formas de expresar la ecuación de una recta, Teoría

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Formas de expresar la ecuación de una recta, Teoría
URL: https://youtu.be/lvAAGy2fRik
Duración: 8:15 m
Autor(a): Academia Vasquez
Año: 2013
Licencia: YouTube estándar.

TEMA N° 3: TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES.

Las transformaciones de funciones que se estudiarán son desplazamiento, reflexión y estiramiento. Esto nos proporciona una mejor comprensión de cómo graficar una función.

1. DESPLAZAMIENTOS VERTICALES DE GRÁFICAS.

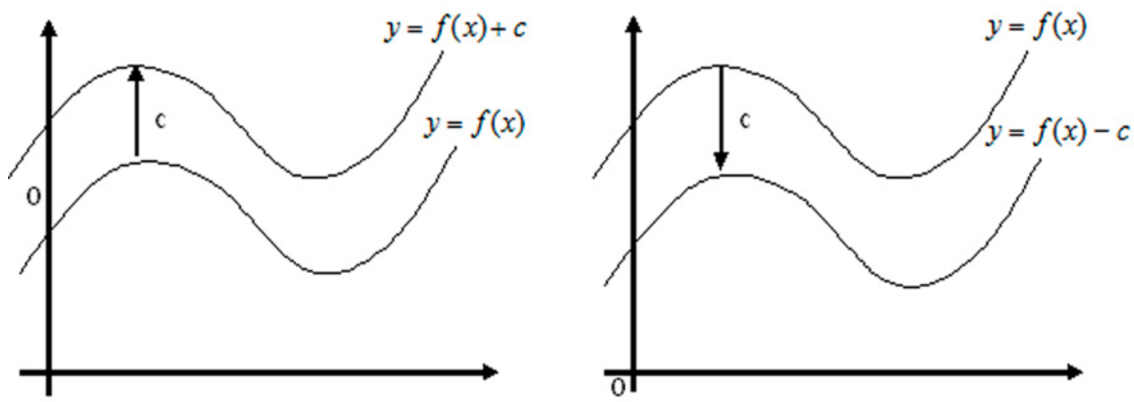
Si sumamos una constante a una función, ésta desplaza su gráfica en dirección vertical; el desplazamiento es hacia arriba si la constante es positiva y el desplazamiento es hacia abajo si la constante es negativa.

Suponiendo que la constante sea c y mayor que cero (c>0), entonces podemos concluir en lo siguiente:

Para graficar y = f(x) + c, se desplaza c unidades hacia arriba la gráfica de y= f(x)

Para graficar y = f(x) - c, se desplaza c unidades hacia abajo la gráfica de y= f(x)

Veamos este tipo de desplazamiento en las gráficas siguientes.



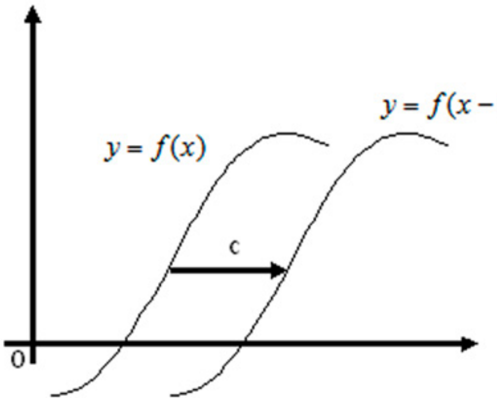
En la primera grafica observamos que la gráfica se desplazó c unidades hacia arriba. Así mismo para la segunda gráfica se desplazó c unidades pero hacia abajo.

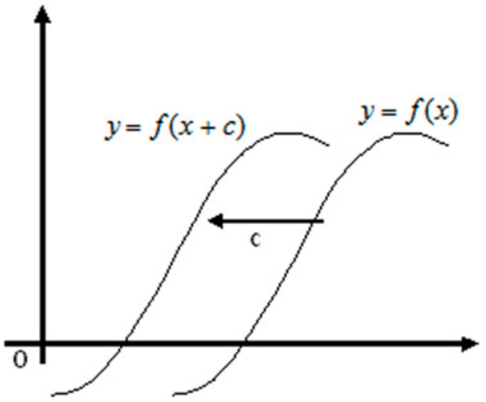
2. DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE GRÁFICAS.

De igual manera si c es una constante y es mayor que cero (c > 0), obtenemos lo siguiente:

Para graficar y = f(x-c), se desplaza la gráfica de y = f(x) a la derecha c unidades.

Para graficar y = f(x+c), se desplaza gráfica de y = f(x) a la izquierda c unidades.



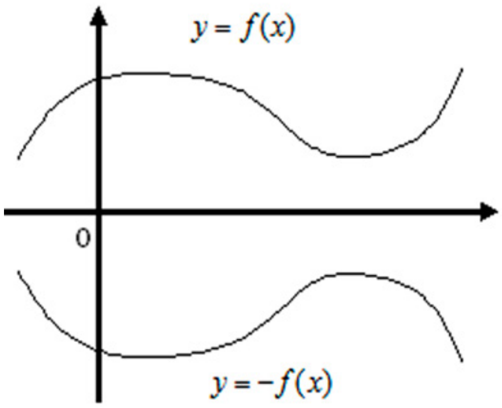


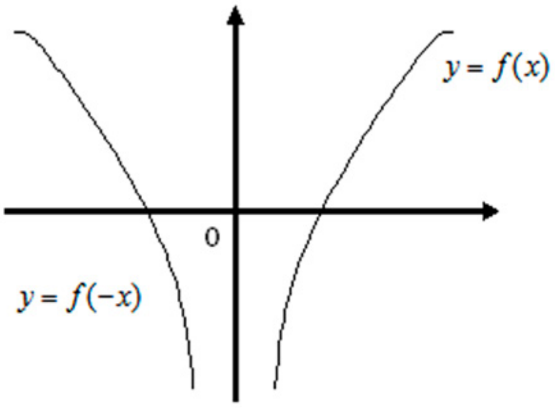
Como se puede observar las gráficas se han desplazado horizontalmente c unidades, a la derecha e izquierda respectivamente.

3. REFLEXION DE GRÁFICAS.

Para graficar y = - f(x), refleje la gráfica de y = f(x) en el eje x.

Para graficar y = f(-x), refleje la gráfica de y = f(x) en el eje y.



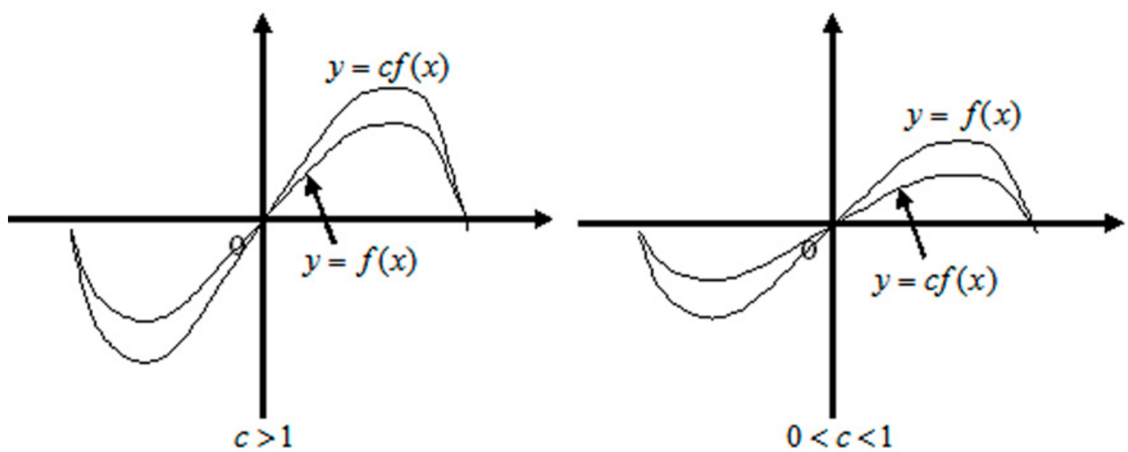


4. ESTIRAMIENTO Y ACORTAMIENTO VERTICAL.

Para graficar y = c f(x)

Si c > 1, alargue verticalmente la gráfica de y = f(x) por un factor de c.

Si c < 1, acorte verticalmente la gráfica de y = f(x) por un factor de c.

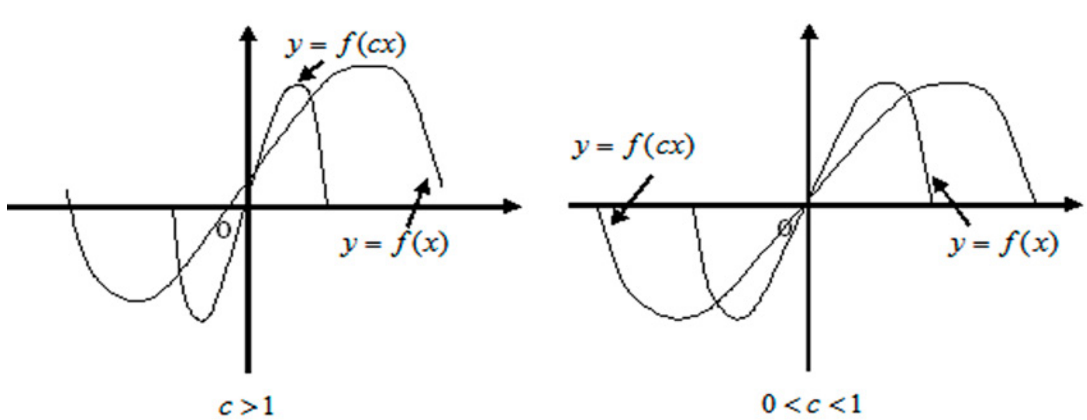


5. ACORTAMIENTO Y ALARGAMIENTO HORIZONTAL DE GRÁFICAS.

La gráfica de y = f(cx)

Si c > 1, acorte la gráfica de y = f(x) horizontalmente por un factor de 1/c

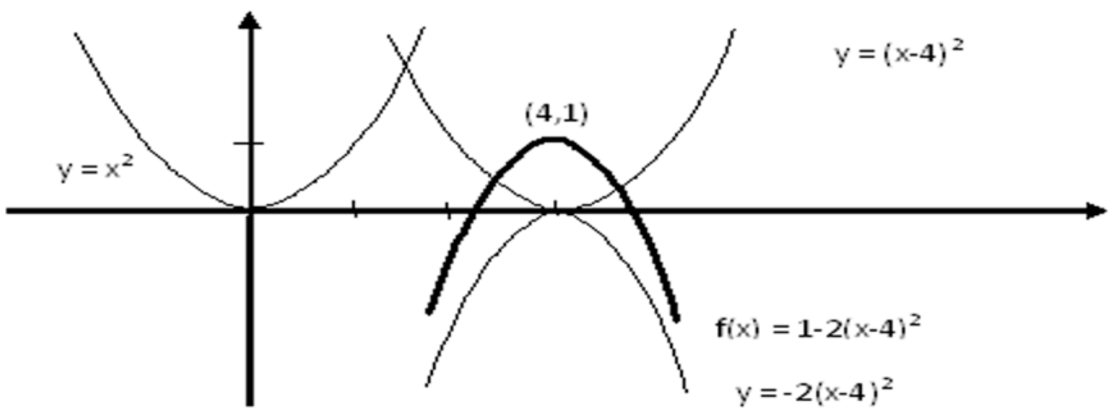
Si 0< c < 1, alargue la gráfica de y = f(x) horizontalmente por un factor de 1/c.



Ejemplo:

Bosquejaremos la gráfica de la función $f(x) = 1 - 2(x-4)^2$

Solución. Comenzamos con la gráfica y = x^2, se desplaza primero a la derecha 4 unidades para obtener la gráfica de y = $(x\text{-}4)^2$. Luego se refleja en el eje x y se alarga por un factor de 2 para obtener la gráfica de y = $-2(x\text{-}4)^2$. Por último, se desplaza 1 unidad hacia arriba para obtener la gráfica de f(x) = 1 – $2(x\text{-}4)^2$ mostrada en la siguiente figura.



http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6Ii-MwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--

Graficadora de funciones

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 3

Realice la gráfica de la función, no mediante la graficación de puntos, sino iniciando con la gráfica de una función estándar y aplicando transformaciones.

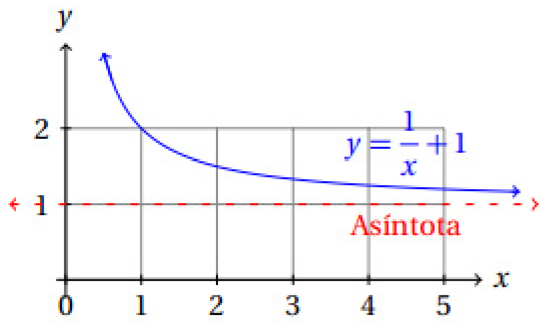
1. $f(x) = -\frac{1}{3}(x+4)^2 + 9$
2. $f(x) = (-x-6)^2 - 4$
3. $f(x) = 10(x-2)^2 - 1$
4. $f(x) = 10(x-2)^2 - 1$
5. $f(x) = -2 + \sqrt{x+1}$
6. $f(x) = -|x-2| + 8$
7. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 3$
8. $f(x) = -(x-6)^3$

GLOSARIO DE LA UNIDAD II

A

ASÍNTOTA

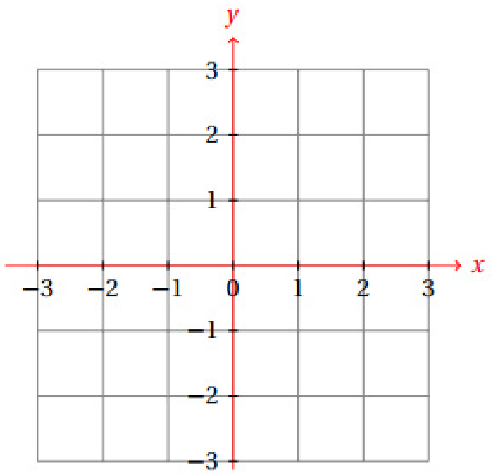
Se dice que una curva tiene una asíntota si se acerca mucho a una recta, pero sin llegar a tocarla. La recta representa la asíntota de la curva.



C

CARTESIANO

Plano: Sistema de coordenadas en el cual los ejes son mutuamente perpendiculares y ambos utilizan la misma unidad de medida. La siguiente figura muestra un plano cartesiano.



F

FUNCIÓN ALGEBRAICA

Es una función que se expresa en base a operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación y división) de polinomios. Por ejemplo la función "Y" es algebraica.

$$y = \frac{x+1}{x+2} - \frac{(x-3)^2}{x-5} + 4x^3 + 7$$

FUNCIÓN LÍNEAL

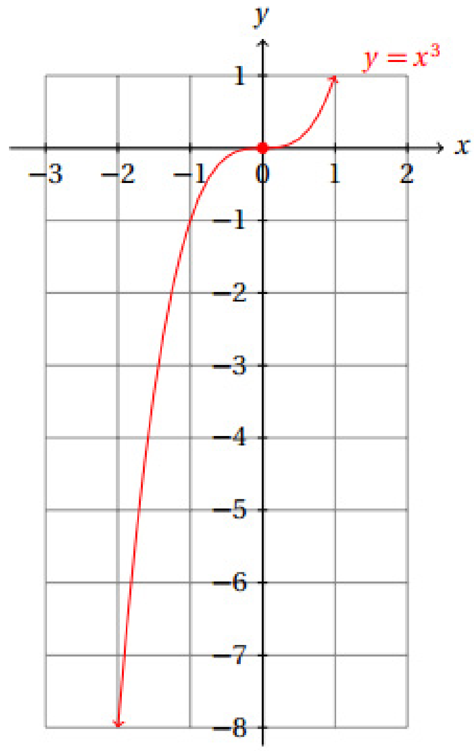
Función que puede reducirse a la forma $y=mx+b$ La gráfica de una función líneal es una línea recta.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función de la forma donde $y = ax^2 + bx + c$ La gráfica de una función cuadrática es una parábola vertical.

FUNCIÓN CÚBICA

Una función de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ donde a≠0. La siguiente gráfica corresponde a la de una función cúbica.



BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD II

BÁSICA

- **Haeussler, E. y Paul, R.,**(2007). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* (8a.ed.). México: Pearson.

  Código biblioteca UC: 519/ H14

RECOMENDADA

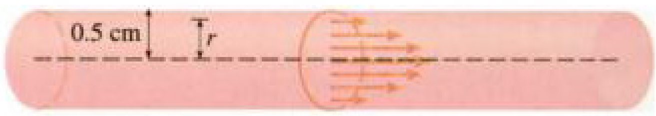
- **Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S.,** (2007).*Précalculo: Matemáticas para el cálculo(5a.* ed.). México: CengageLearning.
- Código biblioteca UC: 515 / S79
- **Demana, F., Waits, B., Foley, G. yKennedy,D.,**(2007). *Precálculo: gráficas, numérico, algebraico* (7a ed.).México:Pearson Educación.
- Código biblioteca UC: 512.1/ D56
- **Larson, R. y Hostetler, R.,** (2008).*Precálculo* (7a ed.). China:Reverté.
- Código biblioteca UC: 512.13/ L25 2008
- **Tan,S.,** (2000). *Matemáticas para administración y Economía.* México: Thomson Editores.Código biblioteca UC: 519 / T19 2009
- **Peterson, J.,** (2001).*Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica* (3a. ed.). México: CECSA.
- **Zill,D. y Dewar,J.,** (2008).*Precálculo con avances de cálculo*(4a. ed.). Colombia: McGraw Hill.

PRUEBA DE DESARROLLO

1. Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). La fórmula que da v como una función de r se llama LEY DEL FLUJO LAMINAR. Para una arteria con radio 0,5 cm se tiene:

$$v(r)=18500(0{,}25-r^2) \qquad 0 \le r \le 0{,}5$$

Determine $v(0{,}3)$. Interprete su respuesta **(2 puntos)**



2. Impuesto sobre la renta: La SUNAT evalúa el impuesto a la renta por quinta categoría (T) de acuerdo con la siguiente función de ingreso "x". **(4 puntos).**

$$T(x)=\begin{cases} 0 & si: 0 \le x \le 25\,000 \\ 0.10x & si: 25\,000 < x \le 45\,000 \\ 1700+0.18x & si: x > 45\,000 \end{cases}$$

   a) Encuentre: C(20 000); C(32 000) y C(50 000)

   b) ¿Qué representan las respuestas del inciso a?

3. Grafique la siguiente función por partes: **(4 puntos)**

$$f(x)=\begin{cases} 4 & si\ x < -2 \\ x^2 & si\ -2 \le x \le 2 \\ 6-x & si\ x > 2 \end{cases}$$

4. Sea la función base: $f(x)=\sqrt{x}$

Bosqueje la gráfica luego de realizar las siguientes transformaciones: Un desplazamiento horizontal de 3 unidades a la izquierda, luego un desplazamiento vertical de 4 unidades hacia arriba, un reflejo respecto al eje "x" y finalmente sus puntos de intersección con los ejes del plano cartesiano. **(5 puntos).**

5. Una constructora compra equipos para realizar estudio de suelos mediante sísmica; el valor del equipo es de $120 000, el tiempo de uso es de 10 años, con una depreciación de $5 000 anuales?.

   a) Encuentre una función que represente el valor del equipo luego de t años. **(2 puntos)**

   b) ¿Cuál será el valor del equipo a los 6 años? **(2 puntos)**

   c) ¿A cuánto se puede vender luego de los 10 años de uso **(1 punto)**

AUTOEVALUACION DE LA UNIDAD II

1. El costo C en dólares de producir x metros de cierta tela se expresa mediante la función: $C(x) = 1500 + 3x + 0{,}02x^2 + 0{,}0001x^3$

   a) Halle C(120); (Considerar sus respuestas con una cifra decimal) **(1 punto)**

   b) ¿Qué representa su respuesta del inciso a)? **(1 punto)**

2. Costo de Estancia en un hotel: Un Consorcio de hoteles cobra 80 soles por noche para las dos primeras noches y 60 soles por cada noche adicional. El costo total T es una función del número de noches "x" que permanece un huésped.

   a) Complete la expresión en la siguiente función definida por partes. **(2 puntos)**

$$T(x) = \begin{cases} \qquad\qquad si: 0 \le x \le 2 \\ \qquad\qquad si: x > 2 \end{cases}$$

   b) Determine T(2), y T(7) Interprete sus respuestas. **(2 puntos)**

3. Bosquejar la gráfica, dar el dominio y rango é indicar los intervalos en los que la función es creciente y decreciente. **(4 Puntos)**

$$F_{(x)} = \begin{cases} |x+4|, \; x < -3 \\ \sqrt{x+3}\,; \; -3 \le x < 1 \\ (x-1)^2\,; \; 1 \le x \end{cases}$$

4. El departamento de sistemas requiere comprar computadoras. En una de las cotizaciones dice: El precio de cada equipo es de S/. 2 000; si la compra es a partir de una docena recibe un descuento del 10% en la compra; pero si la compra es a partir de una centena, el descuento es del 15%, además un bono de S/. 1 000.

   a) Dar la función que representa el costo de x equipos. **(2 puntos)**

   b) Hallar: F(10); F(60) y F(120) **(2 puntos)**

   c) Decir lo que representa el inciso b. **(1 punto)**

5. Sea la función base: $f(x) = |x|$

Bosqueje la gráfica luego de realizar las siguientes transformaciones: Un desplazamiento horizontal de 3 unidades a la izquierda, luego un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia abajo, un reflejo respecto al eje "x" y finalmente las intersecciones con los ejes del plano. **(5 puntos).**

UNIDAD III

RECTAS, PARÁBOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES.

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD III

Al finalizar la unidad, el estudiante, representa gráficamente rectas y parábolas y resuelve sistemas de ecuaciones lineales relacionadas a un contexto real.

CONTENIDOS	ACTIVIDADES FORMATIVAS (HABILIDADES Y ACTITUDES)	SISTEMA DE EVALUACIÓN (TÉCNICAS Y CRITERIOS)
Tema N° 1 : Rectas. 1 Pendiente de una recta. 2 Ecuaciones de una recta. 3 Rectas paralelas y perpendiculares. 4 Aplicaciones y funciones lineales. **Tema N° 2: Parábolas.** 1 Función cuadrática: Gráficos. 2 Valor máximo o mínimo de una función cuadrática. 3 Modelado con funciones cuadráticas. **Tema N° 3: Sistemas de ecuaciones.** 1 Sistema de ecuaciones lineales con dos variables. 2 Sistema de ecuaciones lineales con tres variables. 3 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones.	• **Calcula e interpreta** la pendiente de una recta. • **Determina la ecuación de** una recta a partir de las coordenadas de un punto y la pendiente. • **Resuelve** ejercicios de rectas paralelas y perpendiculares de una recta. • **Resuelve** problemas utilizando rectas. • **Grafica** una función cuadrática señalando el vértice y puntos de corte con los ejes. • **Determina e interpreta** el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. • **Resuelve sistemas** de ecuaciones lineales con dos y tres variables justificando el uso de distintos métodos. • **Resuelve problemas** de contexto real con sistema de ecuaciones lineales con dos y tres variables.	**Procedimientose indicadores de evaluación permanente:** • Entrega puntual del trabajo realizado. • Calidad, coherencia y Pertinencia de contenidos desarrollados. • Prueba teórico-práctica individual. • Actividades desarrolladas en trabajo colaborativo y tutorizado. **Criterios de evaluación** • Valora y utiliza sistemáticamente conductas asociadas a la actividad matemática, tales como el orden, puntualidad, contraste, precisión, revisión sistemática y crítica de los resultados.

RECURSOS:

VIDEOS:

Tema N° 1: Rectas.

http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/libros/matematicas/geometria/pdf/geo_3.pdf

Tema N° 2: Parábolas.

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0416-02/indice.htm

Tema N° 3: Sistemas de ecuaciones.

Video 9: Sistema de ecuaciones lineales

DIAPOSITIVAS ELABORADAS POR EL DOCENTE:

Lectura complementaria:

Lectura Seleccionada N° 1

"Puntos de intersección de una recta con los ejes coordenados".

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	• Rúbrica del portafolio • Prueba mixta • Prueba de desarrollo
BIBLIOGRAFÍA (BÁSICA Y COMPLEMENTARIA)	**BASICA** HAEUSSLER Ernest y PAUL Richard. *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* . 8a.ed. México: Pearson. 2007 Código biblioteca UC: 519/ H14. **COMPLEMENTARIA** STEWART James, REDLIN Lothar y WATSON Saleem. *Précalculo: Matemáticas para el cálculo.* (5a. ed.). México: Cengage Learning. 2007 Código biblioteca UC: 515 / S79 DEMANA F., WAITS B., FOLEY G. y KENNEDY D.. *Precálculo: gráficas, numérico, algebraico* (7a ed.).México: Pearson Educación. 2007 Código biblioteca UC: 512.1/ D56 LARSON Ron y HOSTETLER Robert. *Precálculo.* 7a ed. China: Reverté. 2008. Código biblioteca UC: 512.13/ L25 2008 SOOO Tang Tan. *Matemáticas para administración y Economía.* México: Thomson. Editores. 2000. Código biblioteca UC: 519 / T19 2009 PETERSON J.. *Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica.* 3a. ed. México: CECSA. 2001 ZILL Denis G. y DEWAR Jacqueline. *Precálculo con avances de cálculo.* 4a. ed. Colombia: McGraw Hill. 2008.
RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES	KHANACADEMY (2006) [Base de datos]. Estados Unidos. Recuperado el 28 de enero de 2015, de https://es.khanacademy.org/ DITUTOR (5 de febrero 20115). Diccionario de Matemática (html). Recuperado de http://www.ditutor.com/numeros_reales/numeros_reales.html PROFESOR EN LÍNEA (6 de febrero 2015). Números Reales (html). Recuperado de http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Numeros_reales.html CURSO DE ALGEBRA (5 de febrero 2015). Números Reales (video). Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=tMHJbmUGcQk

Para el problema de la contaminación industrial, algunas personas recomiendan una solución basada en el mercado: dejar que los fabricantes contaminen, pero hacer que ellos paguen por ese privilegio. Entre mayor contaminación mayor pago o gravamen. La idea es dar a los fabricantes un incentivo para no contaminar más de lo necesario.

¿Funciona este enfoque? En la figura de abajo, la línea 1 representa el costo por tonelada de reducción de contaminación. Una compañía que contamina de manera indiscriminada puede casi siempre reducir en alguna forma su contaminación a un costo mínimo. Sin embargo, conforme la cantidad de contaminación se reduce, el costo por tonelada se eleva y eventualmente se dispara.

Esto se ilustra por medio de la línea que se eleva indefinidamente conforme las toneladas totales de contaminación producidas se aproximas a cero.

La línea 2 es un esquema de gravamen que es menos estricto con operaciones que se efectúan con limpieza, pero que cobra una cuota creciente por tonelada conforme la cantidad de contaminación total crece.

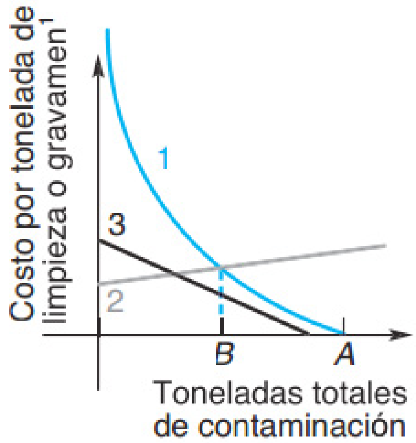
En contraste, la línea 3 es un esquema en el que los fabricantes que contamina poco pagan un gravamen alto por tonelada, mientras que los grandes contaminadores pagan menos por tonelada (pero más de manera global).

Surgen preguntas de equidad, ¿Qué tan bien funcionará cada esquema como una medida de control de contaminación?.

Al enfrentarse con un impuesto por contaminar, una compañía tiende a disminuir la contaminación mientras ahorre más en costos de impuestos que en costos por reducción de contaminación. Los esfuerzos por reducción continúan hasta que el ahorro de impuestos y los costos por reducción empiezan a equilibrarse.

LA SEGUNDA MITAD DE ESTE CAPÍTULO ESTUDIA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES.

Aquí las líneas 1 y 2 representan un sistema de ecuaciones y las líneas 1 y 3 representan un sistema alterno. Una vez que haya aprendido cómo resolver sistemas de ecuaciones, puede regresar a esta página y verificar que el esquema de la línea 2 conduce a una reducción de contaminación de una cantidad A a una cantidad B, mientras que el esquema de la línea 3 no funciona como una medida de control de contaminación, ya que deja el nivel de contaminación en el nivel A.



Fuente:

Haeussler, E. y Paul, R. (2007). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* (8a.ed.). México: Pearson.

TEMA N° 1: RECTAS.

Existen problemas del área de la Economía y de la Administración, que se resuelven mediante el planteo y resolución de modelos matemáticos. Algunos de estos modelos son ecuaciones lineales de oferta, demanda, costos, etc. Estos son casos particulares de los llamados modelos lineales.

A modo de ejemplo supongamos la siguiente situación:

- *Un fabricante de bicicletas desea conocer la relación que existe entre el precio por unidad, p, y la cantidad de bicicletas ofrecidas al mercado, x. Para ello, le solicita a un especialista un "estudio de mercado", quien luego de realizarlo, le informa que la relación entre x y p puede responder a un modelo lineal con dos variables.*

El fabricante dispone además de la siguiente información:

- *Cuando el precio unitario es $ 100 se ofrecen al mercado 150 unidades.*
- *Cuando el precio unitario es $200 se ofrecen al mercado 450 unidades.*

La pregunta que se plantea el fabricante es la siguiente:

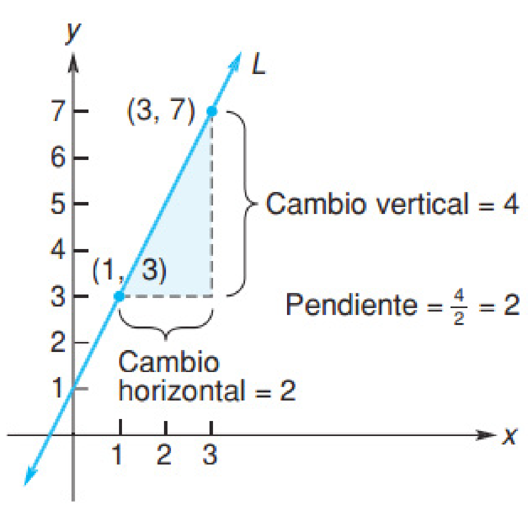
Con los datos disponibles, ¿qué cantidad corresponde ofrecer al mercado cuándo el precio unitario es $150?.

1. PENDIENTE DE UNA RECTA.

Seandos $(x_1;y_1)$y $(x_2;y_2)$ puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de la recta es:

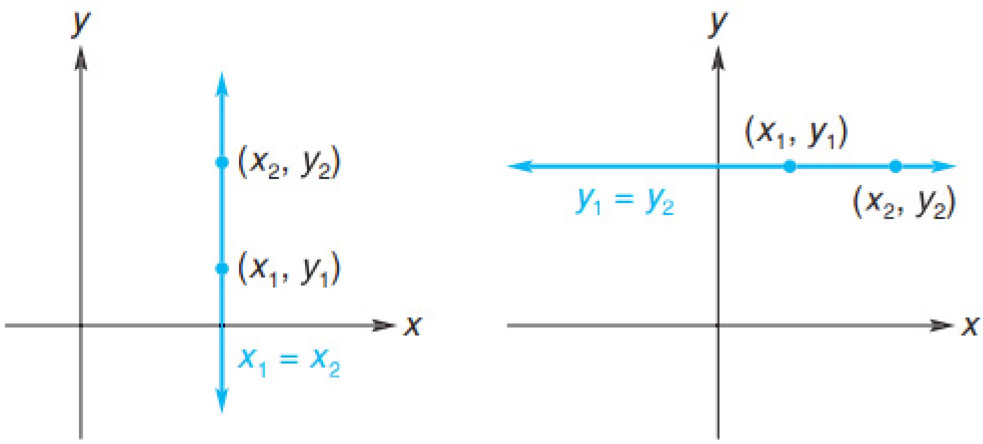
$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(\frac{Cambio\ vertical}{Cambio\ horizontal}\right)}$$

Ejm:



$$m=\frac{7-3}{3-1}=\frac{4}{2}=2\ \left(\frac{Cambio\ vertical}{Cambio\ horizontal}\right)$$

NOTA IMPORTANTE:



(a) Pendiente no definida (b) Pendiente igual a cero

2. ECUACIONES DE LA RECTA.

ECUACIONES DE LA RECTA

- Ecuación general
  $Ax+By+C=0$
  Donde $Pendiente\ m=\frac{-A}{B}$
- Ecuación punto pendiente
  $y-y_1=m(x-x_1)$
  Donde $(x_1;y_1)$ es el punto conocido
- Ecuación pendiente-intersección con el eje "y"
  $y=mx+b$
  Donde m es la pendiente y b la intersección con el eje "y"

NO OLVIDEMOS:

- La ecuación de una recta vertical es $x=a$
- La ecuación de una recta horizontal $y=b$

Ejemplos:

Por lo tanto toda igualdad de la forma $ax + by = c$, donde $a,b,c \in R$, también se puede escribir en la forma $y = mx + n$, es decir como una función, donde m es la pendiente o *coeficiente de dirección* y n es la intersección de la recta con el eje y , llamada también *coeficiente de posición.*

De esta forma, podemos afirmar que una recta está perfectamente definida si se conocen:

Dos puntos de ella

Ejemplo: Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(5, 4) y B(7, 8)

Calculemos su pendiente $m = \dfrac{8-4}{7-5} \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{2} \Leftrightarrow m = 2$

Como $y = mx + n$, considerando el punto A(5,4) con $x = 5$ e $y = 4$

Tenemos $4 = 2 \cdot 5 + n$

$4 = 10 + n$ /-10

$-6 = n$

Luego: $y = 2x - 6$ es la ecuación pedida

Un punto y su pendiente.

Ejemplo: Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, -5) y tiene pendiente -4

Como, el punto dado es A(2,-5) con $x = 2$ e $y = -5$ y el valor de la pendiente es $m=-4$

Entonces $y = mx + n$

Tenemos $-5 = -4 \cdot 2 + n$

$-5 = -20 + n$ /+20

$15 = n$

Luego: $y = -4x + 15$ es la ecuación pedida

Más ejemplos:

REFUERZA EL SIGUIENTE VIDEO, OBSERVANDO EL SIGUIENTE VIDEO

http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/libros/matematicas/geometria/pdf/geo_3.pdf

Relaciona el contenido del video con la ejecución de los diferentes ejercicios realizados y elabora tus conclusiones.

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 1

1. Supongamos que se tienen 4 rectas L_1 , L_2 , L_3 y L_4 de modo que :

L_1 pasa por los puntos: A(1, 2) y B(2, 1)

L_2 pasa por los puntos: P(1, 2) y Q(5,2)

L_3 pasa por los puntos: D(1,2) y E(1,-5)

L_4 pasa por los puntos: R(1,2) y T(-2,-6)

2. Grafica cada una de éstas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

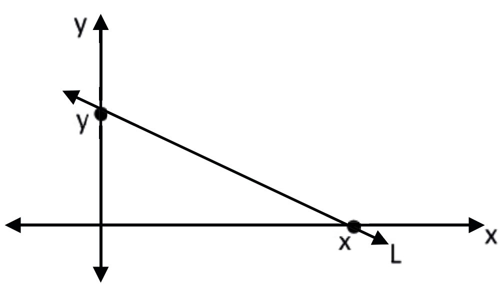
3. Calcula la pendiente de cada una de éstas rectas.

LECTURA SELECCIONADA Nº 1:

"PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON LOS EJES COORDENADOS"

PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON LOS EJES COORDENADOS

Según la gráfica que se muestra a continuación, los puntos donde la recta L corta al eje x son de la forma (x, 0) y donde corta al eje y , de la forma (0, y).



Ejemplo:

Hallar la intersección de la recta $2x - 3y = 12$ con los ejes coordenados:

- Intersección con el eje x : se hace $y = 0$

  Resulta: $2x = 12$

  de donde : $x = 6$

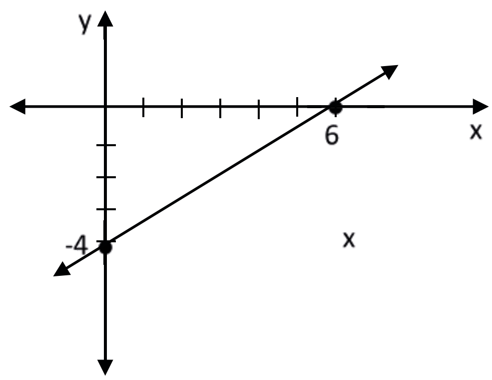
  Así la recta corta al eje x en el punto (6, 0)

- Intersección con el eje y : se hace $x = 0$

  Resulta: $-3y = 12$

  de donde : $y = -4$

  Así la recta corta al eje y en el punto (0, -4)



Actividad

Dadas las siguientes rectas encuentra la intersección de ellas con los ejes coordenados:

1. $x - 2y = 2$

3. $3x - 6y = 18$

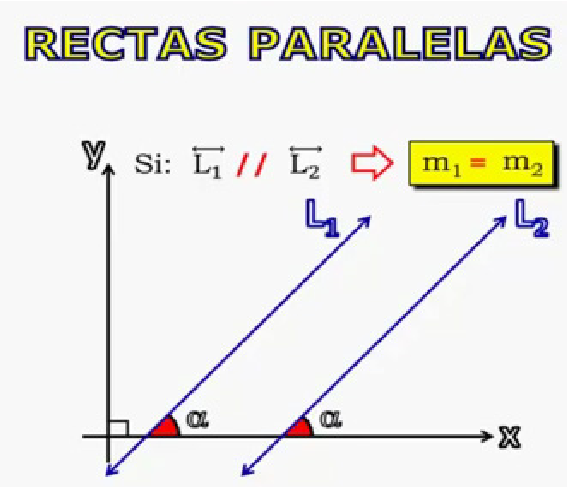
2. $x + \frac{1}{2}y = 1$

4. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1$

3. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o si ambas son verticales.



Ejemplo:

Hallar una recta paralela a la recta x + 2 y + 3 = 0, que pasen por el punto A(3;5).

Primeramente sabemos que las rectas que debemos determinar pasan por el punto dado A (3; 5). Pero con un solo punto no podemos hallar las ecuaciones de las rectas que nos piden. (Recuerden que por un punto pueden pasar infinitas rectas). Necesitamos otro dato: Las rectas que debemos hallar tienen una relación con la recta dada x + 2y + 3 = 0. Una de las rectas es paralela.

- **Para el caso de la recta paralela a la recta dada: recordemos que cuando las rectas son paralelas sus pendientes son iguales. Por lo tanto, calculemos primeramente la pendiente de la recta:**

$$m = \frac{-A}{B} = \frac{-1}{2}$$

Si conocemos que la recta pasa por A (3; 5) y que tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ podemos aplicar la fórmula para determinar la ecuación de la recta dados un punto y su pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituyendo y linealizando tenemos:

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

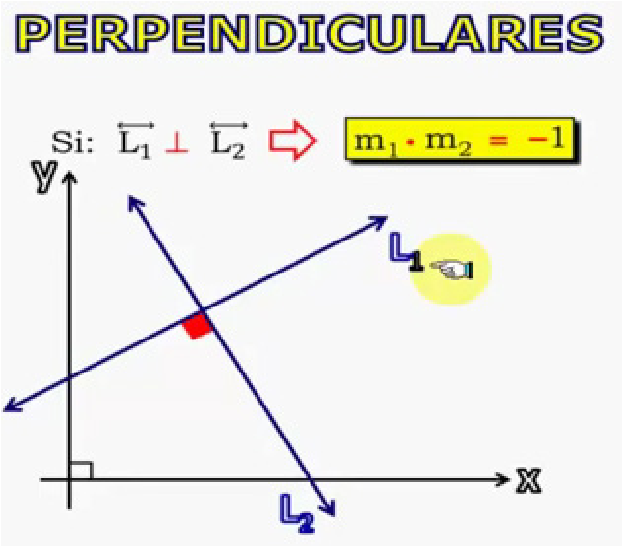
Por lo tanto la ecuación general de la nueva recta es: $x + 2y - 13 = 0$

Rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si,

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Además, una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.



Ejemplo:

Hallar una recta perpendicular a la recta x + 2 y + 3 = 0, que pasen por el punto A(3;5).

Primeramente sabemos que las rectas que debemos determinar pasan por el punto dado A (3; 5). Pero con un solo punto no podemos hallar las ecuaciones de las rectas que nos piden. (Recuerden que por un punto pueden pasar infinitas rectas). Necesitamos otro dato: Las rectas que debemos hallar tienen una relación con la recta dada x + 2y + 3 = 0. Una de las rectas es perpendicular.

- **Para el caso de la recta perpendicular a la recta: recordemos que cuando las rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a -1.**

$$m_r \cdot m_s = -1$$

$$-\frac{1}{2} \cdot m_s = -1 \quad \text{Entonces} \quad m_s = 2$$

Por lo tanto conociendo un punto y la pendiente de la recta que queremos determinar:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Por lo tanto: $2x - y - 1 = 0$

4. APLICACIONES Y FUNCIONES LINEALES.

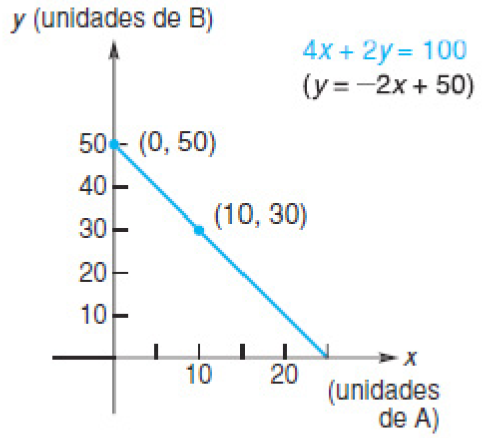
Muchas situaciones de la economía pueden describirse utilizando rectas, como lo muestra ejemplo 1.

Ejemplo 1(Niveles de producción)

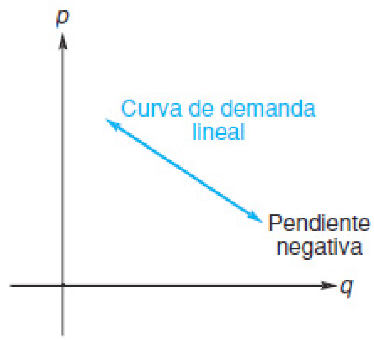
Suponga que un fabricante utiliza 100 libras de material para hacer los productos A y B que requieren de 4 y 2 libras de material por unidad, respectivamente, entonces todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de x y y que satisfacen la ecuación: $4x + 2y = 100$ donde $x,y \geq 0$.

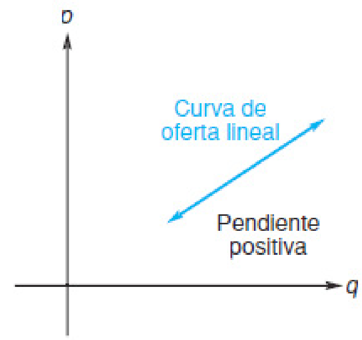
Por tanto, los niveles de producción de A y B están relacionados linealmente. Al resolver para se obtiene: $y=-2x+50$ (Forma pendiente-ordenada al origen).

De modo que la pendiente es -2. La pendiente refleja la tasa de cambio del nivel de producción de B con respecto al de A. Por ejemplo si se produce una unidad adicional de A, se requerirán 4 libras más de material, de lo que resultan $\frac{4}{2} = 2$ unidades menos de B. Por lo tanto cuando aumenta en una unidad, el valor correspondiente de disminuye en 2 unidades. Para hacer el bosquejo de la gráfica de $y=-2x + 50$ podemos utilizar la intersección con el eje (0; 50) y el hecho de que cuando $x=10$ $y=30$. .



Ahora centraremos la atención en las curvas de oferta y de demanda que son líneas rectas; se les denomina curvas de oferta lineal y de demanda lineal. Tales curvas tienen ecuaciones en las que "p" y "q" están relacionadas de manera lineal. Puesto que una curva de demanda por lo general desciende de izquierda a derecha, una curva de demanda lineal tiene pendiente negativa. Sin embargo, la pendiente de una curva de oferta lineal es positiva, ya que la curva asciende de izquierda a derecha.





Ejemplo 2: Determinación de una ecuación de demanda

Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 unidades, cuando el precio es de 58 soles por unidad y de 200 unidades a un precio de 51 soles cada una. Determinar la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

RESOLUCION:

La pendiente de la recta que pasa por (100; 58) y (200; 51) es:

$$m = \frac{58 \quad 51}{100 - 200} = \frac{-7}{100}$$

Una ecuación de la recta (forma punto-pendiente) es:

$$p - 58 = \frac{-7}{100}(q - 100)$$

Al simplificar se obtiene la ecuación de demanda:

$$p = \frac{-7}{100}q + 65$$

Fuente:

Haeussler, E. y Paul, R. (2007). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* (8a.ed.). México: Pearson

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 2

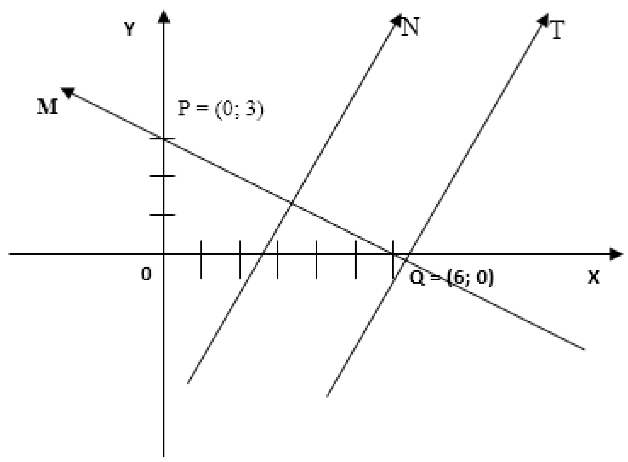
Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Determinar los valores de R para que las rectas R1 y R2 de ecuaciones $(1 - R)x - 10y + 3 = 0$ y $(m + 2)x + 4y - 11m - 18 = 0$ sean:

a) perpendiculares

b) paralelas

2. Dado el siguiente gráfico, determinar las ecuaciones de las rectas M, N y T sabiendo que T es perpendicular a M y paralela a N.



3. Determinar y de manera que la recta pasa por (-4, -3) y (8, y) sean paralela a la recta que pasa por (4,-4) y (3, 5).

4. Determinar y de manera que la recta que pasa por (-2, -1) y (10, y) sea perpendicular a la recta que pasa por (6, -2) y (5, 7).

5. Escribir la recta que pasa por (8, -2) y que es perpendicular a la recta $5x - 3y = 7$.

TEMA N° 2: PARÁBOLAS.

1. FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Una función cuadrática es una función f de la forma:

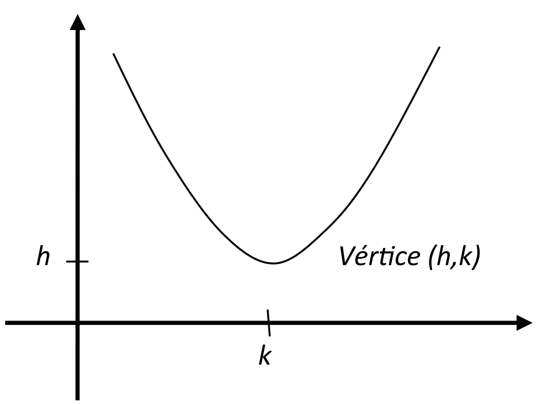
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$

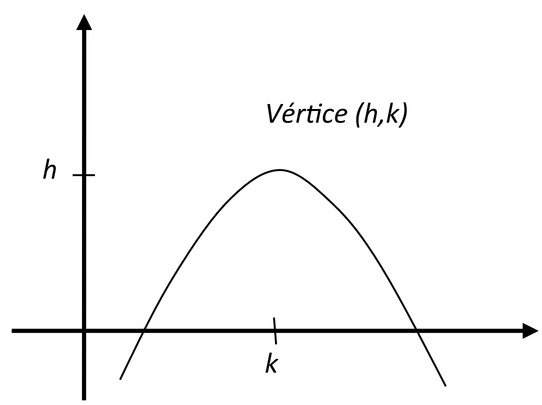
Una función cuadrática se puede expresar en la forma estándar.

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Completando cuadrados. La gráfica de f es una parábola con vértice V(h, k); la parábola se abre hacia arriba si $a>0$ o hacia abajo si $a<0$.



$f(x) = a(x-h)^2 + k, \ a>0$



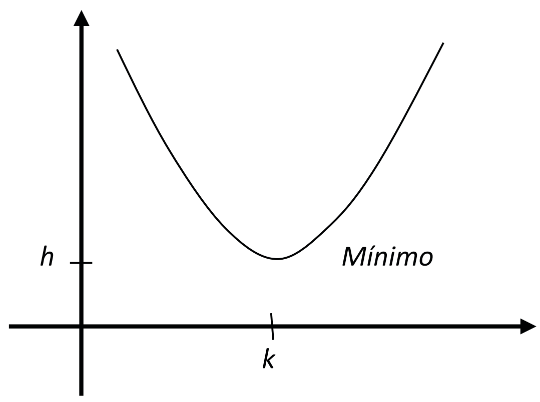
$f(x) = a(x-h)^2 + k, \ a<0$

2. VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

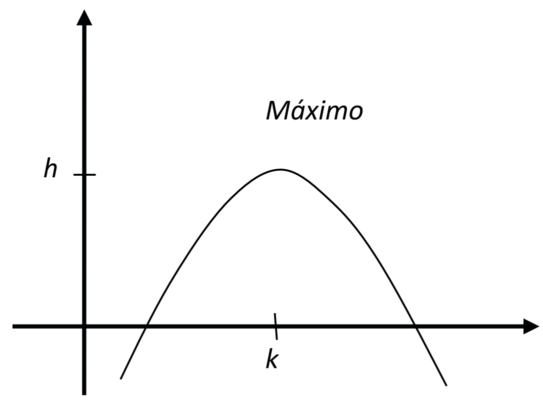
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a>0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$

Si $a<0$, entonces el valor máximo de f es $f(h) = k$



$f(x) = a(x-h)^2 + k, \ \ a>0$



$f(x) = a(x-h)^2 + k, \ \ a<0$

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática ocurre en: $x = -\dfrac{b}{2a}$

Si a>0, entonces el valor mínimo es $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

Si a<0, entonces el valor máximo es $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

Ejemplos:

Resolveremos función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$

1. Exprese f en la forma estándar:

Solución:

Para expresar esta función cuadrática en la forma estándar, se completa el cuadrado.

$f(x) = -x^2 + x + 2$

$= -(x^2-x) + 2$ Factorizamos -1 de los términos en x

$= -(x^2-x+1/4) + 2 - (-1)1/4$ Complete el cuadrado: sume ¼ dentro del paréntesis, reste (-1)1/4 fuera.

$= -(x - ½)^2 + 9/4$ Factorizando y simplificando.

2. Bosqueje la gráfica y determine el valor máximo de f

Solución:

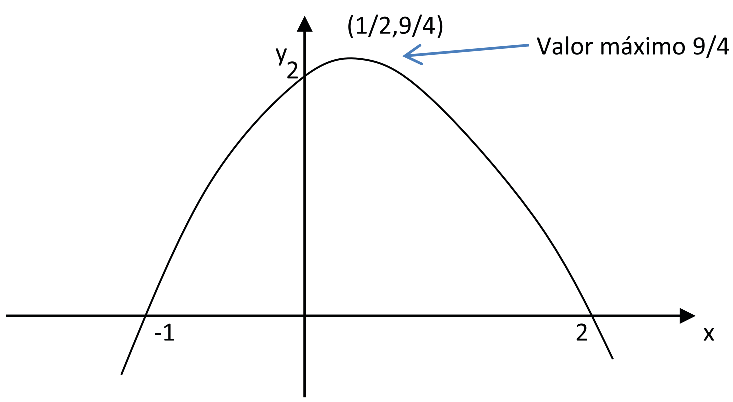
De la forma estándar se puede observar que la gráfica es una parábola que abre hacia arriba y tiene vértice (1/2, 9/4). Como ayuda para trazar la gráfica, se encuentran las intersecciones. Las intersecciones y es f(0)=2. Para hallar las intersecciones con x, se establece f(x) = 0 y se factoriza la ecuación resultante.

$$-x2 + x + 2 = 0$$

$$-(x2 - x - 2) = 0$$

$$-(x-2)(x+1) = 0$$

Así las intersecciones x son x=2 y x =-1. La gráfica es el siguiente:



Puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$

COMPLEMENTA TU I NFORMACION TEORICA CON LA INFORMACION DEL SIGUIENTE VIDEO:

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0416-02/indice.htm
Graficas de funciones cuadráticas

SE CONLUYE ELABORANDO CONCLUSIONES PARA ESTABLECER LAS VENTAJAS DE AMBOS, DOCUMENTOS.

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 3

1. Se da una función cuadrática

I. Exprese la función cuadrática en la forma estándar.

II. Halle su vértice y sus intersecciones x y y

III. Bosqueje la gráfica

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$

b) $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 8$

d) $f(x) = 5x^2 + 14x - 5$

2. Se da una función cuadrática

I. Exprese la función cuadrática en la forma estándar.

II. Bosqueje su gráfica

III. Halle su valor máximo o mínimo

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = x + x^2$

c) $f(x) = 3 - 4x - 4x^2$

d) $f(x) = 2 - 4x - x^2$

3. Halle el valor máximo o mínimo de la función.

a) $f(t) = 200 - 49t - 4t^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x - 6$

c) $f(x) = -\dfrac{x^2}{5} + 2x - 7$

d) $f(x) = 2x(x-4) + 8$

3. MODELADO CON FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Muchos de los procesos estudiados en las ciencias físicas y sociales requieren entender como varía una cantidad respecto a otra. Hallar una función que describe la dependencia de una cantidad en otra se llama modelado.

Los pasos para modelar una función son las siguientes:

1. Exprese el modelo en palabras. Identifique la cantidad que quiere modelar y exprésala, en palabras, como una función de otras cantidades en el problema.
2. Elija la variable. Identifique las variables empleadas para expresar la función en el paso 1. Asigne un símbolo, como x, a una variable y exprese las otras variables en términos de ese símbolo.
3. Establezca el modelo. Exprese la función en el lenguaje del algebra al escribirla como una función de la única variable elegida en el paso 2.
4. Use el modelo. Emplee la función para contestar las preguntas planteadas en el problema.

Ejemplo:

Un fabricante elabora una lata de metal que contiene 1 L (litro) de aceite. ¿Qué radio reduce al mínimo la cantidad de metal en la lata?

Solución:

El modelo que se desea es una función que da el área de superficie de la lata.

- **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que para una lata cilíndrica

Área superficial = área de la parte superior y el fondo + área de los lados

- **Elija la variable**

Hay dos cantidades variables: radio y altura. Puesto que la función que se desea depende del radio, sea r = radio de la lata

A continuación, se debe expresar la altura en términos del radio r. Como el volumen de una lata cilíndrica es $V = \pi r^2 h$ y el volumen debe ser 1000 cm^3, se tiene:

$\pi r^2 h = 1000$ El volumen de la lata es 1000 cm^3

$h = \frac{1000}{\pi r^2}$ Despeje h

Ahora se pueden expresar las áreas de la parte superior, el fondo y los lados en términos de r solamente.

En palabras	**En algebra**
Radio de la lata	r
Altura de la lata	$\frac{1000}{\pi r^2}$

Área de la parte superior y el fondo	$2\pi r2$
Área de los lados ($2\pi rh$)	$2\pi r$

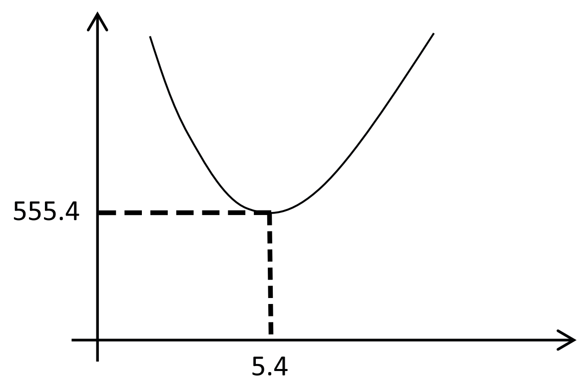
El modelo es la función S que proporciona el área de la superficie de la lata como una función del radio r.

Área de superficie = área de la parte superior y el fondo + área de los lados.

$$S(r) = 2\pi r2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$S(r) = 2\pi r2 + \left(\frac{2000}{r}\right)$$

Se emplea el modelo para hallar el área de la superficie mínima de la lata. Con ayuda de un graficador se realiza lo siguiente:



Por lo tanto el radio que reduce al mínimo la cantidad de metal en la lata es 5.4 cm.

ACTIVIDADES:

1. **Área.** La longitud de un lote de edificación rectangular es tres veces su ancho. Encuentre una función que modela su área en términos de su ancho w.

2. **Volumen.** Una caja rectangular tiene una base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen V en términos de su ancho w.

TEMA N° 3: SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. SISTEMA DE ECUACIONES CON DOS VARIABLES.

Una ecuación de la forma $ax + by = c$ se dice ecuación lineal con dos incógnitas e indeterminada, es decir tiene infinitos pares (x,y) como solución.

Ejemplo: En la ecuación $x + 2y = 7$ se tiene que.

para $y = 1$, $x = 5$ de donde un par solución sería $(5,1)$

para $y = -3$, $x = 13$ de donde otro par solución sería $(13,-3)$

para $y = 2$, $x = 3$ de donde otro par solución sería $(3 , 2)$

y así sucesivamente, tendríamos infinitos pares solución de la ecuación.

Si se forma otra ecuación de las mismas incógnitas y al mismo tiempo, se dice que se forma un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, es decir tienen la forma:

$$\boxed{\begin{array}{c} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}}$$

Para resolver estos sistemas de ecuaciones existen varios métodos algebraicos.

1°) METODO DE ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN:

Consiste en despejar de una de las ecuaciones, una de las incógnitas en función de la otra y sustituir este valor en la otra ecuación.

Ejemplo:

$$\boxed{\begin{array}{c} 3x + 4y = 31 \\ 4x + 6y = 44 \end{array}}$$

Se despeja "x" en la primera ecuación: $x = \frac{31 - 4y}{3}$ Se **sustituye** en la segunda ecuación: $4\,\frac{(31 - 4y)}{3} + 6y = 44$

Se multiplica por 3 y se resuelve el paréntesis: $124 - 16y + 18y = 132$

De donde $2y = 8$ $y = 4$

Se sustituye este valor en $x = \dfrac{31 - 4y}{3}$ quedando $x = 5$

Así el par solución del sistema dado es (5,4) ¿Cómo comprobar que esto es cierto?.

2°) ELIMINACIÓN POR IGUALACIÓN:

Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar los valores de la variable elegida.

Ejemplo :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{3x - 2y = 13} \\ \mathbf{2x + 3y = 0} \end{array}}$$

Eligiendo la variable x:

- en la primera ecuación: $x = \dfrac{2y + 13}{3}$

Ambos valores de "x" son iguales

- en la segunda ecuación: $x = \dfrac{-3y}{2}$

Luego $\dfrac{2y + 13}{3} = \dfrac{-3y}{2}$; despejando y se obtiene $\mathbf{y = -2}$

Reemplazando en la ecuación $2x + 3y = 0$,

se tiene $2x + 3 \cdot -2 = 0$

$2x - 6 = 0$

$2x = 6$

de donde $\mathbf{x = 3}$

Así, el par solución del sistema es **(3,-2)**. ¡¡ Compruébalo!!

3°) ELIMINACIÓN POR REDUCCIÓN:

Consiste en multiplicar ambas ecuaciones por valores de tal manera que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales y con signos distintos; en seguida se suman las ecuaciones resultantes.

Ejemplo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{9x - 8y = 32} & \mathbf{\cdot -3} \\ \mathbf{7x - 6y = 26} & \mathbf{-4} \end{array}}$$

Resulta

$$\boxed{\begin{aligned} -27x + 24y &= -96 \\ 28x - 24y &= 104 \end{aligned}}$$

Sumando, se obtiene: $\mathbf{x = 8}$

Reemplazando en la ecuación $9x - 8y = 32$,

se tiene $9\text{-}8 - 8y = 32$

$72 - 8y = 32$

$-8y = -40$

de donde $\mathbf{y = 5}$

Así, el par solución del sistema es **(8,5).** ¡¡ Compruébalo!!

4°) REGLA DE CRAMER:

Dado el sistema.

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}}$$

al resolverlo por cualquiera de los métodos anteriores obtenemos para sus incógnitas los siguientes valores:

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \quad ; \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

Como el numerador y denominador de las soluciones del sistema son diferencias de dos productos, podemos expresar estas soluciones como determinantes de orden dos.

Al resolver determinante obtendrás un número real.

Ahora bien, un determinante de orden dos se resuelve

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Diagonal Diagonal

Luego: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

Observa que el determinante de ambos denominadores es el mismo, éste se llama **determinante principal** y sus elementos son los coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones. Se designa por Δp.

Así: $\Delta p = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Entonces, Δx; Δy serán respectivamente: $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Finalmente: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta p}$; $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta p}$

Ejemplo:

$$\boxed{\begin{aligned} 5x - 8y &= 42 \\ 3x + 2y &= 32 \end{aligned}}$$

Calculamos los tres determinantes:

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - (-24) = 34$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 42 & -8 \\ 32 & 2 \end{vmatrix} = 84 - (-256) = 340 \quad \text{y} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 42 \\ 3 & 32 \end{vmatrix} = 160 - 126 = 34$$

Luego: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta p} = \dfrac{340}{34} = 10$; $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta p} = \dfrac{34}{34} = 1$

Así, el par solución del sistema es **(10,1)**. ¡¡ Compruébalo!!

4. SISTEMA DE ECUACIONES CON TRES VARIABLES.

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

El **método de Gauss** consiste en utilizar el **método de reducción** de manera que e**n cada ecuación tengamos una incógnita menos que en la ecuación precedente.**

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1º Ponemos como **primera ecuación** la que tenga el **coeficiente de x igual a 1 ó -1.** En caso de que no fuera posible lo haremos con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

2º Hacemos **reducción con la 1ª y 2ª ecuación,** para **eliminar** el término en **x de la 2ª ecuación.** Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:

E'₂ = E₂ – 3E₁

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = -3 \\ \hline -y + 4z = -2 \end{array}$$

3º Hacemos lo mismo con la ecuación **1ª y 3ª ecuación,** para **eliminar** el término en **x.**

E'₃ = E₃ – 5E₁

$$\begin{array}{r} 5x + 3y + 4z = 2 \\ -5x - 5y + 5z = -5 \\ \hline -2y + 9z = -3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ -2y + 9z = -3 \end{cases}$$

4º Tomamos las ecuaciones **2ª y 3ª,** trasformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y.**

E''₃ = E'₃ – 2E'₂

$$\begin{array}{r} -2y + 9z = -3 \\ 2y - 8z = 4 \\ \hline z = 1 \end{array}$$

5º Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

6º Encontrar las soluciones ahora es fácil.

$z = 1$

$-y + 4 \cdot 1 = -2 \quad y = 6$

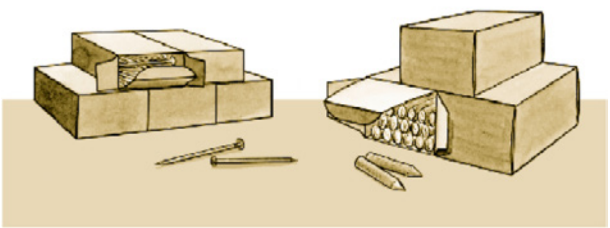
$x + 6 - 1 = 1 \qquad x = -4$

5. APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES.

A continuación veremos algunos problemas que se resuelven con sistemas de ecuaciones y algunos ejemplos de cómo plantear los sistemas para poder resolver fácilmente los problemas.

Ejemplos

1. Juan pagó $50 por 3 cajas de tachuelas o taquetes y 5 cajas de clavos. Pedro compró 5 cajas de taquetes y 7 de clavos y tuvo que pagar $74. ¿Cuál es el precio de cada caja de taquetes y de cada caja de clavos?



Para plantear la solución de este problema, identificamos en primer lugar aquello sobre lo que se nos pregunta, es decir: ¿qué debemos averiguar? En este caso debemos encontrar dos cantidades, el precio de una caja de tachuelas y el precio de una caja de clavos.

En segundo lugar debemos identificar las relaciones (o condiciones) que sobre esas dos cantidades se plantean en el problema. Si llamamos x al precio de una caja de tachuelas y llamamos y al precio de una caja de clavos, podemos expresar lo que gastó Juan a través de una ecuación y lo que gastó Pedro por medio de otra. Para ello analicemos la información que nos presenta el problema y veamos cómo expresar algebraicamente las relaciones.

Información	Expresión algebraica
Precio de una caja de taquetes. Precio de 3 cajas de taquetes. Precio de 5 cajas de taquetes.	x pesos $3x$ pesos $5x$ pesos
Precio de una caja de clavos. Precio de 5 cajas de clavos. Precio de 7 cajas de clavos.	y pesos $3y$ pesos $5y$ pesos
Importe de la compra de Juan. Importe de la compra de Pedro.	$3x + 5y = 50$ $5x + 7y = 74$

Ahora ya podemos plantear y resolver el sistema:

$3x + 5y = 50$

$5x + 7y = 74$

Como los coeficientes son todos positivos, sabemos que debemos restar para eliminar una de las incógnitas y como todos son números distintos debemos efectuar primero las multiplicaciones convenientes. Por ejemplo si queremos eliminar la **x**, multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por 5 y los dos miembros de la segunda por 3 (si se quiere eliminar la **y,** se debe multiplicar la primera ecuación por 7 y la segunda por 5).

-	$15x$ +	$25y$ =	250
	$15x$ +	$21y$ =	222
	0 +	$4y$ =	28

Entonces y = =7, ahora sustituimos y por ese valor en la primera ecuación y obtenemos el valor de x (también podríamos haber sustituido en la segunda ecuación):

$3x + 5y = 50$

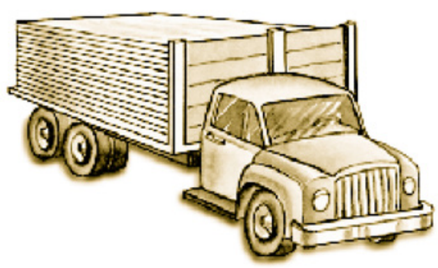
$3x + 5(7) = 50$

$3x = 50 - 35$

x = = 5

Podemos entonces decir que la caja de tachuelas cuesta $5 y la de clavos cuesta $7.

2. Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?.



Si llamamos **x** a la cantidad de viajes que realizó el primer camión y **y** a la cantidad de viajes que realizó el segundo camión, podemos expresar algebraicamente la información que nos presenta el problema:

Información	Expresión algebraica
Cantidad de viajes del primer camión. Madera transportada por el primer camión.	x $3x$
Cantidad de viajes del segundo camión. Madera transportada por el segundo camión.	y $4y$
Total de madera transportada. Total de viajes.	$3x + 4y = 80$ $x + y = 23$

El sistema de ecuaciones es entonces:

$3x + 4y = 80$

$x + y = 23$

Usted puede resolver el sistema y encontrar los valores de **x** y de **y**, para concluir que el primer camión realizó 12 viajes y el segundo 11.

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 4

Plantee el sistema que permite resolver cada uno de los siguientes problemas y resuélvalo.

1. Jovita y Felipe hacen paletas de chocolate para vender.

La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta $5.00 y para una paleta chica $3.00. Si disponen de $570.00 y quieren hacer 150 paletas, ¿cuántas paletas de cada tamaño podrán hacer?

2. El costo de las entradas a una función de títeres es de $30 para los adultos y $20 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron $5930, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a la función el sábado?.

REFUERZA TUS CONOCIMIENTOS OBSERVANDO Y ANALIZANDO LOS CONTENIDOS DEL SIGUIENTE VIDEO.

http://juanmanuellopezpazos.appspot.com/proyectos/web/aplicaciones/solucionadorSistemasEcuacionesLineales.html

Graficas de funciones cuadráticasSolucionador de sistemas de ecuaciones

COMPARA AMBOS CONTENIDOS Y ELABORA TUS PROPIAS CONCLUSIONES

VIDEOS

Video 9: Sistema de ecuaciones lineales

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

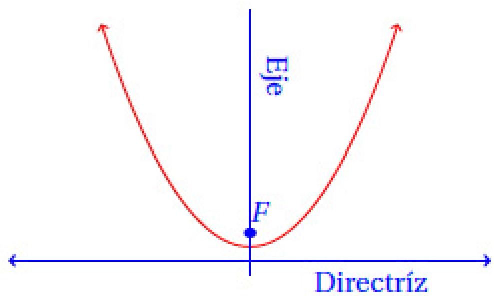
Título o Tema: Sistema de ecuaciones lineales
URL: https://youtu.be/mdb4PMaSu0
Duración: 8:04 m
Autor(a): D.R.
Año: 2013
Licencia: YouTube estándar.

GLOSARIO DE LA UNIDAD III

P

PARÁBOLA

Curva plana generada por un punto que se mueve de manera que se mantiene a la misma distancia de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

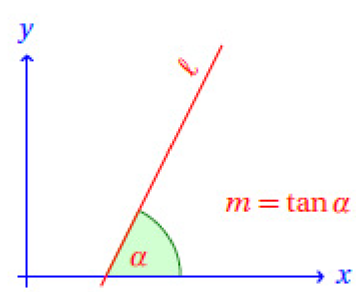


PENDIENTE

La pendiente m de una recta que pasa por los puntos $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$ se define como el cociente:

$$m = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

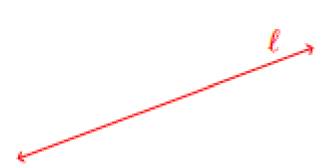
Geométricamente, la pendiente indica cuantas unidades avanza verticalmente la gráfica por cada unidad avanzada en el sentido del eje x. La pendiente de una recta es igual a la tangente que ésta forma con el eje horizontal:



R

RECTA

Línea que no cambia de dirección y se denota por L. Frecuentemente se utiliza la palabra línea como sinónimo de recta. Una línea también puede ser curva. Por ejemplo una circunferencia también es una línea, pero no es recta, pues cambia constantemente de dirección.



S

SISTEMA DE ECUACIONES

Conjunto de varias ecuaciones que deben resolverse simultáneamente. La solución del sistema de ecuaciones es el conjunto de valores que las reducen a todas las ecuaciones a igualdades verdaderas. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

Tiene por solución $x = 6$, $y = 4$ porque al sustituir estos valores en las ecuaciones cada una se reduce a una igualdad verdadera.

Los sistemas de ecuaciones se clasifican de acuerdo al tipo de ecuaciones que la componen. En el ejemplo dado, el sistema de ecuaciones es línea, pues todas las ecuaciones que lo componen son lineales.

V

VÉRTICE

Punto característico de una figura geométrica donde se intersecan dos lados o varias (dos o más) aristas. Algunas figuras que tienen vértices son los polígonos, algunas de las cónicas (elipse, parábola e hipérbola), los sólidos, etc.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD III

BÁSICA

- HAEUSSLER, E. Y PAUL, R.,(2007). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* (8a.ed.). México: Pearson.
- Código biblioteca UC: 519/ H14

RECOMENDADA

- STEWART, J., REDLIN, L. Y WATSON, S., (2007).*Précalculo: Matemáticas para el cálculo* (5a. ed.). México: CengageLearning.
- Código biblioteca UC: 515 / S79
- DEMANA, F., WAITS, B., FOLEY, G. YKENNEDY,D.,(2007). *Precálculo: gráficas, numérico, algebraico* (7a ed.).México:Pearson Educación.
- Código biblioteca UC: 512.1/ D56
- LARSON, R. Y HOSTETLER, R., (2008).*Precálculo* (7a ed.). China:Reverté.
- Código biblioteca UC: 512.13/ L25 2008
- TAN,S., (2000). *Matemáticas para administración y Economía.* México: Thomson Editores.Código biblioteca UC: 519 / T19 2009
- PETERSON, J., (2001).*Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica* (3a. ed.). México: CECSA.
- ZILL,D. Y DEWAR,J., (2008).*Precálculo con avances de cálculo* (4a. ed.). Colombia: McGraw Hill.

UNIDAD IV

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

DIAGRAMA DE PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD IV

- Al finalizar la unidad, el estudiante, relaciona situaciones de su entorno y las modela expresándolas como función exponencial o logarítmica.

CONTENIDOS	ACTIVIDADES FORMATIVAS (HABILIDADES Y ACTITUDES)	SISTEMA DE EVALUACIÓN (TÉCNICAS Y CRITERIOS)
Tema N° 1 : Funciones exponenciales. 1 Funciones exponencial. Definición y gráfica. 4 Interés compuesto. Crecimiento poblacional. **Tema N° 2: Funciones logarítmicas.** 1 Funciones logarítmicas. Definición y gráfica. 2 Propiedades de los logaritmos 3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. **Tema N° 3: Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas.** 1 Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas	• Reconoce y grafica una función exponencial. • Resuelve ejercicios y aplicaciones de función exponencial • Reconoce, define y grafica una función logarítmica. • Aplica propiedades de los logaritmos en la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. • Reconoce y resuelve problemas sobre modelado, aplicando funciones exponenciales y logarítmicas.	**Procedimientose indicadores de evaluación permanente:** • Procedimientos de indicadores de evaluación permanente: • Entrega puntual del trabajo realizado. • Calidad, coherencia y Pertinencia de contenidos desarrollados. • Prueba teórico-práctica individual. • Actividades desarrolladas en trabajo colaborativo y tutorizado. **Criterios de evaluación de capacidades de respuesta:** • Grafica una función exponencial. • Ejecuta aplicaciones de función exponencial. • Resuelve ecuaciones logarítmicas y exponenciales. • Aplica funciones exponenciales y logarítmicas al resolver problemas sobre modelado.

RECURSOS:

VIDEOS:

Tema N° 1: Funciones exponenciales Número e

Video 10: Funciones exponenciales. Número e

Tema N° 2: Funciones logarítmicas

Video 11: Funciones logarítmicas

Tema N° 3: Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Video 12: Aplicación de la funciones logarítmicas

DIAPOSITIVAS ELABORADAS POR EL DOCENTE:

Lectura complementaria:

Lectura Seleccionada N° 1

"El número e"

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	• Prueba de desarrollo
BIBLIOGRAFÍA (BÁSICA Y COMPLEMENTARIA)	**BASICA** HAEUSSLER Ernest y PAUL Richard. *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* . 8a.ed. México: Pearson. 2007 Código biblioteca UC: 519/ H14. **COMPLEMENTARIA** STEWART James, REDLIN Lothar y WATSON Saleem. *Précalculo: Matemáticas para el cálculo.* (5a. ed.). México: Cengage Learning. 2007 Código biblioteca UC: 515 / S79 DEMANA F., WAITS B., FOLEY G. y KENNEDY D.. *Precálculo: gráficas, numérico, algebraico* (7a ed.).México: Pearson Educación. 2007 Código biblioteca UC: 512.1/ D56 LARSON Ron y HOSTETLER Robert. *Precálculo.* 7a ed. China: Reverté. 2008. Código biblioteca UC: 512.13/ L25 2008 SOOO Tang Tan. *Matemáticas para administración y Economía.* México: Thomson. Editores. 2000. Código biblioteca UC: 519 / T19 2009 PETERSON J.. *Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica.* 3a. ed. México: CECSA. 2001 ZILL Denis G. y DEWAR Jacqueline. *Precálculo con avances de cálculo.* 4a. ed. Colombia: McGraw Hill. 2008.
RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES	KHANACADEMY (2006) [Base de datos]. Estados Unidos. Recuperado el 28 de enero de 2015, de https://es.khanacademy.org/ DITUTOR (5 de febrero 20115). Diccionario de Matemática (html). Recuperado de http://www.ditutor.com/numeros_reales/numeros_reales.html PROFESOR EN LÍNEA (6 de febrero 2015). Números Reales (html). Recuperado de http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Numeros_reales.html CURSO DE ALGEBRA (5 de febrero 2015). Números Reales (video). Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=tMHJbmUGcQk

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Al igual que los virus biológicos se propagan a través del contacto entre organismos, también los virus de computadoras se propagan cuando las computadoras interactúan por medio de redes o correo electrónico. Mientras los científicos estudian cómo luchar contra los virus de computadora, que causan mucho daño por la forma en que borran o alternan archivos, también diseñan modelos matemáticos de la rapidez con que se propagan los virus.

Por ejemplo, el viernes 26 de marzo de 1999 se reportó el primer caso del virus conocido como Melissa; para el lunes 29 de marzo. Melissa había alcanzado a más de 100 000 computadoras.

Las funciones exponenciales que este capítulo estudian en detalle, proporcionan un modelo plausible. Considere un virus de computadora que se oculta en un archivo adjunto de correo electrónico; una vez que el archivo baja, de manera automática se envía un mensaje con un archivo adjunto similar a todas las direcciones en la libreta de direcciones de correo electrónico de la computadora anfitriona. Si la libreta de direcciones común contiene 20 direcciones y si el usuario común de computadora revisa su correo electrónico una vez por día, entonces un virus en una sola máquina habrá infectado a 20 máquinas en un día, $20^2 = 40020^2 = 400$ máquinas al cabo de dos días, $20^3 = 8000$ después de tres días y en general, después de t días, el número N de computadoras infectadas estará dado por la función exponencial $N(t) = 20^t$.

Este modelo supone que todas las computadoras implicadas están ligadas unas con otras, vía su lista de direcciones, en un solo grupo bien conectado.

Los modelos exponenciales son más precisos para pequeños valores de t; este modelo en particular, ignora el descenso que ocurre cuando la mayoría de los correos electrónicos iniciales van a computadoras que ya están infectadas; lo cual sucede cuando pasan varios días. Por ejemplo, nuestro modelo nos dice que después de siete días infectará a $20^7 = 1.28$ *miles de millones* de computadoras ¡aproximadamente todas las computadoras en la Tierra! Pero a pesar de sus limitaciones, los modelos exponenciales explican por qué con frecuencia los nuevos virus infectan a miles de máquinas antes de que los expertos en antivirus tengan tiempo de reaccionar.

Fuente:

Haeussler, E. y Paul, R. (2007). Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida (8a.ed.). México: Pearson.

TEMA N° 1: FUNCIONES EXPONENCIALES

Existe una función que desempeña una función importante no sólo en matemática, sino también en finanzas, economía y otras áreas de estudio. Incluye una constante elevada a un exponente variable, como $f(x)=2^x$ A tales funciones les llamamos funciones exponenciales.

1. FUNCIONES EXPONENCIAL. DEFINICIÓN Y GRÁFICA

La función exponencial con base a se define para todos los números reales x por:

$f(x)=a^x$ Donde: $a>0; a\neq 0$

Ejemplos de funciones exponenciales.

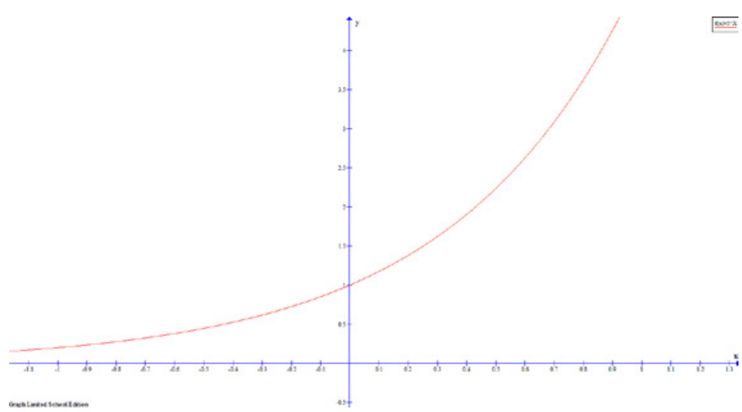
$f(x)=2^x$ — Base 2

$h(x)=3^x$ — Base 3

$q(x)=10^x$ — Base 10

$s(x)=(\frac{1}{2})^x$ — Base (1/2)

La gráfica de la función: $y = a^x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a>1$ es:



$y = a^x$
$a > 1$

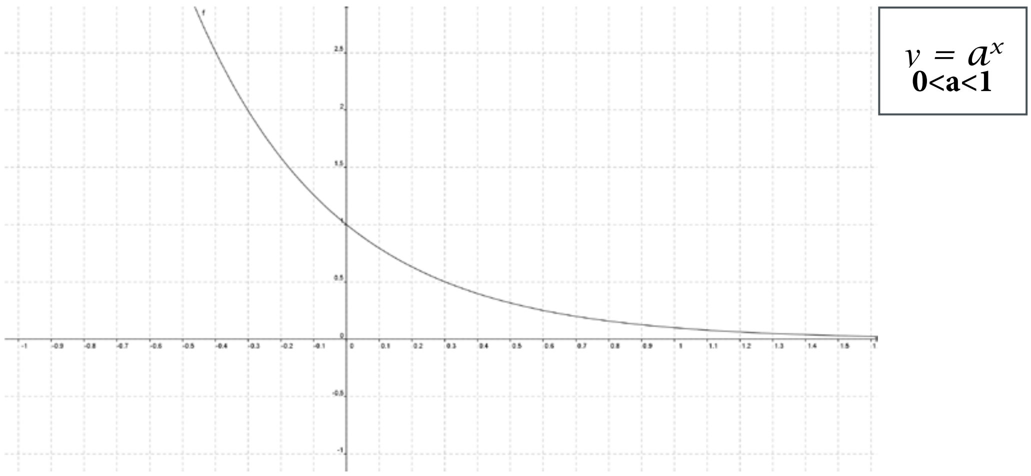
PROPIEDADES

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $\mathbb{R}^+$
- $a^0=1;\ a^1=a$ (0,1) y (1, a) pertenecen a la grafica
- Estrictamente creciente $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} / x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$
- Inyectiva $(a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2)$

- Continua en todo su dominio.
- Está acotada inferiormente, pero no superiormente.

$$\lim_{x\to-\infty}(a^x)=0 \Rightarrow y=0 \; es \; asíntota \; horizontal \;\; por \; la \; izquierda$$

La gráfica de la función: $y = a^x$ $\quad con \quad a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1 \;\; es$

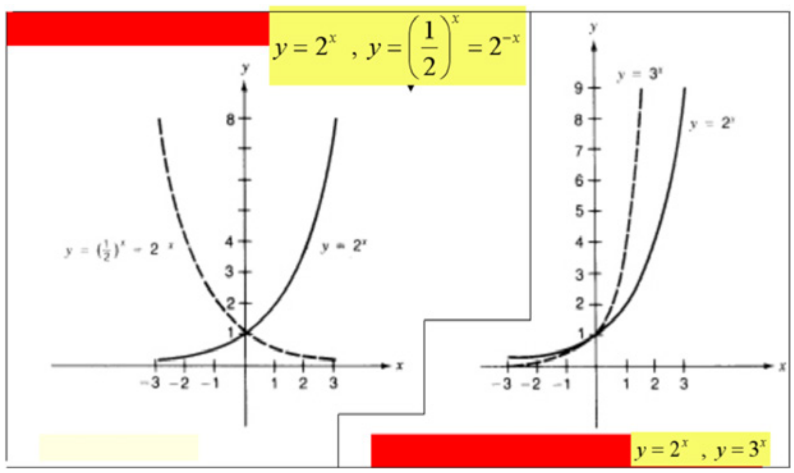


PROPIEDADES

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $\mathbb{R}^-$
- $a^0 = 1; \; a^1 = a$ $\qquad (0, 1)$ y $(1, a)$ pertenecen a la grafica
- Estrictamente decreciente $(\forall x_1, x_2 \in R \,/\, x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$
- Inyectiva $(a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2)$
- Continua en todo su dominio.
- Está acotada inferiormente, pero no superiormente.

$$\lim_{x\to+\infty}(a^x)=0 \Rightarrow y=0 \; es \; asíntota \; horizontal \;\; por \; la \; derecha$$

1.1. GRAFICA DE FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGISTICA Y SUS APLICACIONES



Gráfica de Funciones Exponenciales

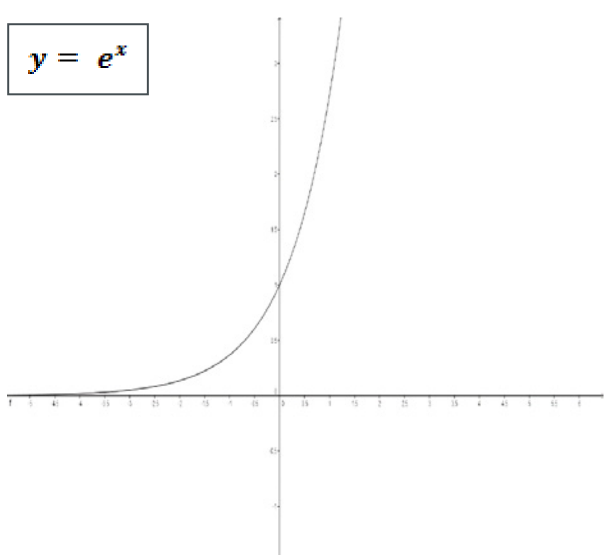
1.2. FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La función exponencial natural es la función exponencial de base e

El numero e es un número irracional cuyo valor es aproximadamente:

2, 7182 8182845904523536028747135266…

La gráfica de una función exponencial natural es:



El número e es un interesante número que tiene que ver con la naturaleza, la ciencia y la tecnología. A partir de e se determina la ecuación de la curva de un puente colgante, el tiempo de enfriamiento de un cuerpo, la antigüedad de la materia orgánica por desintegración del carbono 14, el crecimiento de la población y otras.

https://www.youtube.com/watch?v=CFCIXxIT9Wo

1.3 APLICACIONES

1. Determine la función que representa el número de bacterias que hay en una población, después de x horas, si se sabe que inicialmente había 30.000 bacterias, y que la población se cuadruplica cada una hora.

Solución:

Cantidad inicial = 30.000

Después de: 1 hora = $30\ 000 \cdot 4 = 10\ 000 \cdot 4^1 = 40\ 000$

2 horas = $30\ 000 \cdot 4 \cdot 4 = 30\ 000 \cdot 4^2 = 480\ 000$

3 horas = $30\ 000 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 30\ 000 \cdot 4^3 = 1\ 920\ 000$...

Después de x horas = $30\ 000 \cdot 4^x$

Por lo tanto, la función que representa el número de bacterias después de x horas es:

$$\boxed{f(x) = 30\ 000 \cdot 4^x}$$

2. INTERÉS COMPUESTO. CRECIMIENTO POBLACIONAL

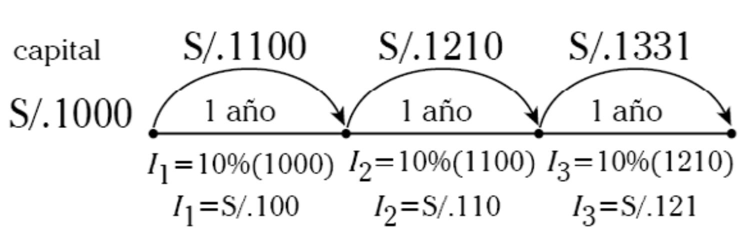
Es cuando el interés que genera el capital prestado, se acumula al capital en intervalos de tiempo especificados. Observamos el ejemplo pero en condiciones de un préstamo a interés compuesto o conocido también como un proceso de capitalización.

Ejemplo

Se presta un capital de S/.1000 durante 3 años a una tasa anual del 10% y capitalizable anualmente. Calcule el monto obtenido.

RESOLUCIÓN

Observación: Capitalizable anualmente significa que después de cada año el interés producido se acumula al capital, siendo el monto obtenido el nuevo capital para el siguiente año.



El interés total en los 3 años es:

$$\begin{array}{c}\text{Interés}\\ \text{compuesto}\end{array} = S/.100 + S/.110 + S/.121 = S/.331$$

Luego:

Monto=1000+331=S/.1331

En general:

$$M = (1 + r\%)^{n} \cdot C$$

Donde:

n nos indica el número de períodos de capitalización contenidos en el tiempo de imposición.

Nota

El período de capitalización determina las unidades de la tasa y tiempo que se debe utilizar necesariamente.

Hay que observar que ésta es una función exponencial con base (1+r%) Si la tasa de interés anual es r y si el interés se compone n veces por año, entonces en cada periodo la tasa de interés es $\frac{r}{n}$ y hay nt períodos en t años. Esto conduce a la siguiente fórmula para la cantidad después de t años.

INTERÉS COMPUESTO:

El interés compuesto se calcula mediante la fórmula:

$$M\ (t) = C(1 + \frac{r}{n})\ nt$$

Donde:

M (t)= cantidad después de t años.

C=Capital.

r= tasa de interés por año.

n=número de veces que el interés se compone por año.

t= número de años.

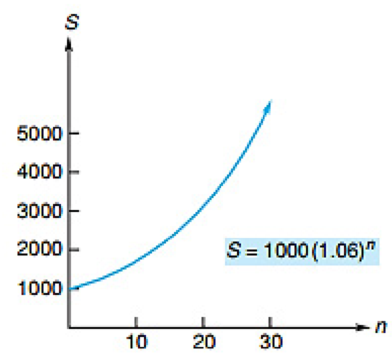
Ejemplo 1: Suponga que se invierten $1000 durante 10 años al 6% compuesto anualmente.

A. Encuentre el monto compuesto.

Resolución

Utilizamos con C=1000; r=0.06, n=1 y t=10

$M = 1000(1 + \frac{0.06}{1})^{10\times 1}$=1790.85



B. Encuentre el interés compuesto.

$I = 1790.85 - 1000 = 790.85$

Ejemplo 2: Calcular el interés compuesto de manera continua.

Calcule la cantidad después de tres años si se invierten $1000 a una tasa de interés de 12% por año, capitalizado de forma continua.

Solución

Datos del problema: **C** = 1000; **r** = 0.12 y **t** = 3

Se tiene la función de interés compuesto de manera continua:

$$A(t) = Ce^{rt}$$

luego calculamos: $A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = 1433.33$

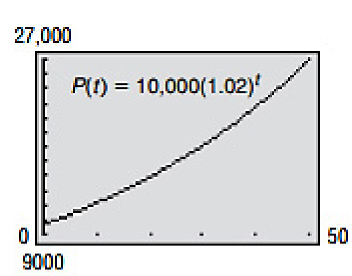
Por lo tanto la cantidad después de tres años es $ 1433.33

Ejemplo 3: Crecimiento Poblacional La población de una ciudad de 10000 habitantes crece a razón de 2% anual. Calcule la población dentro de 3 años.

Del estudio anterior: $P(t) = 10000\,(1{,}02)^t$

Para t=3 tenemos $P(3) = 10000(1.02)^3 = 10612$

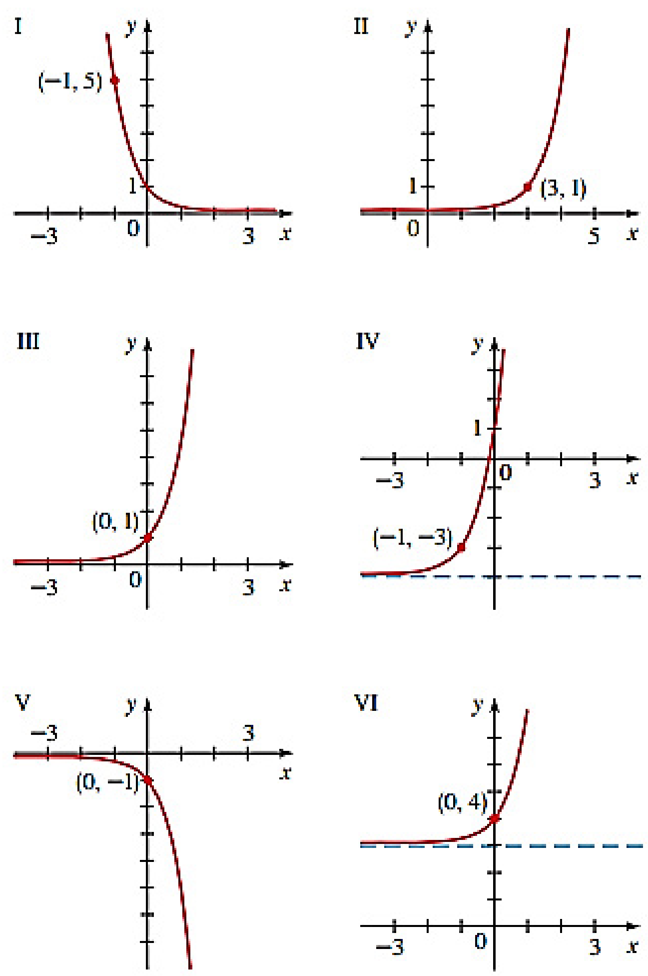
Por tanto, dentro de 3 años la población será de 10612 habitantes.



ACTIVIDAD FORMATIVA N° 1

Identifique a qué función exponencial corresponden las gráficas numeradas del I al VI.

1. $f(x) = 5^x$
2. $f(x) = 5^{-x}$
3. $f(x) = 5^{x-3}$
4. $f(x) = -5^x$
5. $f(x) = -5^x + 3$
6. $f(x) = 5^{x+1} - 4$



LECTURA SELECCIONADA Nº 1:

EL NÚMERO E

La constante matemática e es el único número real tal que el valor de su derivada (la pendiente de su línea tangente) en la función f(x) = ex en el punto x = 0 es exactamente 1. La función ex es también llamada función exponencial y su función inversa es el logaritmo natural o también llamado logaritmo en base e. El número e es uno de los números más importantes en la matemática, además de las identidades de la multiplicación y la suma del 0 y el 1, la unidad imaginaria i y π. El número e es llamado ocasionalmente número de Euler, debido al matemático suizo Leonhard Euler, o también constante de Neper, en honor al matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo al cálculo matemático. (e no debe ser confundido con y, la constante de Euler-Mascheroni, a la que a veces se hace referencia como constante de Euler El número e, base de los logaritmos naturales o neperianos, es sin duda el número más importante del campo del cálculo. Como e es un número trascendental, y por lo tanto es irracional, su valor no puede ser dado exactamente como un número finito o con decimales periódicos. Su valor aproximado por truncamiento es:

$$e \approx 2,718281828459045235 4...$$

Las primeras referencias a la constante fueron publicadas en 1618 en la tabla en un apéndice de un trabajo sobre logaritmos de John Napier. No obstante, esta tabla no contenía el valor de la constante, sino que era simplemente una lista de logaritmos naturales calculados a partir de ésta. Se asume que la tabla fue escrita por William Oughtred. El "descubrimiento" de la constante está acreditado a Jacob Bernoulli, quien intentó encontrar el valor de la siguiente expresión (cuyo resultado, de hecho es e):

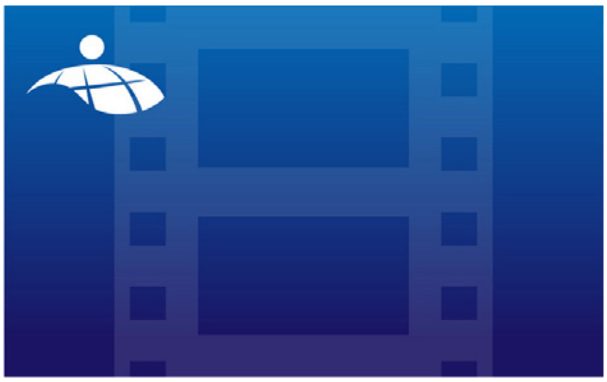
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

El primer uso conocido de la constante, representado por la letra b, fue en una carta de Gottfried Leibniz a Christiaan Huygens en 1690 y 1691. Leonhard Euler comenzó a utilizar la letra e para identificar la constante en 1727, y el primer uso de e en una publicación fue en Mechanica, de Euler, publicado en 1736. Mientras que en los años subsiguientes algunos investigadores usaron la letra c, e fue la más común, y finalmente se convirtió en la terminología usual. La definición más común es la siguiente: **e** es el único número real cuyo logaritmo natural es 1:

$$\ln e = 1$$

Lo que significa: $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$

VIDEOS



Video 10: Funciones exponenciales. Número e

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Funciones exponenciales. Número e
URL: https://www.youtube.com/watch?v=CFCIXxIT9Wo
Duración: 2:31 m
Autor(a): Explainers.tv
Expositor(a): Random Perez
Año: 2014
Licencia: YouTube estándar.

TEMA N° 2: FUNCIONES LOGARITMICAS.

1. DEFINICION DE LAS FUNCIONES LOGARÍTIMICAS.

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La función logarítmica con base a, denotada por:

$$\boxed{f(x) = \log_a x}$$

se define:

$$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Donde: a: base $0 < a \neq 1$

y: exponente

$x > 0$

Es decir que:

$$\boxed{\log_a \text{ es el exponente al cual debe elevarse la base } a \text{ para obtener } x}$$

Los siguientes ejemplos ilustran cómo intercambiar una ecuación de una de estas formas a la otra.

Ejemplos

Las formas logaritmo y exponencial son ecuaciones equivalentes si una es verdadera también lo será la otra. Por tanto podemos pasar de una forma a la otra como en los siguientes casos:

Forma Logaritmo	**Forma exponencial**
$\log_{10} 1\,000\,000 = 6$	$10^6 = 1\,000\,000$
$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_7 m = p$	$7^p = m$

LOGARITMO COMÚN (EN BASE 10)

$$\boxed{y = \log x \quad si\ y\ solo\ si: \ 10^y = x}$$

Ejemplos

a) $\log 1 = 0$ Porque: $10^0 = 1$

b) $\log 0{,}01 = -2$ Porque: $10^{-2} = 0{,}01$

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ Porque: $10^{1/2} = \sqrt{10}$

2. PROPIEDADES DE FUNCIONES LOGARITMICAS

1. $\log_a 1 = 0$	Se debe elevar a a la potencia 0 para obtener 1
2. $\log_a a = 1$	Se debe elevar a a la potencia 1 para obtener a
3. $\log_a a^x = x$	Se debe elevar a a la potencia x para obtener a^x
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la cual se debe elevar a para obtener x

Ejemplo

A continuación ilustramos las propiedades de los logaritmos cuando la base es 7.

$\log_7 1 = 0$	Propiedad 1	$\log_7 7 = 1$	Propiedad 2
$\log_7 7^9 = 9$	Propiedad 3	$7^{\log_7 14} = 14$	Propiedad 4

3. GRAFICA DE FUNCIONES LOGARITMICAS Y SUS APLICACIONES.

Vamos a graficar una función logaritmo trazando puntos, para lo cual tomaremos, como ejemplo el trazo de la función:

$$f(x) = \log_2 x$$

Elaboraremos una tabla de valores, escogiendo valores de x como potencias de 2 para encontrar fácilmente sus logaritmos. Luego, graficamos estos puntos y los unimos con una curva suave como en la figura:

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
2^2	2
2^3	3
2^4	4
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4

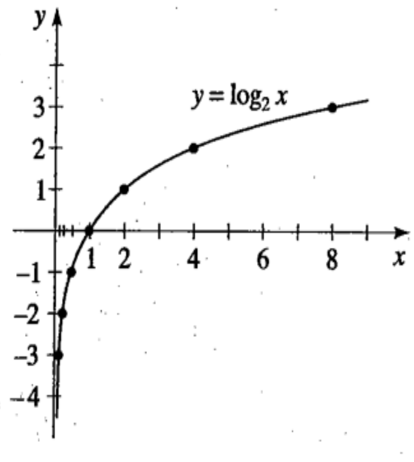
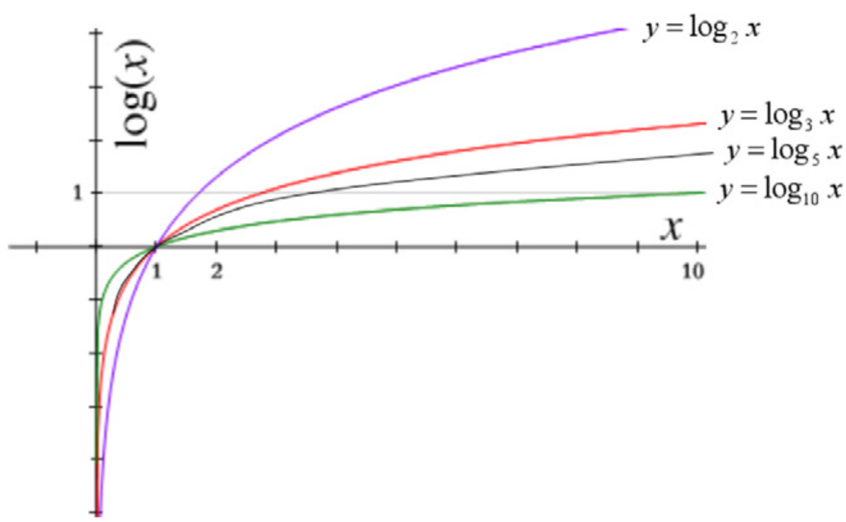


FIGURA 3

A continuación se muestra las gráficas de la familia de funciones logaritmo con base 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se han dibujado reflejando las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ en la recta $y = x$. También podemos graficar puntos como ayuda para trazar estas gráficas, como se ilustra en la figura:



LOGARITMO NATURAL (BASE *e*)

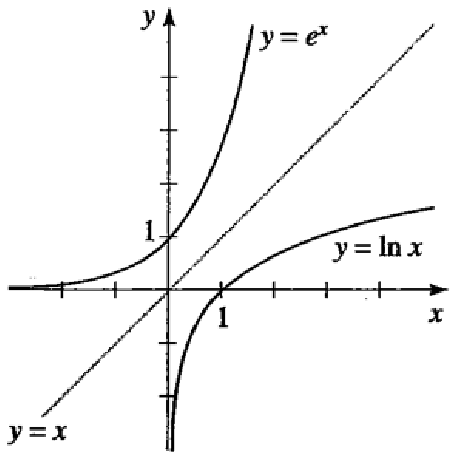
El logaritmo con base e se llama logaritmo natural y se denota por ln:

$$\boxed{ln x = \log_e x}$$

La función logaritmo natural $y = ln\, x$ es la función inversa de la función exponencial:

$$\boxed{ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x}$$

En la siguiente grafica se muestra lo descrito anteriormente:



A continuación se resolverá ecuaciones que involucran funciones exponencial o de logaritmo. Las técnicas a desarrollarse se utilizaran para la resolución de problemas de aplicación.

4. ECUACIONES EXPONENCIALES.

En una ecuación exponencial la variable se presenta en el exponente. Por ejemplo: $2^x = 7$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para encarar este problema tomamos el logaritmo de ambos lados y después usamos las leyes de los logaritmos para "despejar a x" del exponente:

$$2^x = 7$$

$$ln2^x = ln7$$ Tome ln en ambos lados

$$xln2 = ln7$$ "baje" el exponente

$$x = \frac{ln7}{ln2}$$ despeje x

$$\approx 2.807$$ use una calculadora

El método para resolver $2^x = 7$ es típico de los métodos que usamos para resolver todas las ecuaciones exponenciales, y se puede resumir en los tres pasos siguientes:

a) Aísle la expresión exponencial de un lado de la ecuación.

b) Tome logaritmo de ambos lados, y después utilice las leyes de los logaritmos para "bajar el exponente"

c) Despeje la variable.

Ejemplo:

Vamos a resolver la siguiente ecuación exponencial: $3^{x+2} = 7$ y lo expresaremos su respuesta a seis decimales.

$3^{x+2} = 7$

$log\,3^{x+2} = log7$ Tome ln en ambos lados

$(x+2)log3 = log7$ "baje" el exponente

$x = \frac{log7}{log3} - 2$ *despeje x*

≈ -0.228756 use una calculadora

Ejemplo

Ahora también resolvamos la siguiente ecuación exponencial: $e^{3-2x} = 4$

Puesto que la base del término exponencial es e, para resolver esta ecuación utilizaremos logaritmos naturales

$lne^{3-2x} = ln4$ Tome ln en ambos lados

$(3-2x)lne = ln4$ "baje" el exponente

$-2x = ln4 - 3$ *despeje x*

≈ 0.807 use una calculadora

5. ECUACIONES LOGARÍTMICAS.

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual está presente la variable logaritmo. Por ejemplo:

$$\boxed{\log_2(x+2) = 5}$$

Para despejar x escribimos la ecuación en forma exponencial:

$x + 2 = 2^5$ Forma exponencial

$x = 32 - 2 = 30$ Despeje x

Los procedimientos usados para resolver este problema simple son tipicos. Resumimos los pasos como sigue:

a) Aisle el término logaritmico en un lado de la ecuación; quiza sea necesario primero combinar los términos logaritmicos.

b) Escriba la ecuación en forma exponencial (o eleve la base tomando como exponente cada lado de la ecuación).

c) Despeje la variable.

Ejemplo

Resolvamos la siguiente ecuación: $4 + 3\log(2x) = 16$

Solución. Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permitirá escribir la ecuación en forma exponencial:

$4 + 3\log(2x) = 16$

$3\log(2x) = 12$ Reste 4

$\log(2x) = 4$ Divida entre 3

$2x = 10^4$ Forma exponencial

$x = 5000$

Ejemplo

Ahora resuelva la siguiente ecuación: $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$

Solución. Primero combinamos los términos lograrítmicoa usando las leyes de los logaritmos:

$\log(x+2)(x-1) = 1$ por propiedad

$(x+2)(x-1) = 10$ Forma exponencial

$x^2 + x - 2 = 10$ Expanda el lado izquierdo

$x^2 + x - 12 = 0$ Reste 10

$(x+4)(x-3) = 0$ Factorize

$x = -4 \quad o \quad x = 3$

Verificamos estas soluciones posibles en la ecuación original y determinamos que $x = -4$ no es una solución (porque los logaritmos de los números negativos no están definidos, sin embargo $x = 3$ es una solución.

https://es.khanacademy.org/math/algebra2/exponential_and_logarithmic_func

Funciones Logarítmicas

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 2

a) Relacione la función logaritmo dada con alguna de las gráficas identificadas como I – VI.

a) $f(x) = -lnx$

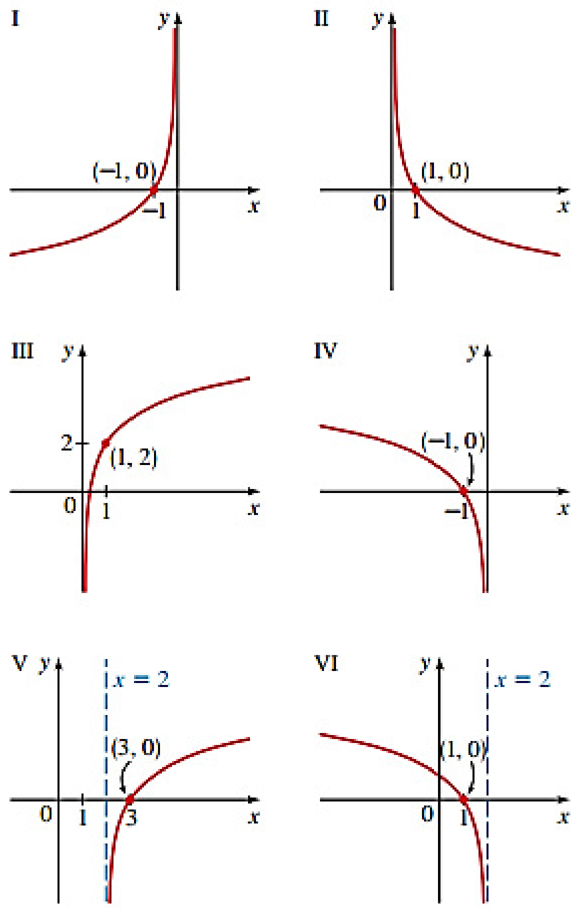
b) $f(x) = 2 + lnx$

c) $f(x) = ln(2 - x)$

a) $f(x) = ln(x - 2)$

b) $f(x) = ln(-x)$

c) $f(x) = -ln(-x)$



VIDEOS

Video 11: Funciones logarítmicas

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos correspon-den a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Funciones logarítmicas
URL: https://www.youtube.com/watch?v=cb7iMCuBsIs
Duración: 11:01 m
Autor(a): Educatina
Año: 2012
Licencia: YouTube estándar.

TEMA N° 3: APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

Muchos procesos que ocurren en la naturaleza, como el crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo, difusión de calor y muchos otros, se pueden modelar por medio de funciones exponenciales. Las funciones logarítmicas se emplean en modelos para la sonoridad del sonido, la intensidad de terremotos y muchos otros fenómenos. En esta sección se estudian los modelos exponencial y logarítmico.

1. MODELADO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

Otros ejemplos en donde se utilizan las funciones exponenciales y logarítmicas son los siguientes:

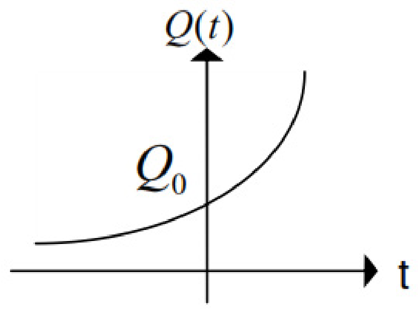
CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Se recuerda que el modelo matemático que representa el crecimiento exponencial, está dado de la forma siguiente:

$Q(t)$ crece exponencialmente si $Q(t) = Q_0 e^{kt}$

cuando $k > 0$ y Q_0 es valor inicial $Q(0)$

Al considerar las gráficas vistas anteriormente, nos damos cuenta que la gráfica de la función $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ es de la forma:



Entonces ahora resolvamos los siguientes problemas teniendo en cuenta lo descrito anteriormente:

A) PROYECCIÓN DE LA POBLACIÓN MUNDIAL

La población del mundo en el 2006 era de 5,700 millones, y la tasa de crecimiento relativa estimada es de 2% al año. Si la población sigue creciendo a esta tasa, ¿cuándo alcanzará 60,000 millones de personas?.

Solución: Como $Q(0) = 5{,}700$ millones, $k = 0.02$ y $Q(t) = 60{,}000$ millones de personas, entonces:

$5.7e^{0.02t} = 60$

$e^{0.02t} = \dfrac{60}{5.7}$

$ln(e^{0.02t}) = \ln 10.5263$

$0.02t = 2.3538$

$t = \dfrac{2.3538}{0.02}$

$t \approx 117.69$

Luego la población llegará a los 60,000 millones de personas aproximadamente en 117 años.

B) BACTERIAS EN UN CULTIVO

Un cultivo se inicia con 15,000 bacterias y su número se duplica cada 50 minutos. Obtenga:

I. Una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t.

II. Determine el tiempo de bacterias después de 1.5 horas.

III. ¿Después de cuántos minutos habrá 60,000 bacterias.?

IV. Trace la gráfica en el tiempo t.

Solución

1. Para determinar la fórmula del crecimiento de la población necesitamos obtener la tasa k. Para ello la fórmula con $Q_0 = 15{,}000$, $t = 50$ y $Q(t) = 30{,}000$ y posteriormente se despeja k.

   $15{,}000e^{k(50)} = 30{,}000$

   $e^{50k} = \dfrac{30{,}000}{15{,}000}$

   $ln(e^{50k}) = \ln 2$

   $50k = ln2$

   $k = \dfrac{\ln 2}{50}$

   $k = 0.01386$

Luego la fórmula del crecimiento de la población, ya que $k = 0.01386$, es:

$$Q(t) = 15{,}000 \cdot e^{0.01386t}$$

2. Utilizaremos la fórmula hallada en el inciso anterior, cuando t=90 minutos:

   $Q(90) = 15{,}000e^{0.01396\,(90)}$

   $Q(90) = 52{,}219.19$

Por lo tanto, el número de bacterias después de 90 minutos es aproximadamente 52219.

3. En este inciso utilizaremos la fórmula, cuando $Q(t)$=60,000 y se despeja t:

$$15{,}000e^{0.01386t)} = 60{,}000$$

$$e^{0.01386t} = \frac{60{,}000}{15{,}000}$$

$$ln(e^{0.01386t}) = \ln 4$$

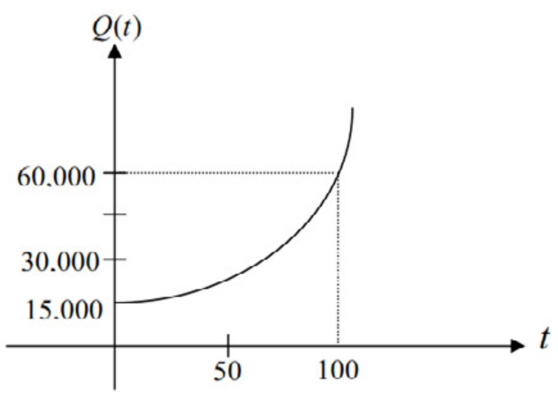
$$t = \frac{\ln 4}{0.01386}$$

$$t = 100.02$$

El número de bacterias será 60,000 en aproximadamente 100 minutos.

4. En la siguiente figura se muestra la grafica de:

$$Q(t) = 15{,}000e^{0.01386t}$$



https://www.youtube.com/watch?v=dIQv-dWbppo

Aplicaciones de las funciones logarítmicas

ACTIVIDAD FORMATIVA N° 3

1. Se proyecta que dentro de t años la población de cierto país será: $Q(t) = 45e^{0.03t}$ millones.

a) ¿Cuál es la población actual?

b) ¿Cuál será la población dentro de 20 años?

2. La cantidad que queda de una muestra de una sustancia radiactiva después de t años está dada por la función $Q(t) = Q_0 - e^{0.003t}$ después de 4500 años quedan 2,000 gramos de la sustancia. ¿Cuántos gramos había al principio?.

3. Una sustancia radioactiva se desintegra exponencialmente. Si al comienzo había 600 gramos de la sustancia y 60 años después hay 500 gramos. ¿Cuántos gramos habrá después de 200 años?.

VIDEOS

Video 12: Aplicación de la funciones logarítmicas

Este material de video ha sido seleccionado solo y únicamente con fines de estudio académico y todos sus derechos corresponden a sus autores en el ámbito local, regional e internacional.

Datos del Video seleccionado

Título o Tema: Aplicación de la funciones logarítmicas
URL: https://www.youtube.com/watch?v=dlQv-dWbppo
Duración: 8:13 m
Autor(a): La 2 (España)
Expositor(a): Guadalupe Castellano
Año: 2013
Licencia: YouTube estándar.

GLOSARIO DE LA UNIDAD IV

E

EXPONENCIAL, CRECIMIENTO

Proceso que se modela con una ecuación del tipo: $y = Me^{rt}$ donde M y r son constantes positivas, e es el número de Euler y t representa el tiempo. Dentro de ciertos límites, el crecimiento de una población presenta el crecimiento exponencial.

EXPONENCIAL, DECAIMIENTO

Proceso que se modela con una ecuación del tipo: $y = Me^{-rt}$ donde M y r son constantes positivas, e es el número de Euler y t representa el tiempo.

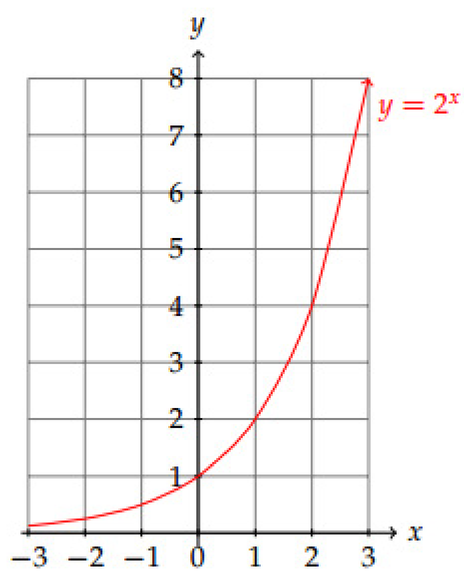
Por ejemplo, la radiactividad presenta decaimiento exponencial.

F

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Función de la forma $y = a(b)^{rx}$

La siguiente función es exponencial:



L

LOGARITMO

Exponente al cual debe elevarse la base para obtener como resultado un número dado.

Si $y = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$ entonces se define: $\log_a y = x$

Y se lee: el logaritmo del número y en la base a es igual a x.

Por ejemplo, dado que $2^3 = 8$ entonces, $\log_2 8 = 3$ y se lee *el logaritmo de 8 en base 2 es 3.*

LOGARITMO NATURAL

Logaritmo cuya base es el número de Euler $e = 2{,}7182818...$

El logaritmo natural del número $\boldsymbol{x}$ se denota por Inx y se entiende que es equivalente a escribir: $Inx = \log_e x$

LOGARITMO VULGAR

Logaritmo en base 10. El logaritmo vulgar del número $\boldsymbol{x}$ se denota por $\log x$ y se entiende que es equivalente a escribir: $\log x = \log_{10} x$

Es decir, cuando la base del logaritmo no s e específica, se entiende que es 10.

Al logaritmo vulgar también se le conoce como logaritmo común.

Por ejemplo, dado que $10000 = 10^4$, $\log(10000) = \log_{10}(10000) = 4$

BIBLIOGRAFIA DE LA UNIDAD IV

BÁSICA

- HAEUSSLER, E. Y PAUL, R.,(2007). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida* (8a.ed.). México: Pearson.
- Código biblioteca UC: 519/ H14

RECOMENDADA

- STEWART, J., REDLIN, L. Y WATSON, S., (2007).*Précalculo: Matemáticas para el cálculo*(5a. ed.). México: CengageLearning.
- Código biblioteca UC: 515 / S79
- DEMANA, F., WAITS, B., FOLEY, G. YKENNEDY,D.,(2007). *Precálculo: gráficas, numérico, algebraico* (7a ed.).México:Pearson Educación.
- Código biblioteca UC: 512.1/ D56
- LARSON, R. Y HOSTETLER, R., (2008).*Precálculo* (7a ed.). China:Reverté.
- Código biblioteca UC: 512.13/ L25 2008
- TAN,S., (2000). *Matemáticas para administración y Economía.* México: Thomson Editores.Código biblioteca UC: 519 / T19 2009
- PETERSON, J., (2001).*Matemáticas básicas: Algebra, trigonometría y geometría analítica* (3a. ed.). México: CECSA.
- ZILL,D. Y DEWAR,J., (2008).*Precálculo con avances de cálculo*(4a. ed.). Colombia: McGraw Hill.

AUTOEVALUACION DE LA UNIDAD IV

A continuación se presenta un conjunto de problemas para ser desarrollados en forma clara. Puedes uitlizar calculadoras y formularios.

1. Grafique la siguiente función exponencial (Da a conocer las intersecciones con los ejes) (4 puntos) $f(x) = 2^{x+3} - 3$

2. Suponga que se invierten 12000 dólares en una cuenta de ahorros que paga 5,6% de interés Anual. (2 puntos cada ítem).

   A) Escriba una fórmula para la cantidad en la cuenta después de t anos si el interés se compone cada mes.

   B) ¿Cuánto tiempo tarda la cantidad en la cuenta en crecer a 20000 dólares?.

3. La población de aves en un pueblo pequeño crece de manera exponencial. En el año 2000, el pueblo tenia 200 aves y la tasa de crecimiento relativa era de 5% anual. (2 puntos cada ítem).

   A) Encuentre una función que modele la población de aves en el tiempo t en la forma

   $n(t) = n_o e^{rt}$

   B) Calcule el número de años requerido para que la población de aves llegue a 10000.

4. Resuelva $4e^{x+2} = 20$, (4 puntos)

5. Combine $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1)$ en un solo logaritmo. (4 puntos)

UNIVERSIDAD CONTINENTAL | MODALIDAD VIRTUAL

INNOVADOR INTERACTIVO INTEGRAL 3i

Este manual autoformativo es el material didáctico más importante de la presente Asignatura, desarrollada para la modalidad virtual. Elaborado por el docente, orienta y facilita el autoaprendizaje de los contenidos y el desarrollo de las actividades propuestas en el sílabo.

Los demás recursos educativos del aula virtual complementan y se derivan del manual. Los contenidos multimedia ofrecidos utilizando videos, presentaciones, audios, clases interactivas, se corresponden a los contenidos del presente manual.

La modalidad te permite estudiar desde el lugar donde se encuentres y a la hora que más le convenga. Basta conectarte a la Internet, ingresar al campus virtual donde encontrarás todos tus servicios: aulas, videoclases, presentaciones animadas, biblioteca de recursos, muro y las tareas, siempre acompañado de tus docentes y amigos.

El modelo educativo de la universidad continental virtual es innovador, interactivo e integral, conjugando el conocimiento, la investigación y la innovación. Su estructura, organización y funcionamiento están de acuerdo a los estándares internacionales. Es innovador, porque desarrolla las mejores prácticas del e-learning universitario global; interactivo, porque proporciona recursos para la comunicación y colaboración síncrona y asíncrona con docentes y estudiantes; e integral, pues articula contenidos, medios y recursos para el aprendizaje permanente y en espacios Flexibles.

MANUALES **AUTOFORMATIVOS**